Н.Е.Савченко

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Даются сведения о методах решения задач по основным разделам курса физики, законы и формулы, примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения.

Первое издание вышло в 1977 г., второе - в 1988 г. Для слушателей факультетов довузовской подготовки и подготовительных отделений высших учебных заведений, абитуриентов, учащихся лицеев, гимназий, техникумов, старших классов средней школы. Будет полезно студентам физико-математических факультетов педагогических вузов и преподавателям физики.

Оглавление

Предисловие	3
I. МЕХАНИКА	5
1. Основы кинематики	5
2. Основы динамики	43
3. Законы сохранения в механике	84
4. Основы статики	120
5. Жидкости и газы	146
II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА	176
6. Основы молекулярно-кинетической теории. Идеальный газ	176
7. Тепловые явления. Основы термодинамики	197
III. ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ	218
8. Электростатика	218
9. Законы постоянного тока	265
10. Магнитное поле. Электромагнитная индукция	305
IV. Колебания и волны	338
11. Механические колебания и волны	338
12. Электромагнитные колебания и волны	354
V. ОПТИКА	367
13. Законы отражения и преломления света	367
14. Собирающие и рассеивающие линзы	376
15. Световые волны	397
16. Элементы теории относительности	404
VI. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА	408
17. Световые кванты	408
18. Атом и атомное ядро	417
Ответы	431
Приложения	459

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи на вступительных экзаменах по физике даются для того, чтобы проверить, насколько глубоко понимает абитуриент сущность физических законов и явлений, умеет ли он практически применять знания в конкретной физической ситуации, выбирать правильный путь решения задачи, обосновывать его, делать необходимые вычисления.

Опыт показывает, что решение задач вызывает у абитуриентов наибольшие затруднения, особенно если в задаче необходимо использовать формулы и законы из разных разделов курса физики.

Цель данного пособия – помочь поступающим в вузы обобщить и закрепить знания об основных методах решения задач по различным разделам курса физики.

Пособие имеет следующую структуру. В начале каждого параграфа даются общие указания о наиболее рациональных методах и приемах решения задач, приводятся важнейшие законы и формулы, применяемые при решении этих задач. Затем на примерах показывается, как практически пользоваться описанными методами. Далее следуют задачи для самостоятельного решения, многие из которых предлагались на вступительных экзаменах по физике в различных высших учебных заведениях.

Абитуриенту рекомендуется работать в такой последовательности: 1) повторить по школьным учебникам и другим учебным пособиям теоретический материал данного раздела; 2) ознакомиться с рекомендациями по решению задач, приводимыми в этой книге; 3) каждую задачу, рассмотренную в качестве примера, попытаться сначала решить самому и только после этого внимательно разобрать приведенное в книге решение; 4) самостоятельно решить задачи по данному разделу.

Каждая физическая задача имеет свои особенности. Поэтому, приступая к решению задачи, нужно внимательно проанализировать ее, чтобы четко представить себе описанное в ней явление или процесс, разобраться, как он протекает, вспомнить, какие закономерности лежат в его основе. Следует выяснить, каковы начальное и конечное состояния процесса, какими параметрами они описываются, что дано, что требуется найти. Нужно сделать соответствующий рисунок (схему электрической цепи, установки и т.п.). Это облегчает анализ и решение задачи.

После выяснения физической сущности задачи надо составить систему уравнений, число которых равно числу неизвестных величин, решить ее в общем виде, т.е. получить расчетную формулу. Затем проверяется правильность этой формулы действиями с единицами физических величин. (Подробнее об этом см. в начале главы "Основы кинематики".) В данном пособии такая проверка не дается, так как это значительно увеличило бы объем книги. Но правильность окончательной формулы следует проверять всегда, в том числе, разумеется, и на экзамене. Чтобы легче было делать такую проверку, в приложениях даны определяющие уравнения, обозначения и определения основных, дополнительных и некоторых производных единиц СИ.

После проверки расчетной формулы в нее надо подставить числовые значения физических величин и вычислить искомый результат с учетом правил действий над приближенными числами (см. прил. 1). Расчеты удобно производить с помощью микрокалькулятора. В данном пособии для краткости подстановка значений и вычисления не приводятся, а сразу после расчетной формулы дается результат вычислений.

Задачи для самостоятельного решения содержат, кроме заданных значений величин, все необходимые значения физических величин, которые даются в справочных таблицах, т.е. задачи приводятся в таком виде, в каком они обычно предлагаются на вступительных экзаменах.

В ряде случаев для краткости вместо модуля физической величины говорится просто о величине. Это не должно вызывать каких-либо недоразумений, так как по обозначениям ясно, о чем идет речь: векторная физическая величина обозначается буквой со стрелкой над ней, а модуль этой величины – такой же буквой, но без стрелки (например: $\vec{F}$ – сила, F –модуль этой силы).

В ответах ко всем задачам для самостоятельного решения даны расчетные формулы и значения искомых величин.

Подготовка к вступительному экзамену по физике – важный этап в совершенствовании и углублении знаний абитуриента. Поэтому автор счел возможным включить некоторые задачи, связанные с вопросами, которые не входят в программу для поступающих в вузы, но вполне доступны для выпускника средней школы. В качестве примера можно привести правила Кирхгофа, кольца Ньютона, эффект Комптона.

Третье издание значительно дополнено и переработано с учетом многолетнего опыта использования пособия на подготовительных отделениях вузов, в лицеях, гимназиях, средних школах и техникумах.

Автор выражает глубокую благодарность рецензентам: коллективу кафедры общей физики Белорусского государственного университета и лично доценту И. И. Жолнеревичу, а также учителю физики средней школы № 49 г. Минска И. А. Забелинскому за полезные замечания и советы, способствовавшие улучшению пособия.

Отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство "Вышэйшая школа".

Автор

I. МЕХАНИКА

1. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

Методические указания к решению задач

При решении кинематических задач полезно придерживаться следующего порядка выполнения заданных действий.

Внимательно прочитав задачу, проанализировать условие. Выписать основные значения заданных величин, а также некоторые дополнительные данные, выявленные при анализе задачи (например, одновременность начала движения тел, равенство координат тел в момент их встречи и т. п.).

Сделать схематический чертеж, отображающий описанное в задаче движение. Изобразить на нем траекторию движения, векторы скорости, ускорения, перемещения.

Выбрать систему координат, связанную с телом отсчета, показать положительное направление координатных осей. Координатные оси выбирают так, чтобы проекции векторов на них выражались возможно более простым образом. Выбрать начало отсчета времени.

Составить для данного движения уравнения, отражающие в векторной форме математическую связь между изображенными на схеме физическими величинами. Чтобы сделать расчеты, нужно записать эти уравнения в скалярной форме, т. е. в проекциях на координатные оси. При этом необходимо учитывать, что проекция вектора на ось считается положительной, если от проекции начала к проекции конца вектора нужно идти по направлению оси, и отрицательной в противном случае.

Решить составленную систему уравнений относительно искомых величин, т. е. получить расчетные формулы. Затем для проверки правильности расчетных формул в правую часть каждой из них вместо обозначений физических величин нужно подставить обозначения единиц этих величин в СИ, произвести над ними необходимые действия и убедиться, что полученное в результате обозначение единицы соответствует искомой величине. Если такого соответствия нет, то это означает, что задача решена неверно.

Над обозначениями единиц физических величин можно производить действия умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Действия сложения и вычитания этих обозначений не имеют смысла.

Если в правой части расчетной формулы имеется алгебраическая сумма, то нужно сначала проверить, одинаково ли выражаются через обозначения единиц слагаемые. Если одинаково, то соответствующее выражение надо подставить в формулу вместо суммы, а затем произвести остальные действия. Поясним это на примере.

В результате решения задачи получена расчетная формула

$$t = \frac{\sqrt{v^2 + 2gh}}{g},$$

где t – время; v – скорость; g – ускорение свободного падения; h – высота. Проверим, дает ли эта формула единицу времени. Сначала проверим каждое слагаемое:

$$[v]^2 = \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2},\ [g][h] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\text{м} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

Слагаемые выражаются одинаково. Следовательно,

$$\left[\frac{\sqrt{v^2 + 2gh}}{g}\right] = \frac{\sqrt{\dfrac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}}{\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}} = \text{с}.$$

Получили обозначение единицы времени, соответствующее искомой величине, обозначение которой стоит в левой части формулы, т. е. с = $[t]$.

При такой проверке рационально применять в обозначениях единиц только горизонтальную черту, так как это облегчает правильное выполнение необходимых действий.

Убедившись, что расчетные формулы дают единицы искомых величин, надо после этого выразить все заданные значения величин в единицах СИ, подставить в расчетные формулы и произвести вычисления. При подстановке числовые значения величин считаются положительными, так как знаки проекций векторов учтены при записи уравнений.

Проанализировать результат и сформулировать окончательный ответ.

Основные законы и формулы

При переменном движении с постоянным ускорением *скорость тела в любой момент времени* t определяется уравнением

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t,$$

где $\vec{v}_0$ – начальная скорость; $\vec{a}$ – ускорение.

Этому векторному уравнению в случае движения на плоскости соответствуют два уравнения для проекций скорости v_x и v_y на координатные оси OX и OY:

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \; v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Координаты тела в любой момент времени t определяются уравнениями:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \;\; y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2},$$

где x_0, y_0 – координаты в начальный момент времени. Эти формулы применимы для описания как прямолинейного, так и криволинейного движения. Важно лишь, чтобы ускорение было постоянным по модулю и направлению.

При $\vec{a} = \vec{0}$ приведенные выше уравнения для скорости и координат описывают равномерное движение.

Проекция перемещения $\vec{s}$ на ось OX

$$s_x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \; s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}.$$

Средняя скорость – векторная величина

$$\langle\vec{v}\rangle = \vec{s}/t,$$

где $\vec{s}$ – перемещение, которое было совершено за промежуток времени t.

Средняя скорость прохождения пути – скалярная величина

$$v_{ср} = l/t,$$

где l – путь, пройденный телом за промежуток времени t.

При равномерном движении тела по окружности радиуса R *линейная скорость*

$$v = 2\pi R/T = 2\pi R n = \omega R,$$

где T – период вращения; n – частота вращения; ω – угловая скорость:

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi n.$$

Ускорение при равномерном движении тела по окружности (*центростремительное*, или *нормальное, ускорение*) направлено к центру окружности. Модуль этого ускорения

$$a_n = v^2/R = \omega^2 R.$$

В случае *неравномерного движения* тела по окружности ускорение в данной точке траектории есть векторная сумма двух составляющих:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau,$$

где $\vec{a}_n$ – центростремительное (нормальное) ускорение, которое направлено из этой точки по радиусу (нормали к касательной) к центру окружности и характеризует быстроту изменения скорости по направлению; $\vec{a}_\tau$ – *касательное* (*тангенциальное*) *ускорение*, которое направлено по касательной и характеризует быстроту изменения модуля скорости. Модуль центростремительного ускорения $a_n = v^2/R$, где v – модуль скорости тела в данной точке траектории; R – радиус окружности.

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}.$$

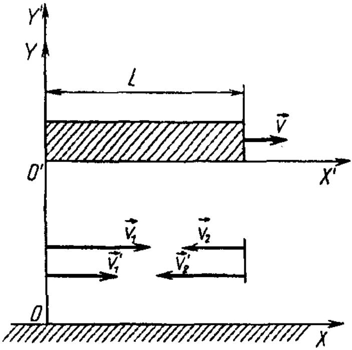
При равномерном движении по окружности $a_\tau = 0$, $a = a_n = v^2/R$.

Классический закон сложения скоростей: скорость тела относительно неподвижной системы отсчета равна векторной сумме скорости тела относительно движущейся системы отсчета и скорости движущейся системы относительно неподвижной: $\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}$.

Примеры решения задач

1. Колонна мотоциклистов движется по шоссе со скоростью $v = 10$ м/с, растянувшись на расстояние $l = 5$ км. Из хвоста и головы колонны одновременно выезжают навстречу друг другу два мотоциклиста со скоростями $v_1 = 20$ м/с и $v_2 = 15$ м/с соответственно. За какое время первый мотоциклист достигнет головы, а второй – хвоста колонны?

Р е ш е н и е. Движущуюся систему отсчета свяжем с колонной. За начало координат O' примем хвост колонны, а за положительное направление оси $O'X'$ – направление движения колонны (рис. 1). Неподвижную систему отсчета свяжем с землей, начало координат O совместим с точкой, где находился хвост колонны в момент выезда мотоциклистов, положительное направление оси OX такое же, как и оси $O'X'$. Обозначим через $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ скорости первого и второго мотоциклистов в движущейся системе отсчета.



Р и с. 1

Согласно закону сложения скоростей, $\vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}$, $\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}$, откуда:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}, \ \ \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}.$$

Найдем проекции векторов $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ на ось $O'X'$, учитывая при этом, что проекция разности векторов равна разности их проекций (на одну и ту же ось):

$$v_1' = v_1 - v, \ \ -v_2' = -v_2 - v, \text{ или } v_2' = v_2 + v.$$

Запишем уравнение, выражающее зависимость координаты первого мотоциклиста от времени t:

$$x_1' = (v_1 - v)t. \qquad (1)$$

В момент времени $t = t_1$ мотоциклист достигнет головы колонны; его координата $x_1' = l$. На основании уравнения (1) получим $l = (v_1 - v)t$, откуда

$$t_1 = l/(v_1 - v). \qquad (2)$$

Зависимость координаты второго мотоциклиста от времени выразится уравнением

$$x_2' = l - (v_2 + v)t. \qquad (3)$$

В момент времени $t = t_2$ второй мотоциклист достигнет хвоста колонны, координата которого $x_2' = 0$. Согласно уравнению (3), получим $0 = l - (v_2 + v)t_2$, откуда

$$t_2 = l/(v_2 + v). \qquad (4)$$

По формулам (2) и (4) найдем: $t_1 = 5 \cdot 10^2$ с, $t_2 = 2 \cdot 10^2$ с.

Эту задачу можно решить иначе. Рассматривая движение колонны мотоциклистов относительно неподвижной системы отсчета, запишем уравнения для координат первого (x_1) и второго (x_2) мотоциклистов, а также для координат головы (x_3) и хвоста (x_4) колонны:

$$x_1 = v_1 t,\ x_2 = l - v_2 t,\ x_3 = l + vt,\ x_4 = vt.$$

В момент времени $t = t_1$, когда первый мотоциклист достигнет головы колонны, будет иметь место равенство $x_1 = x_3$, т. е.

$$v_1 t_1 = l + v t_1,\ t_1 = l/(v_1 - v).$$

Второй мотоциклист достигнет хвоста колонны в момент времени $t = t_2$, при этом $x_2 = x_4$. Следовательно,

$$l - v_2 t_2 = v t_2,\ t_2 = l/(v_2 + v).$$

Таким образом, независимо от выбора системы отсчета результат получается один и тот же.

2. Два поезда идут навстречу друг другу со скоростями $v_1 = 12$ м/с и $v_2 = 18$ м/с. Пассажир первого поезда замечает, что второй поезд проходит мимо него в течение $t = 8$ с. Какова длина l второго поезда?

Р е ш е н и е. Свяжем движущуюся систему отсчета с первым поездом, за начало координат O' примем местонахождение пассажира, за положительное направление оси $O'X'$ − направление движения второго поезда. Неподвижная система отсчета связана с землей (рис. 2). Согласно закону сложения скоростей, $\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_1$, где $\vec{v}_2'$ − скорость второго поезда относительно первого. Отсюда $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Найдем проекцию вектора $\vec{v}_2'$ на ось $O'X'$:

$$v_2' = v_2 - (-v_1) = v_2 + v_1.$$

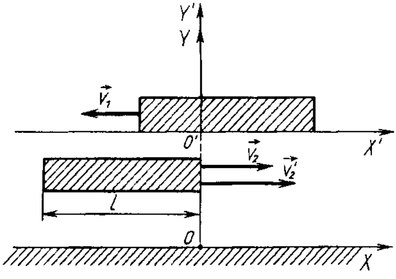


Рис. 2

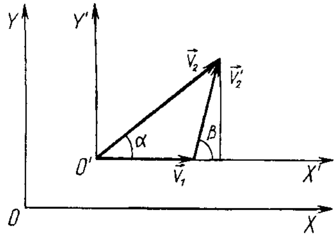


Рис. 3

В момент времени t координата хвоста второго поезда

$$x' = -l + (v_2 + v_1)t.$$

В момент времени $t = t_1$, когда хвост второго поезда проходит мимо пассажира первого поезда, $x' = 0$, т. е. $0 = -l + (v_2 + v_1)t_1$. Отсюда

$$l = (v_2 + v_1)t_1.$$

Подставив числовые значения, получим $l = 2{,}4 \cdot 10^2$ м.

3. В море движутся два корабля со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ под углом α друг к другу. Найти скорость второго корабля относительно первого.

Решение. Движущуюся систему координат $X'O'Y'$ свяжем с первым кораблем, приняв за положительное направление оси $O'X'$ направление скорости первого корабля (рис. 3). Неподвижная система координат XOY связана с водой. В системе $X'O'Y'$ второй корабль движется со скоростью $\vec{v}_2'$. Согласно закону сложения скоростей, $\vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \vec{v}_1$, откуда $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. В проекциях на оси координат $O'X'$ и $O'Y'$ получим:

$$v'_{2x'} = v_2 \cos\alpha - v_1, \quad v'_{2y'} = v_2 \sin\alpha.$$

Зная проекции вектора $\vec{v}_2'$, находим его модуль:

$$v_2' = \sqrt{(v_2 \cos\alpha - v_1)^2 + (v_2 \sin\alpha)^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha}.$$

Направление вектора $\vec{v}_2'$ определяем углом β, для которого находим:

$$\cos\beta = \frac{v'_{2x'}}{v_2'} = \frac{v_2 \cos\alpha - v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha}}.$$

4. Самолет взлетает с аэродрома под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с постоянной скоростью $v = 60$ м/с. Какой высоты h достигнет он через $t_1 = 10$ с и на какое расстояние s (в горизонтальном направлении) удалится от места взлета?

Р е ш е н и е. Систему координат свяжем с землей, поместив начало координат в точку взлета, направив ось OX горизонтально, а ось OY вертикально вверх (рис. 4).

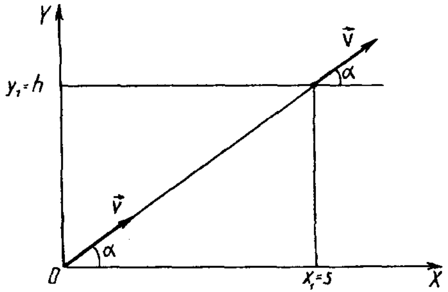


Рис. 4

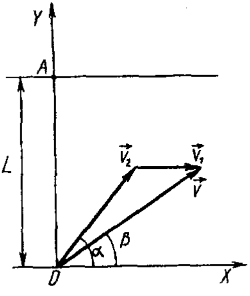


Рис. 5

Выразим зависимость координат самолета от времени:

$$x = v_x t = vt\cos\alpha, \quad y = v_y t = vt\sin\alpha.$$

В момент времени $t = t_1$ будет $x_1 = s$, $y_1 = h$. Следовательно,

$$s = vt_1\cos\alpha, \quad s = 5{,}2\cdot10^2 \text{ м},$$
$$h = vt_1\sin\alpha, \quad h = 3{,}0\cdot10^2 \text{ м}.$$

5. Катер пересекает реку. Скорость течения $\vec{v}_1$, скорость катера относительно воды $\vec{v}_2$. Под каким углом α к берегу должен идти катер, чтобы пересечь реку: за минимальное время; по кратчайшему пути?

Р е ш е н и е. Неподвижную систему координат XOY свяжем с берегом, приняв за начало координат точку O, из которой катер начинает двигаться, и направив ось OX по течению, вдоль берега, а ось OY перпендикулярно берегу (рис. 5). Относительно системы координат XOY катер движется со скоростью $\vec{v} = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$. Найдем проекции вектора $\vec{v}$ на оси OX и OY:

$$v_x = v_2\cos\alpha + v_1, \quad v_y = v_2\sin\alpha.$$

Запишем уравнения, выражающие зависимость координат катера от времени:

$$x = (v_1 + v_2 \cos\alpha)t, \quad y = (v_2 \sin\alpha)t.$$

Катер достигнет другого берега в момент времени $t = t_1$, когда $y = L$, где L – ширина реки. Следовательно, время, необходимое для пересечения реки, $t_1 = L/(v_2 \sin\alpha)$. Оно будет минимальным при $\sin\alpha = 1$, т. е. $\alpha = \pi/2$. Это означает, что катер должен держать курс перпендикулярно берегу.

Чтобы пересечь реку по кратчайшему пути из точки O в точку A, катер должен идти так, чтобы выполнялось равенство $x = 0$, т. е. $(v_1 + v_2 \cos\alpha)t = 0$. Отсюда находим $\cos\alpha = -v_1/v_2$, т. е. курс катера должен быть таким, чтобы выполнялись условия $\alpha > \pi/2$ и $|\cos\alpha| = v_1/v_2$. Следовательно, пересечь реку по кратчайшему пути катер сможет лишь при следующих условиях: $v_2 > v_1$, $\beta = \pi/2$.

6. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Через какое время после начала движения и с какой скоростью тело пройдет точку, находящуюся на высоте h? Каковы максимальная высота подъема тела и время полета? Сопротивление воздуха не учитывать.

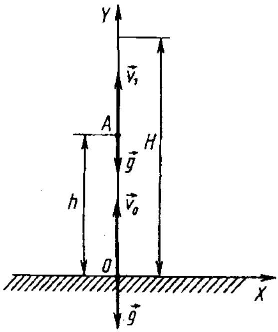
Р е ш е н и е. Координатную ось OY направим вертикально вверх, начало координат O совместим с точкой бросания (рис. 6). Время будем отсчитывать с момента бросания. Тогда координата тела и проекция его скорости на ось OY в момент времени t равны соответственно:

$$y = v_0 t - gt^2/2, \; v_y = v_0 - gt. \tag{1}$$

Для точки A, находящейся на высоте h, $y = h$. Решив квадратное уравнение $h = v_0 t - gt^2/2$ относительно t, получим два значения:

$$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g},$$

$$t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$



Р и с. 6

Таким образом, тело побывает в точке A дважды: первый раз в момент времени t_1, двигаясь вверх, и второй раз в момент времени t_2, двигаясь вниз. Скорость тела в эти моменты времени определим, подставив значения t_1 и t_2 во второе уравнение системы (1):

$$v_{1y} = v_0 - gt_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh},$$
$$v_{2y} = v_0 - gt_2 = -\sqrt{v_0^2 - 2gh}. \qquad (2)$$

Из последних формул видно, что $|v_2| = |v_1|$, т. е. модуль скорости тела при движении вниз равен модулю скорости тела в этой же точке при движении вверх. Это справедливо для любой точки траектории. В частности, для точки бросания ($h = 0$) на основании формул (2) получим: $v_{1y} = v_0$, $v_{2y} = -v_0$, $|v_1| = |v_2| = v_0$, т. е. модуль скорости тела в момент падения равен модулю скорости в момент бросания.

Время подъема тела t_3 определим из условия, что в верхней точке траектории скорость равна нулю: $0 = v_0 - gt_3$. Отсюда $t_3 = v_0/g$.

Максимальную высоту подъема найдем, подставив значение t_3 в первое уравнение системы (1):

$$H = v_0 t_3 - \frac{gt_3^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

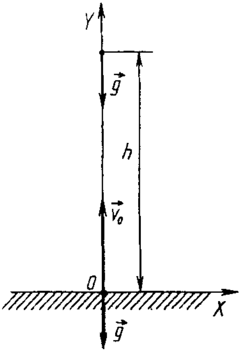
Учитывая, что в момент падения координата тела равна нулю, найдем время полета: $v_0 t_4 - gt_4^2/2 = 0$, откуда $t_4 = 2v_0/g$. (Второй корень $t_4 = 0$ соответствует моменту бросания.) Таким образом, $t_4 = 2t_3$. Следовательно, время падения тела равно времени его подъема до верхней точки траектории.

7. Одно тело брошено с поверхности земли вертикально вверх с некоторой начальной скоростью, а другое падает с высоты h без начальной скорости. Движения начались одновременно и происходят по одной прямой. Найти начальную скорость первого тела, если известно, что через промежуток времени t после начала движения расстояние между телами равно s.

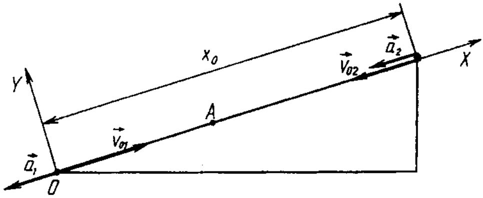
Р е ш е н и е. За начало отсчета примем точку бросания, координатную ось OY направим вертикально вверх (рис. 7). Тогда в момент времени t координаты первого и второго тел равны соответственно:

$$y_1 = v_0 t - gt^2/2, \; y_2 = h - gt^2/2,$$

где v_0 – начальная скорость первого тела.



Р и с. 7



Р и с. 8

Расстояние между телами равно разности их координат: $s = y_2 - y_1 = h - v_0 t$. Отсюда $v_0 = (h - s)/t$.

8. Два велосипедиста одновременно начали движение по наклонной плоскости: один, имея начальную скорость $v_{01} = 4{,}0$ м/с, равнозамедленно* поднимается вверх с ускорением, модуль которого $a_1 = 0{,}10$ м/с^2, другой, имея начальную скорость $v_{02} = 1{,}0$ м/с, равноускоренно** спускается вниз с ускорением, модуль которого $a_2 = 0{,}40$ м/с^2. Через какое время t они встретятся и какие пути s_1 и s_2 пройдет каждый до встречи, если в начальный момент расстояние между ними $x_0 = 150$ м?

Р е ш е н и е. Начало координат совместим с начальной точкой движения первого велосипедиста, ось OX направим по направлению его движения (рис. 8). Тогда зависимости координат первого и второго велосипедистов от времени выразятся уравнениями:

$$x_1 = v_{01}t - a_1 t^2/2, \quad x_2 = x_0 - v_{02}t - a_2 t^2/2.$$

В точке встречи A $x_1 = x_2$, поэтому

$$v_{01}t - a_1 t^2/2 = x_0 - v_{02}t - a_2 t^2/2.$$

Отсюда $(a_2 - a_1)t^2 + 2(v_{01} + v_{02})t - 2x_0 = 0$. Решив это квадратное уравнение относительно t, получим

---

* *Равнозамедленным* называется прямолинейное движение с постоянным ускорением, при котором модуль скорости уменьшается.

** *Равноускоренным* называется прямолинейное движение с постоянным ускорением, при котором модуль скорости увеличивается.

$$t_1 = \frac{-(v_{01} + v_{02}) + \sqrt{(v_{01} + v_{02})^2 + 2x_0(a_2 - a_1)}}{a_2 - a_1}.$$

Подставив значения величин и произведя вычисления, получим $t_1 = 19$ с.

Второй корень этого уравнения $t_2 < 0$ отбрасываем как не имеющий физического смысла при данном выборе начала отсчета времени. Первый велосипедист пройдет до встречи путь

$$s_1 = x_1 = v_{01}t_1 - a_1t_1^2/2,\ s_1 = 58 \text{ м},$$

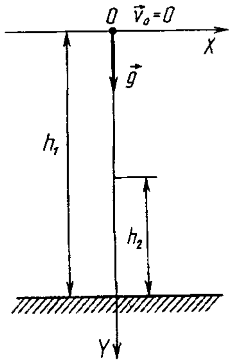
второй велосипедист – путь

$$s_2 = x_0 - s_1,\ s_2 = 92 \text{ м}.$$

9. Тело, падающее без начальной скорости с некоторой высоты h_1, прошло последние $h_2 = 30$ м за время $t_2 = 0{,}5$ с. Определить высоту падения h_1 и время падения t_1. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. За начало координат примем точку O, находящуюся на высоте h_1 от поверхности земли, ось OY направим вертикально вниз (рис. 9). Время будем отсчитывать с момента начала движения тела. В начальный момент времени $y_0 = 0$, $v_{0y} = 0$. Проекция ускорения на ось OY $a_y = g$. Тогда уравнение, выражающее зависимость координаты тела от времени, будет иметь вид

$$y = gt^2/2. \tag{1}$$



Р и с. 9

В момент времени $t_1 - t_2$ координата тела будет равна

$$h_1 - h_2 = \frac{g(t_1 - t_2)^2}{2}. \tag{2}$$

Когда тело упадет на землю, $y = h_1$, $t = t_1$. Согласно уравнению (1), $h_1 = gt_1^2/2$. Подставив это значение h_1 в уравнение (2), получим

$$\frac{gt_1^2}{2} - h_2 = \frac{g(t_1 - t_2)^2}{2}.$$

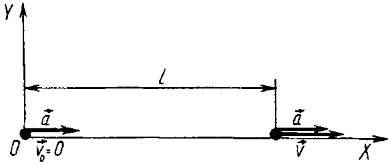
Отсюда после преобразований найдем

$$t_1 = \frac{t_2}{2} + \frac{h_2}{gt_2}.$$

Произведя вычисления, получим: $h_1 = 2 \cdot 10^2$ м, $t_1 = 6$ с.

10. Самолет для взлета должен приобрести скорость $v = 250$ км/ч. Сколько времени длится разгон, если эта скорость достигается в конце взлетной полосы длиной $l = 1000$ м? Каково ускорение самолета? Какова средняя скорость самолета на этом участке? Движение самолета считать равноускоренным.

Р е ш е н и е. Начало координат совместим с исходным положением самолета, ось OX направим вдоль траектории (рис. 10). Время будем отсчитывать от момента начала движения. Тогда уравнения, выражающие зависимость координаты x и проекции скорости v_x от времени, будут иметь вид:



Р и с. 10.

$$x = at^2/2, \ v_x = at. \qquad (1)$$

В конце полосы $x = l$, $v_x = v$, $t = t_1$. Подставив эти значения в уравнения (1), получим:

$$l = at_1^2/2, \ v = at_1.$$

Отсюда найдем:

$$t_1 = 2l/v, \ a = v^2/(2l). \qquad (2)$$

Средняя скорость самолета на этом участке

$$v_{ср} = l/t_1 = v/2. \qquad (3)$$

Выразив l и v в единицах СИ, получим по формулам (2) и (3): $t_1 = 29$ с, $a = 2{,}4$ м/с^2, $v_{ср} = 35$ м/с.

11. Лифт, поднимаясь равноускоренно в течение первого промежутка времени $t_1 = 2$ с, достигает скорости $v_1 = 4$ м/с, с которой продолжает подъем в течение второго промежутка времени $t_2 = 4$ с. Затем лифт движется равнозамедленно и к концу третьего промежутка $t_3 = 3$ с останавливается. Определить высоту подъема лифта. Решить задачу также графически.

Р е ш е н и е. Высота подъема лифта

$$h = h_1 + h_2 + h_3,$$

где h_1, h_2, h_3 – пути, пройденные лифтом за промежутки времени t_1, t_2, t_3 соответственно.

Учитывая, что в течение первого и третьего промежутков времени лифт двигался с постоянными ускорениями, найдем средние скорости лифта на участках h_1 и h_3 как полусуммы начальных и конечных скоростей:

$$v_{\text{ср}1} = \frac{0 + v_1}{2} = \frac{v_1}{2},\ v_{\text{ср}3} = \frac{v_1 + 0}{2} = \frac{v_1}{2}.$$

Пройденные за время t_1 и t_3 пути равны соответственно:

$$h_1 = v_{\text{ср}1} t_1 = \frac{v_1 t_1}{2},\quad h_3 = v_{\text{ср}3} t_3 = \frac{v_1 t_3}{2},$$

За время t_2, двигаясь равномерно, лифт прошел путь $h_2 = v_1 t_2$. Таким образом, высота подъема лифта

$$h = \frac{v_1 t_1}{2} + v_1 t_2 + \frac{v_1 t_3}{2} = \frac{v_1}{2}(t_1 + 2t_2 + t_3),\ h = 26 \text{ м}.$$

Решим задачу другим способом. Построим график зависимости проекции скорости лифта на ось OY, направленную вертикально вверх, от времени t (рис. 11). Вы-

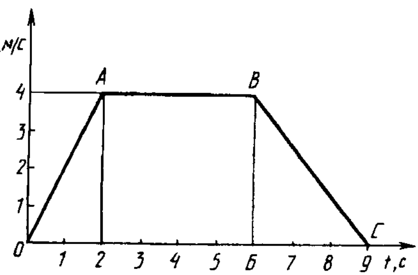


Рис. 11

сота подъема лифта h численно равна площади трапеции $OABC$:

$$h = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_2}{2} v_1 = \frac{v_1}{2}(t_1 + 2t_2 + t_3),\ h = 26 \text{ м}.$$

12. Тело, двигаясь с постоянным ускорением из состояния покоя, прошло некоторый путь. Чему равно отношение средней скорости тела на второй половине пути к средней скорости на первой половине пути?

Р е ш е н и е. Пусть l – путь, пройденный телом. Тогда средние скорости тела на первой и второй половинах пути равны соответственно:

$$v_{\text{ср}1} = l/(2t_1),\ v_{\text{ср}2} = l/(2t_2),$$

где t_1, t_2 – промежутки времени, за которые пройдены первая и вторая половины пути.

Если a – ускорение тела, то $l/2 = at_1^2/2$, откуда $t_1 = \sqrt{l/a}$.

Аналогично найдем, что весь путь l тело прошло за время $t = \sqrt{2l/a}$. Следовательно,

$$t_2 = t - t_1 = \sqrt{\frac{2l}{a}} - \sqrt{\frac{l}{a}} = \sqrt{\frac{l}{a}}\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Искомое отношение средних скоростей

$$\frac{v_{\text{ср}2}}{v_{\text{ср}1}} = \frac{t_1}{t_2},\ \frac{v_{\text{ср}2}}{v_{\text{ср}1}} = 2{,}4.$$

13. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 10$ м/с. На какой высоте скорость тела будет в $n = 2$ раза меньше? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Начало координат совместим с точкой бросания, ось OY направим вертикально вверх (см. рис. 6). Время будем отсчитывать с момента бросания. Тогда зависимость от времени координаты тела и проекции его скорости на ось OY выразятся уравнениями:

$$y = v_0 t - gt^2/2,\ v_y = v_0 - gt. \quad (1)$$

При $v = v_0/n$ координаты тела $y = h$, $t = t_1$. На основании уравнений (1) получим:

$$h = v_0 t_1 - gt_1^2/2, \quad (2)$$
$$v_0/n = v_0 - gt_1. \quad (3)$$

Выразив t_1 из формулы (3) и подставив его в выражение (2), получим после преобразований и вычислений

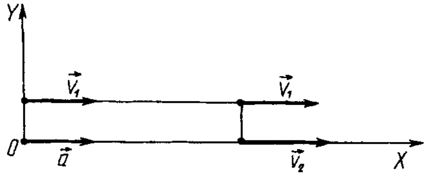
$$h = \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),\ h = 3{,}8 \text{ м}.$$

14. Велосипедист ехал по прямолинейному участку шоссе со скоростью $v_1 = 15$ м/с. Когда он поравнялся с автомобилем, тот начал двигаться из состояния покоя равноускоренно. Найти скорость автомобиля в тот момент, когда он догонит велосипедиста.

Р е ш е н и е. Совместим начало координат с начальной точкой траектории автомобиля. За положительное направление оси OX примем направление скорости автомобиля и велосипедиста (рис. 12). Тогда движение автомобиля описывается кинематическими уравнениями:

$$x_2 = at^2/2, \quad v_2 = at,$$

где a – ускорение автомобиля; v_2 – его скорость в момент времени t.



Р и с. 12

Координата велосипедиста $x_1 = v_1 t$, так как он движется равномерно. В момент времени $t = t_1$, когда автомобиль догонит велосипедиста, их координаты будут одинаковы, т. е. $x_1 = x_2$. Следовательно,

$$v_1 t_1 = a t_1^2/2. \tag{1}$$

Скорость автомобиля в это время

$$v_2 = a t_1. \tag{2}$$

Из уравнения (1) получим

$$2v_1 = a t_1. \tag{3}$$

Сравнивая выражения (2) и (3), находим $v_2 = 2v_1$, $v_2 =$ $= 30$ **м/с**.

15. Двигаясь прямолинейно равнозамедленно, тело в начальный момент времени имело скорость $v_0 = 0{,}40$ м/с. В течение пятой секунды оно прошло путь $l_{45} = 0{,}31$ м. Найти модуль ускорения тела и путь, пройденный телом до остановки.

Р е ш е н и е. Выберем ось OX так, чтобы она была сонаправлена с вектором $\vec{v}_0$. Тогда проекции начальной скорости $\vec{v}_0$ и ускорения $\vec{a}$ на эту ось – соответственно $v_{0x} = v_0$, $a_x = -a$. Путь, пройденный телом за время $t_5 = 5$ с,

$$l_5 = v_0 t_5 - a t_5^2/2,$$

а за время $t_4 = 4$ с тело проходит путь

$$l_4 = v_0 t_4 - a t_4^2/2.$$

Путь, пройденный телом в течение пятой секунды,

$$l_{45} = l_5 - l_4 = v_0(t_5 - t_4) - \frac{a\left(t_5^2 - t_4^2\right)}{2}.$$

Отсюда найдем модуль ускорения тела:

$$a = \frac{2(v_0(t_5 - t_4) - l_{45})}{t_5^2 - t_4^2}. \qquad (1)$$

Пусть τ – время, за которое тело прошло путь l до остановки. Тогда

$$l = v_0\tau - a\tau^2/2. \qquad (2)$$

Зависимость проекции скорости от времени выражается формулой $v_x = v_0 - at$. В момент остановки $v_x = 0$, $t = \tau$. Следовательно, $\tau = v_0/a$. Подставив это значение в выражение (2), получим $l = v_0^2/(2a)$. В эту формулу подставим значение (1) и найдем путь, пройденный телом до остановки:

$$l = \frac{v_0^2\left(t_5^2 - t_4^2\right)}{4(v_0(t_5 - t_4) - l_{45})}. \qquad (3)$$

Правильность формул (1) и (3) проверим действиями с единицами величин:

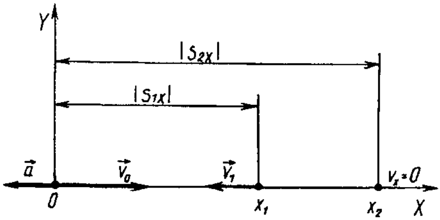
$$[v_0][t] = \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{с} = \text{м}, \quad [l_{45}] = \text{м}, \left[\frac{2(v_0(t_5 - t_4) - l_{45})}{t_5^2 - t_4^2}\right] = \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = [a],$$

$$\frac{\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2 \cdot \text{с}^2}{\text{м}} = \text{м} = [l].$$

После подстановки числовых значений и вычислений получим: $a = 0{,}02$ м/с^2, $l = 4$ м.

