МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Южно-Уральский государственный университет
Кафедра “Теоретические основы электротехники”

621. 3 (07)

В. Н. Непопалов

Расчет линейных электрических цепей постоянного тока

Методическое руководство
по самостоятельной работе студентов

Челябинск
2001

УДК 621.3.011(075.8)

Непопалов В. Н. Расчет линейных электрических цепей постоянного тока: Методическое руководство по самостоятельной работе студентов. – 30 с.

В руководстве поясняются методы расчета линейных электрических цепей постоянного тока. Руководство предназначено в помощь студентам при выполнении и защите семестрового контрольного задания №1 по курсу «Основы электротехники».

Ил. 32, табл. 2.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Метод эквивалентных преобразований 4
1.1. Общие сведения 4
1.2. Решение типовых задач 5
1.3. Контрольные вопросы и задачи 12
2. Метод узловых напряжений 13
2.1. Общие сведения 13
2.2. Решение типовых задач 14
3.2. Контрольные вопросы и задачи 23
3. Топологические методы формирования математической модели электрической цепи 24
3. 1. Общие сведения 24
3. 2. Решение типовых задач 27

1. Метод эквивалентных преобразований

1.1. Общие сведения

Метод эквивалентных преобразований основан на замене двухполюсника одного вида на двухполюсник другого вида.

Двухполюсники на рис. 1.1 будут эквивалентными, если

$$R_{эк} = R_1 + R_2 + \ldots + R_n.$$

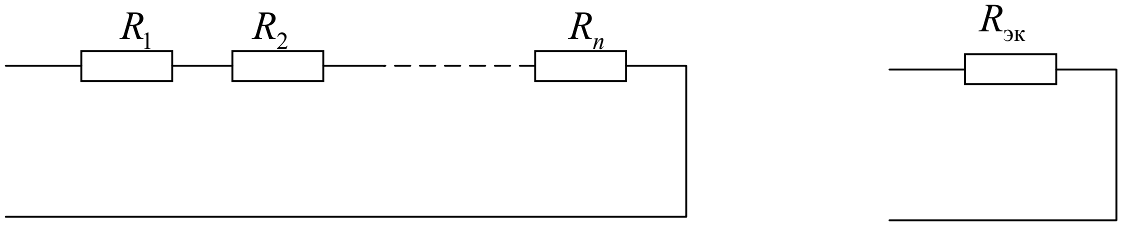

Рис. 1.1

Эквивалентность преобразования двухполюсников на рис. 1.2 определяет отношение

$$\frac{1}{R_{эк}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}.$$

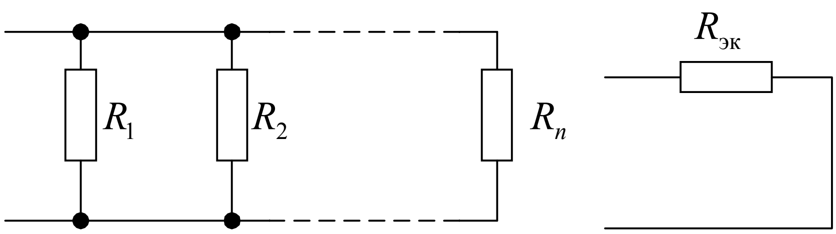

Рис. 1.2

В случае $n = 2$

$$\frac{1}{R_{эк}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

откуда

$$R_{эк} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

При решение задач часто используется преобразование треугольник–звезда (рис. 1.3).

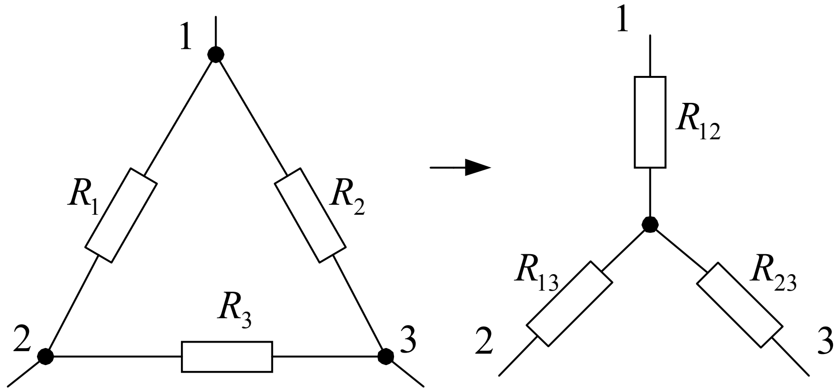

Рис. 1.3

Формулы эквивалентных преобразований имеют вид

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{D},$$

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{D},$$

$$R_{13} = \frac{R_1 R_3}{D},$$

где $D = R_1 + R_2 + R_3$.

Двухполюсники, в которых есть источники э. д. с. и (или) тока, называются активными (рис. 1.4).

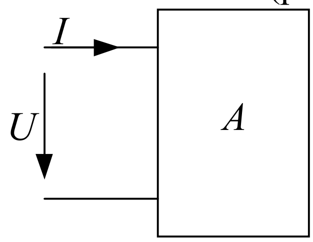

Рис. 1.4

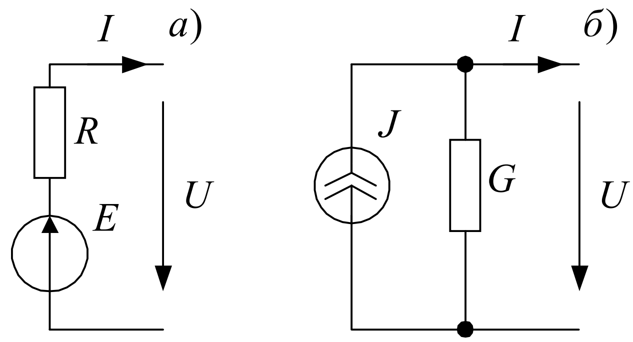

Рис. 1.5

Двухполюсники на рис. 1.5 эквивалентны, если имеют одинаковые внешние характеристики $U(I)$.

Для двухполюсника по схеме рис. 3, *а* имеем

$$U = E - RI\,.$$

Внешняя характеристика двухполюсника по схеме рис. 3, *б* определится из уравнения

$$-J + I + GU = 0\,,$$

откуда

$$U = \frac{J}{G} - \frac{1}{G} I\,.$$

Двухполюсники эквивалентны, если

$$E = \frac{J}{G};\; R = \frac{1}{G}.$$

1.2. Решение типовых задач

Задача 1.1

Найти токи в ветвях и напряжение U_{ab} в цепи по схеме рис. 1.6.

Напряжение $U = 75$ В. Параметры цепи: $R_1 = 50$ Ом; $R_{21} = 20$ Ом; $R_{22} = 30$ Ом; $R_{31} = 30$ Ом; $R_{32} = 20$ Ом.

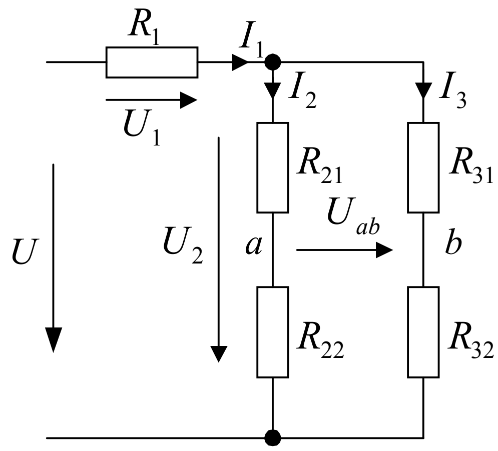

Рис. 1.6

Решение

Определяем положительные направления токов ветвей (рис. 1.6).

В ветвях с токами I_2 и I_3 резисторы R_{21}, R_{22} и R_{31}, R_{32} соединены последовательно.

Следовательно,

$$R_2 = R_{21} + R_{22} = 50\ \text{Ом};$$
$$R_3 = R_{31} + R_{32} = 50\ \text{Ом}.$$

Участки R_2, R_3 соединены параллельно, поэтому

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{50 \cdot 50}{50 + 50} = 25 \text{ Ом}.$$

Электрическую цепь, состоящую из двух последовательно соединенных резисторов, называют делителем напряжения.

Рассчитываем делитель напряжения R_1, R_{23}.

Токи и напряжения делителя определяются по выражениям:

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_{23}} = \frac{75}{50 + 25} = 1 \text{ А};$$

$$U_1 = I_1 R_1 = 1 \cdot 50 = 50 \text{ В};$$

$$U_2 = I_1 R_{23} = 1 \cdot 25 = 25 \text{ В};$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2} = \frac{25}{50} = 0{,}5 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_2}{R_3} = \frac{25}{50} = 0{,}5 \text{ А}.$$

Напряжение U_{ab} находим по второму закону Кирхгофа

$$U_{ab} = I_2 R_{22} - I_3 R_{32}.$$

Получаем

$$U_{ab} = 0{,}5 \cdot 30 - 0{,}5 \cdot 20 = 5 \text{ В}.$$

Задача 1.2

Найти ток в ветви $a - b$ цепи по схеме рис. 1.7. Параметры цепи: R_1 = 47 Ом; R_2 = 75 Ом; R_3 =33 Ом; R_4 = 25 Ом; R_5 = 40 Ом. Напряжение U = 100 В.

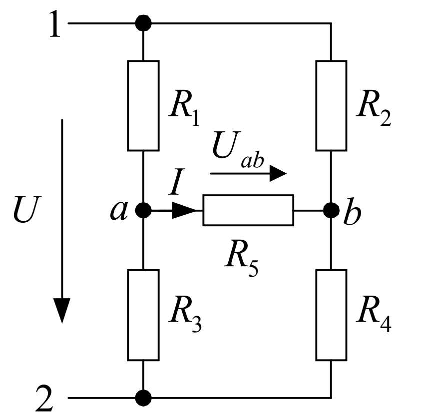

Рис. 1.7

Решение

Определяем положительное направление тока I ветви $a - b$. Преобразуем треугольник из резисторов R_3, R_4, R_5 в звезду R_{35}, R_{45}, R_{34}.

По формулам эквивалентных преобразований имеем:

$$D = R_3 + R_4 + R_5 = 33 + 25 + 40 = 98 \text{ Ом};$$

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{D} = \frac{33 \cdot 25}{98} = 8{,}42 \text{ Ом};$$

$$R_{45} = \frac{R_4 R_5}{D} = \frac{25 \cdot 40}{98} = 10{,}2 \text{ Ом};$$

$$R_{35} = \frac{R_3 R_5}{D} = \frac{33 \cdot 40}{98} = 13{,}47 \text{ Ом}.$$

Получаем схему замещения (рис. 1.8).

