Лабораторная работа № 7
Исследование свойств ортогональности гармонических сигналов

Цель работы

Экспериментальное исследование условий, при которых обеспечивается ортогональность гармонических сигналов.

Краткие теоретические сведения

Аналогия между сигналами и векторами. Любая задача легче воспринимается, если её можно связать с каким-либо известным явлением. При математическом описании сигналы удобно рассматривать как векторы или точки в некотором функциональном пространстве – пространстве сигналов.

Электрические сигналы сложной формы по своей физической природе далеко не всегда сходны с привычными нам представлениями векторов как направленных отрезков. Тем не менее практический интерес имеет обобщение операций над векторами на сигналы (функции), описывающие различные колебания. Дело в том, что среди различных математических приёмов, используемых при исследовании электрических цепей и сигналов, наиболее широко применяется представление произвольной функции в виде суммы более простых ("элементарных") функций. Такой подход лежит в основе принципа независимости действия (суперпозиции) при изучении преобразований сигналов в линейных электрических цепях. Наглядные геометрические представления, связанные с отображением функций в качестве векторов пространства сигналов, помогают часто уяснить физическую сущность процессов формирования, передачи и разделения сигналов, синтеза оптимальных сигналов и устройств обработки сигналов при наличии помех.

Задача разложения сигнала сложной формы на простейшие составляющие сходна с разложением обычного вектора x трёхмерного пространства на его составляющие по координатному базису единичных ортогональных векторов i, j, k (рис. 7.1). Такое представление можно записать как

$$x = x_1 i + x_2 j + x_3 k \qquad (7.1)$$

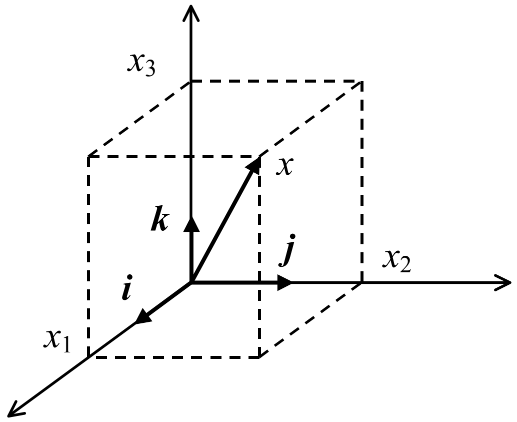

Рис. 7.1. Представление вектора x в трехмерной ортогональной системе координат

Составляющими вектора x по базису (i, j, k) будут векторы $x_1 i$, $x_2 j$, $x_3 k$. Коэффициенты x_1, x_2, x_3 представляют собой проекции вектора x на координатные оси i, j, k и называются координатами вектора x. Иначе говоря, вектор x в трёхмерном пространстве полностью определяется совокупностью его координат $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Чтобы перейти к обобщению понятия вектора трёхмерного пространства для случая n-мерного пространства, обратимся к примеру. Некоторое приближённое представление о функции (сигнале) $x(t)$ можно составить по её отображению последовательностью прямоугольных импульсов, имеющих на интервалах $i\Delta$ значения $x(i\Delta)$ (рис. 7.2).

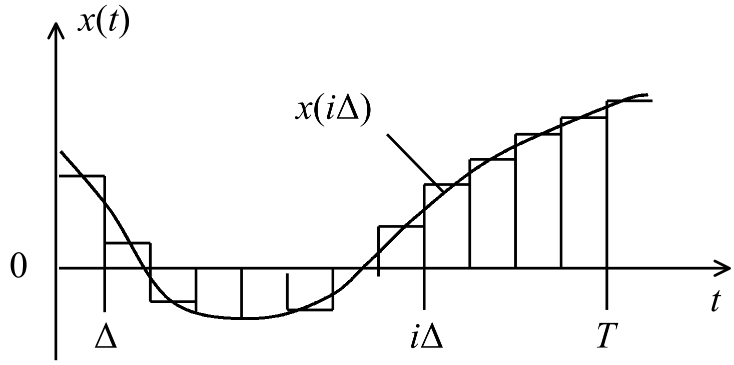

Рис. 7.2. Отображение непрерывной функции последовательностью прямоугольных импульсов

Если теперь условно представить функцию $x(t)$ на интервале (0; T) «вектором», то для его определения потребуется $n = T/\Delta$ координат $x_i = x(i\Delta)$. Это означает, что функцию $x(t)$ по аналогии с (7.1) можно представить в виде суммы

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \psi_i(t), \qquad (7.2)$$

где $\psi_i(t) = \psi(t - i\Delta)$ – элементарные базисные функции;