16. Тело движется по горизонтальной плоскости прямолинейно со скоростью $v_0 = 30{,}0$ м/с. Через $t_1 = 20{,}0$ с после начала действия постоянной силы оно приобретает скорость $v_1 = 20{,}0$ м/с, направленную в обратную сторону. Найти модуль перемещения, совершенного телом за это время, пройденный телом путь и модуль ускорения.

Р е ш е н и е. Начало координат совместим с точкой O, в которой находилось тело в момент начала действия постоянной силы, и время будем отсчитывать с этого момента. Пусть ось OX сонаправлена с вектором скорости $\vec{v}_0$ (рис. 13). Поскольку направление скорости изменилось на



Р и с. 13

противоположное, то это значит, что под действием постоянной силы тело двигалось с постоянным ускорением $\vec{a}$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}_0$ направлены противоположно друг другу. Движение тела будет описываться кинематическими уравнениями:

$$x = x_0 + v_{0x}t + a_x t^2/2,$$
$$v_x = v_{0x} + a_x t. \qquad (1)$$

Проекция вектора перемещения $\vec{s}$ на ось OX равна изменению координаты x:

$$s_x = x - x_0 = v_{0x}t + a_x t^2/2. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) найдем

$$a_x = (v_x - v_{0x})/t \qquad (3)$$

и, подставив это значение в выражение (2), получим

$$s_x = v_{0x}t + \frac{(v_x - v_{0x})t^2}{2t} = \frac{v_{0x} + v_x}{2}t. \qquad (4)$$

В момент времени t_1

$$s_{1x} = \frac{v_{0x} + v_{1x}}{2} t_1.$$

В выбранной системе координат $v_{0x} = v_0$, $v_{1x} = -v_1$, следовательно,

$$s_{1x} = \frac{v_0 - v}{2} t_1, \; s_{1x} = 100 \text{ м}.$$

Так как тело движется по оси OX, модуль перемещения $s_1 = |s_{1x}| = 100$ м.

Как видно из рис. 13, путь, пройденный телом за время t_1,

$$l = |s_{1x}| + 2(|s_{2x}| - |s_{1x}|). \qquad (5)$$

Воспользовавшись выражением (4), найдем

$$s_{2x} = \frac{v_{0x} + v_{2x}}{2} t_2, \qquad (6)$$

где t_2 – момент времени, в который $v_{2x} = 0$ (направление вектора скорости изменялось на противоположное).

На основании уравнения (1) получим $0 = v_0 + a_x t_2$, откуда

$$t_2 = -v_0 / a_x. \qquad (7)$$

Согласно формуле (3),

$$a_x = (-v_1 - v_0)/t_1. \qquad (8)$$

Подставив это значение в выражение (7), получим

$$t_2 = v_0 t_1 / (v_1 + v_0).$$

В формулу (6) подставим $v_{0x} = v_0$, $v_{2x} = 0$ и значение t_2. В результате будем иметь:

$$s_{2x} = \frac{v_0^2 t_1}{2(v_0 + v_1)}, \; s_{2x} = 180 \text{ м}.$$

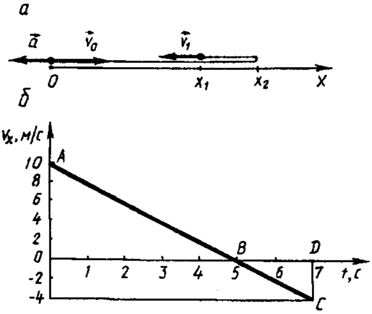
По формуле (5) получим $l = 260$ м.

Использовав выражение (8), найдем модуль ускорения тела:

$$a = |a_x| = \left|\frac{-v_1 - v_0}{t_1}\right|, \; a = 2{,}5 \text{ м/с}^2.$$

17. Тело двигалось прямолинейно с постоянной скоростью $v_0 = 10$ м/с. В некоторый момент времени на тело начала действовать сила, сообщающая ему ускорение, модуль которого $a = 2{,}0$ м/с^2, а направление противоположно вектору скорости. Найти модуль перемещения тела через $t_1 = 7{,}0$ с после начала действия силы и путь, пройденный телом за это время.

Р е ш е н и е. *I способ* (аналитический). Начало координат совместим с точкой O, в которой тело находилось в момент времени, когда начала действовать сила, ось OX направим так же, как и вектор $\vec{v}_0$ (рис. 14, a). Составим уравнения, выражающие зависимость координаты тела x и проекции скорости v_x от времени:



Р и с. 14

$$x = v_0 t - \frac{at^2}{2}, \qquad (1)$$

$$v_x = v_0 - at. \qquad (2)$$

Найдем координату тела в момент времени $t_1 = 7{,}0$ с:

$$x_1 = v_0 t_1 - a t_1^2/2,\ x_1 = 21 \text{ м}.$$

Модуль перемещения

$$s = |x_1 - x_0|,\ s = 21 \text{ м}.$$

При $t = t_1$ проекция скорости

$$v_x = v_0 - a t_1,\ v_x = -4{,}0 \text{ м/с}.$$

Мы видим, что $v_{0x} > 0$, а $v_{1x} < 0$. Следовательно, направление вектора скорости изменилось на противоположное. Найдем, в какой момент времени t_2 это произошло. В этот момент $v_{2x} = 0$, т. е. $0 = v_0 - a t_2$. Отсюда

$$t_2 = v_0/a,\ t_2 = 5{,}0 \text{ с}.$$

В этот момент времени координата

$$x_2 = v_0 t_2 - a t_2^2/2,\ x_2 = 25 \text{ м}.$$

Теперь из рисунка видно, что телом пройден путь

$$l = x_2 + (x_2 - x_1),\ l = 29 \text{ м}.$$

II способ (графический). Проекция скорости на ось OX

$$v_x = v_0 - at.$$

После подстановки числовых значений получим

$$v_x = 10 - 2t.$$

Построим график этой функции (рис. 14, *б*). Проекция перемещения на ось OX равна алгебраической сумме площадей треугольников AOB и BCD, причем площадь первого из них берется со знаком «плюс», а второго – со знаком «минус»:

$$s_x = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 - \frac{1}{2}(7 - 5) \cdot 4 = 21 \text{ м}.$$

Следовательно, модуль перемещения $s = |s_x| = 21$ м.

Чтобы найти путь, пройденный телом, сложим площади этих треугольников, считая положительной не только площадь треугольника AOB, но и треугольника BCD:

$$l = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 + \frac{1}{2}(7 - 5) \cdot 4 = 29 \text{ м}.$$

18. Расстояние $s = 18$ км между двумя железнодорожными станциями поезд проходит за время $t = 20$ мин. Первые $t_1 = 5$ мин он идет равноускоренно (без начальной скорости), а затем – равнозамедленно, пока не остановится. Определить ускорение поезда на пути разгона.

Р е ш е н и е. Пусть s_1 – путь, пройденный поездом за время t_1, а s_2 – путь, пройденный до остановки за оставшееся время $t - t_1$. Тогда

$$s = s_1 + s_2. \qquad (1)$$

За время t_1, двигаясь с ускорением a, поезд проходит путь

$$s_1 = at_1^2/2, \qquad (2)$$

приобретая скорость $v_1 = at_1$. Двигаясь далее равнозамедленно, поезд проходит путь

$$s_2 = v_{\text{ср}}(t - t_1),$$

где $v_{\text{ср}}$ – средняя скорость поезда. Так как при $a = \text{const}$

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_1 + 0}{2} = \frac{v_1}{2} = \frac{at_1}{2},$$

то

$$s_2 = \frac{at_1}{2}(t - t_1). \qquad (3)$$

Подставив выражения (2) и (3) в равенство (1), получим

$$s = \frac{at_1^2}{2} + \frac{at_1}{2}(t - t_1).$$

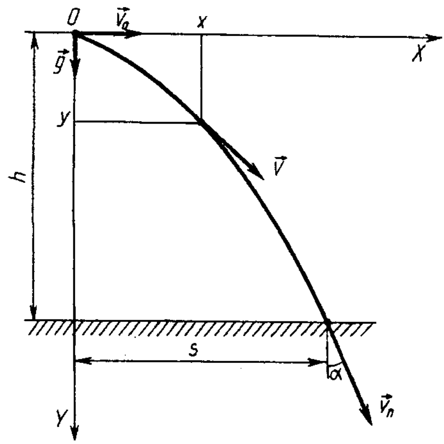
Отсюда ускорение поезда $a = 2s/(tt_1)$. Выразив значения заданных величин в СИ и подставив их в последнюю формулу, получим $a = 0{,}1$ м/с^2.

19. Камень бросили с вышки в горизонтальном направлении. Через $t_п = 2{,}0$ с он упал на землю на расстоянии $s = 40$ м от основания вышки. Определить высоту вышки h, начальную $\vec{v}_0$ и конечную $\vec{v}_п$ скорости камня. Найти уравнение траектории камня. Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. Точку, из которой брошен камень, примем за начало координат O, ось OY направим вертикально вниз, ось OX – горизонтально (рис. 15).

Ускорение свободного падения с течением времени не изменяется, поэтому движение камня, как и любое движение с постоянным ускорением, описывается уравнениями:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \; y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \qquad (1)$$



Р и с. 15

$$v_x = v_{0x} + a_x t,\ v_y = v_{0y} + a_y t. \qquad (2)$$

Из рис. 15 видно, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $a_x = 0$, $v_{0y} = 0$, $a_y = g$. Поэтому уравнения (1) и (2) запишем так:

$$x = v_0 t,\ y = gt^2/2, \qquad (3)$$

$$v_x = v_0,\ v_y = gt. \qquad (4)$$

В момент падения камня на землю $y = h$, $x = s$, $t = t_п$. На основании уравнений (3) получим: $s = v_0 t_п$, $h = gt_п^2/2$. Следовательно, $v_0 = s/t_п$, $v_0 = 20$ м/с, $h = 20$ м.

Используя уравнения (4), можно найти модуль скорости в любой момент времени t:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}.$$

В момент падения на землю модуль скорости камня

$$v_п = \sqrt{v_0^2 + g^2 t_п^2},\ v_п = 28 \text{ м/с}.$$

Направление конечной скорости определяется углом падения α, значение которого найдем из условия

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0}{v_{1y}} = \frac{v_0}{gt_1},\ \operatorname{tg}\alpha = 1,$$

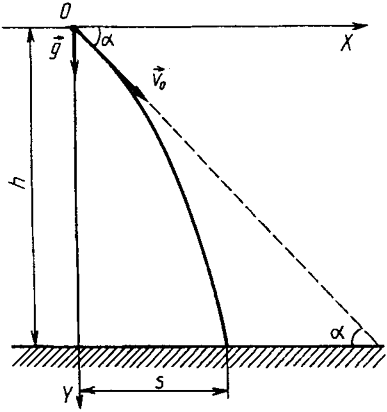
откуда $\alpha = 45°$.

Чтобы получить уравнение траектории камня, нужно из уравнения (1) исключить время. Так как $t = \frac{x}{v_0}$, то $y = \frac{g}{2v_0^2}x^2$. Это уравнение показывает, что камень будет двигаться по ветви параболы с вершиной в точке бросания. Такая траектория образуется в результате сложения двух движений: равномерного движения со скоростью $\vec{v}_0$ в горизонтальном направлении и свободного падения без начальной скорости в вертикальном направлении.

Читателю предлагается самостоятельно решить эту задачу, выбрав ось OY, направленную вертикально вверх из точки O, а ось OX – так же, как и в приведенном выше решении.

20. Бомбардировщик пикирует на цель под углом $\alpha = 60°$ к горизонту со скоростью $v_0 = 540$ км/ч и сбрасывает бомбу на высоте $h = 600$ м. На каком расстоянии s от цели в горизонтальном направлении надо освободить бомбу, чтобы она попала в цель? Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат так же, как и при решении предыдущей задачи (рис. 16). Выпишем начальные условия: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0\cos\alpha$, $v_{0y} = v_0\sin\alpha$.



Р и с. 16

Бомба движется с постоянным ускорением $\vec{a} = \vec{g}$, поэтому на основании уравнений (1) из решения предыдущей задачи зависимость координат бомбы от времени выразится уравнениями:

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \qquad (1)$$

$$y = (v_0 \sin\alpha)t + gt^2/2. \qquad (2)$$

Бомба попадет в цель в некоторый момент времени $t = t_п$, при этом $y = h$, $x = s$. Учитывая это, на основании уравнения (2) получаем

$$h = (v_0 \sin\alpha)t_п + gt_п^2/2.$$

Отсюда найдем время падения бомбы:

$$t_п = \frac{-v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}.$$

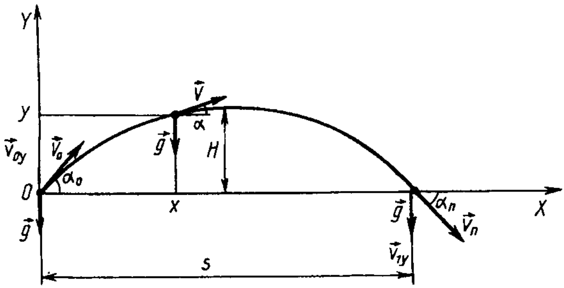
Подставив значение $t_п$ в уравнение (1), найдем расстояние от цели в горизонтальном направлении:

$$s = \frac{v_0\left(-v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}\right)\cos\alpha}{g}, \quad s = 300 \text{ м}.$$

Читателю предлагается решить эту задачу, направив ось OY вертикально вверх.

21. Тело брошено под углом α_0 к горизонту со скоростью $\vec{v}_0$. Определить: координаты и скорость тела через t с после бросания, время полета, максимальную высоту подъема, дальность полета в горизонтальном направлении, скорость тела в момент падения; найти уравнение траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат с началом в точке бросания тела, ось OY направим вертикально вверх, ось OX – горизонтально (рис. 17). За начало отсчета времени примем момент бросания тела.



Р и с. 17

Тело движется с постоянным ускорением $\vec{a} = \vec{g}$, поэтому его движение описывается кинематическими уравнениями:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \; y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \qquad (1)$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \; v_y = v_{0y} + a_y t. \qquad (2)$$

При выбранной системе координат имеем: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0$, $a_x = 0$, $a_y = -g$. Поэтому, согласно уравнениям (1), через t с после бросания координаты тела будут такие:

$$x = v_0 t \cos\alpha_0, \qquad (3)$$

$$y = v_0 t \sin\alpha_0 - gt^2/2. \qquad (4)$$

В этот момент времени модуль скорости тела $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Согласно уравнениям (2), $v_x = v_0 \cos\alpha_0$, $v_y = v_0 \sin\alpha_0 - gt$. Поэтому

$$v = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha_0 + (v_0 \sin\alpha_0 - gt)^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt \sin\alpha_0 + g^2 t^2}. \qquad (5)$$

Направление вектора скорости определяется углом α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin\alpha_0 - gt}{v_0 \cos\alpha_0} = \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{gt}{v_0 \cos\alpha_0}. \qquad (6)$$

В момент падения тела $y = 0$, $t = t_п$, где $t_п$ – время полета. На основании уравнения (4) имеем

$$0 = v_0 t_п \sin\alpha_0 - g t_п^2/2.$$

Отсюда

$$t_п = 2v_0 \sin\alpha_0 / g. \qquad (7)$$

Значение $t_п = 0$ соответствует моменту бросания, так как в этот момент тоже $y = 0$.

Время подъема до максимальной высоты t_1 найдем из уравнения для v_y, учитывая, что в верхней точке траектории $v_y = 0$, $t = t_1$:

$$0 = v_0 \sin\alpha_0 - g t_1,$$

откуда

$$t_1 = v_0 \sin\alpha_0 / g.$$

Максимальную высоту подъема H определим из уравнения (4), подставив в него t_1 вместо t:

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha_0}{2g}.$$

Дальность полета s найдем из уравнения (3), учитывая, что в момент падения $x = s$, $t = t_п$:

$$s = \frac{2v_0^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}.$$

На основании полученного результата можно сделать вывод, что при заданной начальной скорости v_0 наибольшая дальность полета будет при $\sin 2\alpha_0 = 1$, т. е. при угле бросания 45°. При этом $s_{max} = v_0^2/g$.

Модуль и направление вектора скорости $\vec{v}_п$ в момент падения найдем, подставив значение $t_п$ из формулы (7) в формулы (5) и (6):

$$v_п = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t_п \sin\alpha_0 + g^2 t_п^2} =$$

$$= \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g \frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g} + g^2 \left(\frac{2v_0 \sin\alpha_0}{g}\right)^2} = v_0,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{\text{п}} = \frac{v_0 \sin\alpha_0 - gt_{\text{п}}}{v_0 \cos\alpha_0} = \frac{v_0 \sin\alpha_0 - g\dfrac{2v_0 \sin\alpha_0}{g}}{v_0 \cos\alpha_0} = -\operatorname{tg}\alpha_0.$$

Таким образом, модуль скорости тела в момент падения равен модулю начальной скорости и $\alpha_{\text{п}} = -\alpha_0$.

Чтобы получить уравнение траектории тела, нужно исключить время t из уравнений (3) и (4). Из уравнения (3) найдем $t = x/(v_0 \cos\alpha_0)$ и, подставив это значение в уравнение (4), получим

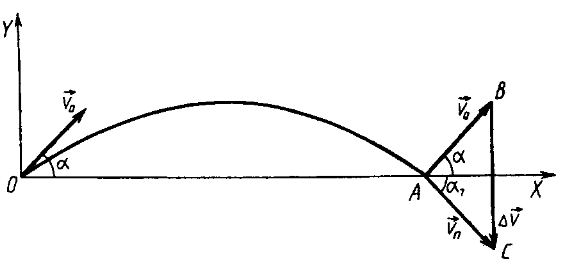
$$y = x \operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha_0} x^2.$$

Как известно, графиком функции $y = ax^2 + bx$ при $a < 0$ является парабола, обращенная выпуклостью вверх и проходящая через начало координат. Таким образом, тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе. Это движение можно представить как результат сложения двух движений: равномерного движения вдоль оси OX со скоростью v_{0x} и движения вертикально вверх с начальной скоростью v_{0y} и ускорением g, направленным вертикально вниз.

В заключение отметим, что движение тела, брошенного вертикально, можно рассматривать как частный случай движения тела, брошенного под углом к горизонту, при этом $\alpha_0 = \pi/2$. (Сравните результаты, полученные при решении этой задачи и задачи 6.)

22. Тело брошено под углом α_0 к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Найти изменение вектора скорости тела за время полета. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Пусть $\vec{v}_{\text{п}}$ – скорость тела в момент падения. Тогда изменение вектора скорости за время полета $\Delta\vec{v} = \vec{v}_{\text{п}} - \vec{v}_0$. Найдем эту разность векторов геометрически (рис. 18). В решении предыдущей задачи показа-



Р и с. 18

но, что $|\alpha_п| = |\alpha_0|$ и модуль скорости падения тела равен модулю его начальной скорости, т. е. $|\vec{v}_п| = |v_0|$. Учитывая это, находим из $\triangle ABC$ модуль изменения скорости:

$$|\Delta\vec{v}| = 2v_0 \sin\alpha_0.$$

Обратим внимание на различие записей: Δv обозначает изменение модуля скорости (в рассматриваемом случае $\Delta v = \Delta|\vec{v}| = 0$), а $|\Delta\vec{v}|$ – модуль изменения вектора скорости.

23. Два тела брошены вертикально вверх с одинаковыми начальными скоростями $\vec{v}_0$ и промежутком времени между бросками τ. Первое тело брошено с поверхности земли, второе – с некоторой высоты h_0. Через какой промежуток времени тела окажутся на одинаковой высоте? Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Начало координат O совместим с точкой бросания первого тела, ось OY направим вертикально вверх (рис. 19, *а*). Время будем отсчитывать с момента бросания первого тела. Тогда зависимости координат первого и второго тел от времени выразятся уравнениями:

$$y_1 = v_0 t - gt^2/2,$$
$$y_2 = h_0 + v_0(t-\tau) - g(t-\tau)^2/2.$$

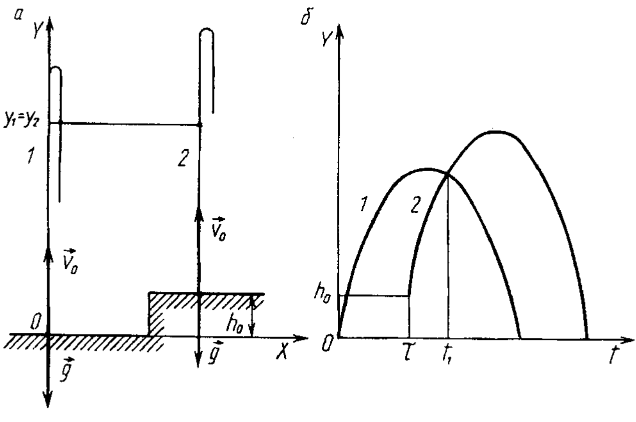


Рис. 19

В момент времени $t = t_1$, когда тела окажутся на одинаковой высоте, координаты их будут одинаковы ($y_1 = y_2$), поэтому

$$v_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2} = h_0 + v_0(t_1 - \tau) - \frac{g(t_1 - \tau)^2}{2}.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2} - \frac{h_0}{g\tau}.$$

Ответ справедлив при условии $\frac{v_0}{g} + \frac{\tau}{2} > \frac{h_0}{g\tau}$.

В зависимости от значений τ, v_0 и h_0 тела могут вообще не оказаться на одинаковой высоте (исключая, разумеется, их послеполетное пребывание на земле). Это хорошо видно, если построить графики зависимости координаты от времени для каждого тела (рис. 19, *б*). При некоторых значениях τ, v_0 и h_0 параболы *1* и *2* могут не иметь общих точек (при $y > 0$).

24. Тело брошено со скоростью $\vec{v}_0$ под углом α_0 к наклонной плоскости, которая образует с горизонтом угол β. Определить время полета и максимальное удаление тела от наклонной плоскости. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. За начало координат O примем точку бросания тела, ось OX направим вдоль наклонной плоскости, ось OY – по нормали к ней (рис. 20).

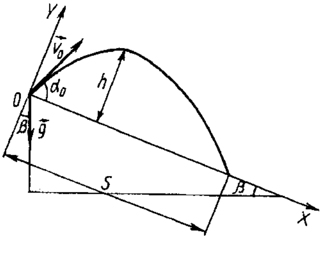


Рис. 20

Ускорение свободного падения $\vec{g}$ не изменяется с течением времени, поэтому, как и для любого движения с постоянным ускорением, для движения данного тела справедливы кинематические уравнения:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}, \; y = y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2},$$
$$v_x = v_{0x} + a_x t, \; v_y = v_{0y} + a_y t.$$

Из рисунка видно, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 \cos\alpha_0$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha_0$, $a_x = g_x = g\sin\beta$, $a_y = g_y = -g\cos\beta$. Подставим эти значения в кинематические уравнения:

$$x = (v_0 \cos\alpha_0)t + \frac{g \sin\beta}{2} t^2, \tag{1}$$

$$y = (v_0 \sin \alpha_0)t - \frac{g \cos \beta}{2} t^2. \qquad (2)$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0 + (g \sin \beta)t,$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - (g \cos \beta)t,$$

Время полета $t_п$ найдем из условия, что в момент падения координата y становится равной нулю:

$$(v_0 \sin \alpha_0)t_п - \frac{g \cos \beta}{2} t_п^2 = 0. \qquad (3)$$

Отсюда $t_п = \dfrac{2v_0 \sin \alpha_0}{g \cos \beta}$.

Второй корень уравнения (3) равен нулю, что соответствует моменту бросания.

Учитывая, что в момент падения $x = s$, дальность полета s найдем, подставив значение $t_п$ в уравнение (1):

$$s = v_0 \cos \alpha_0 \frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g \cos \beta} + \frac{g \sin \beta}{2} \left(\frac{2v_0 \sin \alpha_0}{g \cos \beta} \right)^2.$$

После преобразований получим

$$s = \frac{2v_0^2 \sin \alpha_0 \cos(\alpha_0 - \beta)}{g \cos^2 \beta}.$$

Если $\beta = 0$, то $s = v_0^2 \sin 2\alpha_0 / g$, что соответствует случаю, рассмотренному в задаче 21.

Для нахождения максимального удаления тела от наклонной плоскости в уравнение (2) подставим значение времени подъема t_1, которое найдем из условия, что в высшей точке траектории проекция скорости на ось OY становится равной нулю:

$$v_0 \sin \alpha_0 - (g \cos \beta)t_1 = 0.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha_0}{g \cos \beta}.$$

Тогда, учитывая, что в этой точке $y = h$, получаем

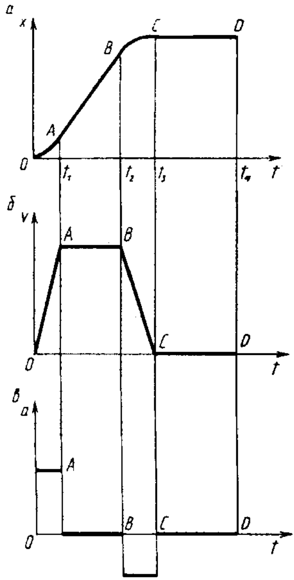
$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{g \cos \beta} - \frac{g \cos \beta}{2} \left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{g \cos \beta} \right)^2,$$

или после преобразований

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g \cos \beta}.$$

25. Описать характер движения тела, график зависимости координаты которого от времени изображен на рис. 21,*а* (*OA* и *BC* – участки парабол). Начертить графики скорости и ускорения, соответствующие данному движению.

Р е ш е н и е. Соответствующие графики показаны на рис. 21, *б*, *в*. При построении их учтено, что в течение промежутка времени от 0 до t_1 тело двигалось равноускоренно, от t_1 до t_2 – равномерно, от t_2 до t_3 – равнозамедленно, от t_3 до t_4 – находилось в состоянии покоя.



Р и с. 21

26. Найти линейную скорость v и центростремительное ускорение a точек на поверхности земного шара: на экваторе; на широте $\varphi = 60°$. Радиус Земли R принять равным 6400 км.

Р е ш е н и е. На экваторе линейная скорость любой точки

$$v_0 = 2\pi R/T, \tag{1}$$

где t = 24 ч = 86 400 с – период суточного вращения Земли.

Центростремительное ускорение

$$a_0 = \frac{v_0^2}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{RT^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \tag{2}$$

На широте φ точки движутся по окружности радиуса $r = R\cos\varphi$ (по параллели) с линейной скоростью

$$v_\varphi = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T} \tag{3}$$

и центростремительным ускорением

$$a_\varphi = \frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{4\pi^2 R\cos\varphi}{T^2}. \tag{4}$$

Подставив в формулы (1)–(4) числовые значения, получим: v_0 = 465 м/с, a_0 = 0,034 м/с^2, v_φ = 233 м/с, a_φ = 0,017 м/с^2.

Задачи для самостоятельного решения

27. Пешеход переходит дорогу со скоростью $v = 4{,}2$ км/ч по прямой, составляющей угол $\alpha = 30°$ с направлением дороги, в течение времени $t = 60$ с. Определить ширину дороги.

28. Движение материальной точки описывается уравнениями $x = 2 + 4t$ и $y = 1 + 3t$, в которых все величины выражены в единицах СИ. Найти скорость точки и уравнение ее траектории.

29. Скорость течения реки $v = 2{,}0$ км/ч. Моторная лодка идет против течения со скоростью $v_1 = 15$ км/ч относительно берега. Определить скорость относительно берега и относительно воды, если лодка будет двигаться по течению.

30. Корабль, длина которого $L = 240$ м, движется прямолинейно в неподвижной воде со скоростью $v = 36$ км/ч. Катер проходит расстояние от кормы движущегося корабля до его носа и обратно за время $t = 70$ с. Определить скорость катера.

31. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу начали двигаться два велосипедиста. После того как они повстречались, первый велосипедист через $t_1 = 10$ с прибыл в пункт B, а второй, проехав $s = 100$ м за $t_2 = 40$ с, прибыл в пункт A. Определить скорости велосипедистов, если их движение было равномерным и прямолинейным.

32. Поезд длиной $l = 120$ м движется по мосту равномерно со скоростью $v = 18$ км/ч. За какое время поезд пройдет мост, если длина моста $L = 480$ м?

33. Автомобиль и велосипедист равномерно движутся навстречу друг другу со скоростями соответственно $v_1 = 10$ м/с и $v_2 = 5$ м/с. Расстояние между ними в начальный момент времени $l = 300$ м. Графически и аналитически определить место и время встречи автомобиля и велосипедиста. Изменится ли место встречи, если их скорости будут в 2 раза бóльшими?

34. Расстояние между двумя лодочными станциями моторная лодка проходит по течению реки за $t_1 = 10$ мин, а против течения — за $t_2 = 30$ мин. За какое время это расстояние проплывет по течению упавший в воду спасательный круг?

35. Расстояние s между пунктами A и B равно 80 км. Из пункта A в направлении AB выезжает со скоростью $v_1 = 50$ км/ч мотоциклист. Одновременно из пункта B выезжает в том же направлении автомобиль со скоростью $v_2 = 30$ км/ч. Через какое время τ и на каком расстоянии s_1 от точки A мотоциклист догонит автомобиль? Решить задачу алгебраическим и графическим способами.

36. Капли дождя, падающие отвесно, образуют на окне горизонтально движущегося троллейбуса полосы под углом $\alpha = 30°$ к вертикали. Какова скорость падения капель, если троллейбус движется прямолинейно с постоянной скоростью $v = 50$ м/с?

37. На расстоянии $l_0 = 200$ м от станции электропоезд метро, идущий со скоростью $v_0 = 30$ м/с, начал тормозить с ускорением $a = 5$ м/с^2. На каком расстоянии от станции окажется поезд через $t = 7$ с после начала торможения?

38. Первый вагон тронувшегося с места поезда прошел мимо неподвижного наблюдателя, стоявшего у начала этого вагона, за время t_1, последний вагон – за время t_2. Считая движение поезда равноускоренным, поезд длинным, а вагоны одинаковыми, найти время движения всего поезда мимо наблюдателя.

39. Тело начинает двигаться вдоль прямой без начальной скорости с постоянным ускорением. Через $t_1 = 30{,}0$ мин ускорение тела меняется по направлению, оставаясь таким же по модулю. Через какое время t_2 от начала движения тело вернется в исходную точку?

40. Двигаясь равноускоренно, материальная точка в первые два равных последовательных промежутка времени по $\tau = 4{,}0$ с каждый проходит пути $l_1 = 20$ м и $l_2 = 30$ м. Определить ускорение и начальную скорость точки.

41. Свободно падающее тело прошло последние $l = 63{,}7$ м за $\tau = 1{,}0$ с. С какой высоты падало тело?

42. Двигатели ракеты, запущенной вертикально вверх с поверхности Земли, работали в течение времени $t = 1{,}0$ мин и сообщали ракете постоянное ускорение $a = 3g$. Какой максимальной высоты достигла ракета? Ускорение свободного падения g считать постоянным и равным 9,8 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

43. Тело, двигаясь равноускоренно, за первые $t_1 = 5{,}0$ с своего движения прошло путь $l_1 = 100$ м, а за первые $t_2 = 10$ с – $l_2 = 300$ м. Определить начальную скорость тела.

44. Двигаясь равноускоренно без начальной скорости, тело, пройдя некоторый путь, приобрело скорость $v = 14$ м/с. Чему была равна скорость тела, когда оно прошло половину этого пути?

45. Тело за время $t = 6$ с переместилось на $s = 270$ см. Первые три секунды тело двигалось с постоянным ускорением, а последние три – равномерно. Определить начальную скорость тела, если за пятую секунду его перемещение $s_5 = 40$ см.

46. Тело движется из состояния покоя равноускоренно. Определить, во сколько раз путь, пройденный этим телом за восьмую секунду, будет больше пути, пройденного за третью секунду.

47. Два поезда прошли одинаковый путь за одно и то же время. Однако один поезд, трогаясь с места, прошел путь равноускоренно с ускорением $a = 3{,}0$ см/с^2, а другой поезд половину пути шел со скоростью $v_1 = 18$ км/ч, а другую половину – со скоростью $v_2 = 54$ км/ч. Найти путь, пройденный каждым поездом.

48. Тело на веревке поднимали от поверхности земли с ускорением $a = 2$ м/с^2 вертикально вверх. Через время $t_1 = 5$ с веревка оборвалась. Рассчитать, сколько времени тело двигалось до земли после того, как оборвалась веревка.

49. Автомобиль проехал половину пути со скоростью $v_1 = 60$ км/ч. Половину времени, затраченного на преодоление оставшейся части пути, он двигался со скоростью $v_2 = 15$ км/ч, а на последнем участке – со скоростью $v_3 = 45$ км/ч. Найти среднюю скорость прохождения всего пути.

50. Расстояние $s = 18$ км между двумя станциями поезд проходит со средней скоростью $v_{ср} = 54$ км/ч, причем на разгон он тратит $t_1 = 2$ мин, затем идет с постоянной скоростью и на замедление до полной остановки тратит $t_2 = 1$ мин. Определить наибольшую скорость поезда.

51. При какой посадочной скорости самолеты могут приземляться на посадочной полосе длиной $l = 800$ м при торможении с ускорением $a = 5{,}0$ м/с^2?

52. С вышки высотой $h = 10$ м прыгает спортсмен и через $\tau = 1{,}8$ с падает в воду. На сколько сопротивление воздуха увеличивает время падения? Начальную скорость принять равной нулю.

53. Камень падает без начальной скорости в шахту. Через $\tau = 6$ с слышен звук удара камня о дно. Определить глубину шахты, считая скорость звука v постоянной и равной 330 м/с. Сопротивление воздуха не учитывать.

54. На стержень длиной $l = 0{,}9$ м надета бусинка, которая может перемещаться по стержню без трения. В начальный момент бусинка находилась на середине стержня. Стержень начал двигаться поступательно в горизонтальной плоскости с ускорением $a = 0{,}6$ м/с^2 в направлении, составляющем со стержнем угол $\alpha = 60°$. Через сколько времени бусинка упадет со стержня?

55. Расстояние между двумя свободно падающими каплями через время $t = 2$ с после начала падения второй капли было $l = 25$ м. На сколько позднее начала падать вторая капля? Сопротивлением воздуха пренебречь.

56. Тело свободно падает без начальной скорости с высоты $h = 270$ м. Разделить эту высоту на 3 части, такие, чтобы на прохождение каждой из них потребовалось бы одно и то же время. Сопротивление воздуха не учитывать.

57. Пользуясь графиком зависимости проекции скорости материальной точки от времени (рис. 22), построить график зависимости ее координаты от времени. В начальный момент координата точки равна нулю.

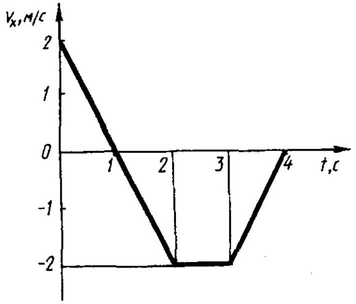


Рис. 22

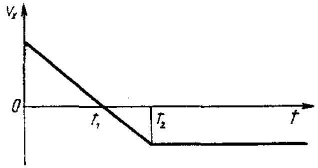
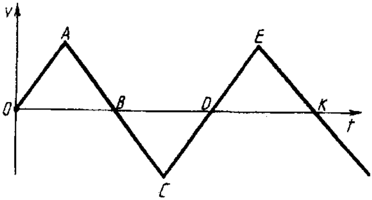


Рис. 23

58. Материальная точка может перемещаться прямолинейно вдоль оси OX. По известному графику зависимости проекции v_x скорости данной точки (рис. 23) построить графики зависимости проекции a_x ускорения и координаты x точки от времени, считая, что $x = 0$ при $t = 0$.

59. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 24$ м/с. Какой путь пройдет тело за время $t_1 = 4{,}0$ с? Сопротивление воздуха не учитывать.



Р и с. 24

60. На рис. 24 приведен график скорости тела, движущегося прямолинейно. Построить график его перемещения и ускорения, если треугольники OAB, BCD, и DEK равны.

61. Два тела брошены вертикально вверх из одной точки, одно вслед за другим с промежутком времени $\tau = 2{,}0$ с. Начальная скорость v_0 обоих тел одинакова и равна 50 м/с. Через сколько времени и на какой высоте тела встретятся? Сопротивление воздуха не учитывать.

62. Из одной точки одновременно бросают с одинаковыми скоростями $\vec{v}_0$ два тела: одно вертикально вверх, второе горизонтально. Найти расстояние между телами через промежуток времени τ после бросания. Сопротивление воздуха не учитывать.

63. С крыши дома высотой $H = 20$ м вертикально вверх брошен камень со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Определить скорость камня на высоте $h = 10$ м над землей и скорость его в момент удара о землю. Сопротивление воздуха не учитывать.