Определяем эквивалентные сопротивления последовательно и параллельно соединенных участков:

$R_{135} = R_1 + R_{35} = 60{,}47$ Ом;

$R_{245} = R_2 + R_{45} = 85{,}2$ Ом;

$$R_{10} = \frac{R_{135}R_{245}}{R_{135} + R_{245}} = \frac{60{,}47 \cdot 85{,}2}{60{,}47 + 85{,}2} = 35{,}7 \text{ Ом}.$$

Рассчитываем делитель напряжения R_{10}, R_{34}. Напряжение

$$U_{10} = \frac{UR_{10}}{R_{10} + R_{34}} = \frac{100 \cdot 35{,}7}{35{,}7 + 8{,}42} = 80{,}92 \text{ В}.$$

Рассчитываем делители $R_1 - R_{35}$; $R_2 - R_{45}$ и определяем

$$U_{ab} = U_{10}\left(\frac{R_{35}}{R_{135}} - \frac{R_{45}}{R_{245}}\right) = 8{,}32 \text{ В}.$$

Ток в ветви $a - b$ находим по закону Ома:

$$I = \frac{U_{ab}}{R_5} = \frac{8{,}32}{40} = 0{,}208 \text{ А}.$$

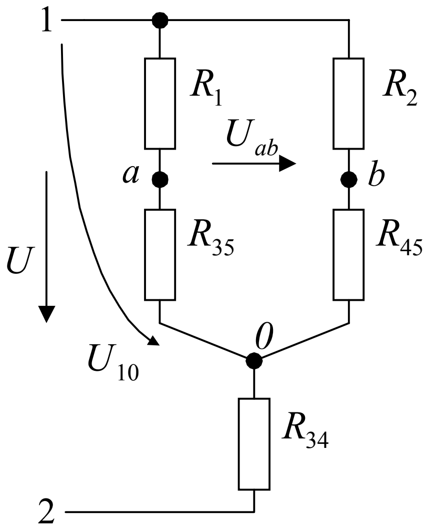

Рис.1.8

Задача 1. 3

Выполнить эквивалентные преобразования для двухполюсника (схема рис. 1.9). Параметры резисторов двухполюсника: R_1 =75 Ом; R_2 =50 Ом. Источники: E_1 = 30 В; J_1 = 1 А.

Решение

Этапы выполнения преобразований поясняет рис. 1.10.

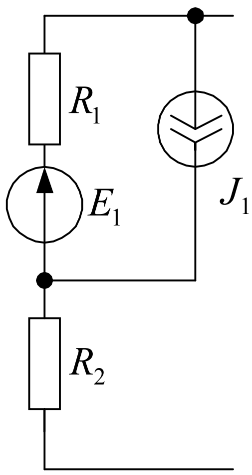

Рис. 1.9.

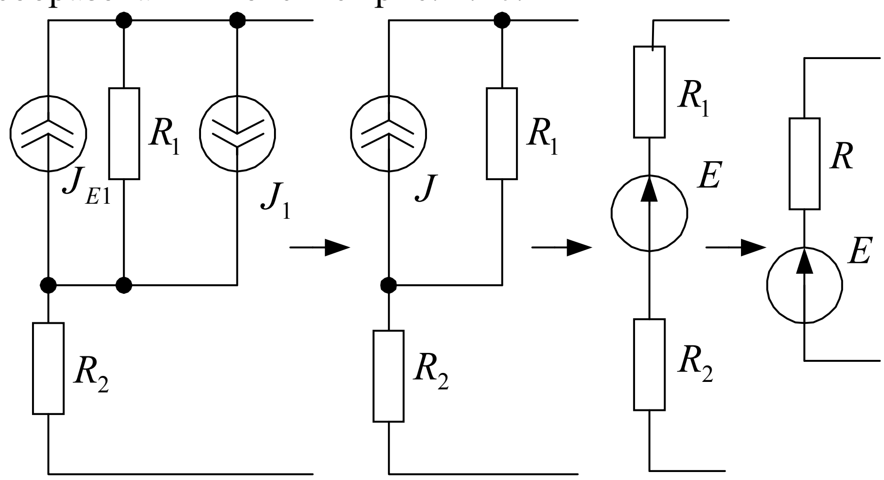

Рис. 1.10.

Расчет выполняем по формулам эквивалентных преобразований:

$$J_{E1} = E_1 / R_1 = 30/75 = 0{,}4 \text{ А};$$

$$J = J_{E1} - J_1 = -\,0{,}6 \text{ А};$$

$$E = JR_1 = -\,0{,}6 \cdot 75 = -\,45 \text{ В};$$

$$R = R_1 + R_2 = 125 \text{ Ом}.$$

Задача 1.4

Методом эквивалентных преобразований рассчитать токи ветвей в цепи со схемой рис. 1.11.

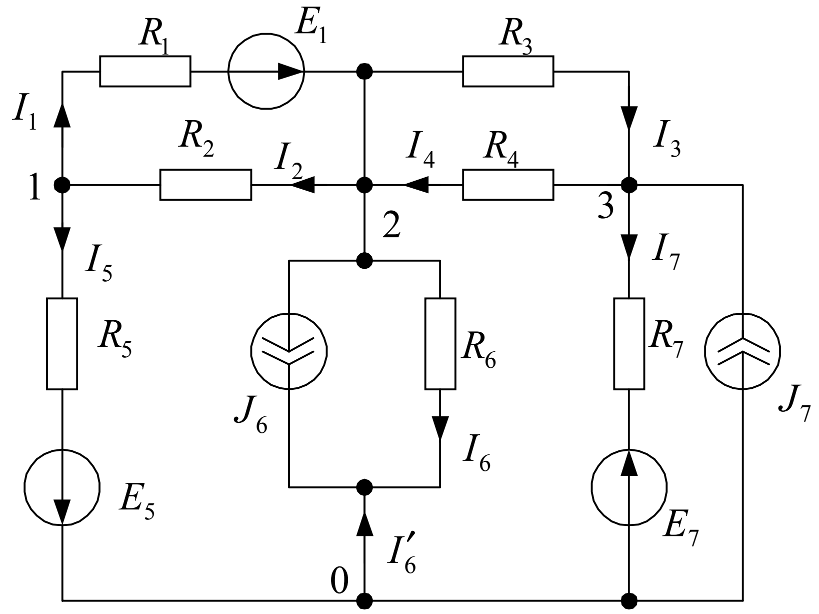

Рис. 1.11

Параметры резисторов ветвей: $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 130$ Ом; $R_3 = 43$ Ом; $R_4 = 75$ Ом; $R_5 = 91$ Ом; $R_6 = 110$ Ом; $R_7 = 200$ Ом; $R_8 = 45$ Ом.

Источники: $E_1 = 15$ В; $E_5 = 24$ В; $E_7 = 8$ В; $J_6 = 0{,}2$ А, $J_7 = 0{,}1$ А.

Решение

Назначаем положительные направления токов в ветвях. Узлы схемы отмечаем цифрами 1, 2, 3 и 0.

Выполняем эквивалентные преобразования для двухполюсника между узлами 1–2 (рис. 1.12).

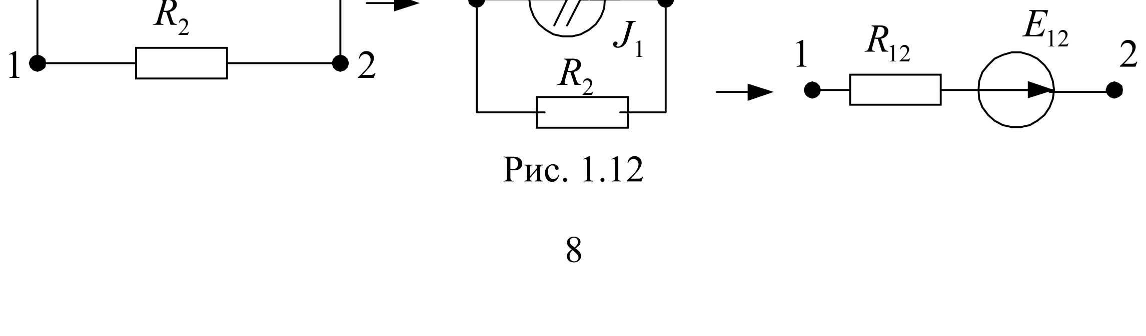

Рис. 1.12

Находим:

$$J_1 = \frac{E_1}{R_1} = \frac{15}{100} = 0{,}15 \text{ А};$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 130}{100 + 130} = 56{,}52 \text{ Ом};$$

$$E_{12} = J_1 R_{12} = 8{,}48 \text{ В}.$$

Между узлами 2– 3 резисторы соединены параллельно, поэтому

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{43 \cdot 75}{43 + 75} = 27{,}33 \text{ Ом}.$$

Получаем схему рис. 1.13.

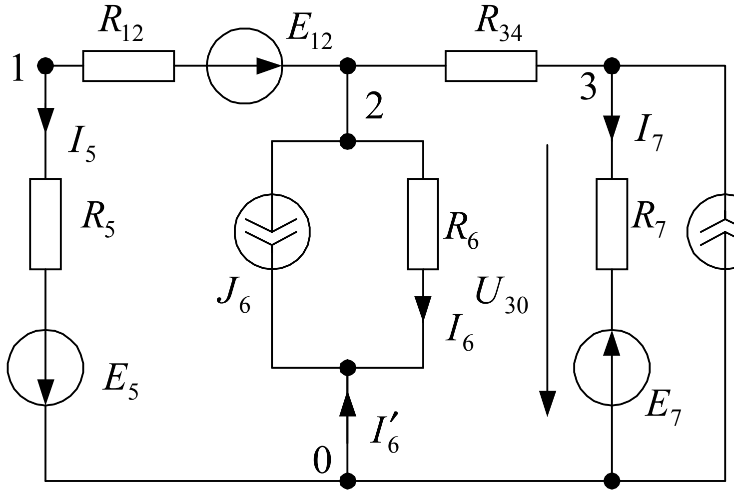

Рис. 1.13

Преобразования для двухполюсника между узлами 3–0 поясняет рис. 1.14.

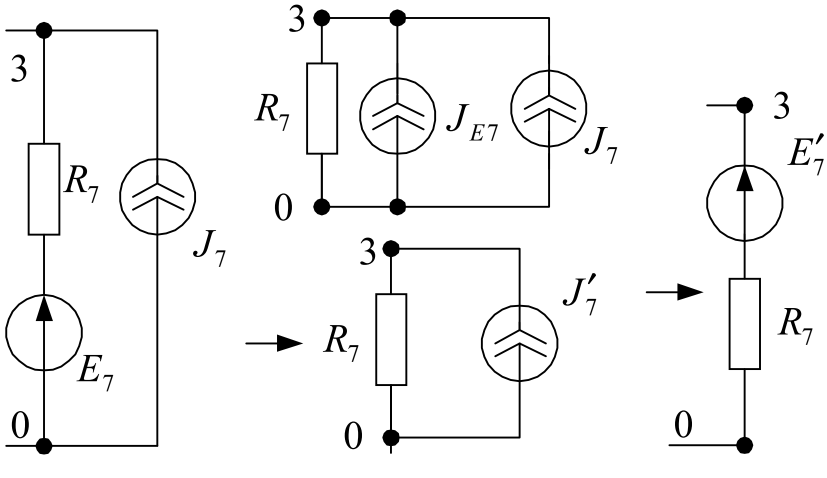

Рис. 1.14

Находим:

$$J_{E7} = \frac{E_7}{R_7} = \frac{8}{200} = 0{,}04 \text{ А};$$

$$J_7' = J_{E7} + J_7 = 0{,}04 + 0{,}1 = 0{,}14 \text{ А};$$
$$E_7' = J_7' R_7 = 0{,}14 \cdot 200 = 28 \text{ В}.$$

Получаем эквивалентную схему рис. 1.15.