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0;\Delta]; \\ 0, & t \notin [0;\Delta]; \end{cases} \qquad \frac{1}{\Delta}\int_0^{\Delta} \psi^2(t)dt = 1.$$

Вектор x**,** соответствующий функции $x(t)$, в n-мерном пространстве единичных ортов ψ_i будет полностью определяться его координатами $x=(X_1, X_2, \ldots, X_{N-1})$. Таким образом, сигнал $x(i)$ произвольной формы представляется суммой n простейших элементарных сигналов, в данном случае в виде импульсов прямоугольной формы. Слово «пространство» используется здесь, чтобы придать множеству сигналов геометрический смысл и тем самым наглядность. Наиболее простой и в то же время физически достаточно содержательной является трактовка сигналов как элементов нормированного линейного метрического пространства.

Основные определения, относящиеся к функциональным пространствам Евклида, Гильберта, Хэмминга. Линейным или векторным называется пространство сигналов, для элементов которого выполняются правила сложения и умножения на любое число из некоторого множества (называемое множеством скаляров).

Сложение векторов производится покоординатно, т.е. суммой векторов x (функции $x(t)$) и y (функции $y(t)$) называется вектор $x + y = (X_0+Y_0,\ X_1+Y_1, \ldots, X_{N-1}+Y_{N-1})$, принадлежащий данному пространству, а произведение λx вектора x на число λ даёт вектор $\lambda x = (\lambda X_1, \lambda X_2, \ldots, \lambda X_{N-1})$, также принадлежащий данному пространству. В линейном пространстве существует нулевой элемент 0, такой, что $x + 0 = x$ и каждому элементу x соответствует противоположный элемент $-x$, так что $x + (-x) = 0$. Вектор, образованный суммированием n линейно независимых (базисных) векторов y со скалярными коэффициентами x, называется их линейной комбинацией.

Множество векторов $\{\psi_i\}$ называется линейно независимым (базисом), если условие

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i \psi_i = 0 \qquad (7.3)$$

выполняется лишь тогда, когда все x_i=0. Иначе говоря, линейно независимым называется множество $\{y_i\}$, для которого ни одна из его компонент не может быть образована линейной комбинацией других.

Размерность линейного пространства определяется числом любых линейно независимых базисных векторов $\{y\}$, образующих это пространство. Линейно независимые векторы $\{\psi_i\}$ можно рассматривать как координатные оси пространства.

Метрическим называется линейное пространство, в котором определено расстояние между элементами (векторами) пространства (метрика), т.е. каждой паре элементов, скажем, x и y может быть поставлено в соответствие некоторое вещественное неотрицательное число $d(x, y)$ и способ, в соответствии с которым находится это число. Расстояние удовлетворяет следующим правилам:

1. $d(x, y) = 0$, если $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$;
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

где x, y, z – элементы (точки) пространства. Смысл первых двух условий очевиден. Третье условие называют неравенством треугольника: длина стороны треугольника меньше (или равна) суммы длин двух других сторон.

Нормированные пространства. Среди линейных метрических пространств важное место занимают нормированные пространства. Этот вид пространства определяется заданием нормы $||x||$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

1. $||x|| \geq 0$;
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$;
3. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Первая аксиома устанавливает, что норма есть положительное вещественное число, равное нулю только для нулевого вектора; во второй аксиоме λ – любое число (скаляр); третья аксиома – аксиома треугольника.

Начнём с перечисления терминов и определений, относящихся к n-мерному вещественному евклидову пространству R_n. Любой вектор x в этом пространстве определяется совокупностью его координат: $x=(X_1, X_2, \ldots, X_{N-1})$.

Совокупность n линейно независимых векторов образует n-мерное евклидово пространство, обозначаемое R_n. Пространство R_n можно определить как множество точек, представленных концами векторов, для которых норма $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2}$.