64. Скорость тела, брошенного вертикально вниз с некоторой высоты, через $t_1 = 1{,}0$ с увеличилась по сравнению с начальной в $n_1 = 6{,}0$ раз. Во сколько раз увеличится его скорость через $t_2 = 2{,}0$ с после броска? Сопротивление воздуха не учитывать.

65. С неподвижного относительно земли вертолета сбросили без начальной скорости тело. Спустя $t_1 = 1{,}0$ с было сброшено тоже без начальной скорости второе тело. Определить расстояние между телами через $t_2 = 2{,}0$ с от начала падения первого тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

66. Определить начальную скорость, с которой тело брошено вертикально вверх, если точку, находящуюся на высоте $h = 60$ м, оно проходило 2 раза с промежутком времени $\tau = 4{,}0$ с. Сопротивление воздуха не учитывать.

67. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось в точку бросания через $\tau = 10$ с. Какова начальная скорость тела? На какую максимальную высоту оно поднималось? Сопротивление воздуха не учитывать.

68. Аэростат поднимается вертикально с постоянной скоростью v_0. К гондоле аэростата привязан на веревке груз. Веревку, на которой он подвешен, перерезали в тот момент, когда груз находился на высоте h_0. Сколько времени груз будет падать на землю? Какая скорость будет у него при соприкосновении с землей? Сопротивлением воздуха пренебречь.

69. Танк, движущийся со скоростью $v_1 = 36$ км/ч, притормаживает одну из гусениц так, что ось ее ведущего колеса начинает двигаться вперед со скоростью $v_2 = 32{,}4$ км/ч. Расстояние между гусеницами $l = 2$ м. Под каким углом к первоначальному направлению движения будет двигаться танк через $t = 2$ с?

70. Тело, находящееся в точке A на высоте $H = 45$ м от земли, начинает свободно падать без начальной скорости. Одновременно из точки B, расположенной на $h = 21$ м ниже точки A, бросают другое тело вертикально вверх. Определить начальную скорость второго тела, если известно, что оба тела упадут на землю одновременно. Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ м/с^2.

71. Два тела бросают с высоты $h = 20$ м со скоростью $v_0 = 15$ м/с каждое. С какими скоростями тела упадут на землю, если первое тело брошено вертикально вверх, а второе – горизонтально? Считать ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Сопротивление воздуха не учитывать. Задачу решить без применения закона сохранения энергии.

72. Тело, находящееся на высоте $H = 80$ м над землей, брошено горизонтально с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с. Найти скорость тела в момент, когда оно окажется на высоте $h = 60$ м над землей. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Задачу решить без применения закона сохранения энергии. Сопротивлением воздуха пренебречь.

73. Найти начальную и конечную скорости камня, брошенного горизонтально с высоты $H = 5{,}0$ м, если по горизонтали он пролетел расстояние $s = 10$ м. Сопротивление воздуха не учитывать.

74. Два тела брошены с одной и той же скоростью под углами α и $\pi/2 - \alpha$ к горизонту. Определить отношение наибольших высот подъема этих тел. Сопротивление воздуха не учитывать.

75. Тело, брошенное под некоторым углом к горизонтальной плоскости, падает на нее через $\tau = 2$ с. Какой наибольшей высоты оно достигало? Сопротивление воздуха не учитывать.

76. Камень брошен под углом $\alpha_0 = 30°$ к горизонту со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Через сколько времени камень будет на высоте $h = 1$ м? Сопротивление воздуха не учитывать.

77. На какой высоте вектор скорости тела, брошенного под углом $\alpha_0 = 45°$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с, будет составлять с горизонтом угол $\alpha = 30°$? Сопротивление воздуха не учитывать.

78. С высоты h над поверхностью земли тело брошено под углом к горизонту со скоростью $\vec{v}_0$. Чему равна скорость, с которой тело падает на землю? Задачу решить без применения закона сохранения энергии. Сопротивление воздуха не учитывать.

79. При разрушении вращающейся части машины осколки могут отлететь под углом $\alpha = 60°$ к горизонту со скоростью $v = 3$ м/с. Какой минимальной высоты надо поставить ограждение на расстоянии $l = 0{,}5$ м от машины, чтобы осколки не вылетели за пределы ограждения? Сопротивление воздуха не учитывать.

80. Шарик вертикально падает с высоты $h = 2$ м на наклонную плоскость и абсолютно упруго отражается под углом, равным углу падения. На каком расстоянии от места падения он снова ударится о ту же плоскость? Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$. Сопротивление воздуха не учитывать.

81. Из одной точки одновременно брошены два тела под углами $\alpha_1 = 60°$ и $\alpha_2 = 45°$ к горизонту с начальными скоростями соответственно $v_1 = 40$ м/с и $v_2 = 50$ м/с. Траектории тел лежат в одной плоскости. На каком расстоянии друг от друга будут находиться тела через $t = 3$ с? Сопротивление воздуха не учитывать.

82. Даны кинематические уравнения движения тела: $x = R\sin\omega t$, $y = R\cos\omega t$. Найти его траекторию и ускорение (модуль и направление). Каков смысл постоянных R и ω?

83. Во сколько раз угловая скорость часовой стрелки больше угловой скорости суточного вращения Земли?

84. Какую линейную скорость имеют верхние точки обода велосипедного колеса, если велосипедист едет со скоростью $v = 20$ км/ч?

85. Определить радиус маховика, если при его вращении точки на ободе имеют скорость $v_1 = 6{,}0$ м/с, а точки, находящиеся на $l = 15$ см ближе к оси, – скорость $v_2 = 5{,}5$ м/с.

86. Для шлифовки деталей на абразивном круге скорость v крайних точек этого круга должна быть равной 94,2 м/с. Определить необходимую частоту вращения, если диаметр круга $d = 0{,}3$ м.

87. Стержень длиной $l = 0{,}5$ м вращается с частотой $n = 2$ с$^{-1}$ вокруг оси, проходящей через стержень перпендикулярно ему. Центростремительное ускорение одного из концов стержня $a = 16{,}1$ м/с^2. Определить линейную скорость другого конца.

2. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ

Методические указания к решению задач

При решении задач по динамике прямолинейного движения следует сначала выяснить, какие силы действуют на интересующие нас тела, и изобразить эти силы на рисунке, выбрать систему координат. Координатные оси выбирают так, чтобы проекции сил и ускорений на них выражались возможно более простым образом. Далее, для каждого тела в отдельности на основании второго закона Ньютона составляют уравнения движения в векторной форме:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = m\vec{a},$$

где $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ – силы, действующие на тело; m – масса тела; $\vec{a}$ – его ускорение. Затем записывают эти уравнения в скалярной форме, т. е. в проекциях на оси координат:

$$F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = ma_x, \; F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = ma_y.$$

Если движения тел в данной задаче взаимосвязаны, то надо найти уравнения для кинематических величин, отражающие эту связь. Полученную систему уравнений решают относительно искомых величин.

Следует отметить, что второй закон Ньютона дает возможность найти только ускорения тел. Скорости и координаты тел определяют лишь при задании начальных условий.

В задачах, где учитывается трение, нужно находить силу нормальной реакции опоры, определяющую силу трения. Для этого составляют уравнение на основании того, что вдоль координатной оси, перпендикулярной направлению скорости прямолинейно движущегося тела, ускорение отсутствует, и поэтому сумма проекций сил на эту ось равна нулю.

Задачи по динамике движения по окружности решают так же, как и задачи по динамике прямолинейного движения, при этом прямоугольную систему координат рационально выбирать так, чтобы одна из осей (например, OX) была направлена из точки, в которой находится тело, по радиусу к центру окружности. Тогда и при равномерном, и при неравномерном движении по окружности проекция ускорения на эту ось равна модулю центростремительного (нормального) ускорения: $a_x = a_n = v^2/R$, где v – модуль скорости тела в данной точке траектории; R – радиус окружности.

Основные законы и формулы

Первый закон Ньютона (*закон инерции*): всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

Инерциальные системы отсчета – это системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона.

Второй закон Ньютона: сумма действующих на тело сил равна произведению массы m этого тела на его ускорение $\vec{a}$.

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

где $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$.

Другая формулировка второго закона Ньютона: изменение импульса тела за время Δt равно импульсу действующей на тело силы $\vec{F}$ за этот же промежуток времени:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t,$$

где $\Delta\vec{p} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$ – изменение импульса тела; $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ – начальная и конечная скорости тела.

Третий закон Ньютона: силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Закон всемирного тяготения: сила взаимного притяжения двух материальных точек прямо пропорциональна произведению масс этих точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2 – гравитационная постоянная.

Сила тяжести $\vec{F}_т$ – это сила притяжения тела Землей:

$$\vec{F}_т = m\vec{g},$$

где m – масса тела: $\vec{g}$ – ускорение свободного падения.

Ускорение свободного падения у поверхности Земли

$$g = GM/R^2,$$

где M – масса Земли; R – ее радиус. На высоте h над поверхностью Земли

$$g_h = GM/(R+h)^2.$$

Вес тела – это сила, с которой тело вследствие притяжения к Земле действует на горизонтальную опору или вертикальный подвес, удерживающие его от свободного падения.

Плотность однородного тела

$$\rho = m/V,$$

где m – масса тела; V – его объем.

Сила трения покоя имеет максимальное значение

$$F_{тр.п\,max} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения; N – сила нормальной реакции опоры.

Сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N.$$

Закон Гука: при упругой деформации растяжения (сжатия) сила упругости пропорциональна вектору удлинения (сжатия) и противоположна ему по направлению:

$$\vec{F}_{упр} = -k\Delta\vec{l},$$

где k – коэффициент упругости (жесткость).

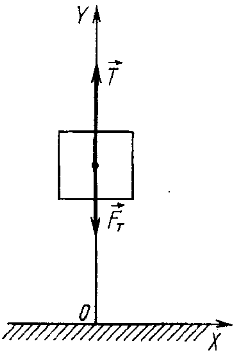
Если F – приложенная сила, l_0 – начальная длина тела, S – площадь его поперечного сечения, то

$$F = \frac{ES}{l_0}|\Delta l|,$$

где E – модуль упругости (модуль Юнга).

Примеры решения задач

88. Подъемный кран поднимает плиту массой $m = 1000$ кг вертикально вверх с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2. Определить силу натяжения каната, удерживающего плиту.



Р и с. 25

Р е ш е н и е. На плиту действуют сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила натяжения каната $\vec{T}$ (рис. 25). Координатную ось OY направим вертикально вверх. Согласно второму закону Ньютона, запишем уравнение в векторной форме:

$$\vec{T} + \vec{F}_т = m\vec{a}.$$

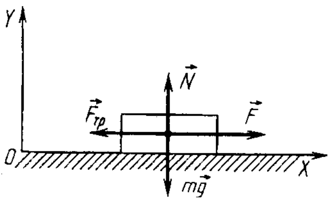
Для проекций на ось OY получим уравнение в скалярной форме:

$$T_y + F_{тy} = ma_y.$$

Так как $T_y = T$, $F_{тy} = -mg$, $a_y = a$, имеем $T - mg = ma$. Отсюда $T = m(g + a)$, $T = 1 \cdot 10^4$ Н.

89. Под действием силы $\vec{F}$, направленной вдоль горизонтальной плоскости, по ее поверхности начинает скользить без начальной скорости тело массой $m = 4$ кг и через $t = 3$ с после начала движения приобретает скорость $v = 0{,}6$ м/с. Найти силу $\vec{F}$, если коэффициент трения между телом и плоскостью $\mu = 0{,}2$.

Р е ш е н и е. На тело действуют четыре силы: в горизонтальном направлении – сила $\vec{F}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, в вертикальном – сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$.



Р и с. 26

За положительное направление оси OX примем направление движения тела, ось OY направим вертикально вверх (рис. 26).

Согласно второму закону Ньютона, составим уравнение:

$$\vec{F} + \vec{F}_{тр} + \vec{F}_т + \vec{N} = m\vec{a}.$$

В проекциях на ось OX получим $F - F_{тр} = ma$. Отсюда

$$F = F_{тр} + ma. \qquad (1)$$

Модуль силы N найдем по второму закону Ньютона, составив уравнение в проекциях на ось OY:

$$N_y + F_{тy} = ma_y.$$

Поскольку $N_y = N$, $F_{тy} = -mg$, а $a_y = 0$ (ускорение тела перпендикулярно оси OY), то $N - mg = 0$, $N = mg$. Поэтому, учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, получим

$$F_{тр} = \mu mg. \qquad (2)$$

Так как тело двигалось равноускоренно без начальной скорости, то в момент времени t скорость тела $v = at$. Отсюда

$$a = v/t. \qquad (3)$$

Подставив значения $F_{тр}$ и a из формул (2) и (3) в формулу (1), а затем числовые значения заданных величин, получим

$$F = m(\mu g + v/t),\ F = 9 \text{ Н}.$$

90. По наклонной плоскости с углом наклона α скользит вниз брусок массой m. Найти его ускорение, если коэффициент трения бруска о плоскость равен μ.

Решение. Направим ось OX вдоль наклонной плоскости, а ось OY – перпендикулярно плоскости вверх (рис. 27). На брусок действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{F}_т + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = m\vec{a}.$$

Составим уравнение в проекциях на ось OX:

$$F_{тx} + N_x + F_{тр\,x} = ma_x.$$

Но $F_{тx} = mg\sin\alpha$, $N_x = 0$, $F_{тр\,x} = -F_{тр} = -\mu N$. Поэтому $mg\sin\alpha - \mu N = ma_x$. Отсюда

$$a_x = \frac{mg\sin\alpha - \mu N}{m}. \qquad (1)$$

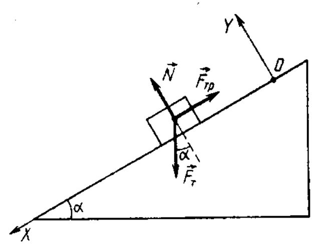


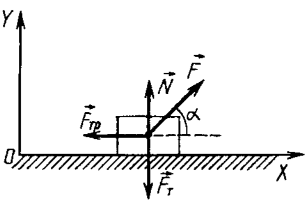
Рис. 27

Модуль силы $\vec{N}$ найдем, как и в предыдущей задаче, составив в проекциях на ось OY уравнение, являющееся следствием второго закона Ньютона: $N - mg\cos\alpha = 0$. Отсюда $N = mg\cos\alpha$. Подставив это значение в формулу (1), получим

$$a_x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Анализ этой формулы показывает, в частности, что при отсутствии трения ($\mu = 0$) $a_x = g\sin\alpha$.

91. Тело движется по горизонтальной плоскости под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом α к горизонту. Начальная скорость равна нулю. Найти ускорение тела, если его масса равна m, а коэффициент трения между телом и плоскостью равен μ. При каком модуле силы движение будет равномерным?



Р и с. 28

Р е ш е н и е. На тело действуют четыре силы: сила $\vec{F}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$ (рис. 28). За положительное направление оси OX примем направление движения тела, ось OY направим вертикально вверх.

Согласно второму закону Ньютона, составим уравнение в векторной форме:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

В проекциях на ось OX получим уравнение $F\cos\alpha - F_{тр} = ma_x$. Отсюда

$$a_x = \frac{F\cos\alpha - F_{тр}}{m}. \qquad (1)$$

Модуль силы трения

$$F_{тр} = \mu N. \qquad (2)$$

Модуль силы $\vec{N}$ найдем из условия $a_y = 0$ (вдоль оси OY тело не движется): $N - mg + F\sin\alpha = 0$. Отсюда

$$N = mg - F\sin\alpha. \qquad (3)$$

На основании формул (1)–(3) получим

$$a_x = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g.$$

Движение будет равномерным при $a_x = 0$, т. е.

$$F_1(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg = 0.$$

Отсюда

$$F_1 = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

92. К бруску массой $m = 6$ кг, лежащему на горизонтальной плоскости, приложена сила $F = 8$ Н, направленная под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Коэффициент трения бруска о плоскость $\mu = 0{,}3$. Найти модуль силы трения и скорость бруска через $t = 2$ с после начала действия силы.

Р е ш е н и е. На брусок действуют четыре силы: сила $\vec{F}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$, сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$ (см. рис. 28). В задаче ничего не сказано о движении тела.

Предположим, что в указанный момент времени тело движется в положительном направлении оси OX. Тогда, рассуждая так же, как и при решении предыдущей задачи, мы получим

$$a_x = \frac{F}{m}(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu g.$$

Подставим значения величин и вычислим:

$$a_x = \frac{8}{6}(\cos 45° + 0{,}3\sin 45°) - 0{,}3 \cdot 9{,}8 = -2 \text{ м/с}^2.$$

Получили $a_x < 0$, что противоречит сделанному предположению ($a_x > 0$). Следовательно, тело покоится, т. е. его скорость $v = 0$, а сила трения является силой трения покоя. Для проекций на ось OX получим (с учетом того, что $a_x = 0$) уравнение $F\cos\alpha - F_{тр.п} = 0$, откуда

$$F_{тр.п} = F\cos\alpha, \quad F_{тр.п} = 6 \text{ Н}.$$

93. На горизонтальном столе лежат два связанных нитью груза, массы которых $m_1 = 0{,}3$ кг и $m_2 = 0{,}7$ кг. К грузам приложены противоположно направленные силы $F_1 = 1$ Н и $F_2 = 2$ Н, линии действия которых совпадают с нитью. Найти, с каким ускорением движутся грузы и с какой силой действует нить на каждый груз. Трение не учитывать. Нить считать нерастяжимой и невесомой.

Р е ш е н и е. Обозначим все силы, действующие на грузы, и выберем систему координат (рис. 29, *а*). Запишем, согласно второму закону Ньютона, уравнения движения грузов:

$$\vec{F}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1, \; \vec{F}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2,$$

где $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ – силы реакции опоры; $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ – силы натяжения нити, действующие на первый и второй грузы соответственно.

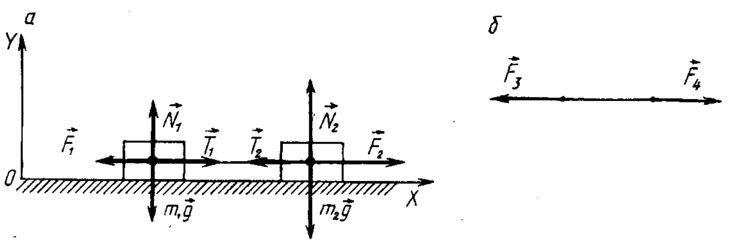
Для проекций на ось OX уравнения примут вид:

$$T_1 - F_1 = m_1 a_{1x}, \; F_2 - T_2 = m_2 a_{2x}. \tag{1}$$

Нерастяжимость нити означает постоянство ее длины. Поскольку грузы перемещаются только вправо, то разность их координат, равная длине нити, остается постоянной, т. е. $x_2 - x_1 = \text{const}$. (В задачах по кинематике и динамике тела рассматриваются как материальные точки и только для наглядности их изображают на рисунках в виде квадратиков, кружочков и т. п.) Взяв производную по времени левой и правой частей последнего равенства, получим $x_1' - x_2' = 0$, или $x_1' = x_2'$. Возьмем еще раз производную по времени, получим $x_1'' = x_2''$, т. е. $a_{1x} = a_{2x}$. Таким образом, из условия нерастяжимости нити следует, что ускорения связанных тел и всех точек нити одинаковы:

$$a_{1x} = a_{2x} = a_x. \tag{2}$$

Докажем теперь, что модули сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ равны, если нить невесома. Обозначим через $\vec{F}_3$ силу, действующую на нить со стороны первого тела, а через $\vec{F}_4$ – со стороны



Р и с. 29

второго (рис. 29, *б*). Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения нити имеет вид

$$\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = m\vec{a},$$

где m – масса нити; $\vec{a}$ – ускорение. Поскольку нить невесома, то $m = 0$. Тогда $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$. Следовательно, $\vec{F}_3 = -\vec{F}_4$.

Согласно третьему закону Ньютона, с какой силой тело действует на нить, с такой же по модулю, но направленной противоположно силой, действует нить на тело. Поэтому $\vec{T}_1 = -\vec{F}_3$, $\vec{T}_2 = -\vec{F}_4$. Если учесть теперь, что $\vec{F}_3 = -\vec{F}_4$, то получим $\vec{T}_1 = -\vec{T}_2$. Следовательно,

$$T_1 = T_2 = T. \qquad (3)$$

Таким образом, из условия невесомости нити следует, что такая нить действует на связанные тела с силами, равными по модулю и противоположными по направлению.

Перепишем уравнения (1) с учетом равенств (2) и (3):

$$T - F_1 = m_1 a, \; F_2 - T = m_2 a.$$

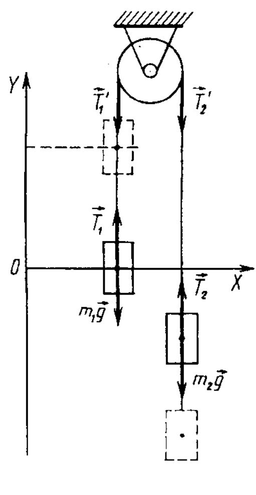
Решив эту систему двух уравнений, получим:

$$a = \frac{F_2 - F_1}{m_1 + m_2}, \; T = \frac{F_1 m_2 + F_2 m_1}{m_1 + m_2}, \; a = 0{,}8 \text{ м/с}^2, \; T = 0{,}8 \text{ Н}.$$

94. Через блок, массой которого можно пренебречь, перекинута невесомая и нерастяжимая нить, к концам которой подвешены грузы $m_1 = 2{,}0$ кг и $m_2 = 2{,}1$ кг. Начальные скорости грузов равны нулю. Каково перемещение грузов за время $\tau = 3{,}0$ с? Какова сила натяжения нити? С какой силой давит нить на блок?

Р е ш е н и е. Силы, действующие на грузы, а также выбранное направление координатной оси OY показаны на рис. 30. Начало координат совмещено с начальным положением левого груза.

Согласно второму закону Ньютона, запишем уравнение движения для каждого груза:



Р и с. 30

$$\vec{T}_1 + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1,\ \vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2.$$

Поскольку нить нерастяжима и невесома, то $a_1 = a_2 = a$, $T_1 = T_2 = T$. С учетом этого составляем уравнения движения грузов в проекциях на ось OY:

$$T - m_1g = m_1a,\ T - m_2g = -m_2a,$$

где a – ускорение. Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$g(m_2 - m_1) = a(m_1 + m_2),$$

откуда

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}.$$

Уравнение для координаты левого груза запишется так:

$$y = at^2/2.$$

В момент времени τ $y = s$. Таким образом, модуль перемещения

$$s = \frac{a\tau^2}{2} = \frac{g(m_2 - m_1)\tau^2}{2(m_1 + m_2)},\ s = 1{,}1\ \text{м}.$$

Силу натяжения нити найдем из уравнения движения левого груза:

$$T = m_1(g + a) = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2},\ T = 20\ \text{Н}.$$

На блок действуют силы натяжения нити $\vec{T}_1'$ и $\vec{T}_2'$, а также сила реакции оси $\vec{N}$. Блок находится в равновесии, следовательно, $\vec{T}_1' + \vec{T}_2' + \vec{N} = \vec{0}$. Так как $T_1' = T_1 = T$, $T_2' = T_2 = T$, то для проекций сил на ось OY получим $N - 2T = 0$, откуда $N = 2T$.

По третьему закону Ньютона сила, с которой ось действует на блок, равна по модулю и противоположна по направлению силе $\vec{F}$, с которой блок давит на ось: $\vec{N} = -\vec{F}$. Следовательно, $F = N = 2T$. Подставив в эту формулу выражение для T, найдем:

$$F = \frac{4m_1m_2g}{m_1 + m_2},\ \ F = 40\ \text{Н}.$$

95. Тело массой m_1 движется вверх по наклонной плоскости под действием связанного с ним невесомой и нерастяжимой нитью груза массой m_2. Начальные скорости тела и груза равны нулю, коэффициент трения тела о плоскость μ, угол наклона плоскости α. Определить ускорение, с которым движется тело, и силу натяжения нити. Блок невесом и вращается без трения.

Р е ш е н и е. На тело, движущееся по наклонной плоскости, действуют сила тяжести $\vec{F}_{т1} = m_1\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}_1$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила реакции плоскости $\vec{N}$. На груз действуют сила тяжести $\vec{F}_{т2} = m_2\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}_2$. Согласно второму закону Ньютона,

$$m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр} + \vec{N} = m_1\vec{a}_1,$$

$$\vec{T}_2 + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2,$$

где $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ – ускорение тела и груза соответственно.

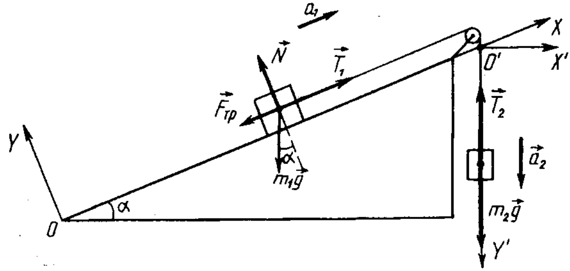
Поскольку нить невесома и нерастяжима, тело и груз движутся с одинаковыми по модулю ускорениями, т. е. $a_1 = a_2 = a$ и $T_1 = T_2 = T$.

Выберем для тела систему отсчета так, чтобы начало координат совпадало с нижним концом наклонной плоскости, ось OX была направлена вверх вдоль плоскости, ось OY – перпендикулярно ей (рис. 31). Запишем уравнение движения тела в проекциях на ось OX:

$$T_{1x} + N_x + m_1 g_x + F_{трx} = m_1 a_{1x}.$$

Учитывая, что $T_{1x} = T$, $N_x = 0$, $m_1 g_x = -m_1 g\sin\alpha$, $F_{трx} = -F_{тр} = -\mu N$, $a_{1x} = a$, получаем

$$T - m_1 g\sin\alpha - \mu N = m_1 a. \qquad (1)$$



Р и с. 31

Ускорение груза во всех инерциальных системах отсчета одинаковое.

Для груза выберем систему координат $X'O'Y'$ так, чтобы ось $O'Y'$ была направлена вертикально вниз. В этой системе уравнение движения груза имеет вид

$$m_2 g - T = m_2 a. \tag{2}$$

Решив относительно a систему уравнений (1) и (2), найдем

$$a = \frac{m_2 g - \mu N - m_1 g \sin\alpha}{m_1 + m_2}. \tag{3}$$

В направлении оси OY ускорение тела равно нулю, поэтому $N - m_1 g \cos\alpha = 0$, откуда $N = m_1 g \cos\alpha$. Подставив это значение в формулу (3), получим

$$a = \frac{g(m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha))}{m_1 + m_2}. \tag{4}$$

Отсюда видно, что описанное в задаче движение (при $v_0 = 0$) может быть реализовано при $m_2 \geqslant m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.

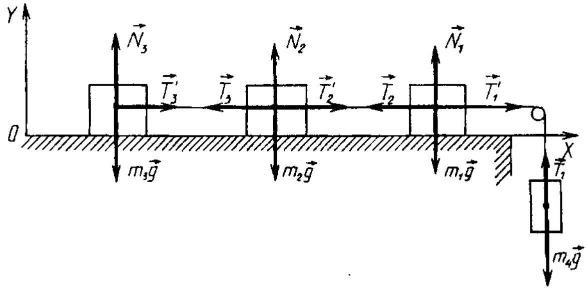
Из формул (2) и (4) найдем модуль силы натяжения нити:

$$T = \frac{m_1 m_2 g(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

96. На горизонтальной плоскости расположены три связанных друг с другом нитями бруска массами m_1, m_2 и m_3. На нити, прикрепленной к бруску массой m_1 и перекинутой через неподвижный блок, подвешен груз массой m_4. Найти ускорение этой системы и силы натяжения всех нитей. Трение не учитывать, массой нитей и блока пренебречь, нити считать нерастяжимыми и невесомыми.

Р е ш е н и е. Силы, действующие на бруски, изображены на рис. 32. Если тела связаны невесомыми и нерастяжимыми нитями, то модули сил натяжения для каждой нити равны между собой и все тела движутся с одинаковым по модулю ускорением. Поэтому $T_1' = T_1$, $T_2' = T_2$, $T_3' = T_3$, $a_{1x} = a_{2x} = a_{3x} = a$, $a_{4y} = -a$. Учитывая это, записываем в проекциях на оси OX и OY уравнения движения для каждого бруска и для груза:

$$T_1 - T_2 = m_1 a,\ T_2 - T_3 = m_2 a,$$



Р и с. 32

$$T_3 = m_3a, \ -m_4g + T_1 = -m_4a.$$

Складывая почленно первые три уравнения и вычитая затем четвертое, получаем

$$m_4g = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4)a,$$

откуда

$$a = \frac{m_4g}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

Подставив это значение ускорения во все уравнения движения, начиная с последнего, найдем силы натяжения нитей:

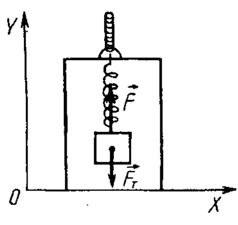
$$T_1 = m_4g\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}, \ T_2 = m_4g\frac{m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4},$$

$$T_3 = m_4g\frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

97. В кабину лифта помещен динамометр, к которому подвешен груз массой m. Каковы показания динамометра в следующих случаях: 1) лифт покоится; 2) лифт поднимается с ускорением $\vec{a}_1$, направленным вверх; 3) лифт опускается с ускорением $\vec{a}_2$, направленным вниз ($a_2 < g$); 4) лифт свободно падает?

Р е ш е н и е. Координатную ось OY направим вертикально вверх (рис. 33). На груз действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила упругости $\vec{F}$ (динамометр показывает модуль этой силы).

Воспользовавшись вторым законом Ньютона, запишем уравнение движения в векторной форме:



Р и с. 33

$$\vec{F} - \vec{F}_т = m\vec{a},$$

а затем в проекциях на ось OY: $F - mg = ma_y$, откуда

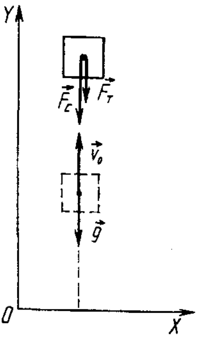
$$F = m(g + a_y).$$

В первом случае $a_y = 0$, поэтому динамометр покажет $F_0 = mg$. Во втором случае $a_y = a_1$. Следовательно, $F_1 = m(g + a_1)$. В третьем случае $a_y = -a_2$, поэтому $F_2 = m(g - a_2)$. В четвертом случае $a_y = -g$ и $F_3 = m(g - g) = 0$, т. е. наступает состояние невесомости.

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что вес тела (показания динамометра) зависит от ускорения, с которым движется лифт: при ускоренном движении вверх вес тела увеличивается, при ускоренном движении вниз – уменьшается, при свободном падении – равен нулю. Лишь при $a = 0$, т. е. если лифт покоится или движется равномерно, модуль веса равен модулю силы тяжести ($F = mg$).

Предлагаем читателю самостоятельно рассмотреть следующие случаи: лифт движется вверх замедленно с ускорением a_3; лифт движется вниз замедленно с ускорением a_4; лифт движется вниз ускоренно с ускорением $a_5 = 2g$.

98. Тело массой $m = 40$ г было брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с и достигло высшей точки подъема через $t_1 = 2{,}5$ с. Считая силу сопротивления воздуха $\vec{F}_с$, действующую на тело во время подъема, постоянной, найти модуль этой силы.



Р и с. 34

Р е ш е н и е. Координатную ось OY направим вертикально вверх (рис. 34). На тело действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_с$. Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения в векторной форме имеет вид

$$\vec{F}_т + \vec{F}_с = m\vec{a},$$

а в проекциях на ось OY примет вид $-mg - F_с = ma_y$. Отсюда

$$F_с = m(-a_y - g). \qquad (1)$$

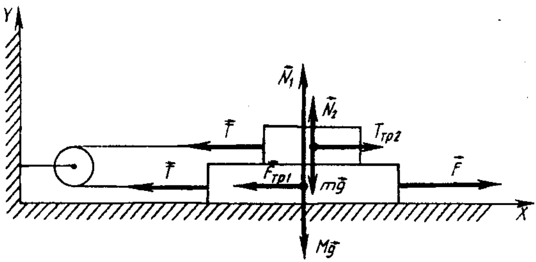
Чтобы найти проекцию ускорения тела на ось OY, воспользуемся уравнением для скорости: $v_y = v_{0y} + a_y t$. Учитывая, что $v_{0y} = v_0$ и в высшей точке подъема $v_y = 0$, $t = t_1$, получаем

$$a_y = -v_0/t_1. \qquad (2)$$

На основании формул (1) и (2) находим:

$$F_c = m(v_0/t_1 - g),\ F_c = 88 \cdot 10^{-3}\ \text{Н}.$$

99. Находящаяся на гладком полу доска связана с лежащим на ней бруском нитью, перекинутой через невесомый блок (рис. 35). Масса доски M, масса бруска m, коэффициент трения между ними равен μ. С каким ускорением будет двигаться доска, если приложить к ней горизонтально направленную силу $\vec{F}$? Нить считать невесомой и нерастяжимой.



Р и с. 35

Р е ш е н и е. На доску действуют сила $\vec{F}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, сила трения $\vec{F}_{тр1}$, сила тяжести $M\vec{g}$ и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}_1$, на брусок – силы $\vec{T}$, $m\vec{g}$, $\vec{N}_2$ и сила $\vec{F}_{тр2}$, равная по модулю силе $\vec{F}_{тр1}$ и направленная противоположно ей.

Согласно второму закону Ньютона, запишем уравнения движения доски и бруска:

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{F}_{тр1} + M\vec{g} + \vec{N}_1 = M\vec{a}_1,\ \vec{F}_{тр2} + \vec{T} + \vec{N}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_2,$$

где $\vec{a}_1$ – ускорение доски; $\vec{a}_2$ – ускорение бруска. Они противоположны по направлению и равны по модулю: $\vec{a}_1 = -\vec{a}_2$, $a_1 = a_2 = a$.

В проекциях на ось OX уравнения примут вид:

$$F - T - F_{тр1} = Ma,\ - T + F_{тр2} = -ma.$$

Учитывая, что $F_{тр1} = F_{тр2} = \mu N_2 = \mu mg$, получим:

$$F - T - \mu mg = Ma, \quad -T + \mu mg = -ma.$$

Отсюда следует:

$$a = \frac{F - 2\mu mg}{M + m}.$$

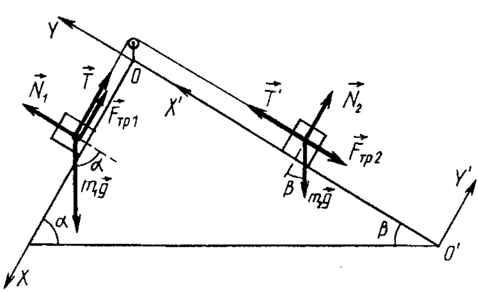
Такое ускорение будет только при условии $F > 2\mu mg$. При $F < 2\mu mg$ доска и брусок останутся неподвижными.

100. Два груза массами $m_1 = 4{,}0$ кг и $m_2 = 1{,}0$ кг связаны нитью, перекинутой через блок, который прикреплен к вершине призмы, и могут скользить по граням этой призмы. Начальные скорости грузов равны нулю. Найти ускорение грузов, если $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, а коэффициент трения грузов о плоскость $\mu = 0{,}20$. Массой блока и трением на его оси пренебречь, нить считать невесомой и нерастяжимой.

Р е ш е н и е. На рис. 36 показаны системы координат XOY и $X'O'Y'$, выбранные для первого и второго грузов соответственно, а также обозначены все силы, действующие на грузы, в предположении, что левый груз движется вдоль оси OX вниз, а правый – вдоль оси $O'Y'$ вверх по призме. Но верно ли это предположение?

В задаче ничего не сказано о направлении движения грузов, а его нужно знать, чтобы правильно указать направления сил трения.

Чтобы выяснить, куда движутся грузы, будем рассматривать их и нить как части одной системы. Внутренние силы взаимодействия грузов и нити не могут сообщить ускорение системе как единому целому. Предположим теперь, что сил трения $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ нет, а есть только силы тяжести. Модуль



Р и с. 36

составляющей силы тяжести $m_1\vec{g}$ вдоль левой грани равен $m_1 g \sin\alpha = 4 \cdot 9{,}8 \sin 60° = 34$ Н, а силы тяжести $m_2\vec{g}$ вдоль правой грани равен $m_2 g \sin\beta = 1 \cdot 9{,}8 \sin 30° = 4{,}9$ Н. Так как $m_1 g \sin\alpha > m_2 g \sin\beta$, левый груз будет двигаться вниз по призме, а правый – вверх. При наличии сил трения грузы будут двигаться точно так же, потому что сила трения, возникающая при движении тела, не может изменить направление его скорости. Теперь мы можем правильно указать направления сил трения $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$, что и сделано на рисунке.

Составим для каждого груза уравнение движения в векторной форме:

$$m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_{тр1} = m_1\vec{a},$$

$$m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{тр2} = m_2\vec{a}.$$

В проекциях на оси OX и $O'X'$ с учетом того, что $T = T'$, $a_{1x} = a_{2x'} = a$, $F_{тр1} = \mu N_1$, $F_{тр2} = \mu N_2$, уравнения примут вид:

$$m_1 g \sin\alpha - T - \mu N_1 = m_1 a, \tag{1}$$

$$T - m_2 g \sin\beta - \mu N_2 = m_2 a. \tag{2}$$

Исключив из формул (1) и (2) T, найдем

$$a = \frac{g(m_1 \sin\alpha - m_2 \sin\beta) - \mu(N_1 + N_2)}{m_1 + m_2}. \tag{3}$$

Поскольку проекция ускорения левого груза на ось OY $a_{1y} = 0$, а правого на ось $O'Y'$ $a_{2y'} = 0$, то

$$N_1 - m_1 g \cos\alpha = 0, \; N_2 - m_2 g \cos\beta = 0.$$

Отсюда

$$N_1 = m_1 g \cos\alpha, \; N_2 = m_2 g \cos\beta. \tag{4}$$

Из формул (3) и (4) находим:

$$a = g\frac{m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2(\sin\beta + \mu\cos\beta)}{m_1 + m_2}, \; a = 4{,}7 \text{ м/с}^2.$$

101. С какой средней силой $\vec{F}$ давит на плечо ручной пулемет при стрельбе, если масса пули $m = 10$ г, ее скорость при вылете $v = 800$ м/с и скорострельность пулемета $n = 600$ выстрелов в минуту?