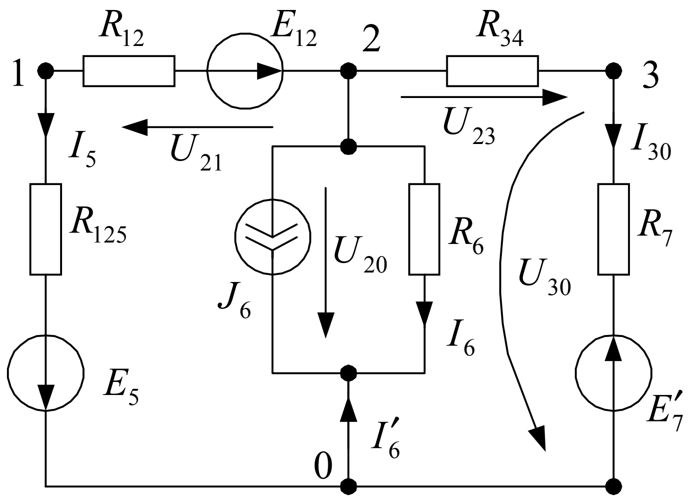

Рис. 1.15

Ветви на участках 2–1; 1– 0 соединены последовательно. Сопротивление

$$R_{125} = R_{12} + R_5 = 56{,}52 + 91 = 147{,}52 \text{ Ом}.$$

Э. д. с.

$$E_{125} = E_{12} - E_5 = 8{,}48 - 24 = -15{,}52 \text{ В}.$$

Ветви на участках 2–3, 3– 0 соединены последовательно. Сопротивление

$$R_{347} = R_{34} + R_7 = 27{,}33 + 200 = 227{,}33 \text{ Ом}.$$

Получаем двухполюсник с двумя узлами (рис. 1.16).

Рассчитываем напряжение U_{20}.

Имеем уравнение:

$$G_{22} U_{20} = J_{22},$$

где $G_{22} = \dfrac{1}{R_{125}} + \dfrac{1}{R_6} + \dfrac{1}{R_7}$ – собственная проводимостей ветвей, принадлежащих узлу 2;

$$J_{22} = \frac{E_{125}}{R_{125}} - J_6 + \frac{E_7'}{R_7}$$ – узловой ток.

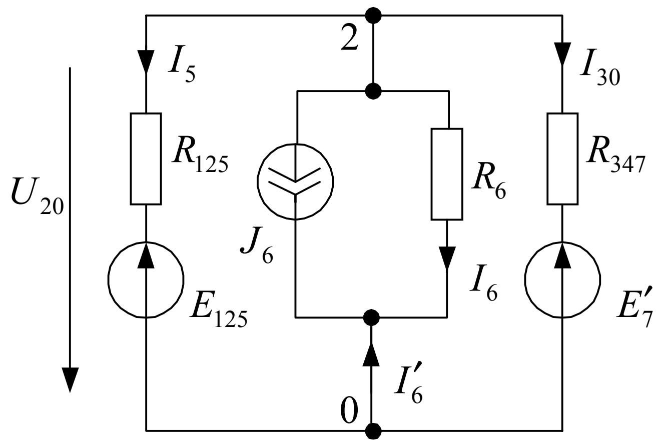

Рис. 1.16

Подставляя данные:

$$G_{22} = 0{,}02 \text{ 1/ Ом},$$
$$J_{22} = -0{,}182 \text{ А}.$$

Напряжение

$$U_{20} = \frac{J_{22}}{G_{22}} = \frac{-0{,}182}{0{,}02} = -8{,}982 \text{ В}.$$

Рассчитываем токи:

$$I_5 = \frac{U_{20} - E_{125}}{R_{125}} = 0{,}044 \text{ А;}$$

$$I_6 = \frac{U_{20}}{R_6} = -\,0{,}082 \text{ А;}$$

$$I_{30} = \frac{U_{20} - E_7'}{R_{347}} = -\,0{,}163 \text{ А.}$$

Ток I_6' определяем по закону Кирхгофа:

$$I_6 + I_6' + J_6 = 0,$$

откуда

$$I_6' = -I_6' - J_6 = -\,0{,}118 \text{ А.}$$

Рассчитываем напряжения U_{21}, U_{23} и U_{30} (рис. 1.15).
По второму закону Кирхгофа имеем

$$U_{21} - I_5 R_{12} = E_{12},$$

откуда

$$U_{21} = I_5 R_{12} + E_{12} = 10{,}984 \text{ В.}$$

Напряжения:

$$U_{23} = I_{30} R_{34} = -\,4{,}446 \text{ В;}$$

$$U_{30} = U_{20} - U_{23} = -\,4{,}536 \text{ В.}$$

Рассчитываем токи I_1; I_2; I_3; I_4; I_7 (схема рис. 1.11).
По второму закону Кирхгофа имеем

$$U_{21} + I_1 R_1 = E_1,$$

откуда

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{21}}{R_1} = 0{,}04 \text{ А.}$$

По закону Ома:

$$I_2 = \frac{U_{21}}{R_2} = 0{,}084 \text{ А;}$$

$$I_3 = \frac{U_{23}}{R_3} = -\,0{,}103 \text{ А;}$$

$$I_4 = -\frac{U_{23}}{R_4} = 0{,}059 \text{ А.}$$

По второму закону Кирхгофа имеем

$$I_7 R_7 - U_{30} = -E_7,$$

откуда

$$I_7 = \frac{U_{30} - E_7}{R_7} = -0{,}063 \text{ А.}$$

Выполняем проверку правильности решения. Рассчитываем баланс мощностей. Мощность источников $P_{\text{ист}}$ определяется из выражения:

$$P_{\text{ист}} = E_5 I_5 + E_1 I_1 - E_7 I_7 - U_{20} J_6 + U_{30} J_7 =$$
$$= 24 \cdot 0{,}044 + 15 \cdot 0{,}04 - 8(-0{,}063) - (-8{,}982)\,0{,}2 + (-4{,}536)\,0{,}1 =$$
$$= 3{,}511 \text{ Вт.}$$

Мощность, рассеиваемая в резисторах P_R,

$$P_R = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7 =$$
$$= 0{,}04^2\,100 + 0{,}084^2\,130 + (-0{,}103)^2\,43 + 0{,}059^2\,75 + 0{,}044^2\,91 +$$
$$+ (-0{,}082)^2\,110 + (-0{,}063)^2\,200 = 3{,}511 \text{ Вт.}$$

Получаем $P_{\text{ист}} = P_R$, задача решена верно.

1.3. Контрольные вопросы и задачи

1. Сформулировать первый и второй законы Кирхгофа.
2. Методом преобразования найти токи в резисторах (рис. 1.17). Параметры резисторов: $R_1 = 45$ Ом; $R_2 = 90$ Ом; $R_3 = 30$ Ом. Источники: $E = 12$ В; $J = 0{,}2$ А.

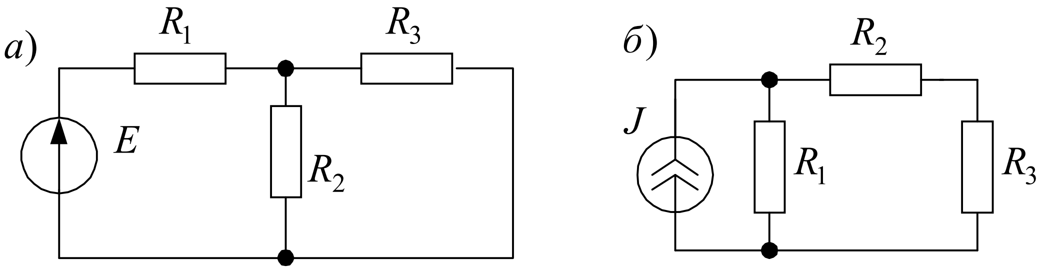

Рис. 1.17

3. Рассчитать токи в резисторах (рис. 1.18). Параметры резисторов: $R_1 = 45$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $R_3 = 15$ Ом. Источники: $E = 15$ В; $J = 0{,}5$ А.

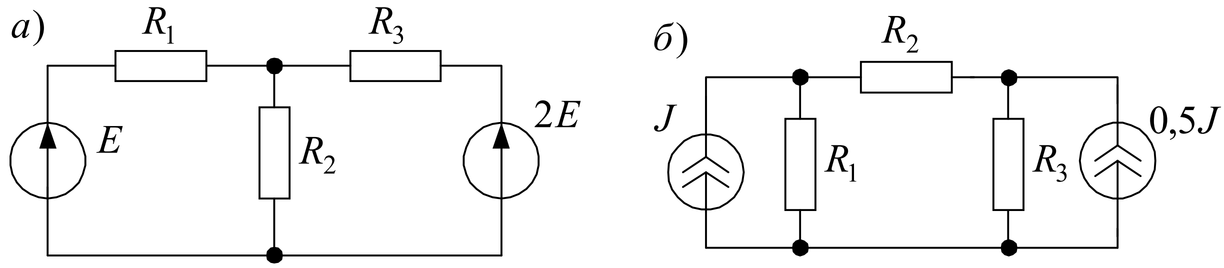

Рис. 1.18

2. Метод узловых напряжений

2.1. Общие сведения

Метод узловых напряжений основан на уравнениях первого закона Кирхгофа. В соответствии с методом определяются напряжения $q-1$ узла электрической цепи относительно некоторого базисного узла. Эти напряжения называются узловыми. Положительные направления узловых напряжений *всегда принимаются от узла к базисному узлу*. Число уравнений относительно искомых узловых напряжений равно числу независимых узлов $q-1$.

Напряжение на любой ветви равно разности узловых напряжений. Ток I_g любой ветви определяется по второму закону Кирхгофа для контура: ветвь– напряжения узлов ветви относительно базисного (рис. 2.1). Так для фрагмента цепи со схемой рис. 2.1 уравнение второго закона Кирхгофа имеет вид

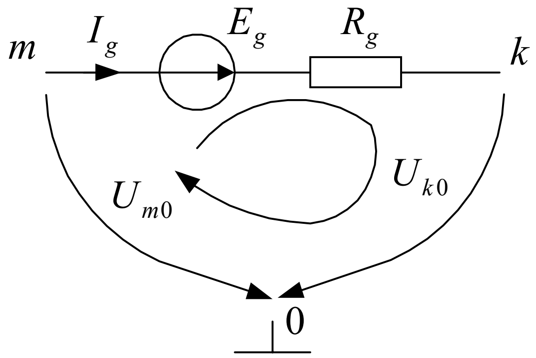

Рис. 2.1

$$I_g R + U_{k0} - U_{m0} = E_g ,$$

откуда

$$I_g = \frac{E_g - U_{k0} + U_{m0}}{R} .$$

Каноническая форма уравнений метода узловых напряжений для случая трех независимых узлов имеет вид:

$$G_{11}\,U_{10} - G_{12}\,U_{20} - G_{13}\,U_{30} = J_{11};$$
$$-G_{21}\,U_{10} + G_{22}\,U_{20} - G_{23}\,U_{30} = J_{22};$$
$$-G_{31}\,U_{10} - G_{32}\,U_{20} + G_{33}\,U_{30} = J_{33}.$$

Здесь G_{11}; G_{22}; G_{33}– собственные проводимости ветвей узлов 1, 2, 3, соответственно; $G_{12} = G_{21}$; $G_{23} = G_{32}$; $G_{13} = G_{31}$– общие проводимости ветвей одновременно принадлежащих двум узлам. J_{11}; J_{22}; J_{33}– узловые токи.