Как видим, норма есть обобщение длины вектора в двухмерном и трёхмерном пространстве. Расстояние между двумя векторами x и y определяется как норма разности векторов:

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}(x_i-y_i)^2}.$$

Для пространства Евклида R_n можно ввести понятие скалярного произведения двух векторов x и y:

$$(x,y)=\sum_{i=0}^{n-1}x_i y_i=\|x\|\cdot\|y\|\cos\varphi, \qquad (7.4)$$

где φ – угол между двумя векторами. Для проекций x на y и, наоборот, y на x имеем

$$\|x\|\cos\varphi=\frac{(x,y)}{\|y\|}, \qquad \|y\|\cos\varphi=\frac{(x,y)}{\|x\|}.$$

Координаты вектора представляют собой проекции вектора на координатные оси, аналогично (7.1). Из соотношения (7.4) вытекает очевидное неравенство

$$\|(x,y)\|\le\|x\|\cdot\|y\|, \qquad (7.5)$$

известное в литературе как неравенство Буняковского-Шварца. Знак равенства имеет место лишь тогда, когда

$$y=kx \qquad (7.6)$$

(k – скаляр), т.е. когда векторы x и y коллинеарны. Для соответствующих сигналов $x(t)$ и $y(t)$ это означает, что они совпадают по форме $y(t) = kx(t)$. Квадрат выше определённой нормы вектора x можно найти как скалярное произведение вектора на самого себя:

$$\|x\|^2=(x,x).$$

При $n\to\infty$ пространство R_n переходит в бесконечномерное пространство Гильберта, обозначаемое L_2. Гильбертовым пространством является, в частности, пространство всех непрерывных функций аргумента t заданных на интервале (0; T) котором скалярное произведение определено соотношением

$$(x,y)=\int_0^T x(t)y(t)dt, \qquad (7.7)$$

а квадрат нормы

$$\|x\|^2=\int_0^T x(t)x(t)dt=\int_0^T x^2(t)dt. \qquad (7.8)$$

Норма (7.8) имеет не только геометрический, но и отчётливый физический смысл. Так, если сигнал $x(t)$ – вещественный электрический ток в единичном сопротивлении 1 Ом, то квадрат нормы

$$\|x\|^2 = \int_0^T x^2(t)dt < \infty$$

определяет энергию сигнала. Элементы гильбертова пространства L_2 характеризуются интегрируемым квадратом, т.е. если элементы этого пространства – вещественные сигналы $x(t)$, определенные на интервале $(0; T)$, то выполняется условие

$$E_x = \int_0^T x^2(t)dt < \infty. \tag{7.9}$$

Гильбертово пространство обозначается при этом $L_2(T)$. При $T\to\infty$ получаем пространство $L_2(\infty)$. Для некоторых сигналов (функций) пространства $L_2(\infty)$ условие (7.9) при $T\to\infty$ может не выполняться, но выполняется условие

$$P_x = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt < \infty. \tag{7.10}$$

В этом случае можно вместо (7.7) ввести скалярное произведение с размерностью мощности (для токов и напряжений на единичном сопротивлении)

$$\left(x, y\right)_P = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t)dt. \tag{7.11}$$

Квадрат нормы вектора x в этом случае

$$\|x\|_P^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt = P_x. \tag{7.12}$$

При выполнении условия (7.10) в пространстве $L_2(\infty)$ определены и соотношения (7.11) и (7.12) при $T\to\infty$.

В дальнейшем, говоря о функции с интегрируемым квадратом в пространстве $L_2(\infty)$, имеем в виду выполнение условия (7.9) или условия (7.10) при $T\to\infty$. Квадрат расстояния между двумя векторами в вещественном пространстве $L_2(T)$ определяется соотношением

$$d^2\left(x, y\right) = \|x - y\|^2 = \int_0^T \left(x(t) - y(t)\right)^2 dt \tag{7.13}$$

или

$$d^2\left(x,y\right)=\left\|x-y\right\|_P^2=\frac{1}{T}\int_0^T\left(x(t)-y(t)\right)^2dt. \qquad (7.14)$$

Формулу (7.14) можно использовать и при $T\to\infty$ для сигналов с конечной средней мощностью.

Пространство L_2 представляет собой естественное обобщение пространства R_n, получаемое путём перехода от дискретизированной функции к функции непрерывного аргумента. В курсе ТЭС пространство L_2 имеет особое значение, ибо оно позволяет применить общие геометрические представления к сообщениям, сигналам и помехам, определённые как функции непрерывного аргумента. Устремляя в (7.3) $n\to\infty$, получаем представление непрерывной функции $x(t)$ в пространстве Гильберта:

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty}x_i\psi(t). \qquad (7.15)$$

Важным понятием в пространствах Евклида, Гильберта и Хэмминга является ортогональность векторов. Два вектора x и y ортогональны, если

$$(x, y)=0.$$

Легко показать, что если векторы ψ_i и ψ_j при $i\neq j$ взаимно ортогональны, то они также линейно независимы. Поэтому совокупность ортогональных векторов можно использовать в качестве базиса линейных пространств.