Р е ш е н и е. Согласно второму закону Ньютона,

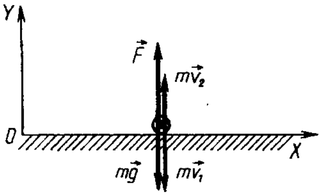
$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p},$$

где $\Delta\vec{p}$ – изменение импульса за время Δt. В проекциях на горизонтальное направление эта формула примет вид $F\Delta t = \Delta p$.

За время Δt импульс пуль изменяется на $\Delta p = mvn$. Поэтому, учитывая, что $\Delta t = 1$ мин $= 60$ с, находим:

$$F = mvn/\Delta t, \ F = 80 \text{ Н}.$$

102. Шарик массой $m = 20$ г падает со скоростью $v_1 = 5{,}0$ м/с на стальную плиту и отскакивает от нее в прямо противоположном направлении со скоростью $v_2 = 4{,}0$ м/с. Определить модуль изменения импульса шарика и модуль средней силы, действующей на шарик во время удара, если соударение длилось $\tau = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ с. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Р и с. 37

Р е ш е н и е. Выбрав направления осей OX и OY так, как показано на рис. 37, укажем векторы импульса шарика до и после удара. Изменение импульса шарика – это вектор

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1.$$

Модуль этого вектора

$$|\Delta\vec{p}| = \sqrt{(\Delta p_x)^2 + (\Delta p_y)^2},$$

где Δp_x, Δp_y – проекции вектора $\Delta\vec{p}$ на оси OX и OY соответственно.

Находим: $\Delta p_x = 0$, $\Delta p_y = mv_{2y} - mv_{1y} = mv_2 + mv_1 = m(v_1 + v_2)$. Следовательно, модуль изменения импульса шарика.

$$|\Delta\vec{p}| = m(v_1 + v_2). \tag{1}$$

Согласно второму закону Ньютона, изменение импульса тела равно импульсу силы. На шарик действуют во время удара две силы: сила нормальной реакции плиты $\vec{F}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Поэтому на основании второго закона

Ньютона $\Delta\vec{p} = (\vec{F} + m\vec{g})\tau$. В проекциях на ось OY имеем $m(v_1 + v_2) = (F - mg)\tau$. Отсюда

$$F = \frac{m(v_1 + v_2)}{\tau} + mg. \qquad (2)$$

Подставив числовые значения величин в формулы (1) и (2), получим: $|\Delta\vec{p}| = 0{,}18$ кг · м/с, $F = 18$ Н.

Обратим внимание на то, что модуль изменения импульса $|\Delta\vec{p}|$ и изменение модуля вектора $\vec{p}$, определяемое как $\Delta p = p_2 - p_1$, – это разные величины. В данном опыте, например, $|\Delta\vec{p}| = 0{,}18$ кг · м/с, $\Delta p = p_2 - p_1 = mv_2 - mv_1 = m(v_2 - v_1) = -20 \cdot 10^{-3}$ кг · м/с.

103. Шофер автомобиля резко затормозил при скорости $v_0 = 72$ км/ч. Через какое время τ автомобиль остановится, если коэффициент трения $\mu = 0{,}60$? Чему равен тормозной путь l автомобиля?

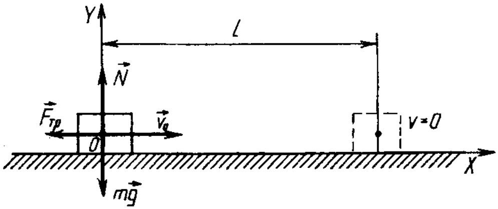


Рис. 38

Решение. Координатную ось OX выберем так, чтобы вектор скорости $\vec{v}_0$ был направлен в сторону положительного направления этой оси (рис. 38). Начало координат совместим с положением автомобиля в тот момент, когда шофер нажал на тормоз, и время будем отсчитывать с этого момента. Тогда движение автомобиля описывается кинематическими уравнениями:

$$x = v_{0x}t + a_x t^2/2, \qquad (1)$$
$$v_x = v_{0x} + a_x t, \qquad (2)$$

где x – координата автомобиля в момент времени t; $v_{0x} = v_0$, v_x, a_x – проекции на ось OX начальной скорости, скорости в момент t и ускорения соответственно.

На автомобиль действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Согласно второму закону Ньютона, составим уравнение в векторной форме:

$$\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

а потом для проекций на оси OX и OY: $-F_{\text{тр}} = ma_x$, $N - mg = 0$. Отсюда находим:

$$a_x = -F_{\text{тр}}/m, \; N = mg.$$

Учитывая, что сила трения $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg$, получаем

$$a_x = -\mu g. \tag{3}$$

В момент остановки автомобиля $t = \tau$, $v_x = 0$. На основании уравнения (2) с учетом равенства (3) получим $0 = v_0 - \mu g\tau$. Отсюда

$$\tau = \frac{v_0}{\mu g}. \tag{4}$$

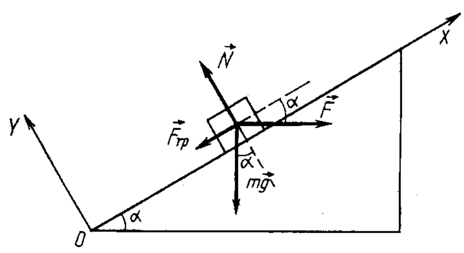
В момент остановки $x = l$. Подставив это значение, а также (3) и (4) в уравнение (1), найдем

$$l = v_0\tau - \frac{\mu g\tau^2}{2} = v_0\frac{v_0}{\mu g} - \frac{\mu g}{2}\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \tag{5}$$

Произведя вычисления по формулам (4) и (5), получим: $\tau = 3{,}4$ с, $l = 34$ м.

104. Груз массой $m = 5{,}0$ кг перемещается вверх по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ и коэффициентом трения $\mu = 0{,}05$. К грузу параллельно основанию приложена сила $F = 50$ Н. Найти ускорение груза.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат так, чтобы ось OX была направлена вверх вдоль плоскости, а ось OY — перпендикулярно ей (рис. 39). На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$, при-



Р и с. 39

ложенная сила $\vec{F}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. На основании второго закона Ньютона

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

Составим уравнения для проекций сил на оси OX и OY:

$$F\cos\alpha - mg\sin\alpha - F_{тр} = ma_x, \quad (1)$$

$$N - mg\sin\alpha - F\sin\alpha = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) найдем $N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha$, тогда $F_{тр} = \mu N = \mu(mg\cos\alpha + F\sin\alpha)$. Подставим это значение в уравнение (1):

$$F\cos\alpha - mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha + F\sin\alpha) = ma_x.$$

Отсюда

$$a_x = \frac{F}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \quad (3)$$

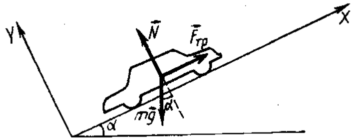
Очевидно, что при выбранной системе координат модуль ускорения $a = a_x$. По формуле (3) получим $a = 3{,}2$ м/с^2.

105. Автомобиль начинает двигаться с максимальным ускорением из состояния покоя вверх по наклонной плоскости с углом наклона α и коэффициентом трения μ. Найти время τ, за которое автомобиль пройдет путь l. Силой сопротивления воздуха и силой трения качения пренебречь.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат так, чтобы начало координат совпадало с точкой, из которой автомобиль начал двигаться. Ось OX направим вверх вдоль плоскости, а ось OY – перпендикулярно ей (рис. 40). Время будем отсчитывать с момента начала движения автомобиля. Тогда зависимость координаты автомобиля от времени выразится уравнением $x = a_x t^2/2$, так как $v_0 = 0$. При $t = \tau$ координата $x = l$, поэтому $l = a_x\tau^2/2$, откуда

$$\tau = \sqrt{2l/a_x}, \quad (1)$$

где a_x – проекция вектора ускорения автомобиля на ось OX. Эту проекцию мы найдем по второму закону Ньютона.



Р и с. 40

На автомобиль действуют три постоянные силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. В данном случае сила трения – это сила трения покоя, действующая на ведущие колеса со стороны дороги. Препятствуя проскальзыванию, эта сила направлена вперед и приводит в движение автомобиль, т. е. это и есть так называемая сила тяги. Заметим, что нередко можно услышать ответ, что сила тяги действует со стороны двигателя, а указанная выше сила трения направлена противоположно скорости автомобиля. Это, конечно, неверно.

Согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}.$$

В проекциях на выбранные оси уравнения движения будут иметь вид:

$$F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha = ma_x, \;\; N - mg\sin\alpha = 0.$$

Учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, решим относительно a_x полученную систему уравнений и найдем

$$a_x = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha).$$

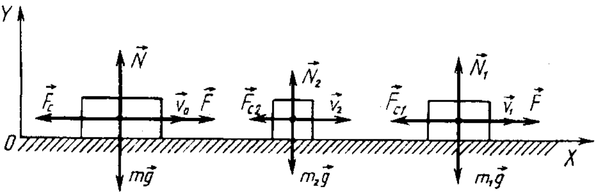
Подставив это значение в выражение (1), получим

$$\tau = \sqrt{\frac{2l}{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}} = \sqrt{\frac{2l}{g(\mu - \operatorname{tg}\alpha)\cos\alpha}}.$$

Из этой формулы видно, что автомобиль сможет ехать вверх по плоскости при условии $\operatorname{tg}\alpha < \mu$.

106. От поезда, идущего по горизонтальному участку пути с постоянной скоростью v_0, отцепилась $1/3$ состава. Через некоторое время скорость отцепившихся вагонов уменьшилась в 2 раза. Считая, что сила тяги при разрыве состава не изменилась, определить скорость головной части поезда в этот момент. Сила сопротивления движению пропорциональна силе тяжести и не зависит от скорости. Коэффициент сопротивления движению равен отношению модуля силы сопротивления к модулю силы нормальной реакции опоры.

Р е ш е н и е. На рис. 41 схематически показаны поезд массой m, его головная часть массой m_1 и отцепившаяся часть массой m_2. Положительное направление координатной оси OX совпадает с направлением движения поезда,



Р и с. 41

ось OY направлена вертикально вверх. Время будем отсчитывать с момента отцепки.

До отцепки поезд шел равномерно. Следовательно, выполнялось условие равновесия

$$\vec{F} + \vec{F}_c + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{0},$$

где $\vec{F}$ – сила тяги; $\vec{F}_c$ – сила сопротивления движению; $\vec{N}$ – сила нормальной реакции пути; $m\vec{g}$ – сила тяжести. Спроектировав силы на оси OX и OY, получим: $F - F_c = 0$, $N - mg = 0$, откуда $F = F_c$, $N = mg$.

Для поезда сила сопротивления движению $F_c = \mu N = \mu mg$, где μ – коэффициент сопротивления движению, учитывающий силу трения качения, силу трения на осях, силу сопротивления воздуха.

Для отцепившейся части сила сопротивления $F_{c2} = \mu m_2 g$, для головной части $F_{c1} = \mu m_1 g$. Учитывая, что $F = \mu mg$, $m_2 = m/3$, $m_1 = 2m/3$, получаем:

$$F_{c2} = F/3, \qquad (1)$$

$$F_{c1} = 2F/3. \qquad (2)$$

Так как сила тяги при разрыве не изменилась, то головная часть стала двигаться с ускорением и через время t_1 после отцепки двигалась со скоростью $\vec{v}_1$, которую можно определить из кинематического уравнения в проекциях на ось OX:

$$v_1 = v_0 + a_x t_1, \qquad (3)$$

где a_x – проекция ускорения на эту ось.

Составим на основании второго закона Ньютона уравнение движения головной части:

$$\vec{F} + \vec{F}_{c1} + \vec{N}_1 + m_1\vec{g} = m\vec{a}.$$

Запишем уравнение в проекциях на ось OX:

$$F - F_{c1} = m_1 a_x, \text{ или } F - \frac{2}{3}F = \frac{2}{3}ma_x,$$

откуда $a_x = F/(2m)$. Подставив это значение в формулу (3), получим

$$v_1 = v_0 + Ft_1/(2m). \tag{4}$$

Составим теперь уравнение движения отцепившейся части, на которую в горизонтальном направлении действует только сила сопротивления $\vec{F}_{c2}$. Согласно второму закону Ньютона, импульс этой силы равен изменению импульса тела:

$$\vec{F}_{c2}t_1 = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_0,$$

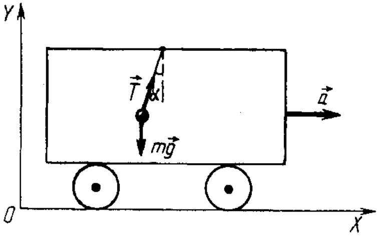
где $\vec{v}_2$ – скорость этой части в момент времени t_1. Для проекций на ось OX уравнение будет иметь вид

$$-F_{c2}t_1 = m_2 v_2 - m_2 v_0.$$

Подставив в это уравнение значения $m_2 = m/3$, $v_2 = v_0/2$, $F_{c2} = F/3$ и решив его, получим $F = mv_0/(2t_1)$. Это значение подставим в выражение (4) и найдем $v_1 = 5v_0/4$.

107. В вагоне, движущемся горизонтально с постоянным ускорением $a = 3{,}0$ м/с^2, на проволоке висит груз массой $m = 2$ кг. Определить силу натяжения проволоки и угол ее отклонения от вертикали. Груз относительно вагона неподвижен.

Р е ш е н и е. Неподвижную систему координат XOY свяжем с рельсами так, что положительное направление оси OX совпадает с направлением вектора ускорения $\vec{a}$, а ось OY направим вертикально вверх (рис. 42). На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения проволоки $\vec{T}$. На основании второго закона Ньютона $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$. Составим уравнения для проекций на оси OX и OY:



Р и с. 42

$$T\sin\alpha = ma,$$
$$T\cos\alpha - mg = 0.$$

Решив эту систему уравнений, найдем:

$$T = m\sqrt{g^2 + a^2}\,,\ T = 21\ \text{Н},\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{g},\ \alpha = 17°.$$

108. Шарик массой m подвешен на нити. В натянутом состоянии нить расположили горизонтально и отпустили шарик. Вывести зависимость силы натяжения T нити от угла α, который нить образует в данный момент с горизонтальным направлением. По выведенной формуле найти силу натяжения нити для случая прохождения шарика через положение равновесия.

Решение. Пусть в некоторый момент шарик находится в точке 2 и нить составляет с горизонтальным направлением угол α (рис. 43).

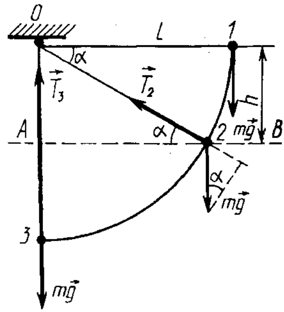


Рис. 43

Шарик движется неравномерно по окружности, радиус которой равен длине l нити. На шарик действуют сила натяжения $\vec{T}$ нити и сила тяжести $m\vec{g}$. Согласно второму закону Ньютона, $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение. Направив ось OX из точки 2 вдоль нити к центру окружности и спроектировав на эту ось силы и ускорение, получим уравнение

$$T = mg\sin\alpha = ma_x. \tag{1}$$

При неравномерном движении по окружности ускорение $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, где $\vec{a}_n$ – центростремительное (нормальное) ускорение; $\vec{a}_\tau$ – касательное (тангенциальное) ускорение. Следовательно, $a_x = a_{nx} + a_{\tau x}$. Но $a_x = a_n = v^2/l$, $a_{\tau x} = 0$, поэтому $a_x = v^2/l$, где v – модуль скорости шарика в точке 2. Подставив это выражение в уравнение (1), получим

$$T = m\left(g\sin\alpha + \frac{v^2}{l}\right). \tag{2}$$

Скорость шарика в точке 2 определим, используя закон сохранения механической энергии. Уровень AB отсчета потенциальной энергии выберем так, чтобы он проходил через точку *2*. Обозначим h высоту точки *1* над уровнем AB.

Согласно закону сохранения механической энергии,

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}, \qquad (3)$$

где $E_{p1} = mgh$, $E_{p2} = 0$ – потенциальная энергия шарика в точках *1* и *2* соответственно; $E_{k1} = 0$, $E_{k2} = mv^2/2$ – кинетическая энергия шарика в точках *1* и *2* соответственно.

Учитывая, что $h = l\sin\alpha$, на основании равенства (3) получаем $mgl\sin\alpha = mv^2/2$, откуда

$$v^2/l = 2g\sin\alpha.$$

Подставив это значение в формулу (2), получим искомую зависимость силы натяжения T от угла α:

$$T = 3mg\sin\alpha.$$

В частности, при прохождении шарика через положение равновесия (точка *3*) $\alpha = 90°$, поэтому $T_3 = 3mg$.

109. Шарик, прикрепленный к невесомой и нерастяжимой нити, движется в горизонтальной плоскости по окружности с постоянной скоростью (конический маятник). Расстояние от точки подвеса до горизонтальной плоскости равно h. Найти период обращения шарика.

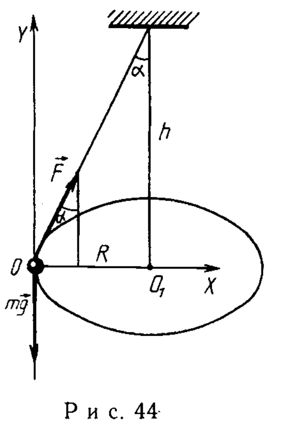
Р е ш е н и е. Пусть α – угол, составляемый нитью с вертикалью (рис. 44). На шарик действуют две силы: сила натяжения нити $\vec{F}$ и сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$, где m – масса шарика. Направим координатную ось OX вдоль радиуса к центру окружности O_1, а ось OY – вертикально вверх. По второму закону Ньютона

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

где $\vec{a}$ – центростремительное ускорение. Его модуль $a = v^2/R$, где v – линейная скорость шарика; R – радиус окружности.

Для проекций на ось OX получим

$$F\sin\alpha = mv^2/R. \qquad (1)$$



Р и с. 44

Вдоль оси OY ускорения нет, поэтому сумма проекций сил на эту ось равна нулю:

$$F\cos\alpha - mg = 0, \text{ или } F\cos\alpha = mg. \qquad (2)$$

Разделив почленно равенство (1) на равенство (2), получим

$$\operatorname{tg}\alpha = v^2/(gR). \qquad (3)$$

Линейная скорость шарика $v = 2\pi R/T$, где T – период обращения. Подставим это значение в формулу (3):

$$\operatorname{tg}\alpha = 4\pi^2 R/(gT^2). \qquad (4)$$

С другой стороны, как видно из рис. 44,

$$\operatorname{tg}\alpha = R/h. \qquad (5)$$

Из формул (4) и (5) получаем

$$R/h = 4\pi^2 R/(gT^2),$$

откуда находим искомый период обращения:

$$T = 2\pi\sqrt{h/g}.$$

Полученный результат показывает, что период обращения конического маятника зависит только от расстояния h между плоскостью вращения и точкой подвеса и от ускорения свободного падения g и не зависит от длины нити, массы шарика, радиуса окружности и линейной скорости шарика.

110. Танк массой $m = 5{,}0 \cdot 10^4$ кг движется по мосту равномерно со скоростью $v = 10$ м/с. Радиус кривизны моста $R = 500$ м. Найти силу, с которой танк действует на середину моста, если мост: а) вогнутый; б) выпуклый. С какой силой действовал бы танк на плоский мост?

Р е ш е н и е. На танк действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила нормальной реакции моста, которая равна в первом случае $\vec{N}_1$ (рис. 45, *а*), во втором $\vec{N}_2$ (рис. 45, *б*) и в третьем $\vec{N}_3$ (рис. 45, *в*). Согласно третьему закону Ньютона, сила $\vec{F}$, с которой танк действует на мост, по модулю равна силе реакции моста и направлена вертикально вниз.

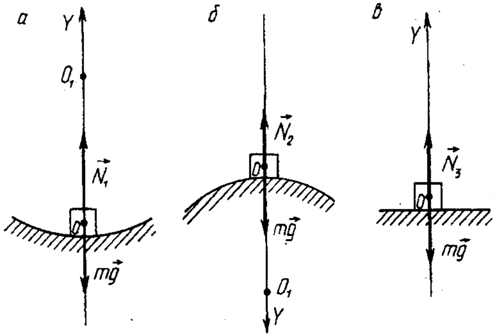


Рис. 45

Силу реакции моста в каждом случае найдем из второго закона Ньютона. Примем за начало координат верхнюю точку моста и направим ось OY в случаях «а» и «б» к центру окружности O_1 и в случае плоского моста вертикально вверх. Составим, согласно второму закону Ньютона, уравнения в векторной форме:

$$\vec N_1 + m\vec g = m\vec a_1,\ \vec N_2 + m\vec g = m\vec a_2,\ \vec N_3 + m\vec g = 0,$$

где $\vec a_1$, $\vec a_2$ – центростремительное ускорение. По модулю $a_1 = a_2 = v^2/R$. В проекциях на ось OY имеем:

$$N_1 - mg = \frac{mv^2}{R},\ mg - N_2 = \frac{mv^2}{R},\ N_3 - mg = 0.$$

Отсюда находим:

$$N_1 = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right),\ N_2 = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right),\ N_3 = mg.$$

С такими же по модулю силами танк действует на мост:

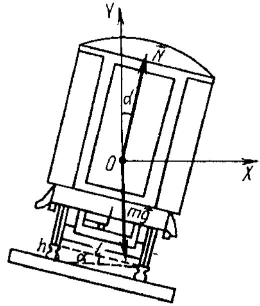
$$F_1 = N_1 = 50 \cdot 10^4\ \text{Н},\ F_2 = N_2 = 48 \cdot 10^4\ \text{Н},$$
$$F_3 = N_3 = 49 \cdot 10^4\ \text{Н}.$$

Отметим, что и в случае «б» (мост выпуклый) можно было бы ось OY направить вверх. Тогда для проекций на эту ось получили бы уравнение

$$N_2 - mg = -mv^2/R,$$

которое равносильно приведенному выше.

111. На сколько должен быть поднят внешний рельс над внутренним на закруглении железнодорожного пути, чтобы боковое давление на реборды колес (выступающая часть обода колеса, которая предохраняет его от схода с рельса) было равно нулю, если радиус закругления R = 800 м, скорость поезда v = 72 км/ч? Ширину l колеи железной дороги считать равной 1,5 м.



Р и с. 46

Р е ш е н и е. Когда боковое давление на реборды колес на закруглении отсутствует, на вагон действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$ и сила реакции рельсов $\vec{N}$ (рис. 46). Координатную ось OX направим к центру закругления, а ось OY – вертикально вверх.

Согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

В проекциях на ось OX имеем

$$N \sin\alpha = mv^2/R. \qquad (1)$$

Чтобы найти N, проектируем силы на ось OY и, учитывая, что $a_y = 0$, получаем $N\cos\alpha - mg = 0$, откуда $N = mg/\cos\alpha$. Подставим это значение в уравнение (1):

$$\frac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{mv^2}{R}.$$

Отсюда

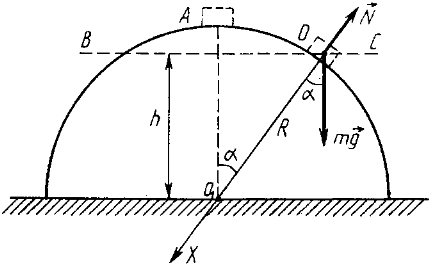
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{gR}, \ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{v^2}{gR}, \ \alpha = 3°.$$

Внешний рельс должен быть поднят на высоту $h = l\sin\alpha$, h = 7,5 см.

112. Небольшое тело начинает соскальзывать без трения вниз с высшей точки полусферы радиуса R. На какой высоте оно оторвется от поверхности полусферы? Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. Когда тело движется без трения по поверхности полусферы, на него действуют две силы: сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ (рис. 47).

Второй закон Ньютона запишем так: $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$, где $\vec{a}$ – ускорение в данной точке траектории. Направим ось



Р и с. 47

OX из этой точки по радиусу к центру полусферы. Для проекций сил и ускорения на эту ось получим

$$mg\cos\alpha - N = ma_x.$$

При указанном направлении оси OX проекция a_x ускорения $\vec{a}$ равна модулю центростремительного (нормального) ускорения: $a_x = a_n = v^2/R$, где v – модуль скорости тела в точке O. Следовательно,

$$mg\cos\alpha - N = mv^2/R.$$

В момент отрыва тела от полусферы $N = 0$, поэтому $mg\cos\alpha = mv^2/R$, откуда

$$gR\cos\alpha = v^2. \tag{1}$$

Принимая во внимание, что $R\cos\alpha = h$, формулу (1) можно записать так:

$$gh = v^2. \tag{2}$$

Для нахождения скорости v в момент отрыва воспользуемся законом сохранения механической энергии. Уровень BC отсчета потенциальной энергии выберем проходящим через точку O. Поскольку начальная скорость тела равна нулю и трение отсутствует, то потенциальная энергия полностью переходит в кинетическую:

$$mg(R - h) = mv^2/2.$$

Отсюда $2g(R - h) = v^2$. Подставив это значение v^2 в формулу (2), получим $gh = 2g(R - h)$, откуда $h = 2R/3$.

113. Для подготовки летчиков-космонавтов к перегрузкам применяют специальные центрифуги. При какой частоте вращения центрифуги радиуса $R = 5$ м спинка сиденья давит на летчика с такой же силой, которая возникает при ускорении ракеты $a = 3g$?

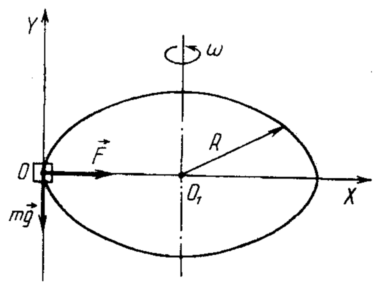


Рис. 48

Решение. На тело в ракете, движущейся вертикально вверх с ускорением $a = 3g$, действуют сила $\vec{F}$, направленная вертикально вверх, и сила тяжести $m\vec{g}$. По второму закону Ньютона

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}.$$

Уравнение для проекций на ось OY, положительное направление которой совпадает с направлением ускорения $\vec{a}$, имеет вид $F - mg = ma$, откуда

$$F = m(g + a) = 4mg. \qquad (1)$$

При вращении центрифуги сила $\vec{F}$, с которой спинка сиденья давит на летчика (рис. 48), сообщает ему центростремительное ускорение. На основании второго закона Ньютона, проектируя силы $\vec{F}$ и $m\vec{g}$ на ось OX, имеем

$$F = m\omega^2 R, \qquad (2)$$

где ω — угловая скорость. Она связана с частотой вращения n соотношением

$$\omega = 2\pi n. \qquad (3)$$

Подставив значения (1) и (3) в уравнение (2) и решив его относительно n, получим:

$$n = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}},\ n = 0{,}5\ \text{с}^{-1}.$$

114. Во сколько раз период обращения искусственного спутника, совершающего движение по круговой орбите на высоте h над поверхностью Земли (радиус Земли R), превышает период спутника, обращающегося в непосредственной близости от ее поверхности ($h \approx 0$)?

Решение. В первом случае спутник движется по окружности радиуса $R + h$. Модуль ускорения спутника

$$a = \omega_1^2 (R + h),$$

где ω_1 – угловая скорость. Это ускорение сообщает спутнику сила тяготения Земли, направленная к ее центру. Модуль этой силы

$$F = G\frac{mM}{(R + h)^2},$$

где G – гравитационная постоянная; m – масса спутника; M – масса Земли.

По второму закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$. Следовательно, для проекций на ось, направленную к центру орбиты, имеем

$$G\frac{mM}{(R + h)^2} = m\omega_1^2 (R + h). \qquad (1)$$

Период обращения T_1 связан с угловой скоростью соотношением $\omega_1 = 2\pi / T_1$. Подставив это значение в уравнение (1), получим

$$G\frac{M}{(R + h)^2} = \frac{4\pi^2 (R + h)}{T_1^2}. \qquad (2)$$

Во втором случае спутник движется по окружности, радиус которой приблизительно равен радиусу Земли R. Рассуждая аналогично, получаем уравнение

$$G\frac{M}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T_2^2}. \qquad (3)$$

Разделив почленно уравнение (3) на уравнение (2), будем иметь

$$\frac{(R + h)^2}{R^2} = \frac{T_1^2 R}{T_2^2 (R + h)}.$$

Отсюда

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^3}.$$

115. Искусственный спутник запущен в плоскости земного экватора так, что все время находится над одной и той же точкой земного шара (геостационарный спутник). Найти расстояние от поверхности Земли до спутника. Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 9{,}8$ м/с^2. Радиус Земли $R = 6370$ км.

Р е ш е н и е. Пусть r – расстояние от центра Земли до спутника, m – масса спутника. Сила тяготения сообщает спутнику центростремительное ускорение. На основании второго закона Ньютона

$$G\frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r, \qquad (1)$$

где G – гравитационная постоянная; M – масса Земли; ω – угловая скорость спутника.

Спутник все время находится над одной и той же точкой земного шара. Следовательно, угловая скорость спутника равна угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси:

$$\omega = 2\pi/T, \qquad (2)$$

где $T = 24$ ч – период вращения Земли.

Подставив значение (2) в уравнение (1), получим

$$G\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Умножив и разделив левую часть этого выражения на R^2, будем иметь

$$G\frac{M}{R^2}\frac{R^2}{r^2} = \frac{4\pi r}{T^2}.$$

Так как $G\dfrac{M}{R^2} = g$, то $\dfrac{gR^2}{r^2} = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$, откуда

$$r = \sqrt[3]{\frac{gT^2R^2}{4\pi^2}}.$$

Следовательно, расстояние от поверхности Земли до спутника

$$h = r - R = \sqrt[3]{\frac{gT^2R^2}{4\pi^2}} - R,\ h = 3{,}2 \cdot 10^7 \text{ м}.$$

Задачи для самостоятельного решения

116. Скорость поезда массой $m = 500$ т при торможении уменьшается в течение $\tau = 1$ мин от $v_1 = 40$ км/ч до $v_2 = 28$ км/ч. Считая ускорение поезда постоянным, найти силу торможения.

117. Сила $F = 30$ Н приложена к телу массой $m = 5{,}0$ кг под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Тело движется по горизонтальной плоскости. Коэффициент трения $\mu = 0{,}20$. Вычислить скорость тела через $t = 10$ с после начала действия силы и путь, пройденный за это время. Начальная скорость тела $v_0 = 0$.

118. Два привязанных к концам нити бруска, массы которых $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}3$ кг, движутся по горизонтальной поверхности под действием горизонтальной силы $F = 4$ Н, приложенной ко второму бруску. С каким ускорением движутся бруски? Какова сила натяжения связывающей их нити? Коэффициент трения между брусками и плоскостью $\mu = 0{,}1$.

119. Тело массой $m = 20$ кг тянут с силой $F = 120$ Н по горизонтальной поверхности. Если эта сила приложена под углом $\alpha_1 = 60°$ к горизонту, то тело движется равномерно. С каким ускорением будет двигаться тело, если ту же силу приложить под углом $\alpha_2 = 30°$ к горизонту? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

120. На тело массой m в течение времени t действует постоянная сила $\vec{F}$, направленная горизонтально. Коэффициент трения тела о горизонтальную поверхность, на которой оно лежит, равен μ. Какой путь пройдет тело до остановки? Начальная скорость тела равна нулю.

121. Тело массой $m = 1$ кг брошено под углом к горизонту. В наивысшей точке траектории ускорение тела было $a = 12$ м/с^2. Какая сила сопротивления действовала в этот момент?

122. Найти ускорение тел и силы натяжения нитей в устройстве, изображенном на рис. 49. Массы тел: $m_1 = 100$ г, $m_2 = 300$ г. Массой нитей, блоков и силой трения пренебречь.

123. Две гири массами $m_1 = 4{,}0$ кг и $m_2 = 3{,}0$ кг подвешены на концах нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок. Меньшая гиря находится на $h = 2{,}8$ м ниже, чем бо́льшая (рис. 50). Определить че-

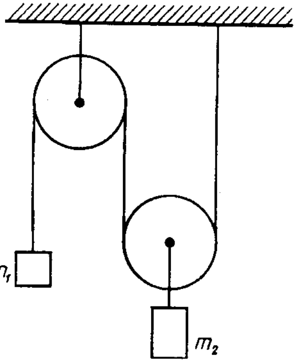


Рис. 49

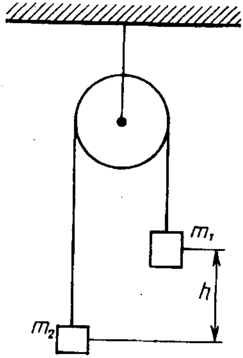


Рис. 50

рез какое время гири окажутся на одной высоте, если дать им возможность двигаться без начальной скорости под действием сил тяжести. Массой нити и блока пренебречь.

124. Тело массой $m_1 = 3{,}0$ кг скользит по горизонтальной плоскости под действием груза массой $m_2 = 1{,}0$ кг, прикрепленного к концу нерастяжимой нити. Нить привязана к телу массой m_1 и перекинута через неподвижный блок. Определить ускорение системы и силу натяжения нити. Трением, массой блока и нити пренебречь.

125. Два груза массами m_1 и m_2, соединенных невесомой и нерастяжимой нитью, движутся по гладкой плоскости. Когда сила $F = 100$ Н была приложена к правому грузу массой m_2, сила натяжения нити T была равна 30 Н. Какой будет сила натяжения нити, если силу F приложить к левому грузу?

126. Какая требуется сила, чтобы стальной стержень, длина которого $l = 1{,}0$ м и площадь поперечного сечения $S = 1{,}0$ см^2, удлинить на $\Delta l = 1{,}0$ мм? При какой наименьшей силе стержень разорвется, если предел прочности стали $\sigma_{пр} = 7{,}85 \cdot 10^8$ Па? Модуль Юнга стали $E = 21{,}6 \cdot 10^{10}$ Па.

127. Вертикально стартующая ракета развивает силу тяги $\vec{F}$ в течение времени τ, затем двигатель выключается. Определить, через какое время после старта ракета вернется на Землю. Масса ракеты m, ее изменение не учитывать. Сопротивлением воздуха и изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь.

128. Трактор, двигаясь в гору с углом наклона α, тянет сани массой m. На пути s скорость саней увеличивается от v_0 до v. Считая коэффициент трения саней о дорогу равным μ, найти силу тяги.

129. Определить массу груза, который нужно сбросить с аэростата массой $M = 1100$ кг, движущегося равномерно вниз, чтобы аэростат стал двигаться с такой же по модулю скоростью вверх. Архимедова сила, действующая на аэростат, $F_A = 1 \cdot 10^4$ Н. Силу сопротивления воздуха при подъеме и спуске считать одинаковой. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

130. К грузу массой $m_1 = 20$ кг, находящемуся на наклонной плоскости, привязан шнур, который перекинут через блок, закрепленный в вершине плоскости, к другому концу шнура подвешен груз массой $m_2 = 4$ кг. С каким ускорением будут двигаться грузы, если угол наклона плоскости $\alpha = 30°$? Коэффициент трения $\mu = 0{,}2$. Массой шнура и блока пренебречь.

131. Через невесомый блок, который может вращаться без трения вокруг неподвижной горизонтальной оси, перекинули невесомую и нерастяжимую нить, к концам которой подвесили два груза (см. рис. 50). При каком отношении масс этих грузов сила, действующая на ось блока, будет равна силе тяжести, действующей на груз бóльшей массы?

132. К бруску массой $m_1 = 2$ кг, лежащему на столе, привязана нерастяжимая нить. Ко второму концу нити, перекинутой через укрепленный на краю стола блок, привязан груз массой $m_2 = 0{,}5$ кг. Определить коэффициент трения бруска о стол, если, двигаясь без начальной скорости, брусок за время $t = 2$ с прошел путь $s = 1$ м. Массой нити, блока и трением в блоке пренебречь.

133. К концам нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок, прикреплены гири массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг. Обе гири движутся с ускорением $a = 3{,}27$ м/с^2. Найти ускорение свободного падения для данного места. Массой нити, блока и трением в блоке пренебречь.

134. На концах нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок, подвешены тела массой $m = 240$ г каждое. Какую массу должен иметь добавочный груз, положенный на одно из тел, чтобы каждое из них прошло за время $t = 4{,}0$ с путь $s = 160$ см? Массой нити, блока и трением в блоке пренебречь.

135. Через вращающийся вокруг горизонтальной оси блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, к концам которой привязаны грузы $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}6$ кг. Найти силу, с которой блок давит на ось при движении грузов. Массой блока и трением в блоке пренебречь.

136. Человек передвигает груженые сани с постоянной скоростью с помощью твердого стержня, соединенного с санями и расположенного под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Одинаковые ли силы F_1 и F_2 нужно приложить к саням для их передвижения, если их толкать перед собой или тянуть за собой? Во сколько раз одна сила больше другой? Коэффициент трения саней о дорогу $\mu = 0{,}10$.

137. Шарик массой m прикреплен двумя нитями одинаковой длины к доске (рис. 51). Угол между нитями α. Какими будут силы натяжения каждой нити, если доска, оставаясь горизонтальной, станет двигаться вверх с ускорением a?