Способ определения этих величин поясняет фрагмент схемы цепи с тремя независимыми узлами (рис. 2.2).

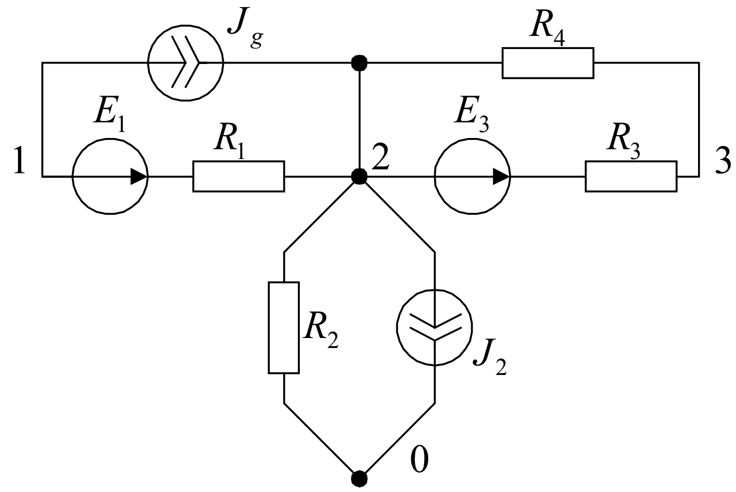

Рис. 2.2

Собственная проводимость ветвей узла 2:

$$G_{22}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}$$

определяется как суммы проводимостей ветвей, принадлежащих узлу 2.

Общие проводимости:

$$G_{12}=G_{21}=\frac{1}{R_1};\ G_{23}=G_{32}=\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4};\ G_{13}=G_{31}=0$$

определяются как суммы проводимостей ветвей, принадлежащих соответственно узлам 1–2, 2–3 и 1–3 одновременно.

Вклад в узловые токи дают ветвями, содержащие источники. Узловой ток равен алгебраической сумме токов эквивалентных генераторов тока. Для узла 2 (рис. 2.1) имеем

$$J_{22}=\frac{E_1}{R_1}-\frac{E_3}{R_3}+J_g-J_2.$$

Источник, стрелка которого направлена к узлу, в уравнение входит со знаком плюс, из узла со знаком минус.

2.2. Решение типовых задач

Задача 2.1

Записать узловые уравнения для цепи со схемой рис. 2.3.

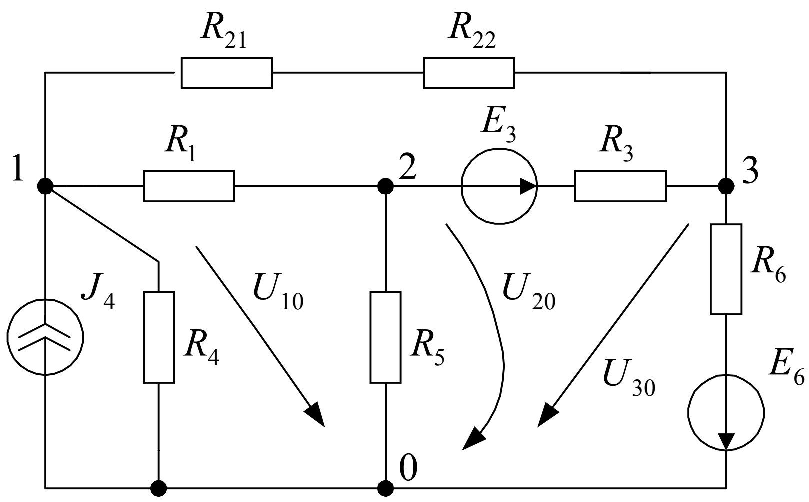

Рис. 2.3

Решение

В схеме рис. 2.3 четыре узла ($q=4$). Число узловых уравнений $n=q-1=3$. Выбираем в качестве базисного узел 0. Уравнения имею вид:

$$G_{11}U_{10}-G_{12}U_{20}-G_{13}U_{30}=J_{11};$$
$$-G_{21}U_{10}+G_{22}U_{20}-G_{23}U_{30}=J_{22};$$
$$-G_{31}U_{10}-G_{32}U_{20}+G_{33}U_{30}=J_{33}.$$

Собственные проводимости узлов 1, 2 и 3:

$$G_{11}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_{21}+R_{22}}+\frac{1}{R_4};\ G_{22}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5};\ G_{33}=\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_{21}+R_{22}}+\frac{1}{R_6}.$$

Общие проводимости:

$$G_{12}=G_{21}=\frac{1}{R_1};\ G_{23}=G_{32}=\frac{1}{R_3};\ G_{13}=G_{31}=\frac{1}{R_{21}+R_{22}}.$$

Узловые токи:

$$J_{11}=J_4;\ J_{22}=-\frac{E_3}{R_3};\ J_{33}=\frac{E_3}{R_3}-\frac{E_6}{R_6}.$$

Задача 2.2

Рассчитать токи ветвей в электрической цепи по схеме рис. 2.4.

Параметры резисторов: R_1 = 200 Ом; R_2 = 100 Ом; R_3 = 125 Ом; $R_4 = R_3$. Источники: E = 15 В, J = 0,5 А. Решение проверить балансом мощностей.

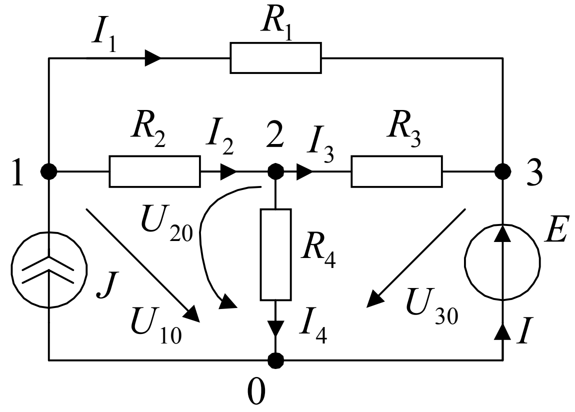

Рис. 2.4

Решение

Определяем положительные направления токов ветвей как на рис. 2.4. В схеме цепи три независимых узла. Приняв в качестве базисного узел 0, принадлежащий ветви с идеальным источником, получаем

$$U_{30}=E=15 \text{ В}.$$

Узловые уравнения для узлов 1 и 2 имеют вид:

$$G_{11}U_{10}-G_{12}U_{20}-G_{13}U_{30}=J_{11};$$
$$-G_{21}U_{10}+G_{22}U_{20}-G_{23}U_{30}=J_{22}.$$

Собственные проводимости:

$$G_{11}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0{,}015\ 1/\text{Ом};\ G_{22}=\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}=0{,}026\ 1/\text{Ом}.$$

Общие проводимости:

$$G_{12}=G_{21}=\frac{1}{R_2}=0{,}01\ 1/\text{Ом};\ G_{13}=\frac{1}{R_1}=5\cdot10^{-3}\,1/\text{Ом};$$

$$G_{23}=\frac{1}{R_3}=8\cdot10^{-3}\,1/\text{Ом}.$$

Узловые токи:

$$J_{11}=J=0{,}5 \text{ А};\ J_{22}=0.$$

Получаем уравнения для расчета неизвестных узловых напряжений:

$$0{,}015U_{10} - 0{,}01U_{20} = 0{,}5 + 5\cdot 10^{-3}\cdot 15;$$
$$-0{,}015U_{10} + 0{,}026U_{20} = 8\cdot 10^{-3}\cdot 15.$$

Решив эти уравнения, найдем узловые напряжения:

$U_{10} = 55{,}7$ В; $U_{20} = 26{,}03$ В.

Токи ветвей:

$$I_1 = \frac{U_{10} - U_{30}}{R_1} = \frac{55{,}7 - 15}{200} = 0{,}2 \text{ А};$$

$$I_2 = \frac{U_{10} - U_{20}}{R_2} = \frac{55{,}7 - 26{,}03}{100} = 0{,}3 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{U_{20} - U_{30}}{R_3} = \frac{26{,}03 - 15}{125} = 0{,}09 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{U_{20}}{R_4} = \frac{26{,}03}{125} = 0{,}21 \text{ А}.$$

Ток I в ветви с источником э. д. с. E определяем из уравнения Кирхгофа для узла 3. Имеем

$$I = -I_1 - I_3 = -0{,}2 - 0{,}09 = -0{,}29 \text{ А}.$$

Рассчитываем баланс мощностей.

Мощность источников

$$P_{\text{ист}} = U_{10}J + EI = 55{,}7\cdot 0{,}5 + 15\cdot(-0{,}29) = 23{,}47 \text{ Вт}.$$

Мощность, рассеиваемая в резисторах

$$P_{\text{н}} = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3 + I_4^2R_4 =$$
$$= 0{,}2^2\cdot 200 + 0{,}3^2\cdot 100 + 0{,}09^2\cdot 125 + 0{,}21^2\cdot 125 = 23{,}47 \text{ Вт}.$$

Получаем $P_{\text{ист}} = P_{\text{н}}$, баланс мощностей выполняется.

Программа расчета в пакете Mathcad.

$R1 := 200 \quad R2 := 100 \quad R3 := 125 \quad R4 := R3 \quad E := 15 \quad J := 0.5$ ← Исходные данные.

$G11 := \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} \quad G22 := \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3} + \frac{1}{R4}$

$G12 := \frac{1}{R2} \quad G21 := G12 \quad G13 := \frac{1}{R1} \quad G23 := \frac{1}{R3}$

← Определение и расчет собственных и общих проводимостей.

$G11 = 0.015 \quad G22 = 0.026 \quad G12 = 0.01 \quad G13 = 5\cdot 10^{-3}$

$G23 = 8\cdot 10^{-3}$

$$\begin{pmatrix} U10 \\ U20 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} G11 & -G12 \\ -G21 & G22 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} J + G13\cdot E \\ G23\cdot E \end{pmatrix}$$

← Расчет матрицы узловых напряжений.