Краткая характеристика исследуемых цепей и сигналов

В работе используется универсальный лабораторный стенд со сменным блоком «МОДУЛЯТОР – ДЕМОДУЛЯТОР» (рис. 7.3). В данной работе используется только часть схемы демодулятора, а именно блоки перемножителя и интегратора, которые вычисляют скалярное произведение сигналов, подаваемых на входы перемножителя за время T=512 мкс (длительность символа).

$$\left(s,s_0\right)=\int_0^T s\left(t\right)s_0\left(t\right)dt$$

Здесь $s(t)$ – исследуемый сигнал на входе демодулятора, а $s_0(t)$ – эталонный сигнал, соответствующий символу "0" при выбранном виде модуляции. Оценка ортогональности производится по выходному сигналу интегратора в момент окончания символа. При полной ортогональности исследуемого и эталонного сигналов на выходе интегратора сигнал отсутствует.

В качестве исследуемых сигналов $s(t)$ используются гармонические сигналы с разными частотами, а также их смесь. Эталонные сигналы s_0 и s_1, подаваемые на перемножители демодулятора, зависят от положения переключателя ВИД МОДУЛЯЦИИ, расположенного над обозначением МОДУЛЯТОРА. Для ЧМ эти сигналы соответствуют: s_0 (для символа "0") – гармоническому сигналу с частотой f_1=15,625 кГц, а s_1 (для символа "1") f_2=23,43 кГц. Для АМ $s_0(t)$=0, а $s_1(t)$ – такой же сигнал, как и при ЧМ. Источниками исследуемых сигналов s_0 и s_1 являются гнезда, расположенные ниже обозначения МОДУЛЯТОРА.

В качестве измерительных приборов используются: встроенный звуковой генератор (ЗГ), встроенный вольтметр переменного напряжения и двухлучевой осциллограф.

Лабораторное задание

Исследовать ортогональность гармонических сигналов с различными частотными и фазовыми соотношениями.

Методические указания

1. Установить переключатель вида модуляции в положение ЧМ. Подключить сигнал s_0 с соответствующего выхода МОДУЛЯТОРА на вход ДЕМОДУЛЯТОРА (рис. 7.3)

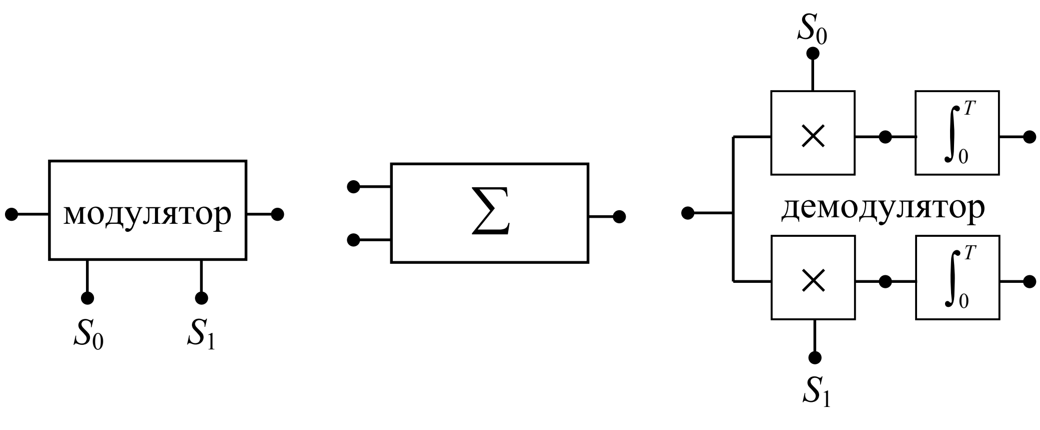

Рис. 7.3. Схема для измерения скалярного произведения сигналов

Зарисовать осциллограммы:

- на входе ДЕМОДУЛЯТОРА. Отрегулировать масштаб изображения по оси времени так, чтобы на экране укладывалось 10÷12 периодов сигнала, и в дальнейшем масштаб не менять;
- на выходах перемножителей верхней и нижней ветвей ДЕМОДУЛЯТОРА – в одном масштабе по вертикальной оси;
- на выходах интеграторов обоих ветвей (также в одном масштабе).

2. По последним осциллограммам оценить скалярные произведения сигналов (в делениях по вертикали относительно нуля в момент окончания символа) для сигналов:

- $s_0(t)$ и $s_0(t)$;
- $s_0(t)$ и $s_1(t)$.

Этот момент легко определить по вертикальному скачку на осциллограмме верхнего интегратора. Для определения положения нуля напряжения на осциллограмме (т. е. положение оси времени) следует закоротить вход осциллографа.