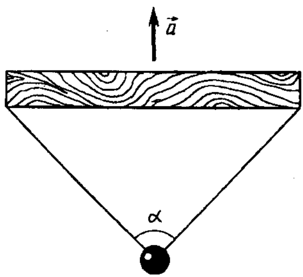


Рис. 51

138. Горизонтальная струя воды ударяется о вертикальную стену. После удара вода стекает по стене вниз. Найти силу, с которой струя действует на стену, если площадь поперечного сечения струи $S = 5$ см^2, а ее скорость $v = 8$ м/с. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

139. Металлический шарик массой $m = 20$ г, свободно падающий без начальной скорости с высоты $h = 1{,}3$ м, ударяется упруго о горизонтально расположенную стальную плиту и отскакивает от нее в противоположном направлении с такой же по модулю скоростью. Найти среднюю силу, с которой шарик действовал на плиту, если продолжительность удара $t = 0{,}10$ с. Сопротивление воздуха не учитывать.

140. Автобус массой $m = 4$ т трогается с места и на пути $l = 100$ м приобретает скорость $v = 20$ м/с. Сила тяги $F = 10$ кН. Найти силу сопротивления движению, считая ее постоянной.

141. При быстром торможении автомобиля, имевшего скорость $v = 72$ км/ч, его колеса начали скользить по земле, не вращаясь. Коэффициент трения между колесами и землей $\mu = 0{,}40$. Какой путь пройдет автомобиль с момента начала торможения до полной остановки?

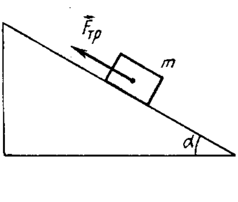
142. Автомобиль начал двигаться с ускорением $a_0 = 3{,}0$ м/с^2. При скорости $v_1 = 60$ км/ч ускорение $a_1 = 1{,}0$ м/с^2. С какой скоростью будет двигаться автомобиль при равномерном движении, если сила тяги двигателя постоянна, а общая сила сопротивления движению пропорциональна скорости?

143. С какой минимальной силой нужно тянуть за веревку, чтобы санки массой $m = 30$ кг равномерно двигались по горизонтальному асфальту, если коэффициент трения скольжения полозьев по асфальту $\mu = 0{,}60$?

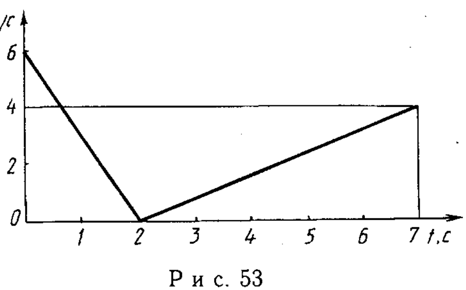
144. К бруску массой $m = 5$ кг, который лежит на горизонтальной плоскости, приложена под углом $\alpha = 60°$ к горизонту сила, модуль которой возрастает пропорционально времени по закону $F = kt$, где $k = 3$ Н/с. Найти модуль силы трения через $t = 4$ с после начала действия силы. Коэффициент трения между бруском и плоскостью $\mu = 0{,}3$.

145. К концам однородного стержня приложены две противоположно направленные силы $F_1 = 40$ Н и $F_2 = 100$ Н. Определить силу натяжения стержня в поперечном сечении, которое делит стержень на две части в отношении 1 : 2.

146. Найти зависимость модуля силы трения, действующей на тело массой m на наклонной плоскости, от угла α (рис. 52). Коэффициент трения равен μ.



Р и с. 52



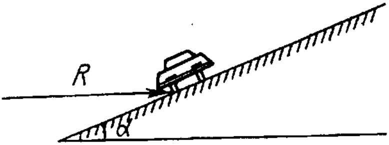
Р и с. 53

147. Плоская шайба, которую толкнули вдоль наклонной плоскости, скользит по ней, двигаясь вверх, а затем возвращается к месту броска. График зависимости модуля скорости шайбы от времени показан на рис. 53. Найти угол наклона плоскости к горизонту.

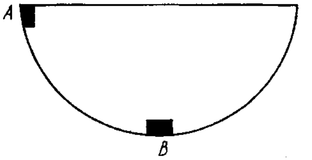
148. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha = 15°$. По ней вверх пускают с нижней точки плоскую шайбу, которая, поднявшись на некоторую высоту, затем соскальзывает по тому же пути вниз. Каков коэффициент трения шайбы о плоскость, если время спуска в $n = 3$ раза больше времени подъема?

149. На какую высоту может подняться автомобиль с работающим двигателем по ледяной горе, составляющей с горизонтом угол α, если у начала подъема он имел скорость v_0? Коэффициент трения равен μ, причем $\mu < \mathrm{tg}\alpha$.

150. На автодроме автомобили испытываются на скорости $v = 120$ км/ч. Под каким углом α к горизонту (рис. 54) должно быть наклонено полотно дороги на повороте с радиусом закругления $R = 110$ м, чтобы движение автомобиля было наиболее безопасным даже в гололедицу?



Р и с. 54



Р и с. 55

151. С какой скоростью должен двигаться автомобиль по выпуклому мосту, имеющему радиус кривизны $R = 60$ м, чтобы в верхней точке траектории давление на дорогу было в $n = 3{,}0$ раза меньше, чем при движении на горизонтальном участке?

152. Радиус кривизны вогнутого моста равен R. Масса наибольшего неподвижного груза, который может выдержать середина моста, m. При какой скорости v движущегося по мосту груза массой m/n $(n > 1)$ мост разрушится?

153. Планета представляет собой однородный шар, плотность которого $\rho = 3 \cdot 10^3$ кг/м^3. Каков период обращения искусственного спутника, движущегося вблизи ее поверхности? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

154. Найти радиус окружности, по которой автомобиль может двигаться со скоростью $v = 36$ км/ч, если минимальный коэффициент трения скольжения, при котором автомобиль не «заносит», $\mu = 0{,}20$.

155. Плоское тело массой $m = 4$ кг движется без трения по круговому желобу, расположенному в вертикальной плоскости так, что диаметр, проведенный из точки A (рис. 55), горизонтален. Определить силу, с которой тело действует на желоб в точке B, если оно пущено без начальной скорости из точки A.

156. Привязанный к нити длиной $l = 0{,}4$ м груз массой $m = 0{,}2$ кг вращают в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью так, что нить описывает коническую поверхность. При этом угол отклонения нити от вертикали $\alpha = 30°$. Найти угловую скорость груза и силу натяжения нити.

157. Шарик, подвешенный к невесомой нити, движется по окружности в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью (конический маятник – см. рис. 44). Длина нити $l = 1{,}14$ м; угол, составленный нитью с вертикалью, $\alpha = 30°$. Период вращения маятника $T = 2{,}0$ с. Найти ускорение свободного падения.

158. В вагоне поезда, идущего равномерно со скоростью $v = 20$ м/с по горизонтальному закруглению железнодорожного пути, производится взвешивание груза массой $m = 4$ кг с помощью динамометра, подвешенного к потолку вагона. Вес P груза оказался равным 39,4 Н. Определить радиус закругления.

159. Летчик давит на сиденье кресла самолета в нижней точке петли Нестерова с силой $F = 7200$ Н. Масса летчика $m = 80$ кг, радиус петли $R = 250$ м. Определить скорость самолета.

160. Радиус Луны приблизительно в $n_1 = 3{,}8$ раза меньше радиуса Земли, а масса Луны в $n_2 = 81$ раз меньше массы Земли. Найти ускорение свободного падения на Луне, если известно, что на Земле $g_З = 9{,}8$ м/с^2. Во сколько раз нужно изменить начальную скорость, чтобы брошенное вертикально вверх тело поднялось на такую же высоту на Луне, как и на Земле?

161. Материальная точка массой $m = 1{,}0$ кг равномерно движется по окружности со скоростью $v = 10$ м/с. Определить модуль изменения импульса этой точки за одну четверть периода вращения.

162. На какой угол надо отклонить нить с подвешенным на ней грузом, чтобы при прохождении положения равновесия сила натяжения нити была в 2 раза больше силы тяжести груза?

163. Тело массой $m = 0{,}1$ кг вращается в вертикальной плоскости на нити длиной $l = 1$ м. Ось вращения расположена над полом на высоте $H = 2$ м. При прохождении нижнего положения нить обрывается, и тело падает на пол на расстоянии $L = 4$ м (по горизонтали) от точки обрыва. Определить силу натяжения нити в момент ее обрыва. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

164. На невесомом стержне висит груз массой m. Груз отклоняют на угол $\alpha = 90°$ и отпускают. Найти силу натяжения стержня в момент прохождения им положения равновесия.

165. Шарик массой $m = 100$ г подвешен на нити. В натянутом положении нить расположили горизонтально и отпустили шарик. Чему равна сила натяжения нити в момент, когда она образует с горизонтальным направлением угол $\alpha = 30°$? Какой прочностью на разрыв должна обладать нить, чтобы она не оборвалась? Нить считать невесомой и нерастяжимой.

166. Велосипедист едет без проскальзывания по окружности радиуса R со скоростью v. Найти угол между плоскостью велосипеда и вертикалью.

167. Горизонтально расположенный диск вращается с частотой $n = 0{,}25$ с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси. Наибольшее расстояние от оси вращения, на котором тело удерживается на диске в равновесии, $r = 10$ см. Чему равен коэффициент трения тела о диск?

168. Чаша в форме полусферы радиуса $R = 0{,}8$ м вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси (рис. 56). Вместе с чашей вращается шарик, лежащий на ее внутренней поверхности. Расстояние от шарика до нижней точки чаши равно ее радиусу. Определить угловую скорость чаши. Трением пренебречь.

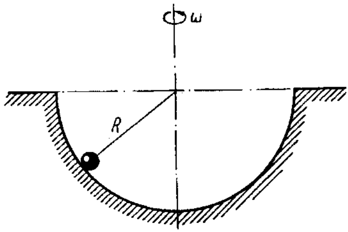


Рис. 56

169. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность веществ планеты $\rho = 3{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3. Определить период вращения планеты вокруг собственной оси. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2.

170. Определить массу Солнца, зная, что средняя линейная скорость Земли на орбите $v = 30$ км/с, а радиус орбиты Земли $R = 1{,}5 \cdot 10^8$ км. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2.

171. Спутник движется вокруг некоторой планеты по круговой орбите радиуса $r = 4{,}7 \cdot 10^9$ м со скоростью $v = 1 \cdot 10^4$ м/с. Какова средняя плотность планеты, если ее радиус $R = 1{,}5 \cdot 10^8$ м? Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2.

172. Два искусственных спутника Земли движутся в одном направлении со скоростями v_1 и v_2 по окружностям, лежащим в одной плоскости. Определить минимальное расстояние между спутниками. Радиус Земли R, ускорение свободного падения на поверхности Земли g_0.

173. Какую силу тяги должен развивать двигатель на искусственном спутнике Земли для того, чтобы он двигался по орбите радиуса R со скоростью, превышающей в n раз скорость свободного движения по этой орбите? Масса Земли M, масса спутника m, гравитационная постоянная G.

174. Каким должен был бы быть период вращения Земли вокруг своей оси, чтобы тела на экваторе находились в состоянии невесомости? Радиус Земли $R = 6370$ км.

175. Найти первую космическую скорость для планеты, масса которой в $n_1 = 3$ раза больше массы Земли, а радиус больше земного в $n_2 = 2$ раза. Первую космическую скорость для Земли считать равной $v_1 = 8$ км/с.

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

Методические указания к решению задач

При решении задач с применением закона сохранения импульса необходимо сначала установить, является ли данная система тел замкнутой, затем сделать схематический чертеж и обозначить на нем все известные скорости тел. Далее выбирают прямоугольную систему координат так, чтобы проекции скоростей на координатные оси выражались по возможности проще.

Если система тел замкнута, то уравнения составляют на основании закона сохранения импульса сначала в векторной форме:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \text{const},$$

а затем в скалярной, т. е. сумма проекций импульсов всех тел системы на любую ось сохраняется неизменной:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \ldots + m_n v_{nx} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x} + \ldots + m_n u_{nx},$$
$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} + \ldots + m_n v_{ny} = m_1 u_{1y} + m_2 u_{2y} + \ldots + m_n u_{ny},$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ – массы тел системы; $v_{1x}, v_{2x}, \ldots, v_{nx}$, $v_{1y}, v_{2y}, \ldots, v_{ny}$ – проекции начальных скоростей этих тел (до взаимодействия тел) на оси OX и OY соответственно; $u_{1x}, u_{2x}, \ldots, u_{nx}, u_{1y}, u_{2y}, \ldots, u_{ny}$ – проекции конечных скоростей тел (после взаимодействия).

Закон сохранения импульса выполняется и в том случае, когда на тела системы действуют внешние силы, но их векторная сумма равна нулю.

Если система не замкнута, но есть такое направление, что сумма проекций всех внешних сил на него равна нулю, то сумма проекций импульсов всех тел системы на это направление остается постоянной.

Закон сохранения импульса можно применить также при действии внешних сил на систему, если взаимодействие тел системы происходит очень быстро (например, удар, взрыв, выстрел). В этом случае продолжительность взаимодействия считается бесконечно малой, поэтому можно пренебречь импульсом внешних сил и рассматривать систему как замкнутую.

Если число неизвестных больше числа составленных уравнений, нужно добавить к ним уравнения, связывающие кинематические величины, и решить полученную систему уравнений.

Задачи на применение закона сохранения энергии в механике решают по следующему плану: делают схематический чертеж; выбирают уровень отсчета потенциальной энергии; изображают на чертеже силы, действующие на тела, скорости тел и высоты тел над уровнем отсчета потенциальной энергии в начальном и конечном положениях.

Если система замкнута, то составляют равенство

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2},$$

где E_{k1}, E_{p1} – соответственно кинетическая и потенциальная энергия системы в начальном состоянии; E_{k2}, E_{p2} – кинетическая и потенциальная энергия системы в конечном состоянии.

Если при переходе системы из начального состояния в конечное на тела действовали внешние силы, а в системе действовали силы трения, то составляется равенство

$$(E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = A + A_{тр},$$

где A – работа внешних сил; $A_{тр}$ – работа сил трения.

Если количество неизвестных величин больше числа составленных уравнений, то к ним следует добавить либо уравнения, составленные на основе второго закона Ньютона и закона сохранения импульса, либо кинематические уравнения. Затем систему уравнений решают относительно искомых величин.

Основные законы и формулы

Импульс тела массой m, движущегося со скоростью $\vec{v}$,

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Импульс системы тел равен векторной сумме импульсов всех тел системы.

Закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы тел остается постоянным при любых взаимодействиях этих тел:

$$\vec{P}_{сист} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \text{const}.$$

Работа постоянной силы $\vec{F}$

$$A = Fs\cos\alpha,$$

где s – модуль перемещения; α – угол между векторами силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{s}$.

Мощность

$$N = A/t \text{ или } N = Fv\cos\alpha,$$

где A – работа, совершенная за промежуток времени t; F – модуль силы; v – модуль скорости; α – угол между $\vec{F}$ и $\vec{v}$.

Кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью v,

$$E_k = mv^2/2.$$

Теорема об изменении кинетической энергии: изменение кинетической энергии тела равно работе равнодействующей сил, приложенных к телу:

$$E_{k2} - E_{k1} = A.$$

Потенциальная энергия тела массой m, поднятого на высоту h относительно нулевого уровня,

$$E_p = mgh.$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела (сжатой или растянутой пружины)

$$E_p = k(\Delta l)^2/2,$$

где k – коэффициент упругости (жесткость) тела; Δl – абсолютная деформация.

Закон сохранения энергии в механике: полная механическая энергия замкнутой системы тел, взаимодействующих силами тяготения и упругости, остается неизменной:

$$E = E_k + E_p = \text{const}.$$

Изменение полной механической энергии системы равно работе внешних сил:

$$E_2 - E_1 = A.$$

Изменение полной механической энергии замкнутой системы, в которой между телами действуют силы трения, равно работе сил трения:

$$E_2 - E_1 = A_{тр}.$$

Коэффициент полезного действия (КПД)

$$\eta = A_п / A_з,$$

где $A_п$ – полезная работа (или полезно преобразованная энергия, мощность); $A_з$ – затраченная работа (энергия, мощность).

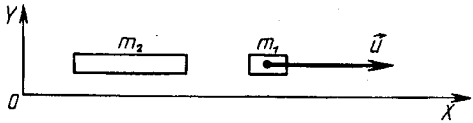
Абсолютно упругим ударом называется такое кратковременное взаимодействие тел, после которого тела полностью восстанавливают свою форму, а их суммарная кинетическая энергия не изменяется. При абсолютно упругом ударе выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии.

Абсолютно неупругим ударом называется такое кратковременное взаимодействие тел, после которого соударяющиеся тела образуют единое тело, движущееся с определенной скоростью, а суммарная кинетическая энергия тел уменьшается. При абсолютно неупругом ударе выполняется закон сохранения импульса, а механическая энергия не сохраняется, часть ее превращается во внутреннюю энергию тел.

Примеры решения задач

176. Пуля вылетает из винтовки в горизонтальном направлении со скоростью $u_1 = 800$ м/с. Какова скорость винтовки при отдаче, если ее масса в 400 раз больше массы пули?

Р е ш е н и е. Пусть положительное направление оси OX совпадает с направлением скорости пули в момент вылета из винтовки (рис. 57). В этом направлении внешние



Р и с. 57

силы не действуют (сопротивлением воздуха пренебрегаем), поэтому, согласно закону сохранения импульса, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$, где $\vec{p}_1$ – импульс пули; $\vec{p}_2$ – импульс винтовки. Следовательно, сумма проекций на ось OX импульсов винтовки и пули до выстрела равна сумме проекций их импульсов после выстрела:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}.$$

Так как $v_{1x} = 0$, $v_{2x} = 0$, $u_{1x} = u_1$, то $m_1 u_1 + m_2 u_{2x} = 0$. Отсюда

$$u_{2x} = -\frac{m_1}{m_2} u_1, \; u_{2x} = -2 \text{ м/с}.$$

Минус означает, что направление вектора скорости винтовки $\vec{u}_2$ противоположно направлению вектора скорости пули $\vec{u}_1$.

177. Мальчик стоит неподвижно на льду рядом с санками. Масса мальчика M, масса санок m. Мальчик толкает санки и сообщает им скорость v, а сам движется в противоположном направлении. Какую работу совершил мальчик?

Р е ш е н и е. Совершенная мальчиком работа равна изменению кинетической энергии санок и мальчика:

$$A = \left(\frac{mv^2}{2} - 0\right) + \left(\frac{Mv_1^2}{2} - 0\right) = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2},$$

где v_1 – скорость, с которой стал двигаться мальчик.

За положительное направление оси OX примем направление скорости санок. Применив закон сохранения импульса, составим уравнение в проекциях на ось OX: $mv - Mv_1 = 0$, откуда $v_1 = mv/M$. Подставив это значение в выражение для работы, получим

$$A = \frac{mv^2}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

178. Пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $v = 800$ м/с, попадает в дерево и углубляется на $s = 10$ см. Найти силу сопротивления дерева и время движения пули в дереве, считая это движение равнозамедленным.

Решение. Изменение кинетической энергии пули равно работе силы сопротивления:

$$0 - mv^2/2 = A_c. \qquad (1)$$

Вектор силы сопротивления $\vec{F}_c$ направлен противоположно вектору перемещения $\vec{s}$, поэтому

$$A_c = F_c s \cos 180° = -F_c s. \qquad (2)$$

На основании выражений (1) и (2) получаем:

$$F_c = \frac{mv^2}{2s},\ F_c = 32\ \text{кН}. \qquad (3)$$

Время движения пули в дереве $t = s/v_{ср}$, где $v_{ср}$ — средняя скорость. Поскольку движение равнозамедленное, то средняя скорость равна полусумме начальной и конечной скоростей, т. е. $v_{ср} = (v + 0)/2 = v/2$. Следовательно,

$$t = 2s/v,\ t = 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{с}. \qquad (4)$$

Эту задачу можно решить другим способом. Изменение импульса пули равно импульсу силы сопротивления: $\Delta\vec{p} = \vec{F}_c t$.

В проекциях на координатную ось, положительное направление которой совпадает с направлением силы $\vec{F}_c$, это уравнение имеет вид $0 - (-mv) = F_c t$ или $mv = F_c t$. Тогда $F_c = mv/t$. Подставив сюда значение t из формулы (4), получим выражение (3).

179. Электровоз при движении со скоростью $v = 72$ км/ч потребляет мощность $N_3 = 600$ кВт. Определить силу тяги электровоза, если его коэффициент полезного действия $\mu = 80\%$.

Решение. Полезная мощность электровоза

$$N_п = Fv. \qquad (1)$$

По определению КПД равен отношению полезной мощности к затраченной, т. е.

$$\eta = N_п / N_з. \qquad (2)$$

На основании формул (1) и (2) получим:

$$F = \eta N_з / v, \; F = 24 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

180. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы однородный куб, находящийся на горизонтальной плоскости, перевернуть с одной грани на соседнюю? Масса куба $m = 100$ кг, длина его ребра $l = 50$ см.

Решение. Будем переворачивать куб так, чтобы он не отрывался от горизонтальной плоскости и не скользил по ней. Пусть h_2 – максимальная высота, на которой будет находиться центр тяжести C куба при переворачивании (рис. 58). Уровень AB начала отсчета потенциальной энергии совместим с горизонтальной плоскостью. Тогда совершенная работа равна изменению потенциальной энергии куба:

$$A = E_{p2} - E_{p1} = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1).$$

Учитывая, что $h_1 = l/2$, $h_2 = l\sqrt{2}/2$, получаем:

$$A = \frac{\sqrt{2}-1}{2} mgl, \; A = 98 \text{ Дж}.$$

Найденная работа минимальна, потому что при других способах переворачивания (например, с отрывом от плоскости) высота h_2 будет принимать бо́льшие значения,

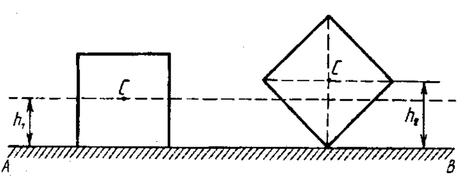


Рис. 58

следовательно, работа A будет большей, чем в рассмотренном случае.

181. В результате взрыва камень разлетается на три части. Два куска летят под прямым углом друг к другу: кусок массой $m_1 = 1$ кг – со скоростью $v_1 = 12$ м/с, кусок массой $m_2 = 2$ кг – со скоростью $v_2 = 8$ м/с. Третий кусок отлетает со скоростью $v_3 = 40$ м/с. Какова его масса и в каком направлении он летит?

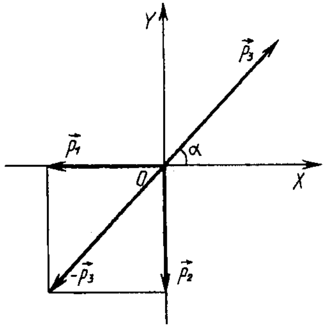


Рис. 59

Решение. Система состоит из трех тел (осколков). Внешней силой является сила тяжести. Но так как время разрыва камня очень мало, импульс внешней силы можно считать равным нулю, а систему, следовательно, – замкнутой. Поэтому импульс камня до разрыва равен сумме импульсов осколков после разрыва: $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$. Поскольку $\vec{p} = \vec{0}$, то $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = -\vec{p}_3$.

Зная направления векторов $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ и их модули $p_1 = m_1 v_1$, $p_2 = = m_2 v_2$, найдем построением вектор $\vec{p}_3$ (рис. 59). Как видно из рисунка, $p_3^2 = p_1^2 + p_2^2$, $\sin\alpha = p_2/p_3$. Учитывая, что $p_3 = m_3 v_3$, находим:

$$m_3 = \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}{v_3} = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{v_3}, \ m_3 = 0{,}5 \text{ кг},$$

$$\alpha = \arcsin\frac{m_2 v_2}{m_3 v_3}, \ \alpha = 53°.$$

Эту задачу можно решить иначе. На основании закона сохранения импульса

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = \vec{0}.$$

Составим уравнения в проекциях на оси OX и OY:

$$0 = -p_1 + p_{3x}, \ 0 = -p_2 + p_{3y},$$

где p_{3x}, p_{3y} – проекции вектора $\vec{p}_3$ на оси OX и OY соответственно. Отсюда $p_{3x} = p_1$, $p_{3y} = p_2$.

Модуль вектора $\vec{p}_3$

$$p_3 = \sqrt{p_{3x}^2 + p_{3y}^2} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}.$$

Теперь, как и при решении первым способом, найдем $m_3 = 0{,}5$ кг.

Вектор $\vec{p}_3$ образует с осью OX угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{m_2v_2}{m_1v_1},\ \alpha = 53^\circ.$$

182. Найти работу силы $F = 30$ Н, в результате действия которой груз массой $m = 2$ кг поднимается по наклонной плоскости на высоту $h = 2{,}5$ м с ускорением $a = 5$ м/с^2. Сила действует параллельно наклонной плоскости. Трением о плоскость пренебречь.

Р е ш е н и е. Пусть l – длина наклонной плоскости. Тогда работа силы $\vec{F}$

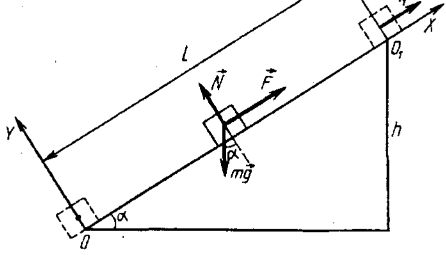
$$A = Fl = F\frac{h}{\sin\alpha}. \qquad (1)$$

Чтобы найти $\sin\alpha$, составим уравнение движения груза вдоль оси OX (рис. 60): $F - mg\sin\alpha = ma$. Отсюда $\sin\alpha = (F - ma)/(mg)$. Подставив это значение в формулу (1), получим:

$$A = \frac{Fmgh}{F - ma},\ A = 74\ \text{Дж}.$$

183. Прямоугольная яма, площадь основания которой S и глубина h, наполовину заполнена водой. Насос выкачивает воду и подает ее на поверхность земли через цилиндрическую трубу радиуса R. Какую работу совершил насос, если он выкачал всю воду за время τ?

Р е ш е н и е. Совершенная работа равна изменению полной механической энергии воды:



Р и с. 60

$$A = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}), \qquad (1)$$

где E_{k1}, E_{p1}, E_{k2}, E_{p2} – кинетическая и потенциальная энергия воды в начальном и конечном состояниях.

Нулевой уровень потенциальной энергии совместим с дном ямы. Тогда в начальном состоянии центр тяжести воды находится на высоте $h/4$ над этим уровнем, а в конечном – на высоте h. Поэтому

$$E_{p1} = mg\frac{h}{4},\ E_{p2} = mgh,\ E_{k1} = 0,\ E_{k2} = \frac{mv^2}{2}, \qquad (2)$$

где m – масса воды; v – скорость, с которой вода вытекает из трубы.

Масса воды

$$m = \rho S\frac{h}{2}, \qquad (3)$$

где ρ – плотность воды. С другой стороны, $m = \rho\pi R^2 v\tau$. Поэтому $\rho S\frac{h}{2} = \rho\pi R^2 v\tau$, откуда

$$v = \frac{Sh}{2\pi R^2\tau}. \qquad (4)$$

Подставив значения величин из формул (2)–(4) в выражение (1), найдем работу, совершенную насосом:

$$A = \frac{3}{8}\rho g S h^2 + \frac{1}{16}\frac{\rho S^3 h^3}{\pi^2\tau^2 R^4}.$$

184. Груз начинает скользить с начальной скоростью v_0 вверх по наклонной плоскости, имеющей длину l и высоту h (рис. 61). Коэффициент трения равен μ. Какой путь s пройдет груз до остановки?

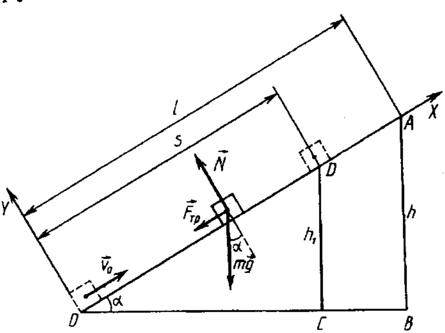


Рис. 61

Р е ш е н и е. Изменение механической энергии груза равно работе силы трения:

$$(E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = A_{тр}. \qquad (1)$$

За нулевой уровень потенциальной энергии примем основание наклонной плоскости. Тогда

$$E_{k1} = mv_0^2/2,\ E_{p1} = 0,\ E_{k2} = 0,\ E_{p2} = mgh_1,$$

где h_1 – высота, на которой находится груз в момент остановки, и уравнение (1) примет вид

$$mgh_1 - mv_0^2/2 = A_{тр}.$$

Работа силы трения

$$A_{тр} = F_{тр}s\cos 180° = -F_{тр}s.$$

С учетом этого будем иметь

$$mgh_1 - mv_0^2/2 = -F_{тр}s. \qquad (2)$$

Сила трения $F_{тр} = \mu N$, где N – сила нормальной реакции плоскости. Как показано в решении задачи 90, $N = mg\cos\alpha$. Поэтому

$$F_{тр} = \mu mg\cos\alpha.$$

Как видно из рисунка, $\cos\alpha = \sqrt{l^2 - h^2}/l$. Следовательно,

$$F_{тр} = \mu mg\frac{\sqrt{l_2 - h_2}}{l}. \qquad (3)$$

Из подобия треугольников OAB и ODC следует $h_1/s = h/l$, откуда

$$h_1 = hs/l. \qquad (4)$$

Подставим значения (3) и (4) в уравнение (2):

$$mg\frac{hs}{l} - \frac{mv_0^2}{2} = -\mu mg\frac{\sqrt{l_2 - h_2}}{l}s.$$

Решив это уравнение относительно s, получим

$$s = \frac{v_0^2 l}{2g\left(h + \mu\sqrt{l^2 - h^2}\right)}.$$

185. Санки съезжают с горы высотой h и с углом наклона α и движутся дальше по горизонтальному участку. Коэффициент трения на всем пути санок одинаков и равен μ. Определить расстояние s, которое пройдут санки по горизонтальному участку до полной остановки.

Решение. Изменение механической энергии санок равно работе сил трения на наклонном и горизонтальном участках ($A_{тр1}$ и $A_{тр2}$). Потенциальную энергию будем отсчитывать от основания горы. Тогда получим уравнение $0 - mgh = A_{тр1} + A_{тр2}$ или

$$-mgh = -F_{тр1}l - F_{тр2}s, \tag{1}$$

где l – длина наклонного участка. Как видно из рис. 61,

$$l = h/\sin\alpha. \tag{2}$$

Сила трения на наклонном участке (см. решение предыдущей задачи)

$$F_{тр1} = \mu mg\cos\alpha, \tag{3}$$

сила трения на горизонтальном участке

$$F_{тр2} = \mu mg. \tag{4}$$

Подставив значения (2)–(4) в уравнение (1), получим

$$mgh = \mu mg(\cos\alpha)\frac{h}{\sin\alpha} + \mu mgs,$$

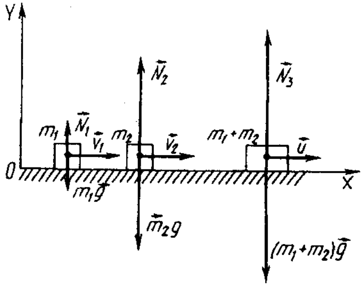
откуда

$$s = h\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right).$$

Этот ответ имеет смысл лишь при $\mu < \operatorname{tg}\alpha$, в противном случае санки не сдвинутся с места ($s = 0$).

186. Тело массой $m_1 = 2$ кг движется по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $v_1 = 4$ м/с и нагоняет второе тело массой $m_2 = 10$ кг, движущееся со скоростью $v_2 = 1$ м/с. Найти скорости тел после столкновения, если удар был: 1) абсолютно неупругим; 2) абсолютно упругим. Тела движутся по одной прямой; удар центральный, т. е. скорости тел направлены вдоль линии, соединяющей их центры масс.

Решение. Рассмотрим сначала первый случай. В результате абсолютно неупругого удара оба тела начина-



Р и с. 62

ют двигаться с одной и той же скоростью $\vec{u}$ (рис. 62). Так как вдоль оси OX силы не действуют (трения нет, ибо поверхность гладкая), то сумма проекций импульсов тел на эту ось сохраняется, т. е. сумма проекций импульсов обоих тел до удара равна проекции общего импульса тел после удара:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = (m_1 + m_2) u_x.$$

Так как $v_{1x} = v_1$, $v_{2x} = v_2$, то

$$u_x = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},\ u_x = 2\ \text{м/с}.$$

Получили $u_x > 0$, а это означает, что после соударения тела будут двигаться в положительном направлении оси OX.

Во втором случае удар был абсолютно упругим. Следовательно, суммарная кинетическая энергия тел до удара и после него не изменяется:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \qquad (1)$$

где u_1, u_2 – модули скоростей тел после удара. Кроме того, как и в первом случае, сохраняется сумма проекций импульсов тел на ось OX:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x}. \qquad (2)$$

Преобразуем уравнения (1) и (2) к виду:

$$m_1\left(v_1^2 - u_{1x}^2\right) = m_2\left(u_{2x}^2 - v_2^2\right), \qquad (3)$$

$$m_1(v_1 - u_{1x}) = m_2(u_{2x} - v_2). \qquad (4)$$

Разделив почленно уравнение (3) на уравнение (4), получим

$$v_1 - u_{1x} = u_{2x} + v_2. \qquad (5)$$

Умножим левую и правую части уравнения (5) на m_2 и из полученного уравнения вычтем уравнение (4). В результате будем иметь

$$v_1(m_2 - m_1) + u_{1x}(m_2 + m_1) = 2m_2v_2,$$

откуда

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}. \tag{6}$$

Для нахождения u_{2x} умножим обе части уравнения (5) на m_1, а затем сложим почленно с уравнением (4). Получим

$$2m_1v_1 = u_{2x}(m_1 + m_2) + v_2(m_1 - m_2),$$

откуда

$$u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \tag{7}$$

Подставив в формулы (6) и (7) числовые значения величин и произведя вычисления, получим: $u_{1x} = -1$ м/с, $u_{2x} = 2$ м/с. Это означает, что первое тело стало двигаться в отрицательном направлении оси OX, а направление движения второго тела осталось прежним. Модуль скорости второго тела увеличился.

187. Тело массой m_1 ударяется абсолютно неупруго о тело массой m_2. Найти долю q потерянной при этом кинетической энергии, если тело массой m_2 до удара было в покое.

Решение. Доля потерянной кинетической энергии

$$q = \frac{E_{k1} - E_{k2}}{E_{k1}}, \tag{1}$$

где E_{k1}, E_{k2} — кинетическая энергия системы соответственно до и после соударения:

$$E_{k1} = \frac{m_1v_1^2}{2}, \ E_{k2} = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2}; \tag{2}$$

v_1 — скорость первого тела до удара; u — скорость тел после абсолютно неупругого удара; применив закон сохранения импульса, найдем

$$u = m_1v_1/(m_1 + m_2) \tag{3}$$

(см. решение предыдущей задачи).

Подставив значения (2) и (3) в формулу (1), получим

$$q = m_2/(m_1 + m_2).$$

Эта доля кинетической энергии перешла во внутреннюю энергию соударяющихся тел.

188. Камень брошен под углом к горизонту со скоростью $\bar{v}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на какой высоте от горизонта скорость камня уменьшится вдвое.

Р е ш е н и е. Согласно закону сохранения энергии, полная механическая энергия камня остается постоянной. Приняв за начало отсчета потенциальной энергии поверхность земли, составим уравнение:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2},$$

где h – искомая высота; $v = v_0/2$ – скорость камня на этой высоте. Тогда

$$\frac{v_0^2}{2} = gh + \frac{v_0^2}{8}.$$

Отсюда $h = 3v_0^2/(8g)$.

189. Определить кинетическую энергию тела массой $m = 1{,}5$ кг, брошенного горизонтально со скоростью $v_0 = 20$ м/с, в конце четвертой секунды его движения. Принять $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Как показано в решении задачи 19, модуль скорости тела в момент времени t удовлетворяет соотношению $v^2 = v_0^2 + g^2t^2$. Поэтому кинетическая энергия в этот момент

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\left(v_0^2 + g^2t^2\right)}{2}, \; E_k = 1{,}5 \cdot 10^3 \text{ Дж}.$$

Решим эту задачу другим способом. В момент бросания тело обладало кинетической энергией $E_{k0} = mv_0^2/2$ и некоторой потенциальной энергией. К моменту времени t тело находилось ниже уровня бросания на $\Delta h = gt^2/2$, поэтому его потенциальная энергия уменьшилась на $\Delta E_p = mg\Delta h = mg^2t^2/2$. Следовательно, на основании закона сохранения энергии на столько же увеличилась кинетическая энергия тела:

$$E_k = E_{k0} + \Delta E_p = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{mgt^2}{2} = \frac{m\left(v_0^2 + g^2t^2\right)}{2}.$$

Мы получили тот же результат, что и при решении первым способом.

190. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 49$ м/с. На какой высоте его кинетическая энергия будет в 2 раза больше потенциальной? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Будем отсчитывать потенциальную энергию от поверхности земли. В момент бросания потенциальная энергия тела $E_{p1} = 0$, а его кинетическая энергия $E_{k1} = mv_0^2/2$. Когда тело будет находиться на искомой высоте h, его потенциальная энергия $E_{p2} = mgh$, а кинетическая $E_{k2} = 2E_{p2} = 2mgh$.

По закону сохранения полной механической энергии

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}.$$

Таким образом, $mv_0^2/2 + 0 = 2mgh + mgh$, откуда

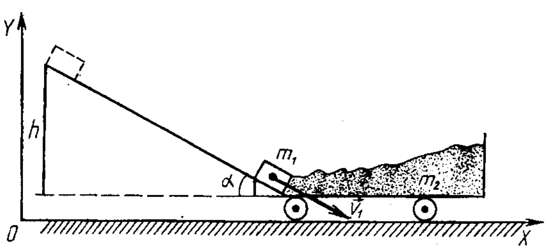
$$h = \frac{v_0^2}{6g},\ h = 41 \text{ м}.$$

191. Груз массой m_1 соскальзывает без трения с наклонной доски на неподвижную платформу. С какой скоростью начнет двигаться платформа, когда груз упадет на нее? Масса платформы m_2, высота начального положения груза над уровням платформы равна h, угол наклона доски к горизонту α. Трение отсутствует.