$U10 = 55.69 \quad U20 = 26.03 \quad U30 := E \quad U30 = 15$

$I1 := \dfrac{U10 - U30}{R1} \quad I1 = 0.2 \quad I2 := \dfrac{U10 - U20}{R2} \quad I2 = 0.3$ ← Расчет токов ветвей.

$I3 := \dfrac{U20 - U30}{R3} \quad I3 = 0.09 \quad I4 := \dfrac{U20}{R4} \quad I4 = 0.21$

$I := -I1 - I3 \quad I = -0.29$ Расчет баланса мощностей.

$Pej := U10 \cdot J + E \cdot I \quad Pej = 23.47$ ← Мощность источника.

$Pn := I1^2 \cdot R1 + I2^2 \cdot R2 + I3^2 \cdot R3 + I4^2 \cdot R4 \quad Pn = 23.47$ ← Мощность нагрузок.

Задача. 2. 3

Найти токи ветвей в цепи со схемой замещения рис. 2.5.

Параметры ветвей: $R_1 = 110$ Ом; $R_2 = 91$ Ом; $R = 47$ Ом; $E = 100$ В; $J = 1$ А.

Проверить решение, составив баланс мощностей.

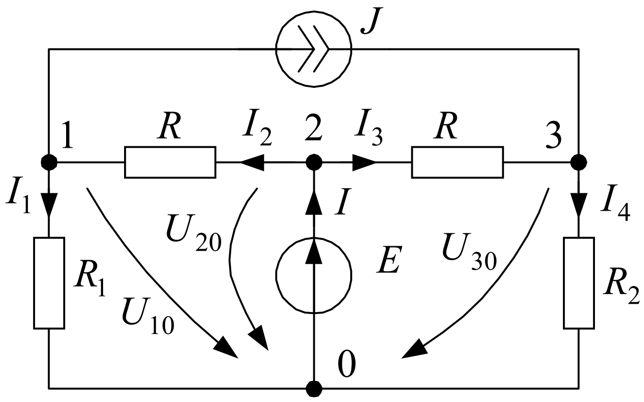

Рис. 2.5

Решение

Определяем положительные направления токов. В схеме цепи три независимых узла. Приняв в качестве базисного узел 0, получаем

$$U_{20} = E = 100 \text{ В}.$$

Записываем уравнения для расчета напряжений узлов 1 и 3:

$$G_{11}U_{10} - G_{12}U_{20} - G_{13}U_{30} = J_{11};$$

$$-G_{31}U_{10} - G_{32}U_{20} + G_{33}U_{30} = J_{33}.$$

Собственные проводимости узлов 1 и 3:

$$G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R}; \; G_{33} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R}.$$

Общие проводимости узлов 1– 2; 3 – 2; 1 – 3:

$$G_{12} = \frac{1}{R}; \; G_{32} = \frac{1}{R}; \; G_{13} = G_{31} = 0.$$

Узловые токи:

$$J_{11} = -J; \; J_{33} = J.$$

Подставляем численные значения, получаем:

$$G_{11} = \frac{1}{110} + \frac{1}{47} = 0{,}0304 \text{ Ом}^{-1}; \; G_{33} = \frac{1}{91} + \frac{1}{47} = 0{,}0323 \text{ Ом}^{-1};$$

$$G_{12} = \frac{1}{47} = 0{,}0213 \text{ Ом}^{-1}; \; G_{32} = \frac{1}{47} = 0{,}0213 \text{ Ом}^{-1};$$

$J_{11} = -1$; $J_{33} = 1$.

Узловые уравнения принимают вид:

$$0{,}0304U_{10} - 0{,}0213 \cdot 100 = -1;$$

$$0{,}0213 \cdot 100 + 0{,}0323\, U_{30} = 1,$$

откуда

$$U_{10} = \frac{-1 + 2{,}13}{0{,}0304} = 37{,}17 \text{ В}; \; U_{30} = \frac{1 + 2{,}13}{0{,}0323} = 96{,}9 \text{ В}.$$

Токи ветвей:

$$I_1 = \frac{U_{10}}{R_1} = 0{,}3376 \text{ А}; \; I_2 = \frac{E - U_{10}}{R} = 1{,}3376 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{E - U_{30}}{R} = 0{,}0652 \text{ А}; \; I_4 = \frac{U_{30}}{R_2} = 1{,}0652 \text{ А}.$$

Ток

$$I = I_3 + I_2 = 1{,}4028 \text{ А}.$$

Для проверки решения составляем уравнения баланса мощностей:

– мощность, рассеиваемая резисторами,

$$P_R = I_1^2 R_1 + I_2^2 R + I_3^2 R + I_4^2 R_2 = 200 \text{ Вт}.$$

– мощность, генерируемая источниками,

$$P_{\text{ист}} = EI + (U_{30} - U_{10})J = 200 \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей выполняется.

Задача. 2.4

На рис. 2.6 представлена схема замещения электрической цепи, содержащая зависимый источник тока, управляемый током. Найти напряжение U_2 на нагрузке R, если $R_1 = 220$ Ом; $R_2 = 20$ Ом; $R_3 = 470$ Ом; $R = 510$ Ом. Параметр $\alpha = 0{,}95$ – коэффициент усиления по току, напряжение $E = 5$ В.

Решение

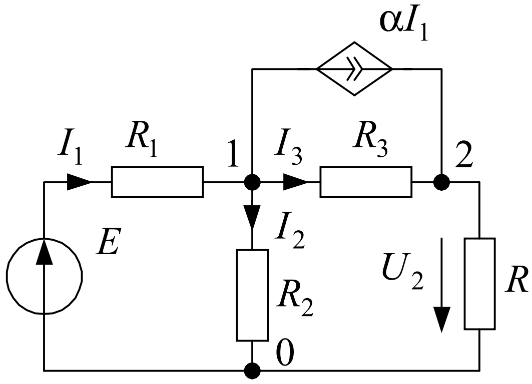

Рис. 2.6

Назначаем положительные направления токов. Уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов 1 и 2 имеют вид:

$$-I_1 + I_2 + I_3 + \alpha I_1 = 0;$$

$$-I_3 - \alpha I_1 + \frac{U_2}{R} = 0.$$

Выражаем токи ветвей через напряжения U_1 и U_2 узлов 1 и 2 относительно узла 0. По закону Ома:

$$I_1 = \frac{E - U_1}{R_1}; I_2 = \frac{U_1}{R_2};\ I_3 = \frac{U_1 - U_2}{R_3}.$$

Подставляем эти выражения в уравнения по первому закону Кирхгофа, получаем узловые уравнения:

$$\left(\frac{1-\alpha}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)U_{10} - \frac{1}{R_3}U_{20} = \frac{E}{R_1}(1-\alpha);$$

$$-\left(\frac{1}{R_3} - \frac{\alpha}{R_1}\right)U_{10} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R}\right)U_{20} = \alpha\frac{E}{R_1}.$$

Из уравнений имеем:

$$G_{11} = \frac{1-\alpha}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3};\ G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R}$$

$$G_{12} = \frac{1}{R_3};\ G_{21} = \frac{1}{R_3} - \frac{\alpha}{R_1};$$

$$J_{11} = \frac{E}{R_1}(1-\alpha);\ J_{22} = \alpha\frac{E}{R_1}.$$

Следует обратить внимание, что в схеме замещения цепи с зависимым источником $G_{12} \neq G_{21}$, а каноническую форму узловых уравнений непосредственно по виду схемы без определения неких дополнительных правил получить нельзя.

Записываем полученные уравнения в матричной форме

$$\mathbf{G}_{nn}\mathbf{U}_{n0} = \mathbf{J}_{nn},$$

где $\mathbf{G}_{nn} = \begin{bmatrix} G_{11} & -G_{12} \\ -G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$ – матрица узловых проводимостей, $\mathbf{J}_{nn} = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{22} \end{bmatrix}$ – матрица узловых токов, $\mathbf{U}_{n0} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$ матрица узловых напряжений.

Решение матричного узлового уравнения имеет вид

$$\mathbf{U}_{n0} = \mathbf{G}_{nn}^{-1}\mathbf{J}_{nn}.$$

Подставляем численные значения, получаем:

$$\mathbf{G}_{nn} = \begin{bmatrix} 0{,}052 & -2{,}128 \cdot 10^{-3} \\ 2{,}191 \cdot 10^{-3} & 4{,}088 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix};\ \mathbf{J}_{nn} = \begin{bmatrix} 1{,}136 \cdot 10^{-3} \\ 0{,}022 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{U}_{n0} = \begin{bmatrix} 0{,}231 \\ 5{,}157 \end{bmatrix},$$

откуда

$$U_1 = 0{,}231\ \text{В}; U_2 = 5{,}157\ \text{В}.$$

Правильность решения проверяем балансом мощностей.
Мощность, рассеиваемая в резисторах и зависимом источнике тока:

$$P_{\text{пот}} = \frac{(E - U_1)^2}{R_1} + \frac{U_1^{\,2}}{R_2} + \frac{(U_1 - U_2)^2}{R_3} + \alpha \frac{E - U_1}{R_1}(U_1 - U_2);$$

$$P_{\text{пот}} = 0{,}108 \text{ Вт};$$

Мощность источника

$$P_{\text{ист}} = E\frac{E - U_1}{R_1} = 0{,}108 \text{ Вт}.$$

$P_{\text{пот}} = P_{\text{ист}}$, задача решена верно.

Задача. 2.4

На рис. 2.7 представлена схема замещения разветвленной электрической цепи. Рассчитать токи ветвей методом узловых напряжений. Параметры резисторов: $R_1 = 100$ Ом; $R_2 = 130$ Ом; $R_3 = 43$ Ом; $R_4 = 75$ Ом; $R_5 = 91$ Ом; $R_6 = 110$ Ом; $R_7 = 200$ Ом. Источники: $E_1 = 15$ В; $E_5 = 24$ В; $E_7 = 8$ В; $J_6 = 0{,}2$ А; $J_7 = 0{,}1$ А. Проверить выполнение баланса мощностей.

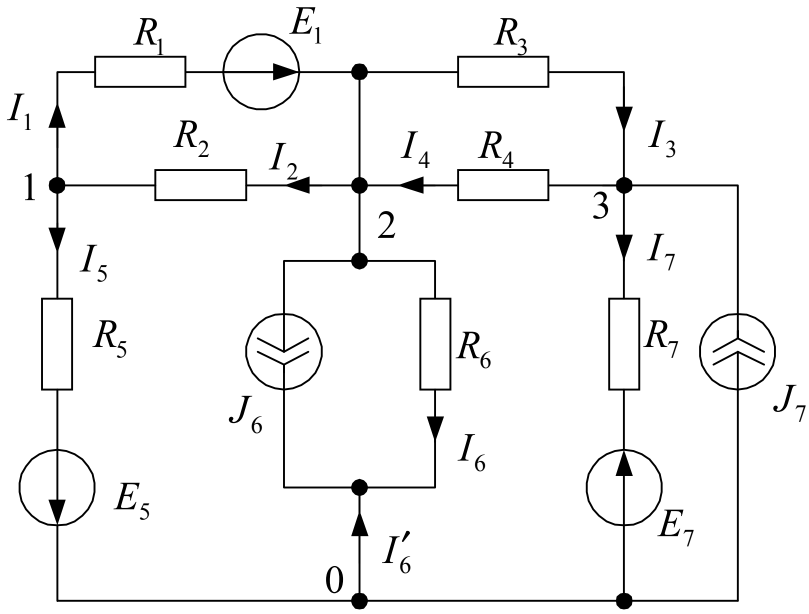

Рис. 2.7

Решение.