3. Повторить п. 1 для сигнала $s_1(t)$ на входе ДЕМОДУЛЯТОРА, фиксируя только осциллограммы на выходах интеграторов.

Оценить скалярные произведения сигналов:

- $s_1(t)$ и $s_0(t)$;
- $s_1(t)$ и $s_1(t)$.

4. Подать на вход ДЕМОДУЛЯТОРА сумму сигналов $s_0(t) + s_1(t)$, используя сумматор стенда. Оценить скалярные произведения сигналов:

- $(s_0 + s_1)$ и s_0;
- $(s_0 + s_1)$ и s_1.

Поочередно отключая один из входных сигналов сумматора, зафиксировать в отчете изменения в сигналах на выходах интеграторов.

5. Установить вид модуляции – АМ. При этом работает только нижняя ветвь ДЕМОДУЛЯТОРА, так как $s_0(t)$=0. Заменить сигнал s_0 на входе сумматора шумовым сигналом $n(t)$ от генератора шума (ГШ) в блоке ИСТОЧНИКИ, а $s_1(t)$ сохранить на втором входе сумматора. Регулятором выхода ГШ установить на выходе сумматора отношение с/ш ≈1 (см. п. 2.4 в работе № 8). Наблюдая осциллограммы на выходе нижнего интегратора, оценить скалярное произведение сигналов:

5.1. $s_1(t)+n(t)$ и $s_1(t)$; отключая источник шума от входа сумматора, оценить влияние шума на величину скалярного произведения;

5.2. $n(t)$ и $s_1(t)$; для этого отключить от входа сумматора $s_1(t)$.

6. Сохраняя прежний режим работы МОДУЛЯТОРА (АМ), подать от встроенного ЗГ гармонический сигнал с частотой 23,43 кГц и напряжением около 1,5 В на вход ДЕМОДУЛЯТОРА. Подстраивая частоту ЗГ, добиться максимального отклика нижнего интегратора. Попытаться «остановить» осциллограмму более тщательной установкой частоты ЗГ. Далее, не перестраивая ЗГ, примерно в течение минуты наблюдать за величиной максимума отклика интегратора, после чего повторить измерение. Вновь подстроить ЗГ, добиваясь максимума. Объяснить причину изменения скалярного произведения двух гармонических сигналов, полученных от разных генераторов.

7. Сохраняя условия п. 6, перестраивать ЗГ в пределах 15÷35 кГц с шагом в 5 кГц, фиксируя в табл. 7.1 величину максимума отклика интегратора в зависимости от частоты.

Таблица 7.1

Величина скалярного произведения сигналов
в зависимости от сдвига частот

$f_{\text{ЗГ}}$	кГц	15	…	...	…	35
$U_{\max\ \text{интегр.}}$	дел					

8. Установить вид модуляции – ФМ. Подать сигнал s_0 от нижнего выхода МОДУЛЯТОРА на вход ДЕМОДУЛЯТОРА. Входы двухлучевого осциллографа подключить к выходам интеграторов. Зафиксировать осциллограммы на выходах интеграторов, оценив величины и знаки (полярности) скалярных произведений сигналов:

- $s_0(t)$ и $s_1(t)$;
- $s_0(t)$ и $s_0(t)$.

Содержание отчета

1. Отчет должен содержать результаты исследований по всем пунктам, выводы и график по данным таблицы 7.1.

2. В каждом пункте отчета обязательно отметить, чем отличались (либо не отличались) сигналы - сомножители скалярных произведений.

Рекомендуемая литература

[3] с. 54÷66; [4] с. 30÷36; [5] с. 23 ÷34; [6] с. 26÷30.

Контрольные вопросы

1. Какие способы представления сигналов Вам известны?
2. С какой целью введено понятие многомерного пространства?
3. Какое пространство называют
- линейным;
- метрическим;
- евклидовым?

4. Каков смысл понятий «норма» и «расстояние» в применении к сигналам?
5. Какой смысл имеет понятие «скалярное произведение» в применении к сигналам?
6. От чего зависит угол между векторами, отображающими сигналы в многомерном пространстве?
7. Как Вы представляете себе ортогональные сигналы (приведите несколько примеров).
8. От каких параметров зависит скалярное произведение гармонических сигналов?
9. Какую роль может играть начальная фаза одного из гармонических сигналов в оценке их скалярного произведения?
10. Какую роль в оценке ортогональности сигналов играет время интегрирования (T)?
11. Как с помощью понятия «расстояние» можно оценить помехоустойчивость системы связи?