Р е ш е н и е. Вдоль оси OX (рис. 63) внешние силы не действуют, поэтому сумма проекций импульсов груза и платформы на эту ось остается постоянной:

$$m_1 v_1 \cos\alpha = (m_1 + m_2) v_{2x},$$

где v_1 – модуль скорости груза в момент падения на платформу; v_2 – проекция скорости $\vec{v}_2$, которую будет иметь платформа после падения груза. Отсюда



Р и с. 63

$$v_{2x} = \frac{m_1 v_1 \cos\alpha}{m_1 + m_2}. \qquad (1)$$

Найдем теперь v_1 на основании закона сохранения энергии. Будем отсчитывать потенциальную энергию от уровня платформы. Тогда $mgh = mv_1^2/2$, откуда $v_1 = \sqrt{2gh}$. Подставив это значение в формулу (1), получим

$$v_{2x} = \frac{m_1 \sqrt{2gh} \cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

192. В покоящийся шар массой $M = 1$ кг, который прикреплен к концу легкого несжимаемого стержня, закрепленного в подвесе на шарнире, попадает пуля массой $m = 0{,}01$ кг. Угол между направлением полета пули и линией стержня $\alpha = 45°$. После удара пуля застревает в шаре, и шар вместе с пулей, откачнувшись, поднимается на высоту $h = 0{,}2$ м относительно первоначального положения. Найти скорость пули v.

Решение. В горизонтальном направлении на пулю и шар внешние силы не действуют, поэтому сумма проекций импульсов пули и шара на ось OX (рис. 64, *а*, *б*) остается неизменной:

$$mv\sin\alpha = (M + m)u,$$

где u – скорость шара сразу после попадания пули. Отсюда

$$v = \frac{(M+m)u}{m\sin\alpha}. \qquad (1)$$

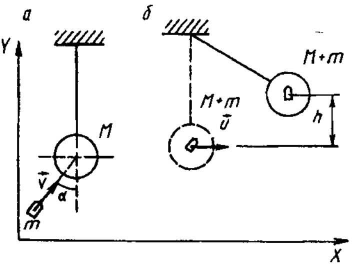


Рис. 64

Согласно закону сохранения энергии, при максимальном отклонении

$$\frac{(M+m)u^2}{2} = (M + m)gh,$$

откуда $u = \sqrt{2gh}$. Подставив это значение в формулу (1), получим:

$$v = \frac{(M+m)\sqrt{2gh}}{m\sin\alpha}, \quad v = 6 \cdot 10^2 \text{ м/с}.$$

193. На гладкой горизонтальной поверхности на некотором расстоянии от вертикальной стенки находится шар массой M. Второй шар массой m движется от стенки к первому шару. Между шарами происходит центральный упругий удар. При каком соотношении масс M и m второй шар после удара достигнет стенки и, упруго отразившись от нее, догонит первый шар? Оба шара находятся на одном перпендикуляре к стенке.

Решение. Пусть $\vec{v}_0$ — скорость второго шара до удара, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ — скорости соответственно первого и второго шаров после удара. При упругом ударе суммарная кинетическая энергия сохраняется:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{Mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2}. \qquad (1)$$

Пусть положительное направление координатной оси совпадает с направлением вектора $\vec{v}_0$. Так как вдоль этой оси силы не действуют (трения нет), сумма проекций импульсов шаров на нее сохраняется:

$$mv_0 = Mu_1 - mu_2. \qquad (2)$$

Систему уравнений (1) и (2) после преобразований запишем в следующем виде:

$$m(v_0 - u_2)(v_0 + u_2) = Mu_1^2, \; m(v_0 - u_2) = Mu_1.$$

Решив эту систему относительно u_1 и u_2, получим два ответа:

1) $u_1 = 0$, $u_2 = v_0$;

2) $u_1 = \dfrac{2mv_0}{M+m}$, $u_2 = \dfrac{(M-m)v_0}{M+m}$.

Первый ответ соответствует ситуации до столкновения шаров, второй дает значения скоростей шаров после удара.

Чтобы второй шар после упругого отражения от стенки мог догнать первый шар, необходимо выполнение условия $u_2 > u_1$, т. е.

$$\frac{(M-m)v_0}{M+m} > \frac{2mv_0}{M+m}.$$

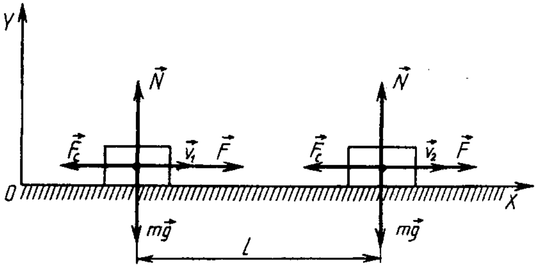
Отсюда получаем искомое соотношение масс шаров: $M > 3m$.

194. На горизонтальном участке пути локомотив развивает постоянную силу тяги $F = 3{,}5 \cdot 10^5$ Н. На участке пути длиной $l = 600$ м скорость поезда массой $m = 1{,}0 \cdot 10^6$ кг возрастает от $v_1 = 10$ м/с до $v_2 = 20$ м/с. Определить коэффициент сопротивления движению, который равен отношению модуля силы сопротивления к модулю силы нормальной реакции рельсов.

Р е ш е н и е. На основании теоремы об изменении кинетической энергии составим уравнение:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_1 + A_2, \qquad (1)$$

где $A_1 = Fl$ – работа силы тяги; A_2 – работа силы сопротивления: $A_2 = F_c l \cos 180° = -F_c l$; $F_c = \mu N$ – модуль силы сопротивления; μ – коэффициент сопротивления движению; N – модуль силы нормальной реакции опоры. Для проекций сил на ось OY (рис. 65) имеем: $N - mg = 0$.



Р и с. 65

Следовательно, $F_c = \mu mg$.

Подставив значения A_1 и A_2 в уравнение (1), получим

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Fl - \mu mgl.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{F}{mg} - \frac{v_2^2 - v_1^2}{2lg}, \ \mu = 0{,}01.$$

195. Тележка с песком катится со скоростью $v_1 = 1$ м/с по горизонтальной поверхности. Навстречу тележке летит шар массой $m = 3$ кг со скоростью $v_2 = 8$ м/с, направленной под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. После встречи с тележкой шар застревает в песке. С какой скоростью и в какую сторону покатится тележка после встречи с шаром? Масса тележки с песком $M = 10$ кг. Силой сопротивления качению тележки можно пренебречь.

Р е ш е н и е. Координатную ось OX направим горизонтально (рис. 66). Вдоль этой оси внешние силы не действуют, поэтому сумма проекций импульсов тележки и шара на ось OX остается неизменной:

$$Mv_{1x} + mv_{2x} = (M + m)u_x,$$

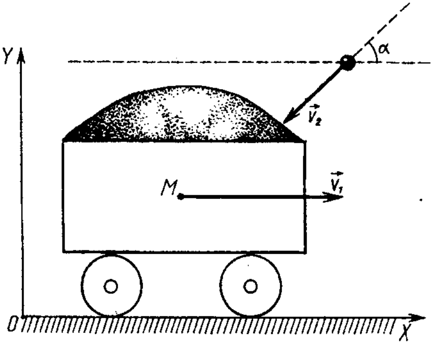
где u_x – проекция на ось OX скорости тележки с застрявшим в песке шаром. Так как $v_{1x} = v_1$, $v_{2x} = -v_2 \cos\alpha$, то

$$Mv_1 - mv_2 \cos\alpha = (M + m)u_x,$$

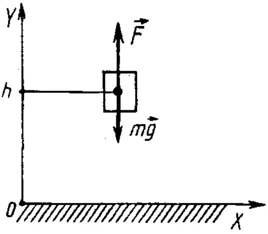
откуда

$$u_x = \frac{Mv_1 - mv_2 \cos\alpha}{M + m}, \; u_x = -0{,}2 \text{ м/с}.$$

Минус указывает на то, что тележка покатится в отрицательном направлении оси OX, т. е. противоположно первоначальному направлению движения.



Р и с. 66



Р и с. 67

196. Под действием постоянной силы тело массой $m = 100$ кг поднимается на высоту $h = 15$ м в течение $\tau = 10$ с. Определить работу этой силы. Начальная скорость тела равна нулю.

Р е ш е н и е. Координатную ось OY направим вертикально вверх, а начало координат расположим на поверхности земли (рис. 67). На тело действуют сила $\vec{F}$ и сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$. Работа, совершаемая силой $\vec{F}$,

$$A = Fh. \tag{1}$$

Чтобы найти модуль силы $\vec{F}$, составим на основании второго закона Ньютона уравнение движения в векторной форме:

$$\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a},$$

а затем в проекциях на ось OY:

$$F - mg = ma_y, \qquad (2)$$

где a_y – проекция ускорения тела на ось OY. Эту проекцию найдем из кинематического уравнения для координаты $y = a_y t^2/2$, учитывая, что $y = h$ при $t = \tau$. Получим $a_y = 2h/\tau^2$. Подставив это значение в уравнение (2), найдем

$$F = m(g + 2h/\tau^2).$$

Теперь, согласно формуле (1), получим:

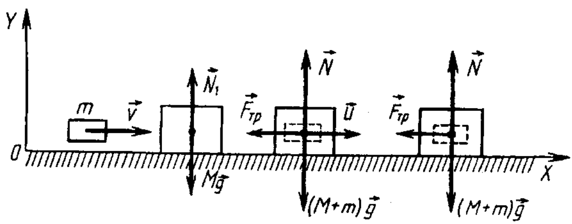
$$A = m(g + 2h/\tau^2)h,\ A = 1{,}5 \cdot 10^4\ \text{Дж}.$$

197. Летящая горизонтально со скоростью $v = 400$ м/с пуля попадает в брусок и застревает в нем. Какое расстояние пройдет по горизонтальной поверхности этот брусок от толчка пули, если его масса в $n = 99$ раз больше массы пули? Начальная скорость бруска равна нулю, а коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0{,}1$.

Р е ш е н и е. В результате попадания пули брусок с застрявшей в нем пулей приобретает некоторую скорость $\vec{u}$ (рис. 68). Пройдя расстояние l, брусок остановится под действием силы трения. На основании теоремы об изменении кинетической энергии

$$E_{k2} - E_{k1} = A_{тр},$$

где E_{k2}, E_{k1} – соответственно конечное и начальное значения кинетической энергии бруска; $A_{тр}$ – работа силы



Р и с. 68

трения. Учитывая, что $E_{k2} = 0$, $E_{k1} = (M + m)u^2/2$, $A_{тр} = -F_{тр}l$, получаем

$$(M + m)u^2/2 = F_{тр}l. \qquad (1)$$

Найдем модуль силы трения $F_{тр} = \mu N$. Спроектировав силы на ось OY, будем иметь:

$$N - (M + m)g = 0,\ N = (M + m)g.$$

Следовательно, $F_{тр} = \mu(M + m)g$. Подставив это значение в уравнение (1), получим

$$(M + m)u^2/2 = \mu(M + m)gl,$$

откуда

$$l = u^2/(2\mu g). \qquad (2)$$

Чтобы найти модуль скорости $\vec{u}$, составим уравнение для проекций импульсов тел на ось OX на основании закона сохранения импульса: $mv + 0 = (M + m)u$. Отсюда

$$u = \frac{mv}{M + m} = \frac{v}{M/m + 1}. \qquad (3)$$

Обратим внимание на то, что вдоль оси OX действует внешняя сила – сила трения, но применить закон сохранения импульса можно, так как длительность взаимодействия тел весьма кратковременна и поэтому влиянием внешних сил можно пренебречь.

Подставив теперь значение (3) в выражение (2), с учетом условия $M/m = n$ найдем:

$$l = \frac{v^2}{2\mu(n + 1)^2 g},\ l = 8\ \text{м}.$$

198. Под каким углом к горизонту надо бросить камень, чтобы его кинетическая энергия в точке максимального подъема составляла $\eta = 0{,}25$ его кинетической энергии в точке бросания? Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. В точке максимального подъема $v_y = 0$, $v_x = v_0 \cos\alpha_0$ (см. решение задачи 21). Здесь v_0 – начальная скорость; α_0 – угол, составленный вектором начальной скорости $\vec{v}_0$ с горизонтом. Следовательно, в этой точке скорость камня

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0 \cos\alpha_0,$$

а его кинетическая энергия

$$E_k = \frac{mv_0^2 \cos^2\alpha_0}{2}.$$

В точке бросания камень имел кинетическую энергию $E_{k0} = mv_0^2/2$. Используя заданное условие $E_k = \eta E_{k0}$, получаем

$$\frac{mv_0^2 \cos^2\alpha_0}{2} = \eta\frac{mv_0^2}{2},$$

откуда $\alpha_0 = \arccos\sqrt{\eta}$, $\alpha = 60°$.

199. Определить, какой скоростью должно обладать тело в точке A (рис. 69), чтобы переместиться в точку C и там остановиться. Коэффициент трения при движении тела $\mu = 0{,}2$, $CD = h = 0{,}5$ м, $AD = r = 10$ м.

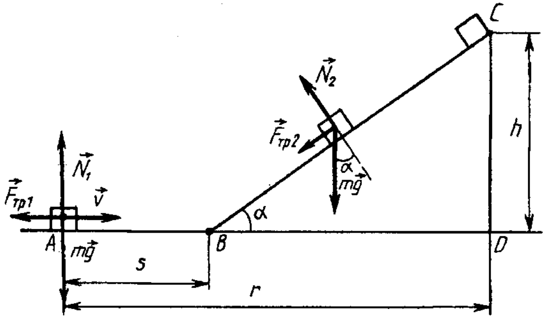


Рис. 69

Решение. Изменение механической энергии тела равно работе сил трения:

$$(E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = A_{тр}, \tag{1}$$

где E_{k1}, E_{p1} – соответственно кинетическая и потенциальная энергия тела в точке A; E_{k2}, E_{p2} – в точке C.

За нулевой уровень потенциальной энергии примем основание наклонной плоскости. Тогда

$$E_{p1} = 0,\ E_{p2} = mgh. \tag{2}$$

Очевидно, что

$$E_{k2} = 0,\ E_{k1} = mv^2/2. \qquad (3)$$

Работа сил трения

$$A_{тр} = A_{тр1} + A_{тр2},$$

где $A_{тр1}$ – работа силы трения $\vec{F}_{тр1}$ на участке AB; $A_{тр2}$ – работа силы трения $\vec{F}_{тр2}$ на участке BC. Модули этих сил равны соответственно: $F_{тр1} = \mu N$, $F_{тр2} = \mu N_2$.

Из рис. 69 легко найти, что $N_1 = mg$, $N_2 = mg\cos\alpha$. Следовательно, $F_{тр1} = \mu mg$, $F_{тр2} = \mu mg\cos\alpha$. Тогда работа сил трения

$$A_{тр} = F_{тр1}s\cos 180° + F_{тр2}l\cos 180° = -\mu mgs - \mu mgl\cos\alpha,$$

где $l = BC = (r - s)/\cos\alpha$, поэтому

$$A_{тр} = -\mu mgs - \mu mg\frac{r-s}{\cos\alpha}\cos\alpha = -\mu mgr. \qquad (4)$$

Подставим теперь значения (2)–(4) в выражение (1) и получим $mgh - mv^2/2 = -\mu mgr$, откуда

$$v = \sqrt{2g(h + \mu r)},\ v = 7 \text{ м/с}.$$

200. Вблизи дороги образовалась ледяная горка с выездом на проезжую часть. Поверхность горки представляет собой плоскость, составляющую с горизонтальным направлением угол α. Проезжающей мимо дорожной машине удалось посыпать горку снизу до половины высоты песком. Коэффициент трения скольжения полозьев санок о лед с песком $\mu = 0{,}5$. Пренебрегая трением санок о лед без песка, найти максимальное значение угла α, при котором санки не смогут достичь основания горки, съехав с ее вершины без начальной скорости.

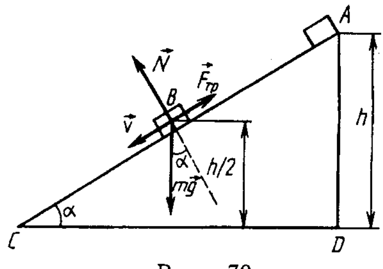


Рис. 70

Решение. Потенциальную энергию будем отсчитывать от основания горки CD (рис. 70). Санки массой m обладают в точке A потенциальной энергией $E_{p1} = mgh$ и кинетической $E_{k1} = 0$. Следовательно, полная механическая энергия санок

$$E = E_{k1} + E_{p1} = mgh.$$

Значение полной энергии будет таким же и в точке B, находящейся на половине высоты, поскольку на участке AB трения нет. Начиная с этой точки, на санки действует сила трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha.$$

Пусть санки останавливаются в точке C. Тогда изменение их полной механической энергии равно работе силы трения на участке пути BC:

$$(E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1}) = A_{тр}.$$

Учитывая, что

$$E_{k2} = 0,\ E_{p2} = 0,\ A_{тр} = -\mu mgBC\cos\alpha = -\mu mg\frac{h}{2\sin\alpha}\cos\alpha,$$

получаем $mgh = \mu mg\dfrac{h}{2\operatorname{tg}\alpha}$, откуда

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\mu}{2},\ \alpha = 14°.$$

201. Деревянный шар массой M лежит на тонкой подставке. Снизу в шар попадает пуля массой m, летящая вертикально вверх, и пробивает его. При этом шар подскакивает на высоту h. На какую высоту поднимается пуля над подставкой с шаром, если ее скорость перед ударом о шар была равна v? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. Пусть u_1 − скорость пули непосредственно после пролета ее сквозь шар, H − высота, на которую поднялась пуля. Совместим с подставкой нулевой уровень потенциальной энергии. Тогда, согласно закону сохранения энергии, $mu_1^2/2 = mgH$. Отсюда

$$H = u_1^2/(2g). \qquad (1)$$

Чтобы найти u_1, составим на основании закона сохранения импульса уравнение (сумма проекций импульсов пули и шара на ось OY, направленную вертикально вверх, до удара и после него остается постоянной): $mv + 0 = mu_1 + Mu_2$, откуда

$$u_1 = (mv - Mu_2)/m,$$

где u_2 – скорость шара сразу же после взаимодействия с пулей.

На взаимодействующие тела действуют в вертикальном направлении внешние силы – силы тяжести, но закон сохранения импульса приближенно выполняется, так как время взаимодействия пули и шара очень мало.

На основании закона сохранения энергии составим для шара уравнение: $Mu_2^2/2 = Mgh$, откуда $u_2 = \sqrt{2gh}$. Следовательно,

$$u_1 = \left(mv - M\sqrt{2gh}\right)/m.$$

Подставив это значение скорости пули в формулу (1), найдем

$$H = \left(v - \frac{M}{m}\sqrt{2gh}\right)^2/(2g).$$

202. Тело начинает скользить вниз по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α. В нижней точке тело ударяется о стенку, поставленную перпендикулярно направлению его движения. Удар абсолютно упругий. Определить коэффициент трения при движении тела, если после удара оно поднялось до половины первоначальной высоты.

Решение. Изменение механической энергии тела равно работе силы трения:

$$E_2 - E_1 = A_{тр}, \tag{1}$$

где E_1, E_2 – полная механическая энергия тела в точках A и C соответственно (рис. 71).

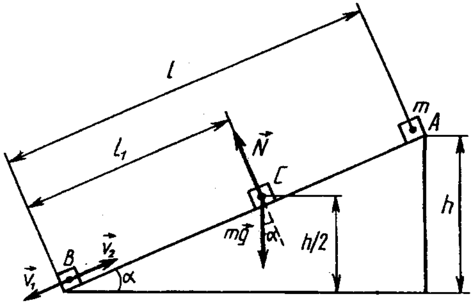


Рис. 71

При абсолютно упругом отражении от стенки в точке B направление вектора скорости тела изменяется на противоположное, а модуль скорости остается прежним. Кинетическая энергия не изменяется.

Модуль силы трения при движении тела вниз и вверх один и тот же: $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$. Направление вектора $\vec{F}_{тр}$ как в первом, так и во втором случае составляет с направлением перемещения угол 180°. Поэтому работа силы трения

$$A_{тр} = F_{тр}(l + l_1)\cos 180° = -\mu mg(l + l_1)\cos\alpha,$$

где l, l_1 – модули перемещения тела при движении его вниз и вверх соответственно.

Как видно из рис. 71, $l = h/\sin\alpha$, $l_1 = h/(2\sin\alpha)$. Учитывая это, получаем

$$A_{тр} = -\frac{3\mu mgh}{2\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (2)$$

В точках A и C кинетическая энергия тела равна нулю, поэтому полная механическая энергия тела в этих точках равна потенциальной энергии:

$$E_1 = mgh,\ E_2 = mgh/2. \qquad (3)$$

Подставим значения (2) и (3) в выражение (1):

$$\frac{mgh}{2} - mgh = -\frac{3\mu mgh}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

Отсюда $\mu = \operatorname{tg}\alpha/3$.

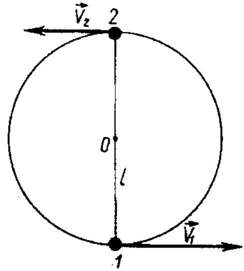
203. Какую работу нужно совершить, чтобы пружину жесткостью $k = 600$ Н/м, растянутую на $x = 4$ см, дополнительно растянуть на $\Delta x = 10$ см?

Р е ш е н и е. Работа, совершенная при растяжении пружины, равна изменению ее потенциальной энергии:

$$A = E_{p2} - E_{p1} = \frac{k(x + \Delta x)^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = \frac{k(2x + \Delta x)\Delta x}{2},\ A = 5\ Дж.$$

204. На невесомой и нерастяжимой нити длиной l висит шарик. Какую минимальную скорость v_1 в горизонтальном направлении необходимо сообщить шарику в точке 1 (рис. 72), чтобы он сделал полный оборот в вертикальной плоскости? Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. В верхней точке 2 траектории шарик должен иметь некоторую линейную скорость $\vec{v}_2$, в противном случае он начнет падать из этой точки вертикально вниз.



Р и с. 72

По второму закону Ньютона $m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$, где $\vec{T}$ – сила натяжения нити в точке 2, $\vec{a}$ – ускорение в этой точке. Скорость $\vec{v}_2$ минимальна при $\vec{T} = \vec{0}$, т. е. $m\vec{g} = m\vec{a}$. Проекция ускорения $\vec{a}$ на ось, направленную из точки 2 вдоль нити к центру окружности, равна модулю центростремительного ускорения $a_n = v^2/l$, проекция вектора $\vec{g}$ на эту ось равна g. Следовательно,

$$mg = mv_2^2/l. \quad (1)$$

Будем считать, что в точке 1 шарик находится на нулевом уровне потенциальной энергии. Тогда по закону сохранения энергии

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + 2mgl. \quad (2)$$

Решив совместно уравнения (1) и (2), получим

$$v_1 = \sqrt{5gl}.$$

Задачи для самостоятельного решения

205. Пуля массой $m = 10$ г, летящая со скоростью $v_1 = 800$ м/с, попадает в доску толщиной $d = 50$ мм и вылетает из нее со скоростью $v_2 = 100$ м/с. Определить силу сопротивления доски, считая эту силу постоянной.

206. Цепь массой $m = 5$ кг, лежащую на столе, берут за один конец и равномерно поднимают вертикально вверх на высоту, при которой нижний конец отстоит от стола на расстоянии, равном длине цепи $l = 2$ м. Чему равна работа по подъему цепи?

207. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы телеграфный столб массой $m_1 = 200$ кг, к вершине которого прикреплена крестовина массой $m_2 = 30$ кг, перевести из горизонтального положения в вертикальное? Длина столба $l = 10$ м.

208. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять груз массой $m = 30$ кг на высоту $h = 10$ м с ускорением $a = 0{,}50$ м/с^2?

209. Какую работу совершает электровоз за $\tau = 10$ мин, перемещая по горизонтальному пути состав массой $m = 3000$ т с постоянной скоростью $v = 72$ км/ч, если коэффициент сопротивления движению $\mu = 0{,}005$? Коэффициент сопротивления движению равен отношению модуля силы сопротивления к модулю силы нормальной реакции опоры.

210. Санки массой m соскальзывают с вершины горы высотой h и, пройдя некоторое расстояние, останавливаются. Какую работу надо совершить, чтобы втащить санки по той же траектории обратно на вершину горы?

211. Человек массой $m_1 = 60$ кг прыгает с неподвижной тележки массой $m_2 = 30$ кг, стоящей на рельсах, в направлении вдоль путей. При этом тележка перемещается в противоположную сторону на $s = 2{,}0$ м. Считая коэффициент трения при движении тележки $\mu = 0{,}10$, найти работу, которую совершает человек при прыжке.

212. Тело массой $m = 1$ кг движется прямолинейно так, что зависимость его координаты от времени описывается уравнением $x = 10 + 20t - 4t^2$, в котором все величины выражены в единицах СИ. Определить кинетическую энергию этого тела через $t = 2$ с после начала движения.

213. Брусок массой $m = 1$ кг покоится на горизонтальной шероховатой поверхности (рис. 73). К нему прикреплена пружина жесткостью $k = 20$ Н/м. Какую работу надо совершить для того, чтобы сдвинуть с места брусок, растягивая пружину в горизонтальном направлении, если коэффициент трения между бруском и поверхностью $\mu = 0{,}2$?

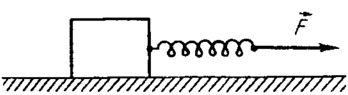


Рис. 73

214. Тело массой $m = 2$ кг равномерно перемещается по горизонтальной поверхности под действием силы, направленной под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. При перемещении $s = 6$ м эта сила совершает работу $A = 20$ Дж. Найти коэффициент трения тела о поверхность.

215. Лодка стоит неподвижно в стоячей воде. Человек, находящийся в лодке, переходит с носа на корму. На какое расстояние переместится лодка, если масса человека $m_1 = 60$ кг, масса лодки $m_2 = 120$ кг, длина лодки $l = 3$ м? Сопротивление воды не учитывать.

216. Охотник стреляет с лодки. Какую скорость приобретает лодка в момент выстрела, если масса охотника с лодкой $M = 100$ кг, масса дроби $m = 40$ г и средняя начальная скорость дроби $v_0 = 400$ м/с? Ствол ружья во время выстрела направлен под углом $\alpha = 60°$ к горизонту.

217. Третья ступень ракеты состоит из ракеты-носителя массой $M = 50$ кг и головного защитного конуса массой $m = 10$ кг. Конус отбрасывается вперед сжатой пружиной. При испытаниях на Земле с закрепленной ракетой пружина сообщала конусу скорость $v_0 = 5{,}1$ м/с. Какова будет относительная скорость конуса и ракеты, если их разделение произойдет на орбите?

218. Снаряд массой $m = 40$ кг, летевший в горизонтальном направлении со скоростью $v = 600$ м/с, разорвался на 2 части массами $m_1 = 30$ кг и $m_2 = 10$ кг. Бóльшая часть стала двигаться в прежнем направлении со скоростью $v_1 = 900$ м/с. Определить модуль и направление скорости меньшей части снаряда.

219. Два пассажира одинаковой массой $m = 70$ кг находятся на платформе, стоящей неподвижно на рельсах. Масса платформы $M = 280$ кг. Каждый пассажир начинает бежать с одинаковой относительно платформы скоростью $u = 6$ м/с. Найти скорость, которую приобретает платформа, если они спрыгнут: а) в одну сторону одновременно; б) в разные стороны одновременно; в) в одну сторону последовательно; г) в разные стороны последовательно. В случаях «в» и «г» второй пассажир начинает бежать после того, как спрыгнет первый.

220. Плот массой m_1 плывет по реке со скоростью v_1. На плот с берега перпендикулярно направлению движения плота прыгает человек массой m_2 со скоростью v_2. Определить скорость плота с человеком. Силой трения плота о воду пренебречь.

221. Движущийся шар сталкивается с покоящимся шаром. После удара модуль импульса каждого из шаров равен модулю импульса системы до удара. Определить, под каким углом разлетаются шары.

222. В прямую призму, масса которой M, а поперечное сечение представляет собой равнобедренный прямоугольный треугольник, попадает шарик массой $m < M$, летящий горизонтально со скоростью $\vec{v}$, и после удара движется вертикально вверх (рис. 74). Считая удар абсолютно упругим, найти скорость шарика $\vec{v}_1$ и призмы $\vec{v}_2$ после удара. Сопротивлением воздуха и трением призмы о горизонтальную подставку пренебречь. До удара призма покоилась.

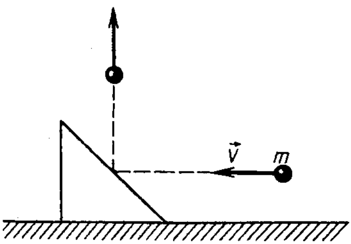


Рис. 74

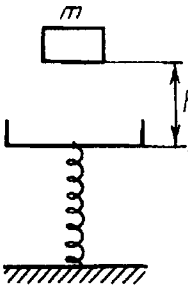


Рис. 75

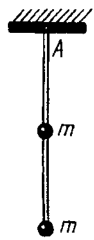


Рис. 76

223. Пуля, летящая с определенной скоростью, углубляется в дощатый барьер на $l = 10$ см. На сколько углубится в тот же барьер такая же пуля, имеющая вдвое большую скорость? Сила сопротивления барьера в обоих случаях одинаковая.

224. Тело массой $m = 100$ г падает с высоты $h = 5$ м на чашу пружинных весов (рис. 75) и сжимает пружину жесткостью $k = 1 \cdot 10^3$ Н/м на величину x. Определить x, если массы чаши и пружинных весов пренебрежимо малы.

225. Тело массой $m = 1$ кг бросили с некоторой высоты с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с, направленной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определить кинетическую энергию тела через $\tau = 2$ с после начала его движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

226. На невесомом стержне длиной $l = 75$ см укреплены два одинаковых шара массой m каждый. Один шар укреплен на конце стержня, другой – посередине (рис. 76). Стержень может колебаться в вертикальной плоскости вокруг точки A. Какую горизонтальную скорость нужно сообщить нижнему концу стержня, чтобы стержень отклонился до горизонтального положения?

227. Шарик подвешен на невесомом прямом стержне. Какую минимальную скорость в горизонтальном направлении необходимо сообщить шарику, чтобы он сделал полный оборот в вертикальной плоскости?

228. Найти количество теплоты, которое выделилось при абсолютно неупругом соударении двух шаров, двигавшихся навстречу друг другу. Масса первого шара $m_1 = 0{,}4$ кг, его скорость $v_1 = 3$ м/с. Масса второго шара $m_2 = 0{,}2$ кг, скорость $v_2 = 12$ м/с.

229. Брусок массой m_1 движется по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью v_1. Пуля массой m_2, летевшая в горизонтальном направлении со скоростью v_2, застревает в бруске. Угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ $\alpha = 90°$. Определить, какое количество теплоты выделилось в бруске.

230. Сваю массой $m_1 = 100$ кг забивают в грунт с помощью копра; при этом груз массой $m_2 = 300$ кг свободно падает с высоты $H = 4{,}0$ м и при каждом ударе свая опускается на $h = 10$ см. Определить силу сопротивления грунта, считая ее постоянной, для двух случаев: а) удар груза копра о сваю абсолютно упругий; б) удар абсолютно неупругий.

231. Шар массой m_1, движущийся со скоростью $\vec{v}_1$ по горизонтальной поверхности, сталкивается с неподвижным шаром массой m_2. Между шарами происходит абсолютно упругий центральный удар. Определить скорости шаров после удара.

232. Самолет пикирует вертикально вниз с высоты $h_1 = 1{,}5$ км до высоты $h_2 = 500$ м. Его начальная скорость $v_1 = 360$ км/ч, а при выходе из пике $v_2 = 540$ км/ч. Найти силу сопротивления воздуха, считая ее постоянной. Масса самолета $m = 2{,}0$ т, двигатель самолета не работает. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

233. Камень брошен под углом к горизонту с высоты H с начальной скоростью v_0. С какой скоростью камень упадет на поверхность земли? Решить без применения кинематических уравнений. Сопротивление воздуха не учитывать.

234. Пуля, летящая со скоростью v_0, пробивает несколько одинаковых досок, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. В какой по счету доске пуля застрянет, если ее скорость после прохождения первой доски $v_1 = 0{,}8v_0$?

235. Пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью v, попадает в ящик с песком массой M, подвешенный на жестком невесомом стержне длиной l, который шарнирно укреплен за верхний конец («баллистический маятник»), и застревает в нем. Стержень может вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной направлению скорости пули. Пренебрегая размерами ящика, определить максимальный угол отклонения стержня от вертикали.

236. С верхней точки наклонной плоскости длиной $l = 18$ м, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, скользит тело массой $m = 2{,}0$ кг. Какое количество теплоты выделяется при трении тела о плоскость, если начальная скорость тела равна нулю, а у основания $v = 6$ м/с?

237. Камень массой $m = 20$ г, выпущенный вертикально вверх из рогатки, резиновый жгут которой был растянут на $\Delta l = 20$ см, поднялся на высоту $h = 40$ м. Найти коэффициент упругости жгута. Сопротивление воздуха не учитывать.

238. Тело массой $m = 1$ кг, брошенное с вышки в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 20$ м/с, упало на землю через промежуток времени $t = 3$ с. Определить кинетическую энергию тела в момент удара о землю. Сопротивление воздуха не учитывать.

239. Конькобежец массой $M = 60$ кг, стоя на льду, бросает в горизонтальном направлении шайбу массой $m = 0{,}3$ кг со скоростью $v = 40$ м/с. На какое расстояние откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0{,}004$?

240. Деталь, обрабатываемая на станке, прижимается с силой $F = 1 \cdot 10^3$ Н к шлифовальному камню диаметром $d = 4 \cdot 10^{-1}$ м. Какая мощность затрачивается на шлифовку, если коэффициент трения камня о деталь $\mu = 2 \cdot 10^{-1}$ и камень вращается с частотой $n = 2$ с$^{-1}$?

241. Небольшое тело соскальзывает по наклонной плоскости с высоты $H = 1{,}2$ м. Наклонная плоскость переходит в «мертвую петлю» (рис. 77). Найти работу силы трения, если известно, что сила, с которой действует тело на петлю в верхней точке, равна нулю, масса тела $m = 10$ г, радиус петли $R = 0{,}4$ м. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

242. С какой наименьшей высоты должен скатываться велосипедист, не вращая педалей, чтобы проехать по дорож-

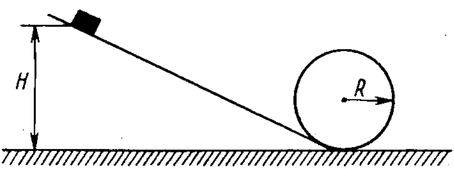


Рис. 77

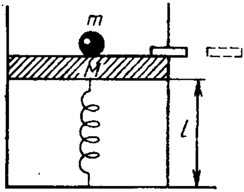


Рис. 78

ке, имеющей форму «мертвой петли» радиуса $R = 4{,}0$ м, не отрываясь от дорожки в верхней точке петли?

243. Груз массой $m = 2$ кг, падающий с высоты $h = 5$ м, проникает в мягкий грунт на глубину $l = 5$ см. Определить среднюю силу сопротивления грунта. Сопротивление воздуха не учитывать.

244. В закрепленную вертикальную трубку вставлена невесомая пружина, верхний конец которой прикреплен к подвижному поршню массой M (рис. 78). Нижний конец пружины упирается в дно трубки. Пружина сжата до длины l и удерживается в сжатом состоянии с помощью защелки. На поршень положили шарик массой m. На какую высоту подскочит шарик, если освободить пружину, сдвинув защелку? Пружина в недеформированном состоянии имеет длину L. Жесткость пружины k. Трением пренебречь.

245. С какой начальной скоростью необходимо бросать вертикально вниз тело массой $m = 2{,}0$ кг, чтобы через $t = 1{,}0$ с его кинетическая энергия E_k была равна 2,5 кДж? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

246. Камень падает с высоты $h = 20$ м без начальной скорости. Какова будет скорость камня в тот момент, когда его потенциальная энергия уменьшится в $n = 2{,}0$ раза по сравнению с первоначальным ее значением? Сопротивление воздуха не учитывать.

247. Тележка массой $m_1 = 50$ кг движется со скоростью $v = 2{,}0$ м/с по горизонтальной поверхности. На тележку с высоты $h = 20$ см падает груз массой $m_2 = 50$ кг и остается на тележке. Найти выделившееся при этом количество теплоты.

248. Два тела массами $m_1 = 1{,}0$ кг и $m_2 = 2{,}0$ кг движутся по взаимно перпендикулярным направлениям со скоростями $v_1 = 10$ м/с и $v_2 = 15$ м/с соответственно. После соударения первое тело останавливается. Какое количество теплоты выделится при ударе?

249. Горизонтально летящая пуля попадает в деревянный брус, лежащий на гладкой горизонтальной плоскости, и пробивает его. Определить, какая часть энергии пули перешла в теплоту. Масса пули m = 10 г, масса бруса M = 1 кг, начальная скорость пули v_0 = 500 м/с, скорость пули после вылета v = 300 м/с.

250. Тело бросили под некоторым углом к горизонту с начальной скоростью v_0 = 15 м/с. На какой высоте его кинетическая энергия в n = 3 раза меньше начальной? Сопротивлением воздуха пренебречь.