В схеме $q = 4$ узлов. По методу узловых напряжений необходимо составить три уравнения. Положительные направления токов в ветвях указаны на рис. 2.7. Каноническая форма записи узловых уравнений имеет вид

$$G_{11}U_{10} - G_{12}U_{20} - G_{13}U_{30} = J_{11},$$

$$-G_{21}U_{10} + G_{22}U_{20} - G_{23}U_{30} = J_{22},$$

$$-G_{31}U_{10} - G_{32}U_{20} + G_{33}U_{30} = J_{33},$$

где $G_{11} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_5}$; $G_{22} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_6}$; $G_{33} = \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4} + \dfrac{1}{R_7}$ – собственные, $G_{12} = G_{21} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$; $G_{13} = G_{31} = 0$; $G_{23} = G_{32} = \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}$ – общие проводимости, $J_{11} = -\dfrac{E_1}{R_1} - \dfrac{E_5}{R_5}$; $J_{22} = -J_6 + \dfrac{E_1}{R_1}$; $J_{33} = J_7 + \dfrac{E_7}{R_7}$ – узловые токи.

Матричная форма записи узловых уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ J_{33} \end{pmatrix}$$

или

$$\mathbf{G}_{nn}\mathbf{U}_{n0} = \mathbf{J}_{nn}.$$

Решение этого уравнения

$$\mathbf{U}_{n0} = \mathbf{G}_{nn}^{-1}\mathbf{J}_{nn}.$$

Уравнения для расчета токов ветвей:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{20} + U_{10}}{R_1};\ I_2 = \frac{U_{20} - U_{10}}{R_2};\ I_3 = \frac{U_{20} - U_{30}}{R_3}; I_3 = \frac{U_{20} - U_{30}}{R_3};$$

$$I_4 = \frac{U_{30} - U_{20}}{R_4};\ I_5 = \frac{E_5 + U_{10}}{R_7}\ I_6 = \frac{U_{20}}{R_6};\ I_7 = \frac{-E_7 + U_{30}}{R_7}.$$

Баланс мощностей:

- мощность P_R, рассеиваемая резисторами,
  $$P_R = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_4^2 R_4 + I_5^2 R_5 + I_6^2 R_6 + I_7^2 R_7;$$
- мощность, генерируемая источниками,
  $$P_{\text{ист}} = E_1 I_1 + E_5 I_5 - E_7 I_7 - U_{20} J_6 + U_{30} J_7.$$

Для численного решения воспользуемся математическим пакетом MathCAD.

$R1 := 100\ \ R2 := 130\ \ R3 := 43\ \ R4 := 75\ \ R5 := 91\ \ R6 := 110$

$R7 := 200\ \ E1 := 15\ \ E5 := 24\ \ E7 := 8\ \ J6 := 0.2\ \ J7 := 0.1$

← Присвоение переменным заданных условием задачи величин

$G11 := \dfrac{1}{R1} + \dfrac{1}{R2} + \dfrac{1}{R5}\ \ G22 := \dfrac{1}{R1} + \dfrac{1}{R2} + \dfrac{1}{R3} + \dfrac{1}{R4} + \dfrac{1}{R6}$

$G33 := \dfrac{1}{R3} + \dfrac{1}{R4} + \dfrac{1}{R7}\ G12 := \dfrac{1}{R1} + \dfrac{1}{R2}\ \ \ G21 := G12$

← Расчет собственных и общих проводимостей

$G23 := \frac{1}{R3} + \frac{1}{R4}$ $G32 := G23$ $G13 := 0$ $G31 := 0$ ←

$J11 := -\frac{E5}{R5} - \frac{E1}{R1}$ $J22 := -J6 + \frac{E1}{R1}$ $J33 := J7 + \frac{E7}{R7}$ ← Расчет задающий токов

$Gnn := \begin{pmatrix} G11 & -G12 & -G13 \\ -G21 & G22 & -G23 \\ -G31 & -G32 & G33 \end{pmatrix}$ $Gnn = \begin{pmatrix} 0.029 & -0.018 & 0 \\ -0.018 & 0.063 & -0.037 \\ 0 & -0.037 & 0.042 \end{pmatrix}$ ← Определение матриц узловых проводимостей Gnn и узловых токов Jnn

$Jnn := \begin{pmatrix} J11 \\ J22 \\ J33 \end{pmatrix}$ $Jnn = \begin{pmatrix} -0.414 \\ -0.05 \\ 0.14 \end{pmatrix}$

$Un0 := Gnn^{-1} \cdot Jnn$ ← Расчет узловых напряжений

$\begin{pmatrix} U10 \\ U20 \\ U30 \end{pmatrix} := Un0$ $Un0 = \begin{pmatrix} -19.966 \\ -8.982 \\ -4.536 \end{pmatrix}$ ← Вывод и присвоение матрице Unn численных значений узловых напряжений

$I1 := \frac{U10 - U20 + E1}{R1}$ $I2 := \frac{U20 - U10}{R2}$ $I3 := \frac{U20 - U30}{R3}$ ← Расчет токов ветвей

$I4 := \frac{U30 - U20}{R4}$ $I5 := \frac{U10 + E5}{R5}$ $I6 := \frac{U20}{R6}$ $I7 := \frac{U30 - E7}{R7}$

$I1 = 0.04$ $I2 = 0.084$ $I3 = -0.103$ ← Вывод численных значений токов ветвей

$I4 = 0.059$ $I5 = 0.044$ $I6 = -0.082$ $I7 = -0.063$ ← Баланс мощностей

$Pr := I1^2 \cdot R1 + I2^2 \cdot R2 + I3^2 \cdot R3 + I4^2 \cdot R4 + I5^2 \cdot R5 + I6^2 \cdot R6 + I7^2 \cdot R7$

$Pr = 3.511$

$Pej := E1 \cdot I1 + E5 \cdot I5 - E7 \cdot I7 - U20 \cdot J6 + U30 \cdot J7$

$Pej = 3.511$

Токи ветвей:

$$I_1 = 0{,}04 \text{ A};\ I_2 = -\,0{,}084 \text{ A};\ I_3 = -\,0{,}103 \text{ A};\ I_4 = 0{,}059 \text{ A};$$

$$I_5 = 0{,}044 \text{ A};\ I_6 = -\,0{,}082 \text{ A};\ I_7 = 0{,}063 \text{ A}.$$

Рассеиваемая резисторами мощность $P_R = 3{,}511$ Вт.

Мощность, генерируемая источниками $P_{\text{ист}} = 3{,}511$ Вт.

Баланс мощностей выполняется, задача решена верно.

3.2. Контрольные вопросы и задачи

1. Записать каноническую форму уравнений метода узловых напряжений (узловые уравнения).

2. Как по виду схемы замещения электрической цепи получить выражения собственных, общих проводимостей и узловых токов?

3. Как рассчитать токи ветвей по заданным параметрам ветвей и узловым напряжениям?

4. Методом узловых напряжений рассчитать токи в резисторах (схемы замещения на рис. 2.8), если: $R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 5$ Ом; $R_3 = 20$ Ом; $E_1 = 5$ В; $E_2 = 10$ В; $J = 0{,}5$ А. Расчет проверить балансом мощностей.

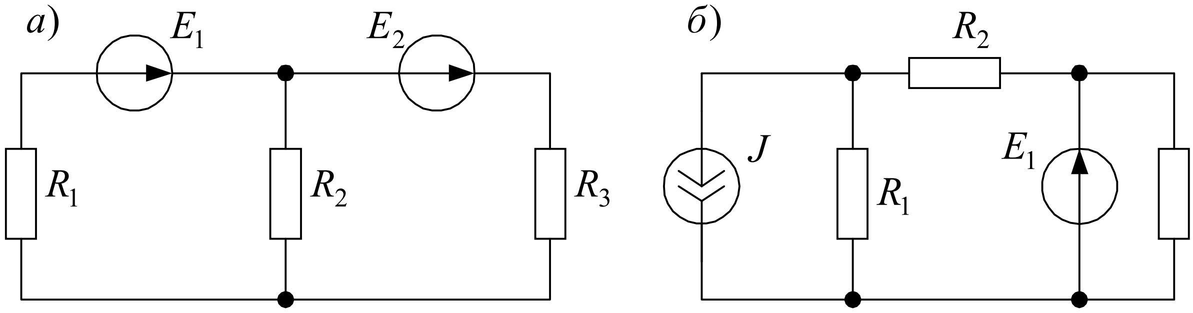

Рис. 2.8

5. Схемы замещения электрических цепей содержат зависимые источники (рис. 2.9). Найти напряжение на нагрузке $R = 2{,}5$ кОм, если $R_1 = 1$ кОм; $R_2 = 5$ кОм; $R_3 = 2$ кОм; $E = 1$ В; $J = 5$ мА.

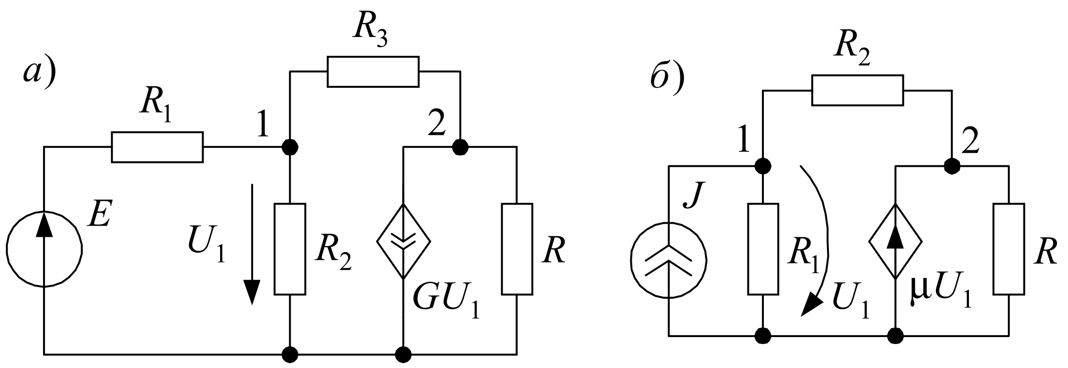

Рис. 2.9

3. Топологические методы формирования математической модели электрической цепи

Математическую модель электрической цепи образуют уравнения по законам Кирхгофа и уравнения идеальных элементов.