251. От поезда массой M = 600 т, идущего с постоянной скоростью по прямолинейному горизонтальному участку пути, отрывается последний вагон массой m = 60 т. Какой путь до остановки пройдет этот вагон, если в момент его остановки поезд движется с постоянной скоростью v = 40 км/ч? Мощность N тепловоза, ведущего состав, постоянна и равна 10 МВт. Коэффициент сопротивления движению равен отношению модуля силы сопротивления к модулю силы нормальной реакции рельсов.

252. Два груза массами m_1 = 10 кг и m_2 = 15 кг свободно подвешены на нитях длиной l = 2,0 м так, что соприкасаются друг с другом. Меньший груз отклонили на угол α = 60°. Определить, на сколько изменилась потенциальная энергия груза и на какую высоту поднимутся грузы, если отклоненный груз отпустили и после удара грузы движутся вместе.

253. По наклонной плоскости снизу вверх пускают тело с начальной скоростью v_0 = 2 м/с. Поднявшись на некоторую высоту, тело соскальзывает по тому же пути вниз. Какова будет скорость тела, когда оно вернется в исходную точку? Коэффициент трения между телом и плоскостью μ = 0,4. Угол наклона плоскости к горизонту α = 30°.

254. Определить мощность, развиваемую электрической лебедкой, если она тянет груз равномерно вверх по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α = 30°. Импульс груза $p = 3 \cdot 10^3$ кг · м/с, коэффициент трения μ = 0,2.

255. Определить мощность гидротурбины при условии, что за время t = 1 с с высоты h = 100 м падает V = 250 м^3 воды. КПД турбины η = 90 %. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

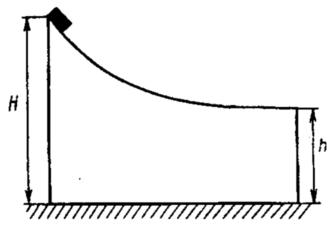
256. Ракета с работающим двигателем «зависла» над поверхностью Земли. Какова мощность, развиваемая двигателем, если масса ракеты m, а скорость истечения газов из двигателя ракеты равна v? Изменением массы ракеты за счет истечения газов можно пренебречь.

257. Два тела бросают с высоты $h = 20$ м со скоростью $v_0 = 15$ м/с каждое. С какими скоростями тела упадут на землю, если первое тело брошено вертикально вверх, а второе – горизонтально? Сопротивление воздуха не учитывать.

258. Мяч массой $m = 100$ г отпустили на высоте $h = 2$ м над полом. Какое количество теплоты выделилось при первом ударе мяча о пол, если время между первым и вторым ударами мяча о пол $\tau = 1{,}2$ с? Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2.

259. Пуля массой m попадает в центр лежащего на краю стола шара и застревает в нем. Определить скорость шара в момент удара о пол, если пуля летела в горизонтальном направлении со скоростью v_0 и высота стола H. Сопротивлением воздуха пренебречь.

260. Гладкая горка массой M находится на гладком горизонтальном полу (рис. 79). На горку положили и отпустили без толчка шайбу массой m. Отношение масс $n = m/M = 0{,}60$, $H = 1{,}3$ м и $h = 0{,}50$ м. Каково расстояние от шайбы до горки в момент падения шайбы на пол? В момент отделения от горки скорость шайбы направлена горизонтально. Сопротивление воздуха не учитывать.



Р и с. 79

261. Пуля массой $m = 20$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 400$ м/с, попадает в шар массой $M = 5$ кг, подвешенный на невесомой и нерастяжимой нити длиной $l = 4$ м, и отскакивает от него после упругого центрального удара. Определить угол, на который отклоняется нить.

262. Частица, кинетическая энергия которой равна E_0, сталкивается абсолютно упруго с такой же неподвижной частицей и отклоняется от первоначального направления на угол $\alpha = 60°$. Определить кинетическую энергию каждой частицы после соударения.

263. Тело массой m_1, движущееся со скоростью v_1, налетает на покоящееся второе тело и после абсолютно упругого столкновения отскакивает от него со скоростью $v_2 = \frac{2}{3}v_1$ под углом $\alpha = 90°$ к первоначальному направлению движения. Определить массу второго тела.

4. ОСНОВЫ СТАТИКИ

Методические указания к решению задач

Задачи на равновесие решают по следующему плану. Делают чертеж и обозначают на нем все силы, действующие на рассматриваемое тело. Затем выбирают систему координат, при этом координатные оси OX и OY направляют так, чтобы проекции сил на них выражались по возможности более просто. Находят проекции на оси OX и OY всех действующих на тело сил и составляют уравнения:

$$F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \qquad (1)$$

$$F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0. \qquad (2)$$

Составляют уравнение для моментов сил относительно оси вращения:

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0. \qquad (3)$$

При этом моменты сил относительно данной оси берутся с разными знаками в зависимости от направления вращения тела. Можно, например, считать момент силы положительным, если в отсутствие других сил эта сила может повернуть тело по часовой стрелке, а отрицательным – если при тех же условиях она может вызвать поворот тела против часовой стрелки.

В учебных задачах обычно рассматриваются такие ситуации, когда все силы, приложенные к телу, лежат в одной плоскости. Поэтому можно рассчитывать моменты сил относительно некоторой неподвижной оси, проходящей через произвольно выбранную точку перпендикулярно этой плоскости. Если в задаче не указана ось вращения, то уравнение для моментов сил составляют относительно любой оси, выбранной так, чтобы через нее проходили линии действия неизвестных сил. Тогда моменты этих сил относительно выбранной оси будут равны нулю, и из уравнений (1)–(3) находят неизвестную величину.

Решение задач на нахождение центра тяжести тела сводится в основном к составлению уравнения для моментов сил. Если приложить в центре тяжести тела силу, направленную вертикально вверх и равную по модулю силе тяжести, то тело будет находиться в равновесии и, следовательно, сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через центр тяжести (или через любую другую точку), будет равна нулю. Составив и решив уравнение (3), можно найти положение центра тяжести.

Положение центра тяжести твердого тела совпадает с положением его центра масс.

Основные законы и формулы

Плечом силы относительно оси называется расстояние (длина перпендикуляра) от этой оси до линии действия силы.

Моментом силы относительно оси называется произведение модуля силы на ее плечо относительно этой оси:

$$M = Fl.$$

Условия равновесия твердого тела:

1) сумма всех внешних сил, действующих на тело, равна нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \vec{0};$$

2) сумма моментов всех внешних сил, действующих на тело, относительно любой оси равна нулю (*правило моментов*), т. е.

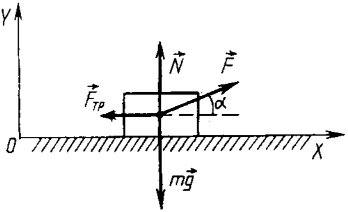
$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0.$$

При выполнении этих условий тело может либо находиться в покое, либо двигаться равномерно прямолинейно, либо равномерно вращаться вокруг оси, проходящей через его центр тяжести.

Примеры решения задач

264. Тело массой m = 200 кг перемещается равномерно по горизонтальной поверхности под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определить эту силу, если коэффициент трения тела о поверхность при движении μ = 0,30.

Р е ш е н и е. На тело действуют сила $\vec{F}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. За положительное направление оси OX примем



Р и с. 80

направление движения тела, ось OY направим вертикально вверх (рис. 80). По условию задачи тело движется равномерно, т. е. находится в равновесии, следовательно, выполняется условие

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Поэтому суммы проекций этих сил на координатные оси OX и OY равны нулю:

$$F\cos\alpha - F_{тр} = 0, \qquad (1)$$

$$N + F\sin\alpha - mg = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) находим $N = mg - F\sin\alpha$ и, учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, подставляем в уравнение (1):

$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = 0.$$

Отсюда

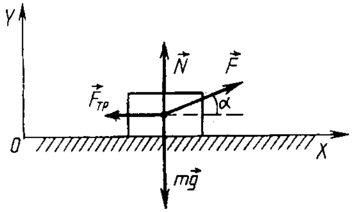
$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}, \; F = 5{,}9 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

265. Чтобы вытащить автомобиль, застрявший в грязи, шофер привязал один конец троса к автомобилю, а второй к стоящему впереди дереву, предварительно натянув трос. Затем он подошел к середине троса и стал оттягивать его в горизонтальном направлении с силой $F = 500$ Н, направленной перпендикулярно тросу. Расстояние между автомобилем и деревом $l = 52$ м. Найти силу натяжения троса в момент, когда шофер продвинулся вперед на $s = 0{,}52$ м.

Р е ш е н и е. При оттягивании троса в нем возникают силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, направленные вдоль троса от точки O (рис. 81). Так как сила $\vec{F}$ приложена в середине троса и направлена перпендикулярно AB, то модули сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ можно считать одинаковыми: $T_1 = T_2 = T$.

Точка O находится в равновесии, поэтому сумма проекций сил $\vec{F}$, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ на любую координатную ось равна нулю. Спроектировав эти силы на ось OY, запишем условие равновесия:

$$2T\sin\alpha - F = 0.$$



Р и с. 80

направление движения тела, ось OY направим вертикально вверх (рис. 80). По условию задачи тело движется равномерно, т. е. находится в равновесии, следовательно, выполняется условие

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Поэтому суммы проекций этих сил на координатные оси OX и OY равны нулю:

$$F\cos\alpha - F_{\text{тр}} = 0, \qquad (1)$$

$$N + F\sin\alpha - mg = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) находим $N = mg - F\sin\alpha$ и, учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, подставляем в уравнение (1):

$$F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = 0.$$

Отсюда

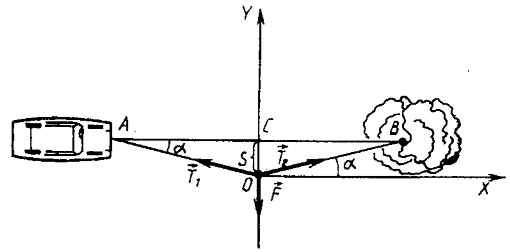
$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha},\ F = 5{,}9 \cdot 10^2\ \text{Н}.$$

265. Чтобы вытащить автомобиль, застрявший в грязи, шофер привязал один конец троса к автомобилю, а второй к стоящему впереди дереву, предварительно натянув трос. Затем он подошел к середине троса и стал оттягивать его в горизонтальном направлении с силой $F = 500$ Н, направленной перпендикулярно тросу. Расстояние между автомобилем и деревом $l = 52$ м. Найти силу натяжения троса в момент, когда шофер продвинулся вперед на $s = 0{,}52$ м.

Р е ш е н и е. При оттягивании троса в нем возникают силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, направленные вдоль троса от точки O (рис. 81). Так как сила $\vec{F}$ приложена в середине троса и направлена перпендикулярно AB, то модули сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ можно считать одинаковыми: $T_1 = T_2 = T$.

Точка O находится в равновесии, поэтому сумма проекций сил $\vec{F}$, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ на любую координатную ось равна нулю. Спроектировав эти силы на ось OY, запишем условие равновесия:

$$2T\sin\alpha - F = 0.$$



Р и с. 81

Отсюда $T = \dfrac{F}{2\sin\alpha}$. Как видно из рисунка, $\sin\alpha = \dfrac{OC}{OA}$. Но $OC = s$, $OA = l/2$, поэтому $\sin\alpha = 2s/l$. Следовательно,

$$T = \frac{Fl}{4s},\ T = 13 \cdot 10^3\ \text{Н}.$$

По последней формуле можно определить, во сколько раз сила натяжения троса превосходит усилие шофера:

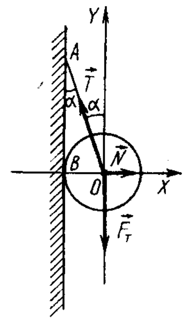
$$n = \frac{T}{F} = \frac{l}{4s}.$$

В рассматриваемом случае $n = 25$.

266. Шар массой m висит на веревке длиной l, прикрепленной к гладкой стене. Найти силу, с которой шар давит на стену, если его радиус R.

Р е ш е н и е. На шар действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}$, сила натяжения веревки $\vec{T}$ и сила нормальной реакции стены $\vec{N}$. (Сила трения отсутствует, поскольку стена гладкая.) Так как шар находится в равновесии, сумма моментов всех сил относительно любой оси равна нулю. Моменты сил $\vec{F}_{\text{т}}$ и $\vec{N}$ относительно оси, проходящей через точку O, равны нулю, потому что плечи этих сил равны нулю. Следовательно, момент силы $\vec{T}$ относительно точки O также равен нулю, значит, линия действия ее проходит через центр шара.

Координатную ось OX направим горизонтально, ось OY — вертикально вверх (рис. 82). Шар находится в равновесии, поэтому вы-



Р и с. 82

полняется условие $\vec{T} + \vec{F}_т + \vec{N} = \vec{0}$. В проекциях на оси OX и OY это уравнение дает:

$$N - T\sin\alpha = 0, \quad T\cos\alpha - mg = 0.$$

Отсюда $N = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Из треугольника AOB находим:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{OB}{AB} = \frac{R}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}} = \frac{R}{\sqrt{l^2 + 2Rl}}.$$

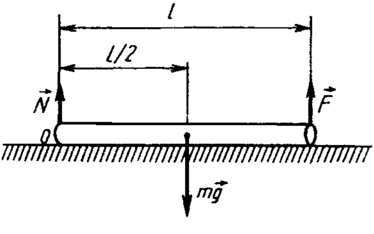
Тогда

$$N = \frac{mgR}{\sqrt{l^2 + 2Rl}}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, сила, с которой шар давит на стену, равна по модулю $\vec{N}$ и направлена в противоположную сторону.

267. Цилиндрическая труба малого диаметра, имеющая массу $m = 2 \cdot 10^3$ кг, лежит на земле. Какую наименьшую силу надо приложить, чтобы приподнять трубу за один из ее концов?

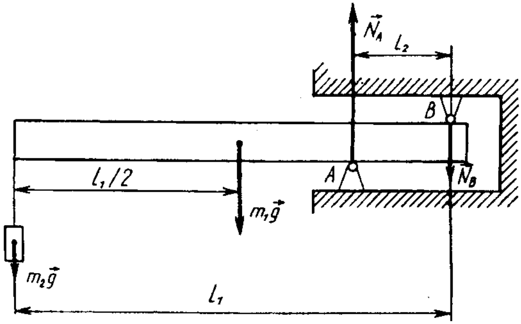
Р е ш е н и е. Чтобы приподнять трубу за один из ее концов, нужно приложить к этому концу некоторую силу $\vec{F}$, направленную вверх (рис. 83). Пусть l — длина трубы. Тогда точка приложения силы тяжести (центр тяжести) находится на расстоянии $l/2$ от конца трубы. Учитывая это, составляем уравнение моментов сил относительно оси, проходящей через точку O: $mgl/2 - Fl = 0$. Отсюда $F = mg/2$, $F = 1 \cdot 10^4$ Н.



Р и с. 83

268. Балка массой $m_1 = 600$ кг и длиной $l_1 = 4{,}00$ м покоится на опорах A и B (рис. 84), расстояние между которыми $l_2 = 1{,}00$ м. К свободному концу балки подвешен груз. Балка давит на опору B с силой $F_B = 7{,}35 \cdot 10^3$ Н. Определить массу груза и силу, с которой балка давит на опору A.

Р е ш е н и е. На балку с грузом действуют четыре силы: сила тяжести балки $m_1\vec{g}$, сила тяжести груза $m_2\vec{g}$ и силы $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$ нормальной реакции опор A и B. По третьему закону Ньютона силы $\vec{F}_A$ и $\vec{F}_B$, с которыми балка давит



Р и с. 84

на опоры (на рисунке не показаны), равны по модулю силам $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$, т. е.

$$F_A = N_A, \; F_B = N_B, \tag{1}$$

и имеют направления, противоположные направлениям сил $\vec{N}_A$ и $\vec{N}_B$.

Балка находится в равновесии, поэтому сумма моментов всех действующих на нее сил относительно любой оси равна нулю. Составим уравнение для моментов сил относительно оси, проходящей через опору A перпендикулярно плоскости чертежа:

$$N_B l_2 - m_1 g(l_1/2 - l_2) - m_2 g(l_1 - l_2) = 0.$$

Отсюда с учетом равенств (1) получим:

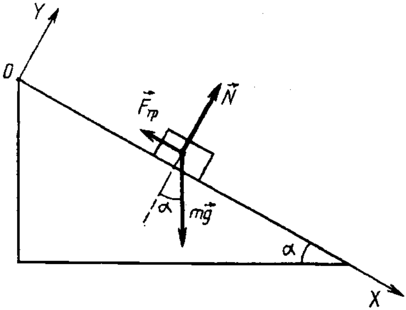
$$m_2 = \frac{F_B l_2 - m_1 g(l_1/2 - l_2)}{g(l_1 - l_2)}, \; m_2 = 50 \text{ кг}.$$

Запишем условие равновесия тела в проекциях на вертикальное направление: $N_A - m_2 g - m_1 g - N_B = 0$. Отсюда, учитывая равенства (1), получаем:

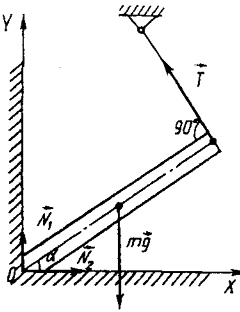
$$F_A = F_B + (m_1 + m_2)g, \quad F_A = 13{,}7 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

269. От легкого толчка тело начало равномерно скользить вниз по наклонной плоскости с углом наклона α. Найти коэффициент трения скольжения.

Р е ш е н и е. На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Координатную ось OX направим вдоль наклон-



Р и с. 85



Р и с. 86

ной плоскости вниз, а ось OY – перпендикулярно плоскости вверх (рис. 85). По условию тело движется равномерно, поэтому суммы проекций на оси OX и OY всех сил, действующих на тело, равны нулю:

$$mg\sin\alpha - F_{тр} = 0, \tag{1}$$

$$N - mg\cos\alpha = 0. \tag{2}$$

Сила трения скольжения $F_{тр} = \mu N$, где μ – коэффициент трения. Из равенства (2) найдем $N = mg\cos\alpha$ и, подставив значение $F_{тр}$ в формулу (1), получим

$$mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = 0.$$

Отсюда найдем искомое значение коэффициента трения: $\mu = \operatorname{tg}\alpha$.

270. Однородный стержень OA упирается одним концом в угол и удерживается за другой конец нитью (рис. 86). Масса стержня m, а угол его наклона к горизонту равен α. Найти силу натяжения нити, а также силы, с которыми стержень давит на пол и на стену.

Р е ш е н и е. На стержень действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, силы нормальных реакций пола $\vec{N}_1$ и стены $\vec{N}_2$. Так как стержень находится в равновесии, то

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{0}.$$

Суммы проекций этих сил на оси OX и OY равны нулю:

$$N_2 - T\sin\alpha = 0, \tag{1}$$

$$N_1 - mg + T\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

Составим уравнение для моментов сил относительно оси, проходящей через точку A:

$$mg(\cos\alpha)l/2 - Tl = 0,$$

где l – длина стержня. Из этого уравнения найдем

$$T = \frac{mg\cos\alpha}{2}.$$

Подставим это значение в уравнения (1) и (2):

$$N_2 = \frac{mg\sin 2\alpha}{4}, \quad N_1 = \frac{mg(1+\sin^2\alpha)}{2}.$$

Согласно третьему закону Ньютона, с такими по модулю силами давит стержень на стену и пол.

271. Однородный стержень AB прикреплен к вертикальной стене посредством шарнира A и удерживается под углом $\alpha = 60°$ к вертикали с помощью невесомой веревки BC, образующей с ним угол $\beta = 30°$ (рис. 87). Определить силу натяжения веревки, а также модуль и направление силы реакции шарнира, если известно, что масса стержня $m = 2{,}0$ кг.

Р е ш е н и е. На стержень действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная к середине стержня и направленная вертикально вниз; сила натяжения веревки $\vec{T}$, приложенная в точке B и направленная вдоль веревки; сила реакции шарнира $\vec{N}$. Модуль и направление силы $\vec{N}$ неизвестны, поэтому на рисунке она не показана. Запишем условие равновесия в векторной форме:

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = \vec{0},$$

а затем в проекциях на оси OX и OY:

$$N_x - T\sin(\alpha - \beta) = 0, \qquad (1)$$

$$N_y - mg + T\cos(\alpha - \beta) = 0. \qquad (2)$$

Составим уравнение для моментов сил относительно оси, проходящей через точку A:

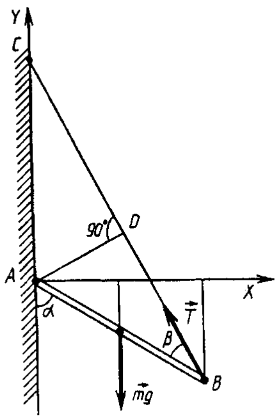


Рис. 87

$$mg(\sin\alpha)l/2 - Tl\sin\beta = 0, \qquad (3)$$

где l – длина стержня.

Из уравнений (1) и (2) найдем:

$$N_x = T\sin(\alpha-\beta),\ N_y = mg - T\cos(\alpha-\beta).$$

Модуль силы $\vec{N}$

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{(T\sin(\alpha-\beta))^2 + (mg - T\cos(\alpha-\beta))^2} =$$
$$= \sqrt{T^2 + m^2g^2 - 2mgT\cos(\alpha-\beta)}. \qquad (4)$$

Из уравнения (3) следует:

$$T = \frac{mg\sin\alpha}{2\sin\beta},\ T = 17\ \text{Н}.$$

Подставив полученное выражение T в формулу (4), после преобразований и вычислений получим:

$$N = mg\sqrt{1 + \frac{\sin^2\alpha}{4\sin^2\beta} - \frac{\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}{\sin\beta}},\quad N = 9{,}8\ \text{Н}.$$

Направление вектора $\vec{N}$ определяется углом γ, который этот вектор составляет с осью OX. По значениям проекций N_x и N_y найдем

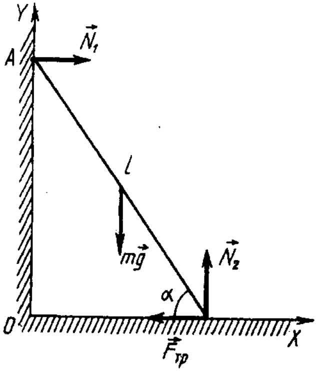
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{N_x}{N_y} = \frac{mg - T\cos(\alpha-\beta)}{T\sin(\alpha-\beta)}.$$

Подставив сюда $T = mg\sin\alpha/(2\sin\beta)$, получим после преобразований:

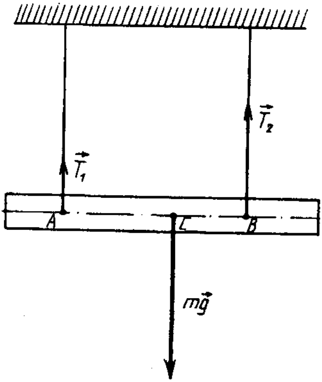
$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{2\sin\beta - \sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)},\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \gamma = 30°.$$

272. Лестница опирается одним концом о вертикальную гладкую стену, а другим – о землю. Коэффициент трения лестницы о землю $\mu = 0{,}4$. Центр тяжести лестницы находится на ее середине. Определить наименьший угол α, который лестница может образовать с горизонтом, не соскальзывая.

Решение. На лестницу действуют сила тяжести $m\vec{g}$, силы нормальных реакций $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ стены и земли, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 88). Лестница находится в равновесии, следовательно, $m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}} = \vec{0}$, поэтому



Р и с. 88



Р и с. 89

суммы проекций всех сил на оси OX и OY равны нулю: $N_1 - F_{тр} = 0$, $N_2 - mg = 0$, или

$$N_1 - \mu N_2 = 0, \tag{1}$$

$$N_2 - mg = 0. \tag{2}$$

Пусть l – длина лестницы. На основании равенства нулю суммы моментов всех сил относительно оси, проходящей через точку B, составим уравнение:

$$N_1 l \sin\alpha - mg(\cos\alpha)l/2 = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha = mg/(2N_1). \tag{3}$$

Выразив из уравнения (2) $N_2 = mg$ и подставив это значение в уравнение (1), найдем $N_1 = \mu mg$. Подставив это выражение в формулу (3), получим:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2\mu},\ \alpha = 51°.$$

273. Однородная балка массой $m = 140$ кг подвешена на двух канатах (рис. 89). Каковы силы натяжения T_1 и T_2 канатов, если $AC = l_1 = 3$ м, $CB = l_2 = 1$ м?

Р е ш е н и е. Балка находится в равновесии, поэтому сумма моментов всех действующих на нее сил относительно оси, проходящей через точку B, равна нулю:

$$T_1(l_1 + l_2) - mgl_2 = 0.$$

Отсюда

$$T_1 = \frac{mgl_2}{l_1 + l_2}. \qquad (1)$$

Относительно оси, проходящей через точку A, сумма моментов всех сил также равна нулю:

$$mgl_1 - T_2(l_1 + l_2) = 0.$$

Отсюда

$$T_2 = \frac{mgl_1}{l_1 + l_2}. \qquad (2)$$

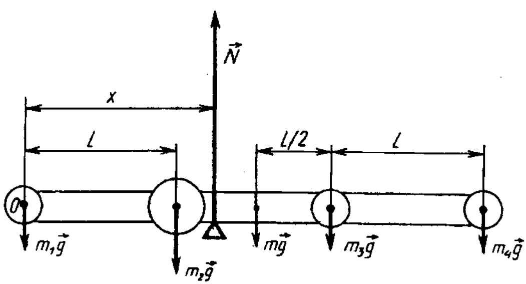
Подставив в формулы (1) и (2) числовые значения величин, получим: $T_1 = 3 \cdot 10^2$ Н, $T_2 = 1 \cdot 10^3$ Н.

Силу T_2 можно было бы найти иначе (после того, как найдена сила T_1), воспользовавшись условием равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальное направление: $T_1 + T_2 - mg = 0$, откуда $T_2 = mg - T_1$.

274. Четыре шара массами m_1, m_2, m_3 и m_4 надеты на стержень так, что их центры находятся на одинаковых расстояниях l друг от друга. Масса стержня m. Определить положение центра тяжести системы.

Р е ш е н и е. Предположим, что центр тяжести находится на расстоянии x от центра левого шара (рис. 90). Если поставим в этом месте опору, то система будет находиться в равновесии. Следовательно, сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через любую точку, будет равна нулю. На систему действуют силы тяжести шаров $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, $m_3\vec{g}$, $m_4\vec{g}$, стержня $m\vec{g}$ и сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$. Сумма моментов этих сил относительно оси, проходящей через точку O, равна нулю:

$$m_2gl + mg \cdot 1{,}5l + m_3g \cdot 2l + m_4g \cdot 3l - Nx = 0.$$



Р и с. 90

Сумма проекций всех сил на вертикальное направление также равна нулю:

$$N - m_1 g - mg - m_2 g - m_3 g - m_4 g = 0.$$

Решив систему двух уравнений, найдем

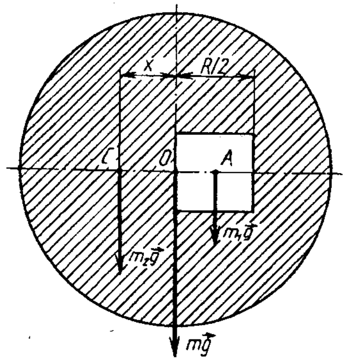
$$x = \frac{(m_2 + 1{,}5m + 2m_3 + 3m_4)l}{m + m_1 + m_2 + m_3 + m_4}.$$

275. Определить положение центра тяжести однородной круглой пластины радиуса R, в которой вырезано квадратное отверстие со стороной $a = R/2$ так, как показано на рис. 91.

Р е ш е н и е. Расположим пластину с отверстием так, чтобы ось симметрии была горизонтальна, и предположим, что вырезанный квадрат помещен на прежнее место. Тогда сила тяжести всего тела

$$m\vec{g} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g},$$

где $m_1\vec{g}$ – сила тяжести квадрата, приложенная в центре квадрата; $m_2\vec{g}$ – сила тяжести пластинки с отверстием, приложенная в искомом центре тяжести C.



Р и с. 91

Относительно оси, проходящей через общий центр тяжести O, сумма моментов всех сил тяжести равна нулю:

$$m_1 g R/4 - m_2 g x = 0,$$

где x – расстояние от точки O до точки C (центра тяжести пластинки с отверстием). Отсюда

$$x = \frac{m_1 R}{4m_2}.$$

Пусть h – толщина пластинки, ρ – плотность материала, из которого она изготовлена. Тогда:

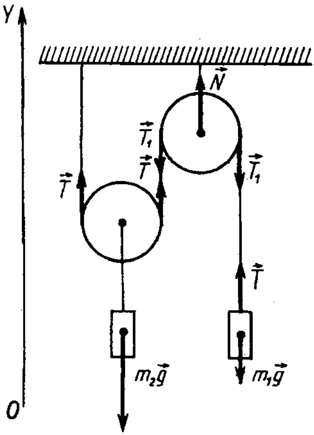
$$m_1 = \rho\left(\frac{R}{2}\right)^2 h = \frac{\rho R^2 h}{4},$$

$$m_2 = m - m_1 = \rho\pi R^2 h - \frac{\rho R^2 h}{4} = \frac{1}{4}\rho R^2 h(4\pi - 1).$$

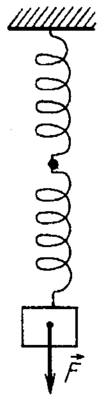
Подставив в формулу (1) m_1 и m_2, получим

$$x = \frac{R}{4(4\pi - 1)}.$$

276. Система, состоящая из неподвижного и подвижного блоков (рис. 92), находится в равновесии. К неподвижному блоку подвешен груз массой $m_1 = 20$ кг. Найти массу груза m_2, силу натяжения нити и силу, действующую на ось неподвижного блока.



Р и с. 92



Р и с. 93

Р е ш е н и е. При равновесии системы сумма проекций на ось OY сил, действующих на блоки и тела, равна нулю:

$$2T - m_2 g = 0,\ N - 2T_1 = 0,\ T - m_1 g = 0, \qquad (1)$$

где $T = T_1$ – модуль силы натяжения нити; N – сила реакции оси неподвижного блока. Согласно третьему закону Ньютона, на ось этого блока действует сила $F = N$. Тогда из уравнений (1) найдем:

$$T = m_1 g,\ m_2 = 2m_1,\ F = 2T,$$

$$T = 2 \cdot 10^2\ \text{Н},\ m_2 = 40\ \text{кг},\ F = 4 \cdot 10^2\ \text{Н}.$$

277. Две пружины, жесткости которых $k_1 = 400$ Н/м и $k_2 = 600$ Н/м, соединены последовательно (рис. 93). Какой должна быть жесткость пружины, которой можно было бы заменить эту систему из двух пружин?

Р е ш е н и е. При последовательном соединении пружин силы натяжения их одинаковы и равны по модулю приложенной силе F. По закону Гука

$$F = k\Delta l, \tag{1}$$

где k – жесткость системы (а значит, и жесткость пружины, которой можно было бы заменить эту систему); Δl – абсолютная деформация системы:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2; \tag{2}$$

Δl_1, Δl_2 – деформация каждой пружины.

По закону Гука

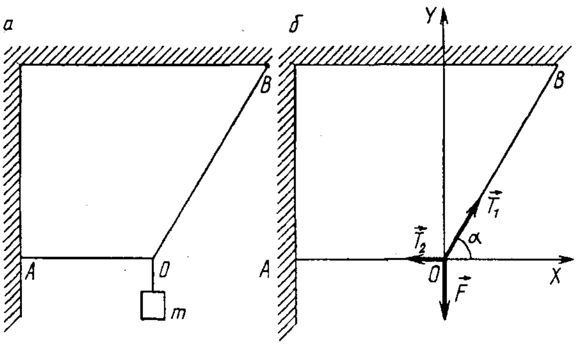
$$F = k_1\Delta l_1, \;\; F = k_2\Delta l_2. \tag{3}$$

Из выражений (1)–(3) находим: $\Delta l = F/k$, $\Delta l_1 = F/k_1$, $\Delta l_2 = F/k_2$. Подставив эти значения в равенство (2), получим

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

откуда $k = k_1k_2/(k_1 + k_2)$, $k = 240$ Н/м.

278. Груз массой $m = 40$ кг висит на двух тросах: AO и BO (рис. 94, *а*). Трос BO образует с горизонтальным направлением угол $\alpha = 60°$. Найти силы натяжения тросов.



Р и с. 94

Р е ш е н и е. К точке O приложены силы натяжения тросов $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, направленные вдоль тросов, а также сила $\vec{F}$, равная силе тяжести груза (рис. 94, *б*) Координатную ось OX направим вдоль троса AO вправо, а ось OY – вертикально вверх. Точка O находится в равновесии. Следовательно, $\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{F} = \vec{0}$. Поэтому суммы проекций всех действующих на нее сил на оси OX и OY равны нулю:

$$T_1 \cos\alpha - T_2 = 0, \ T_1 \sin\alpha - mg = 0.$$

Отсюда $T_1 = \frac{mg}{\sin\alpha}$, $T_2 = \frac{mg}{\operatorname{tg}\alpha}$, $T_1 = 4{,}5 \cdot 10^2$ Н, $T_2 = 2{,}3 \cdot 10^2$ Н.

279. Цилиндр массой $m = 150$ кг удерживается на наклонной плоскости с помощью ленты, с одной стороны закрепленной на наклонной плоскости, а с другой направленной параллельно плоскости (рис. 95, *а*). Найти силу натяжения ленты. Угол наклона плоскости $\alpha = 30°$.

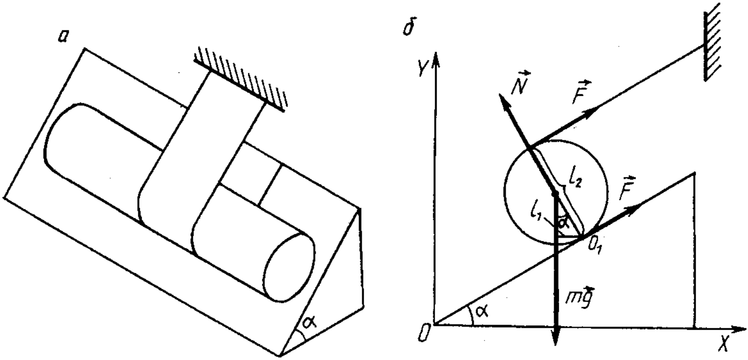
Р е ш е н и е. Выберем направления координатных осей OX и OY так, как показано на рис. 95, *б*. На цилиндр действуют сила натяжения ленты $\vec{F}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Поскольку цилиндр находится в равновесии, то $2\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} = \vec{0}$. Следовательно, сумма проекций всех сил на каждую из осей координат должна равняться нулю:

$$2F\cos\alpha - N\sin\alpha = 0, \ N\cos\alpha - mg + 2F\sin\alpha = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получим:

$$F = \frac{mg\sin\alpha}{2}, \ F = 3{,}7 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Эту задачу можно решить другим способом. Относительно оси, проходящей через точку O_1, сумма моментов всех сил равна нулю. Плечо силы $m\vec{g}$ относительно этой оси



Р и с. 95

$l_1 = R\sin\alpha$, где R – радиус цилиндра. Плечо силы $\vec{F}$, приложенной к цилиндру сверху, $l_2 = 2R$. Согласно правилу моментов, имеем $-mgR\sin\alpha + F\cdot 2R = 0$, откуда $F = mg\sin\alpha/2$.

280. Неравноплечие весы уравновесили, положив дополнительный груз на одну из чаш весов. Можно ли теперь пользоваться этими весами для взвешивания так же, как и равноплечими? Массой коромысла пренебречь.

Р е ш е н и е. Взвешивание – это определение массы и веса тела с помощью весов. Действие рычажных весов основано на условии равновесия тела с неподвижной осью вращения. Пусть на левой чаше весов находится взвешиваемое тело, а на правой – уравновешивающая гиря (рис. 96, *а*). На левую чашу действует вес тела $\vec{P}_1$, на тело – сила тяжести $m_1\vec{g}$ и сила нормальной реакции чаши $\vec{N}_1$. Поскольку тело покоится, модуль силы реакции чаши равен модулю силы тяжести, т. е. $N_1 = m_1 g$. Но, согласно третьему закону Ньютона, сила реакции чаши по модулю равна силе, с которой тело давит на чашу (весу тела): $N_1 = P_1$. Следовательно, вес тела

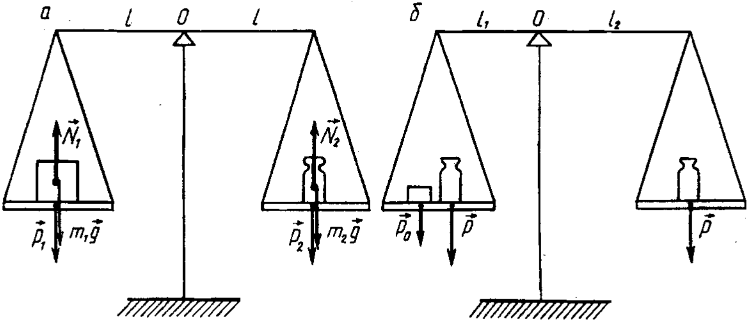
$$P_1 = m_1 g. \qquad (1)$$

На правую чашу действует вес гири $\vec{P}_2$. Рассуждая аналогично, получаем

$$P_2 = m_2 g. \qquad (2)$$

При равновесии выполняется условие равенства нулю суммы моментов сил $\vec{P}_1$ и $\vec{P}_2$:

$$-P_1 l_1 + P_2 l_2 = 0, \text{ или } P_1 l_1 = P_2 l_2,$$



Р и с. 96

где l_1, l_2 – плечи этих сил относительно оси вращения, проходящей через точку O.

Если весы равноплечие (рис. 96, *а*), т. е. $l_1 = l_2 = l$, то при равновесии вес тела равен весу гири: $P_1 = P_2$. Учитывая формулы (1) и (2), можно также утверждать, что при этом масса тела равна массе гири: $m_1 = m_2$. Таким образом, с помощью рычажных весов можно определить как массу, так и вес тела.