3. 1. Общие сведения

На рис. 3.1 показаны схема и граф *обобщенной ветви*. Для электрической цепи со схемой, имеющей b обобщенных ветвей и q узлов, можно записать $q - 1$ уравнение по первому закону Кирхгофа и $b - g + 1$ уравнение по второму закону Кирхгофа

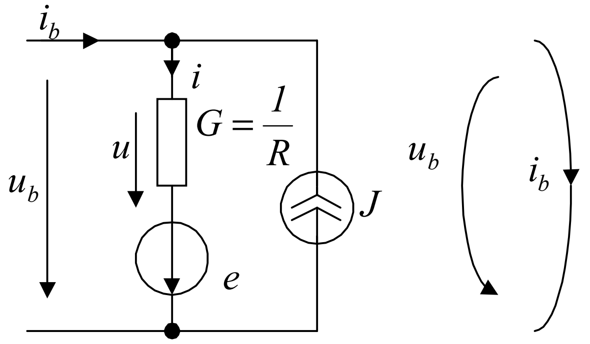

Рис. 3.1

$$\mathbf{A}\,\mathbf{I}_b = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{B}\,\mathbf{U}_b = \mathbf{0}.$$

В этих уравнениях $\mathbf{I}_b$ столбцевая матрица токов обобщенных ветвей, размерностью $\{b\times 1\}$,– $\mathbf{U}_b$ столбцевая матрица напряжений обобщенных ветвей, размерностью $\{b\times 1\}$, (b *– строк, один столбец*).

Матрица соединений $\mathbf{A}$ (или инциденций, или узловая), это таблица коэффициентов независимых уравнений по первому закону Кирхгофа. Размерность $\mathbf{A}$ $\{(q-1)\times b\}$. Строки матрицы $\mathbf{A}$ соответствуют узлам, столбцы – ветвям.

Коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$:

$$a_{k,j} = \begin{cases} +1, & \text{если ветвь } j \text{ принадлежит узлу } k \text{ и направлена из узла,} \\ -1, & \text{если ветвь } j \text{ принадлежит узлу } k \text{ и направлена к узла,} \\ 0, & \text{если ветвь } j \text{ не принадлежит узлу } k. \end{cases}$$

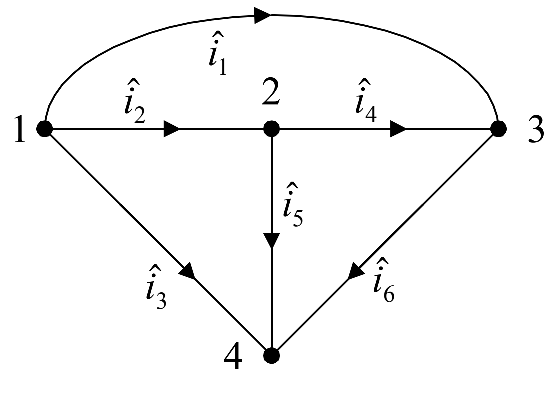

Рис. 3.2

Например, для графа по рис. 3.2 матрица соединений имеет вид

$$\begin{array}{r} \\ \text{Ветви} \rightarrow \\ \\ \mathbf{A} = \\ \\ \text{Узлы} \uparrow \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \multicolumn{3}{c}{\textit{дерева}} & \multicolumn{3}{c}{\textit{связи}} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Матрица главных контуров **B,** это таблица коэффициентов независимых уравнений по второму закону Кирхгофа для главных контуров при их обходе в направлении по токам дополнительных ветвей (связей).

Размерность матрицы **B** $\{(b-q+1)\times\ b\}$. Строки матрицы соответствуют контурам, столбцы – ветвям.

Коэффициенты матрицы **B**:

$$b_{i,j}=\begin{cases}+1, & \text{если ветвь } j \text{ принадлежит контуру } i \text{ и направлена по его обходу,}\\ -1, & \text{если ветвь } j \text{ принадлежит контуру } i \text{ и направлена против обхода,}\\ 0, & \text{если ветвь } j \text{ не принадлежит контуру } i.\end{cases}$$

На рис. 3.3 представлено одно из возможных деревьев графа рис. 3.2 (пунктирные линии – дополнительные ветви). Главные контура I, II, III включают только одну дополнительную ветвь и направление обхода контура совпадает с положительным направлением тока этой ветви.

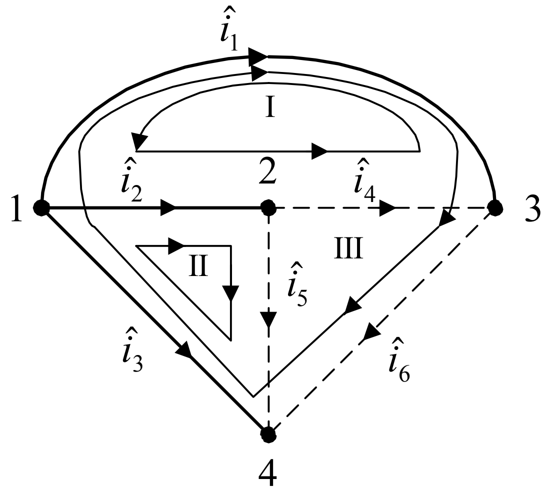

Рис. 3. 3

Матрица главных контуров **B** имеет вид

$$\begin{array}{rl} & \quad\ \ \textit{дерева} \qquad\quad \textit{связи} \\ \text{Ветви}\rightarrow & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{array} \\ \mathbf{B}=\begin{array}{r}\text{I}\\ \text{II}\\ \text{III}\end{array} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

Контуры $\uparrow$

Полезно при составлении матриц **A** и **B** первыми включать ветви дерева, а затем ветви – связи. Структура матриц приобретает блочный вид

$$\mathbf{A}=\left[\mathbf{A}_T\ \mathbf{A}_L\right],\ \ \mathbf{B}=\left[\mathbf{B}_T\ \mathbf{1}\right],$$

где блоки $\mathbf{A}_T$ и $\mathbf{B}_T$ соответствует ветвям дерева, блок $\mathbf{A}_L$ дополнительным ветвям, **1** – единичная матрица.

Если порядок следования ветвей в матрицах **A** и **B** одинаков, то для одного и того же графа

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B}^T=\mathbf{0};\ \mathbf{B}\,\mathbf{A}^T=\mathbf{0}.$$

Здесь $\mathbf{A}^T$ и $\mathbf{B}^T$ транспонированные матрицы.

Матрицы источников э. д. с. и тока ветвей. **E** – столбцевая матрица э. д. с. ветвей. Размерность **E** $\{b\times 1\}$. Коэффициенты матрицы **E**:

$$e_j=\begin{cases}+e, & \text{если направления стрелок э. д. с. } e \text{ и тока } i \text{ ветви } j \text{ совпадают,}\\ -e, & \text{если направления стрелок э. д. с. } e \text{ и тока } i \text{ ветви } j \text{ не совпадают,}\\ 0, & \text{если э. д. с. } e \text{ в ветви } j \text{ отсутствует.}\end{cases}$$

$\mathbf{J}$ – столбцевая матрица источников тока ветвей. Размерность $\mathbf{J}$ $\{b\times 1\}$. Коэффициенты матрицы $\mathbf{J}$

$$J_j = \begin{cases} +J, & \text{если направление токов } J \text{ источника и } i \text{ ветви } j \text{ как на рис.2.2,} \\ -J, & \text{если направление токов } J \text{ источника и } i \text{ ветви } j \text{ не как на рис.2.2,} \\ 0, & \text{если источник тока } J \text{ в ветви } j \text{ отсутствует.} \end{cases}$$

Матричные уравнения элементов (в случае резистивных элементов ветвей) имеют вид

$$\mathbf{I} = \mathbf{G}_b\mathbf{U}\,;\ \mathbf{U} = \mathbf{R}_b\mathbf{I}\,,$$

где $\mathbf{I}$ и $\mathbf{U}$ – столбцевые матрицы токов i и напряжений u элементов ветви j, $\mathbf{G}_b$ и $\mathbf{R}_b$ квадратные матрицы, размерностью $\{b\times b\}$. Элементы этих матриц

$$G_{k,j} = \begin{cases} G_j,\ k = j \\ 0,\ k \neq j \end{cases},\quad R_{k,j} = \begin{cases} R_j, k = j \\ 0,\ k \neq j \end{cases}.$$

Математическая модель электрической цепи в матричной форме записи приобретает вид

$$-\mathbf{I}_b + \mathbf{I} - \mathbf{J} = \mathbf{0}\,; \qquad \leftarrow \ \text{1– й закон Кирхгофа,}$$

$$-\mathbf{U}_b + \mathbf{U} = \mathbf{E}\,; \qquad \leftarrow \ \text{2– й закон Кирхгофа,}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{G}_b\mathbf{U}\,;\ \mathbf{U} = \mathbf{R}_b\mathbf{I}\,, \qquad \leftarrow \ \text{уравнения элементов.}$$

Исходными для вывода узловых уравнений являются уравнения первого закона Кирхгофа для обобщенных ветвей

$$\mathbf{A}\,\mathbf{I}_b = \mathbf{0}\,.$$

Если определить матрицу напряжений *узел – базисный узел* как столбцевую матрицу $\mathbf{U}_{n0}$ размерностью $\{(q-1)\times 1\}$, то в узловом уравнение

$$\mathbf{G}_{nn}\mathbf{U}_{n0} = \mathbf{J}_{nn}$$

квадратная матрица узловых проводимостей определяется

$$\mathbf{G}_{nn} = \mathbf{A}\,\mathbf{G}_b\mathbf{A}^T,$$

а столбцевая матрица задающих токов –

$$\mathbf{J}_{nn} = -\mathbf{A}\,\mathbf{G}_b\mathbf{E} + \mathbf{A}\,\mathbf{J}\,.$$

Решение уравнения определяет матрицу узловых напряжений

$$\mathbf{U}_{n0} = \mathbf{G}_{nn}^{-1}\mathbf{J}_{nn}\,.$$

Напряжения обобщенных ветвей и элементов ветвей

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{A}^T\mathbf{U}_{n0}\,,\ \mathbf{U} = \mathbf{U}_b + \mathbf{E}$$

Токи элементов и обобщенных ветвей

$$\mathbf{I} = \mathbf{G}_b\mathbf{U}\,,\ \mathbf{I}_b = \mathbf{I} - \mathbf{J}\,.$$

Исходными для вывода контурных уравнений являются уравнения второго закона Кирхгофа для обобщенных ветвей

$$\mathbf{B}\,\mathbf{U}_b = \mathbf{0}\,.$$

Определив матрицу *главных контурных токов* как столбцевую матрицу $\mathbf{I}_{nn}$ размерностью {(b – q + 1) × 1} токов дополнительных ветвей дерева, матрицы известных величин в контурных уравнениях

$$\mathbf{R}_{nn}\mathbf{I}_{nn} = \mathbf{E}_{nn}$$

определяются по выражениям

$$\mathbf{R}_{nn} = \mathbf{B}\,\mathbf{R}_b\mathbf{B}^T,\ \mathbf{E}_{nn} = -\mathbf{B}\,\mathbf{R}_\mathbf{b}\mathbf{J} + \mathbf{B}\,\mathbf{E}.$$

Решение уравнения

$$\mathbf{I}_{nn} = \mathbf{R}_{nn}^{-1}\,\mathbf{E}_{nn}$$

определяет матрицу контурных токов. Далее рассчитываются токи обобщенных ветвей

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{B}^T + \mathbf{I}_{nn},$$

токи и напряжения элементов

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_b + \mathbf{J},\ \ \mathbf{U} = \mathbf{R}_b\mathbf{I}$$

и напряжения обобщенных ветвей

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{U} - \mathbf{E}.$$

3. 2. Решение типовых задач

Задача 3.1

Для цепи со схемой рис. 3.4 найти токи ветвей.

Параметра элементов:

$R_1 = 10$ Ом; $R_2 = 15$ Ом; $R_3 = 20$ Ом;
$R_4 = 16$ Ом; $R_5 = 75$ Ом; $R_6 = 60$ Ом;
$E_1 = 150$ В; $E_4 = 300$ В; $E_5 = 80$ В;
$J_1 = 4{,}5$ А; $J_3 = 5$ А; $J_6 = 3$ А.

Решение

Определим положительные направления токов, как на рис. 3.4. За базисный принимаем узел 0. Матрица инциденций

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

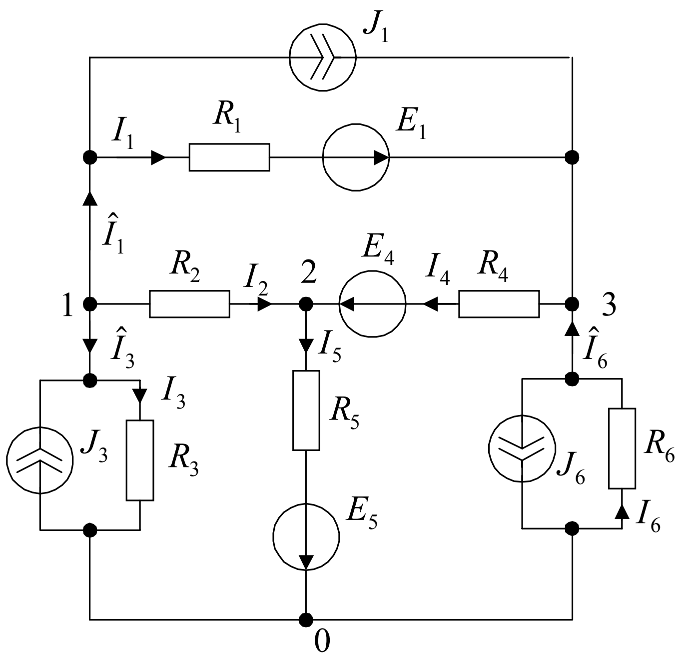

Рис. 3.4

Топологические матрицы э. д. с и токов источников и проводимостей элементов ветвей:

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}E_1\\0\\0\\E_4\\E_5\\0\end{bmatrix};\ \mathbf{J}=\begin{bmatrix}-J_1\\0\\J_3\\0\\0\\J_6\end{bmatrix};\ \mathbf{G}_b=\begin{bmatrix}1/R_1&0&0&0&0&0\\0&1/R_2&0&0&0&0\\0&0&1/R_3&0&0&0\\0&0&0&1/R_4&0&0\\0&0&0&0&1/R_5&0\\0&0&0&0&0&1/R_6\end{bmatrix}.$$

Программа расчета в пакете Mathcad.

R1 := 10 R2 := 15 R3 := 20 R4 := 16 R5 := 75 R6 := 60
E1 := 150 E4:= 300 E5 := 80 J1 := 4.5 J:=5 J6 := 3

← Задание исходных данных.

Определение матриц

$$A := \begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&-1&0&-1&1&0\\-1&0&0&1&0&-1\end{pmatrix}$$

← **A,**

$$E=\begin{bmatrix}150\\0\\0\\300\\80\\0\end{bmatrix}\quad J=\begin{bmatrix}-4.5\\0\\5\\0\\0\\3\end{bmatrix}\quad Gb := \begin{bmatrix}\frac{1}{R1}&0&0&0&0&0\\0&\frac{1}{R2}&0&0&0&0\\0&0&\frac{1}{R3}&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{R4}&0&0\\0&0&0&0&\frac{1}{R5}&0\\0&0&0&0&0&\frac{1}{R6}\end{bmatrix}$$

← **E, J, G**$_b$.

$$Gnn := A\cdot Gb\cdot A^{T}\qquad Gnn=\begin{pmatrix}0.217&-0.067&-0.1\\-0.067&0.142&-0.063\\-0.1&-0.063&0.179\end{pmatrix}$$

← Расчет матрицы узловых проводимостей

$$Jnn := -A\cdot Gb\cdot E + A\cdot J\qquad Jnn=\begin{pmatrix}-14.5\\17.683\\-2.25\end{pmatrix}$$

← Расчет матрицы узловых токов

$$Un0 := Gnn^{-1}\cdot Jnn\qquad Un0=\begin{pmatrix}-20.396\\122.846\\18.911\end{pmatrix}\qquad \begin{pmatrix}U10\\U20\\U30\end{pmatrix} := Un0$$

← Расчет узловых напряжений.

$$Ub := A^{T}\cdot Un0$$
$$U := Ub + E$$

← Расчет напряжений обобщенных ветвей Ub и напряжения на элементах U.

$$Ub = \begin{bmatrix} -39.307 \\ -143.242 \\ -20.396 \\ -103.935 \\ 122.846 \\ -18.911 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 110.693 \\ -143.242 \\ -20.396 \\ 196.065 \\ 202.846 \\ -18.911 \end{bmatrix}$$

$$I := Gb\cdot U \quad I = \begin{bmatrix} 11.069 \\ -9.549 \\ -1.02 \\ 12.254 \\ 2.705 \\ -0.315 \end{bmatrix} \qquad Ib := I - J \quad Ib = \begin{bmatrix} 15.569 \\ -9.549 \\ -6.02 \\ 12.254 \\ 2.705 \\ -3.315 \end{bmatrix}$$

← Расчет матриц токов I в элементах ветвей и токов Ib обобщенных ветвей.

Результаты расчета приведены в таблицах 3.1 и 3.2.

Таблица 3.1

U_{10} , В	U_{20} , В	U_{30} , В	$\hat{I}_1$, А	$\hat{I}_3$, А	$\hat{I}_6$, А
– 20,4	122,8	18,9	15,57	– 6,02	– 3,315

Таблица 3.2

I_1, А	I_2, А	I_3, А	I_4, А	I_5, А	I_6, А
11,07	– 9,55	–1,02	12,25	2,705	– 0,315

Мощность, рассеиваемая в резисторах $P_R = \mathbf{U}^T \mathbf{I}$.

Мощность, генерируемая источниками $P_{EJ} = \mathbf{E}^T \mathbf{I} + \mathbf{U}_b^T \mathbf{J}$

$Pr := U^T \cdot I \quad Pr = 5.571\cdot 10^3 \qquad Pej := E^T \cdot I + Ub^T \cdot J \quad Pej = 5.571\cdot 10^3$

P_R = 5571 Вт, P_{EJ} = 5571 Вт. Баланс мощностей выполняется.

Решение методом контурных токов

Граф и дерево для схемы цепи по рис. 3.4 представлены на рис. 3.5. Ветви дерева выделены.

Матрицы:

главных контуров

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

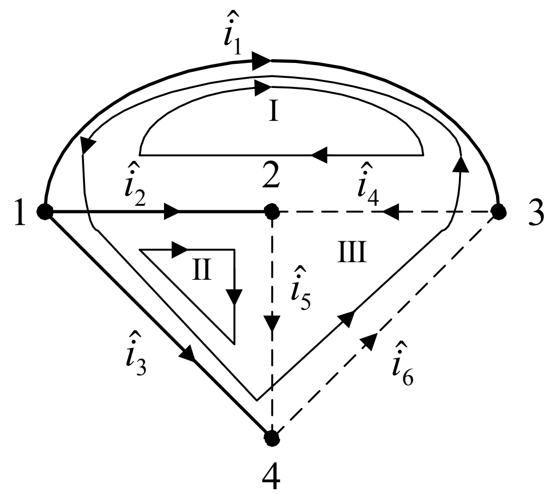

Рис. 3.5

э. д. с. **E** и токов источников **J**, сопротивлений ветвей $\mathbf{R}_b$:

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}E_1\\0\\0\\E_4\\E_5\\0\end{bmatrix};\ \mathbf{J}=\begin{bmatrix}-J_1\\0\\J_3\\0\\0\\J_6\end{bmatrix};\ \mathbf{R}_b=\begin{bmatrix}R_1&0&0&0&0&0\\0&R_2&0&0&0&0\\0&0&R_3&0&0&0\\0&0&0&R_4&0&0\\0&0&0&0&R_5&0\\0&0&0&0&0&R_6\end{bmatrix}.$$

Программа расчета в пакете Mathcad.

$R1 := 10\ \ R2 := 15\ \ R3 := 20\ \ R4 := 16\ \ R5 := 75\ \ R6 := 60\ \ E1 := 150\ \ E4 := 300\ \ E5 := 80\ \ J1 := 4.5\ \ J3 := 5\ \ J6 := 3$

$$B := \begin{pmatrix}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\-1&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\quad E := \begin{bmatrix}E1\\0\\0\\E4\\E5\\0\end{bmatrix}\quad J := \begin{bmatrix}-J1\\0\\J3\\0\\0\\J6\end{bmatrix}\quad Rb := \begin{bmatrix}R1&0&0&0&0&0\\0&R2&0&0&0&0\\0&0&R3&0&0&0\\0&0&0&R4&0&0\\0&0&0&0&R5&0\\0&0&0&0&0&R6\end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix}150\\0\\0\\300\\80\\0\end{bmatrix}\quad J = \begin{bmatrix}-4.5\\0\\5\\0\\0\\3\end{bmatrix}\quad Rb = \begin{bmatrix}10&0&0&0&0&0\\0&15&0&0&0&0\\0&0&20&0&0&0\\0&0&0&16&0&0\\0&0&0&0&75&0\\0&0&0&0&0&60\end{bmatrix}$$

$Rnn := B\cdot Rb\cdot B^T \qquad Enn := -B\cdot Rb\cdot J + B\cdot E$

$$Rnn = \begin{pmatrix}41&-15&-10\\-15&110&-20\\-10&-20&90\end{pmatrix}\qquad Enn = \begin{pmatrix}495\\180\\-475\end{pmatrix}$$

$Inn := Rnn^{-1}\cdot Enn \qquad Ib := B^T\cdot Inn \qquad I := Ib + J$

$$Inn = \begin{pmatrix}12.254\\2.705\\-3.315\end{pmatrix}\qquad Ib = \begin{bmatrix}15.569\\-9.549\\-6.02\\12.254\\2.705\\-3.315\end{bmatrix}\qquad I = \begin{bmatrix}11.069\\-9.549\\-1.02\\12.254\\2.705\\-0.315\end{bmatrix}$$

Здесь: Ib – токи обобщенных ветвей, I – токи в резисторах.