Рассмотрим теперь описанную в задаче ситуацию. Пусть неравноплечие весы уравновесили, положив на левую чашу дополнительный груз весом P_0 (рис. 96, *б*). При этом выполняется условие

$$M_1 = M_2, \qquad (3)$$

где M_1, M_2 – модули моментов сил, действующих на чаши.

Допустим теперь, что мы положили на каждую чашу по гире одинакового веса P. Нарушится ли при этом равновесие? Предположим, что оно не нарушится. Тогда должно выполняться условие $M_1 + Pl_1 = M_2 + Pl_2$, откуда с учетом равенства (3) получим $l_1 = l_2$, что противоречит условию. Следовательно, равновесие нарушится. Таким образом, этими весами нельзя пользоваться так же, как и равноплечими.

В заключение здесь уместно обратить внимание на то, что вес тела можно определить также с помощью пружинных весов. Пружинные весы отличаются от рычажных тем, что на них вес тела уравновешивается силой упругости пружины, растянутой подвешенным к ней (или сжатой положенным на нее) телом (рис. 97).

281. Стержень, составленный из двух однородных кусков одинаковой длины, является основанием равностороннего треугольника (рис. 98, *а*). Масса одного куска стержня вдвое больше массы другого куска. Стержень подвешен за концы на двух невесомых нитях, которые служат боковыми сторонами этого треугольника. Какой угол α образует стержень с горизонтом в положении равновесия?

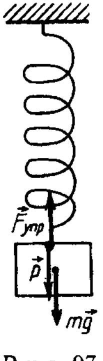


Рис. 97

Решение. Поскольку стержень находится в равновесии, сумма моментов всех сил равна нулю. На стержень действуют четыре силы: силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная к меньшему по массе куску, и сила

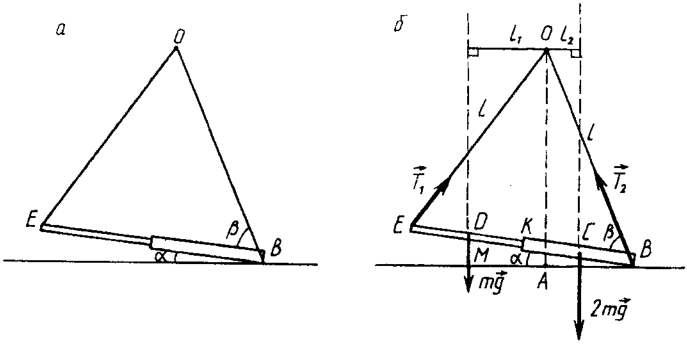


Рис. 98

тяжести $2m\vec{g}$, приложенная к куску вдвое большей массы (рис. 98, *б*). Для определения моментов сил удобно выбрать ось, проходящую через точку подвеса O, так как через нее проходят линии действия неизвестных сил $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$, и, следовательно, моменты этих сил равны нулю. На основании правила моментов составим уравнение:

$$2mgl_2 - mgl_1 = 0, \quad (1)$$

где l_2, l_1 — плечи сил соответственно $2m\vec{g}$ и $m\vec{g}$ относительно оси, проходящей через точку O.

Для нахождения l_1 и l_2 проведем из точки O перпендикуляр OA на горизонтальное направление. Тогда плечо

$$l_1 = MB - AB.$$

Из $\triangle OAB$ находим: $AB = l\cos(\alpha + \beta)$, где l — длина нити (и стержня); $\beta = 60°$, так как треугольник равносторонний. Из $\triangle DMB$ находим $MB = DB\cos\alpha$.

Поскольку сила $m\vec{g}$ приложена посередине тонкой части EK стержня, а сила $2m\vec{g}$ — посередине KB и, кроме того, $EK = KB$, то $ED = DK = KC = CB = l/4$. Следовательно,

$$MB = \frac{3}{4}l\cos\alpha, \ l_1 = \frac{3}{4}l\cos\alpha - l\cos(\alpha + \beta).$$

Как видно из рис. 98, *б*,

$$l_2 = AB - BC\cos\alpha = l\cos(\alpha + \beta) - \frac{1}{4}l\cos\alpha.$$

Подставив значения l_1 и l_2 в уравнение (1), получим

$$2mgl\left(\cos(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}\cos\alpha\right)-mgl\left(\frac{3}{4}\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\right)=0,$$

или после преобразований

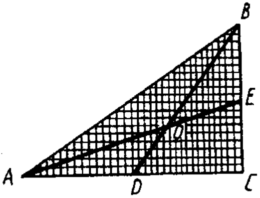
$$3\cos\alpha\cos\beta-3\sin\alpha\sin\beta-\frac{5}{4}\cos\alpha=0. \qquad (2)$$

Так как $\beta = 60°$, то $\cos\beta = 1/2$, $\sin\beta = \sqrt{3}/2$. Подставив эти значения в уравнение (2) и решив его, получим

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{6\sqrt{3}} = 6°.$$

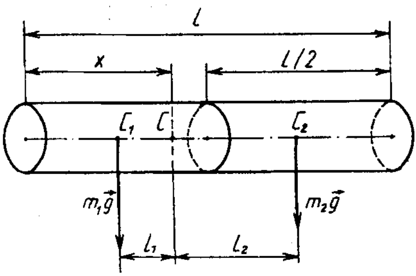
282. Доказать, что центр тяжести произвольного плоского треугольника находится в точке пересечения его медиан.

Р е ш е н и е. Разобьем треугольник линиями, параллельными стороне AC, на большое число тонких полосок (рис. 99). Каждую из полосок можно приближенно считать однородным стержнем, центр тяжести которого лежит на его середине. Следовательно, центр тяжести треугольника находится на медиане BD. Разбивая треугольник таким же образом на полоски, параллельные BC, приходим к выводу, что центр тяжести его должен находиться на медиане AE. Этим двум условиям удовлетворяет только точка O пересечения медиан. Итак, центр тяжести плоского треугольника находится в точке пересечения его медиан.



Р и с. 99

283. Цилиндр состоит из двух равных частей: медной и алюминиевой. Длина цилиндра $l = 0{,}8$ м, плотность меди $\rho_1 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность алюминия $\rho_2 = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найти положение центра тяжести цилиндра.



Р и с. 100

Р е ш е н и е. Центры тяжести C_1 и C_2 медной и алюминиевой частей цилиндра расположены на его оси на расстояниях $l/4$ от оснований (рис. 100). Центр тяжести C всего цилиндра находится на его оси на расстоянии x от левого основания. Если закрепить весь цилиндр на оси, проходящей через точку C перпендикулярно плоскости рисунка, то относительно этой оси будет выполняться условие равновесия: алгебраическая сумма моментов сил $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ равна нулю, т. е.

$$m_2 g l_2 - m_1 g l_1 = 0, \tag{1}$$

где l_1, l_2 – плечи сил относительно этой оси.

Из рисунка видно, что

$$l_1 = x - \frac{l}{4},\ l_2 = \frac{l}{4} + \left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{3l}{4} - x. \tag{2}$$

Массы m_1 и m_2 медной и алюминиевой частей цилиндра выразим через плотности и объемы (объемы их одинаковы):

$$m_1 = \rho_1 V,\ m_2 = \rho_2 V. \tag{3}$$

Подставив выражения (2) и (3) в уравнение (1), получим

$$\rho_2\left(\frac{3l}{4} - x\right) - \rho_1\left(x - \frac{l}{4}\right) = 0.$$

Отсюда $x = \dfrac{l(\rho_1 + 3\rho_2)}{4(\rho_1 + \rho_2)}$, $x = 0{,}3$ м.

Задачи для самостоятельного решения

284. Вертикально расположенная пружина соединяет два груза. Масса верхнего груза $m_1 = 2$ кг, а нижнего $m_2 = 3$ кг. Когда система подвешена за верхний груз, длина пружины $l_1 = 10$ см. Если же систему поставить на подставку, длина пружины оказывается равной $l_2 = 4$ см. Определить длину недеформированной пружины.

285. К концам однородного стержня длиной $l = 1$ м и массой $m = 0{,}8$ кг прикреплены два маленьких шарика, массы которых $m_1 = 0{,}2$ кг и $m_2 = 0{,}25$ кг. Стержень может поворачиваться вокруг горизонтальной оси, находящейся на расстоянии $l_1 = 0{,}3$ м от шарика меньшей массы. Чтобы стержень был расположен горизонтально, под шарик большей массы подставлена опора. Найти силу, действующую на опору.

286. Однородный массивный стержень с укрепленными на его концах грузами $m_1 = 5{,}5$ кг и $m_2 = 1$ кг находится в равновесии, если его подпереть на расстоянии, равном $1/5$ его длины, от более тяжелого груза. Какова масса стержня?

287. К концам горизонтального стержня длиной $l = 0{,}8$ м и массой $m = 2$ кг подвешены два груза: слева массой $m_1 = 1$ кг, справа массой $m_2 = 3$ кг. На каком расстоянии со стороны большей массы следует подпереть стержень, чтобы он остался в равновесии?

288. Концы стержня, массой которого можно пренебречь, прикреплены к двум вертикально расположенным пружинам одинаковой длины. Стержень при этом занимает горизонтальное положение. Жесткость первой пружины $k_1 = 6$ Н/м, второй $k_2 = 4$ Н/м. Расстояние между пружинами $l = 2$ м. На каком расстоянии от первой пружины нужно подвесить груз к стержню, чтобы он остался горизонтальным?

289. При взвешивании на неравноплечих рычажных весах масса тела (по сумме масс уравновешивающих гирь) оказалась на одной чаше весов равной $m_1 = 2$ кг, а на другой $m_2 = 8$ кг. Найти истинную массу тела. Массой коромысла пренебречь.

290. Груз массой $m = 10$ кг перемещают равномерно по прямой в горизонтальной плоскости, прилагая силу, направленную под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Определить модуль этой силы, если коэффициент трения $\mu = 0{,}20$.

291. На платформу кузова грузового автомобиля на высоту $h = 1{,}2$ м по наклонным брускам длиной $l = 2{,}0$ м равномерно тянут груз массой $m = 300$ кг. Коэффициент трения скольжения $\mu = 0{,}20$. Определить силу тяги, направленную параллельно брускам.

292. На доске длиной $l = 64$ см стоит сплошной цилиндр, у которого высота в $n = 3{,}0$ раза больше диаметра основания. На какую наибольшую высоту можно поднять один из концов доски, чтобы цилиндр не опрокинулся?

293. Деревянный брусок находится на наклонной плоскости (рис. 101). С какой наименьшей силой $\vec{F}$ нужно

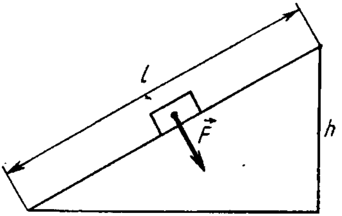


Рис. 101

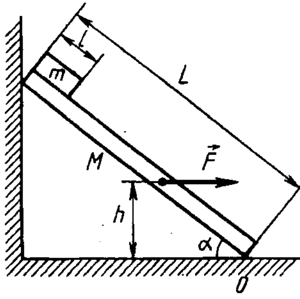


Рис. 102

прижать брусок к наклонной плоскости, чтобы он оставался на ней в покое? Масса бруска $m = 2{,}0$ кг, длина наклонной плоскости $l = 1{,}0$ м, высота ее $h = 0{,}60$ м. Коэффициент трения бруска о наклонную плоскость $\mu = 0{,}40$.

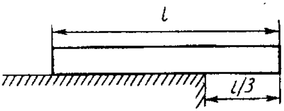
294. Груз массой $m = 5{,}0$ кг находится на наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. К грузу приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль наклонной плоскости. Коэффициент трения груза о плоскость $\mu = 0{,}20$. Определить модуль приложенной силы, если груз перемещается равномерно вниз по плоскости.

295. К верхнему краю доски длиной L и массой M прибит брусок, длина которого l и масса m (рис. 102). Доска закреплена в точке O и прислонена к стенке под углом α к основанию. При какой горизонтальной силе $\vec{F}$, приложенной на высоте h, равновесие доски не нарушится, если стенку убрать?

296. На столе лежит однородная цепочка длиной l. Часть ее свешивается со стола. Какова максимальная длина свешивающейся части, если коэффициент трения между цепочкой и столом равен μ?

297. С какой минимальной силой, направленной горизонтально, надо прижать брусок к вертикальной стене, чтобы он не соскользнул вниз? Масса бруска $m = 6$ кг, коэффициент трения между бруском и стеной $\mu = 0{,}1$.

298. Двое рабочих несут бревно, масса которого $m = 50$ кг. Один поддерживает бревно на расстоянии $l_1 = 1$ м от его конца, а второй – противоположный конец бревна. Длина бревна $l = 5$ м. Определить силы, с которыми бревно действует на каждого рабочего.



Р и с. 103

299. Однородная доска массой $M = 1$ кг лежит на столе так, как показано на рис. 103. Груз какой массы надо положить на правый конец доски, чтобы левый ее конец начал подниматься?

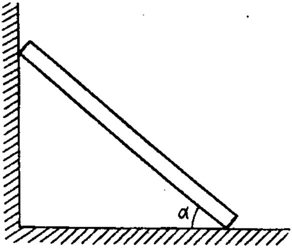
300. Дверь, высота которой $H = 2$ м, ширина $l = 1$ м и масса $m = 32$ кг, подвешена на двух петлях, находящихся на расстоянии $a = 20$ см от верхнего и нижнего краев двери. С какой силой дверь тянет верхнюю петлю в горизонтальном направлении?

301. Однородный стержень покоится, опираясь на гладкую стену и шероховатый пол (рис. 104). Масса стержня $m = 10$ кг, угол между стержнем и полом $\alpha = 45°$. Найти силу трения.

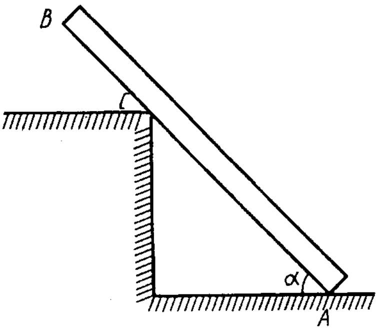
302. Однородный стержень AB опирается на шероховатый пол и гладкий выступ C (рис. 105). Расстояние $AC = 0{,}75AB$. При каком коэффициенте трения стержень будет составлять с полом угол $\alpha = 45°$ в положении равновесия?

303. Однородный стержень одним концом упирается в вертикальную стену, а другой его конец удерживается с помощью нити, длина которой равна длине стержня (рис. 106). При каких углах α стержень будет находиться в равновесии, если коэффициент трения между стержнем и стеной $\mu = 0{,}3$?

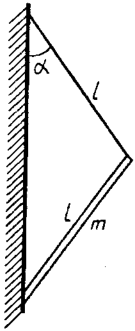
304. Однородная балка массой $m = 60$ кг и длиной $l = 4{,}0$ м опирается о гладкий пол и выступ B, находящийся на высоте $h = 3{,}0$ м над полом (рис. 107). Балка образует



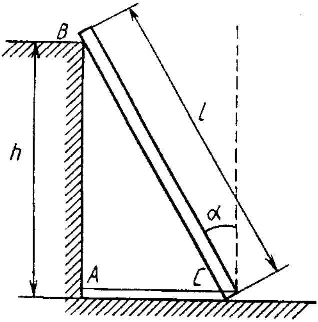
Р и с. 104



Р и с. 105



Р и с. 106

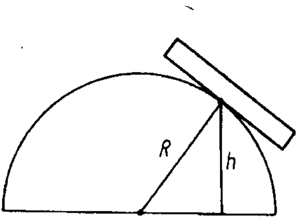


Р и с. 107

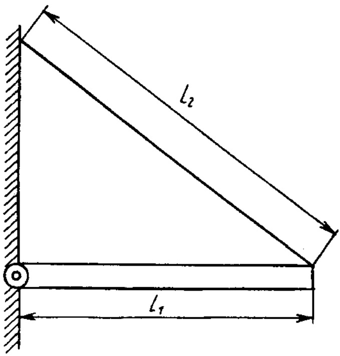
угол $\alpha = 30°$ с вертикалью и удерживается веревкой AC, протянутой у самого пола. Вычислить силу натяжения веревки, силу реакции пола и силу реакции выступа B.

305. Тонкая однородная доска лежит, касаясь средней точкой поверхности полусферы радиуса $R = 2{,}0$ м (рис. 108). При какой наименьшей высоте h центра тяжести доски (от горизонтального основания полусферы) доска не будет соскальзывать с полусферы, если коэффициент трения $\mu = 0{,}80$?

306. Однородная балка длиной $l_1 = 4$ м одним концом шарнирно прикреплена к вертикальной стене и удерживается в горизонтальном положении тросом, привязанным к другому ее концу (рис. 109). Масса балки $m = 500$ кг, длина троса $l_2 = 8$ м. Определить силу натяжения троса.



Р и с. 108



Р и с. 109

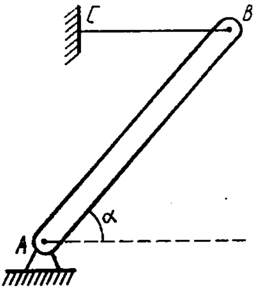


Рис. 110

307. Тонкий однородный стержень шарнирно укреплен в точке A и удерживается нитью BC (рис. 110). Масса стержня m, угол его наклона к горизонту равен α. Найти силу натяжения нити, а также модуль и направление силы реакции шарнира.

308. На какую максимальную высоту может подняться человек массой $m = 75$ кг по лестнице длиной $l = 5$ м, приставленной к гладкой стене? Максимальная сила трения между лестницей и полом $F_{тр} = 300$ Н, угол между лестницей и полом $\alpha = 60°$. Массой лестницы пренебречь.

309. Какова должна быть минимальная сила $\vec{F}$ (рис. 111), приложенная к оси колеса массой m и радиусом R и направленная горизонтально, чтобы она могла поднять колесо на ступеньку высотой h ($h < R$)? Считать, что при повороте колесо не проскальзывает.

310. Два однородных шара, алюминиевый и цинковый, одинакового радиуса $R = 10$ см скреплены в точке касания. Найти расстояние от центра тяжести этой системы до центра цинкового шара. Плотность алюминия $\rho_1 = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность цинка $\rho_2 = 7{,}1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

311. Четыре однородных шара массами $m_1 = 1$ кг, $m_2 = 5$ кг, $m_3 = 7$ кг, $m_4 = 3$ кг укреплены на невесомом стержне таким образом, что их центры находятся на равных расстояниях $d = 0{,}2$ м друг от друга. Найти положение центра тяжести системы.

312. Определить положение центра тяжести однородной круглой пластинки радиуса $R = 30$ см, в которой вырезано отверстие вдвое меньшего радиуса, касающееся края пластинки (рис. 112).

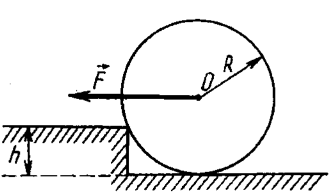


Рис. 111

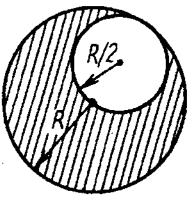
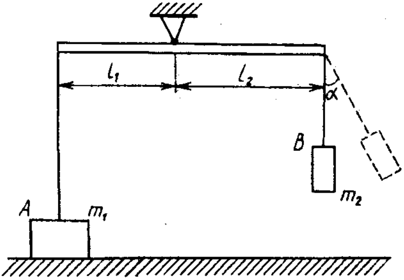
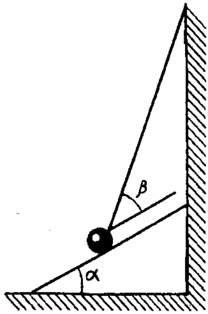


Рис. 112



Р и с. 113



Р и с. 114

313. Два однородных шара из одного и того же материала, радиусы которых $R_1 = 3$ см, $R_2 = 2$ см, скреплены в точке касания. На каком расстоянии от точки скрепления находится центр тяжести системы?

314. В двух вершинах равностороннего треугольника, сторона которого равна a, помещены шарики массой m каждый. В третьей вершине находится шарик массой $2m$. Где расположен центр масс этой системы?

315. Два тела A и B, массы которых $m_1 = 1{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}45$ кг соответственно, подвешены на нитях к легкому коромыслу, плечи которого имеют длину $l_1 = 0{,}6$ м и $l_2 = 1$ м, причем тело A лежит на полу (рис. 113). На какой минимальный угол α следует отклонить подвес тела B, чтобы после его отпускания тело A оторвалось от пола?

316. Однородный шар массой $m = 10$ кг удерживается на гладкой наклонной плоскости веревкой, укрепленной над плоскостью (рис. 114). Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$, угол между веревкой и наклонной плоскостью $\beta = 45°$. Определить силу, с которой шар давит на наклонную плоскость.

317. Однородный стержень согнули посередине под прямым углом и подвесили на шарнире за один из концов (рис. 115). Найти угол α между прикрепленной частью стержня и вертикалью.

Р и с. 115

5. ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ

Методические указания к решению задач

В задачах, связанных с определением гидростатического давления, используются закон Паскаля и следствия из него. Сделав схематический чертеж, нужно изобразить на нем уровни, занимаемые жидкостью по условию задачи. Поверхность нулевого уровня выбирают так, чтобы она проходила по самой нижней границе раздела сред. Затем на основании следствия из закона Паскаля составляют уравнение равновесия жидкости

$$p_A = p_B, \qquad (1)$$

где p_A, p_B – полные давления в точках A и B, расположенных на поверхности одного уровня в покоящейся жидкости.

Если по условию задачи происходит переливание жидкости из одной части сосуда в другую, то к составленному уравнению (1) можно добавить условие несжимаемости жидкости:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2,$$

где ΔV_1, ΔV_2 – соответственно уменьшение объема жидкости в одной части сосуда и увеличение его в другой части.

Затем составленную систему уравнений решают относительно искомой величины.

Задачи на равновесие тел в жидкости или газе решают по такому же плану, как и рассмотренные выше задачи на статику.

Если по условию задачи тело движется с постоянным ускорением в жидкости или газе, нужно составить уравнение движения на основании второго закона Ньютона так же, как и при решении задач на динамику.

Основные законы и формулы

Давление – скалярная физическая величина, равная отношению модуля силы $\vec{F}$, действующей перпендикулярно поверхности, к площади S этой поверхности:

$$p = F/S.$$

Гидростатическое давление внутри жидкости на глубине h

$$p = \rho g h,$$

где ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

Полное давление внутри покоящейся жидкости на глубине h

$$p_{п} = p_0 + \rho g h,$$

где p_0 – давление на открытой поверхности.

Нормальное атмосферное давление p_0 = 760 мм рт. ст. = = 101 325 Па.

Закон Паскаля: давление, производимое на жидкость или газ, передается без изменения по всем направлениям в каждую точку жидкости или газа.

Средняя сила, с которой жидкость давит на плоскую боковую стенку сосуда,

$$F_{ст} = p_{ц.т} S_{ст},$$

где $p_{ц.т}$ – давление жидкости на глубине центра тяжести жидкости; $S_{ст}$ – площадь поверхности стенки.

Архимедова сила, действующая на тело, погруженное в жидкость или газ,

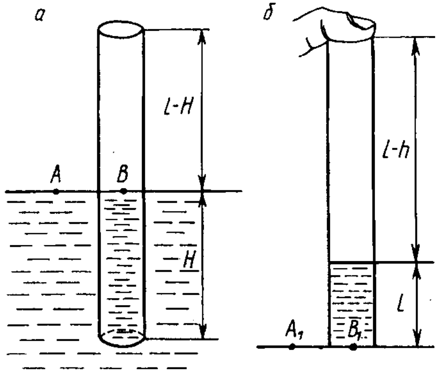
$$F_{А} = \rho_{ж} g V_{т},$$

где $\rho_{ж}$ – плотность жидкости; $V_{т}$ – объем погруженной части тела. Эта сила приложена в центре тяжести вытесняемого объема жидкости и направлена по нормали к открытой поверхности жидкости.

Примеры решения задач

318. Для приближенного определения атмосферного давления взяли стеклянную трубку длиной l и погрузили ее вертикально на глубину H в жидкость плотностью ρ. Закрыв верхний конец трубки пальцем, вынули ее из жидкости. Высота столба жидкости, оставшейся в трубке, равна h. Чему равно атмосферное давление?

Р е ш е н ие. Когда трубка была погружена в жидкость (рис. 116, *а*), столбик воздуха длиной $l - H$ находился при атмосферном давлении, так как $p_A = p_B = p_{атм}$. После того как трубку вынули из жидкости (рис. 116, *б*), столбик воз-



Р и с. 116

духа длиной $l - h$ находился при некотором давлении p_x. Точки A_1 и B_1 находятся на одном уровне, поэтому $p_A = p_B$, или $p_{атм} = p_x - \rho gh$. Отсюда

$$p_x = p_{атм} - \rho gh.$$

Так как температура воздуха постоянна, то на основании закона Бойля–Мариотта

$$p_{атм}(l - H)S = (p_{атм} - \rho gh)(l - h)S,$$

где S – площадь поперечного сечения трубки. Отсюда

$$p_{атм} = \frac{\rho gh(l - h)}{H - h}.$$

319. В сосуд с вертикальными стенками и площадью дна S налита жидкость плотностью ρ. На сколько изменится уровень жидкости в сосуде, если в него опустить тело произвольной формы массой m, которое не тонет?

Р е ш е н и е. Тело плавает, следовательно, архимедова сила равна силе тяжести: $F_A = mg$. Жидкость действует на тело с силой $\vec{F}_A$, направленной вертикально вверх. Согласно третьему закону Ньютона, тело действует на жидкость с такой же по модулю силой, направленной вертикально вниз. Таким образом, тело, плавающее в жидкости, увеличивает силу, действующую на дно сосуда, на $\Delta F = mg$. Но само тело не касается дна, поэтому эта сила изменяется благодаря изменению давления жидкости. Если уровень жидкости в сосуде поднялся на Δh, то давление увеличилось на $\Delta p = \rho g \Delta h$, а сила, действующая на дно сосуда, возросла на $\Delta F = \rho g S \Delta h$. Поэтому $\rho g S \Delta h = mg$, откуда $\Delta h = m/(\rho S)$.

320. Малый поршень гидравлического пресса за один ход опускается на расстояние h_1 = 0,20 м, а большой поршень поднимается на h_2 = 0,01 м (рис. 117). С какой силой действует пресс на зажатое в нем тело, если на малый поршень действует сила F_1 = 500 Н?

Решение. Сила $\vec{F}_1$ создает давление $p = F_1/S_1$, где S_1 – площадь малого поршня. Согласно закону Паскаля, такое же давление будет и в большом цилиндре пресса. Следовательно, на большой поршень со стороны жидкости действует сила

$$F_2 = pS_2 = F_1 S_2 / S_1, \tag{1}$$

где S_2 – площадь большого поршня.

Запишем условие несжимаемости жидкости:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2. \tag{2}$$

На основании равенств (1) и (2) получим

$$F_2 = F_1 h_1 / h_2, \; F_2 = 1{,}0 \cdot 10^4 \text{ Н}. \tag{3}$$

С такой же силой действует пресс на зажатое в нем тело.

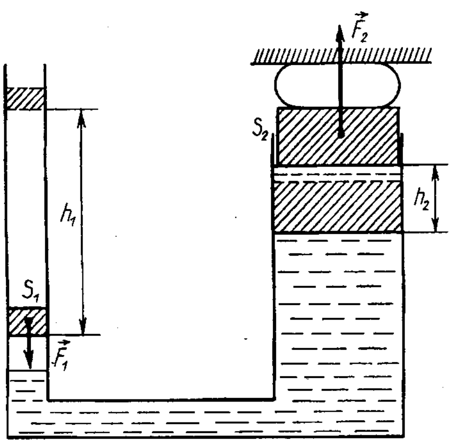


Рис. 117

Анализ формул (1) и (3) показывает, что гидравлический пресс дает выигрыш в силе в S_2/S_1 раз, но не дает выигрыша в работе. В самом деле, из формулы (3) получим $F_1 h_1 = F_2 h_2$. Но $F_1 h_1 = A_1$ – работа силы $\vec{F}_1$, $F_2 h_2 = A_2$ – работа силы $\vec{F}_2$. Поэтому $A_1 = A_2$.

321. В сообщающиеся сосуды налита ртуть, а поверх нее в один сосуд налит столб масла высотой $h_1 = 48$ см, в другой – столб керосина высотой $h_2 = 20$ см. Определить разность уровней ртути в обоих сосудах. Плотность масла $\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, керосина $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, ртути $\rho_3 = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. Выберем в качестве поверхности одного уровня поверхность, проходящую по самой нижней границе раздела жидкостей масло – ртуть (рис. 118). Жидкости находятся в равновесии, поэтому давление в точках A и B этой поверхности одинаковое: $p_A = p_B$. Учитывая, что

$$p_A = p_{\text{атм}} + \rho_1 g h_1, \quad p_B = p_{\text{атм}} + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3,$$

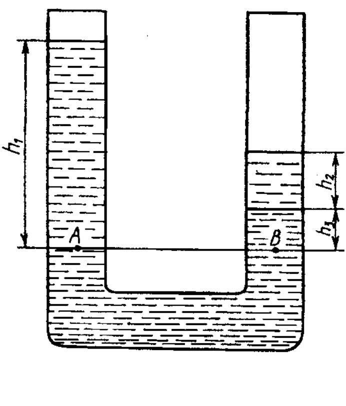
можно записать:

$$p_{\text{атм}} + \rho_1 g h_1 = p_{\text{атм}} + \rho_2 g h_2 + \rho_3 g h_3.$$

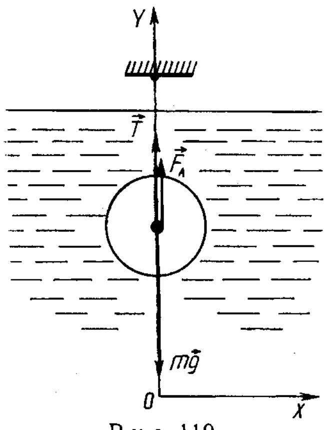
Отсюда $h_3 = (\rho_1 h_1 - \rho_2 h_2)/\rho$, $h_3 = 2 \cdot 10^{-2}$ м.

322. Вес тела, погруженного в жидкость плотностью ρ_1, равен P_1, а погруженного в жидкость плотностью ρ_2, – P_2. Определить плотность тела ρ.

Р е ш е н и е. Предположим, что тело подвешено на невесомой нити в жидкости (рис. 119). На тело действуют



Р и с. 118



Р и с. 119

три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, архимедова сила $\vec{F}_A$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Тело находится в равновесии. Следовательно, сумма действующих на него сил $\vec{T} + \vec{F}_A + m\vec{g} = \vec{0}$.

Направив координатную ось OY вертикально вверх и спроектировав на нее силы, получим $T + F_A - mg = 0$. Отсюда $T = mg - F_A$.

Обозначим объем тела через V, тогда $F_A = \rho g V$, где ρ – плотность жидкости. Следовательно,

$$T = mg - \rho g V = g(m - \rho V).$$

Модуль силы натяжения нити равен модулю веса тела: $T = P$. Таким образом, получаем следующую формулу для определения веса тела массой m в жидкости, плотность которой ρ:

$$P = (m - \rho V)g. \qquad (1)$$

На основании формулы (1) можно записать:

$$P_1 = (m - \rho_1 V)g, \quad P_2 = (m - \rho_2 V)g.$$

Разделив левые и правые части этих уравнений на V и учитывая, что $m/V = \rho$, получим:

$$P_1/(gV) = \rho - \rho_1, \qquad (2)$$

$$P_2/(gV) = \rho - \rho_2. \qquad (3)$$

Решив совместно уравнения (2) и (3), найдем плотность тела:

$$\rho = \frac{P_2\rho_1 - P_1\rho_2}{P_2 - P_1}.$$

Таким образом, плотность тела можно найти путем взвешивания его в двух различных жидкостях, плотности которых известны.

323. Кусок металла массой $m = 1{,}0$ кг, будучи погруженным в бензин, весит $P_1 = 9{,}3$ Н. В некотором растворе он весит $P_2 = 8{,}8$ Н. Определить плотность раствора ρ_2, если плотность бензина $\rho_1 = 7{,}2 \cdot 10^2$ кг/м^3 и плотность металла больше плотностей бензина и раствора.

Решение. При решении задачи 322 получена формула (1) для определения веса тела в жидкости. На основании этой формулы можно записать:

$$P_1 = mg - \rho_1 gV, \ P_2 = mg - \rho_2 gV,$$

или

$$mg - P_1 = \rho_1 gV, \ mg - P_2 = \rho_2 gV.$$

Отсюда

$$\frac{mg - P_1}{mg - P_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \ \rho_2 = \frac{(mg - P_2)\rho_1}{mg - P_1}, \ \rho_2 = 1{,}4 \cdot 10^3 \ \text{кг/м}^3.$$

Таким способом можно на практике определить плотность раствора.

324. Прямоугольный металлический брусок, плотность которого ρ_1, площадь основания S и высота h_1, лежит на дне сосуда. В сосуд налита до высоты $h_2 > h_1$ жидкость плотностью ρ_2. Найти силу, с которой брусок давит на дно сосуда.

Решение. Возможны два случая: 1) брусок неплотно прилегает к дну сосуда; 2) брусок прилегает к дну так плотно, что жидкость под него не подтекает. Рассмотрим каждый случай в отдельности.

1. Снизу на брусок действует сила со стороны жидкости. Эта сила больше силы, обусловленной давлением жидкости сверху, поэтому «возникает» архимедова сила. Таким образом, на брусок действуют в этом случае три силы: архимедова сила $\vec{F}_A$, сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g}$ и сила реакции дна $\vec{N}_1$ (рис. 120, *а*). Условие равновесия запишется в виде

$$\vec{F}_т + \vec{F}_A + \vec{N}_1 = \vec{0}.$$

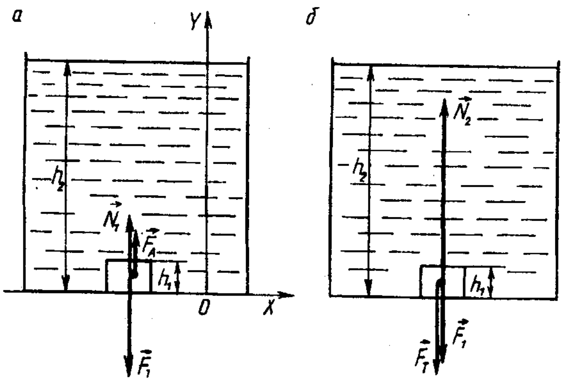


Рис. 120

В проекциях на ось OY получим $N_1 + F_A - F_т = 0$. Отсюда $N_1 = F_т - F_A$. Так как $F_т = mg = \rho_1 S h_1 g$ и $F_A = \rho_2 S h_1$, то

$$N_1 = (\rho_1 - \rho_2) S g h_1.$$

По третьему закону Ньютона с такой же по модулю силой действует брусок на дно сосуда, т. е. $F_{д1} = N_1$.

2. Снизу на брусок не действует сила со стороны жидкости, поэтому $F_A = 0$. Сверху же на брусок действует сила, обусловленная давлением жидкости и атмосферы:

$$F_1 = (\rho_2 g(h_2 - h_1) + p_{атм})S.$$

(Обратим внимание на то, что в первом случае сила, обусловленная давлением жидкости сверху, учтена в архимедовой силе: $F_A = F_2 - F_1$, где F_2 – сила, обусловленная давлением жидкости снизу.) На брусок действуют также сила тяжести $\vec{F}_т$ и сила реакции дна $\vec{N}_2$ (рис. 120, *б*). Спроектировав силы на ось OY, запишем условие равновесия бруска: $N_2 - F_т - F_1 = 0$, или

$$N_2 - \rho_1 S h_1 g - (\rho_2 g(h_2 - h_1) + p_{атм})S = 0.$$

Отсюда

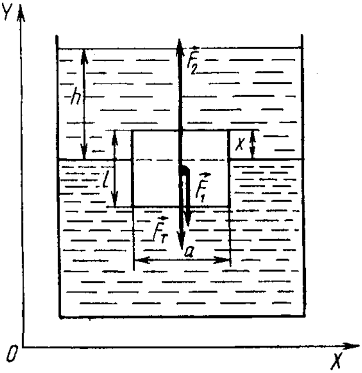
$$N_2 = Sg(\rho_1 h_1 + \rho_2 (h_2 - h_1) + p_{атм}/g).$$

С такой же по модулю силой действует брусок на дно: $F_{д2} = N_2$.

325. В сосуде находятся две несмешивающиеся жидкости, плотности которых различны: $\rho_1 < \rho_2$. На границе раздела жидкостей плавает однородный прямоугольный брусок, погруженный целиком в жидкость. Плотность ρ_3 материала бруска больше плотности ρ_1 верхней жидкости, но меньше плотности ρ_2 нижней жидкости ($\rho_1 < \rho_3 < \rho_2$). Какая часть объема бруска будет находиться в верхней жидкости?

Р е ш е н и е. Обозначим размеры бруска a, b и l ($l < a$, $l < b$, $a > b$). Пусть верхняя грань бруска находится на высоте x над границей раздела жидкостей (рис. 121). Тогда объем части бруска, находящейся в верхней жидкости, $V_1 = abx$. Следовательно, в верхней жидкости находится часть объема

$$\frac{V_1}{V} = \frac{abx}{abl} = \frac{x}{l}. \qquad (1)$$



Р и с. 121

На брусок действуют три силы: сила тяжести $\vec{F}_т = m\vec{g} = \rho_3 abl\vec{g}$, сила $\vec{F}_1$, действующая на верхнюю грань, и сила $\vec{F}_2$, действующая на нижнюю грань. Так как тело плавает, то выполняется условие равновесия $\vec{F}_т + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$.

Для проекций на ось OY получим

$$F_2 - F_1 - F_т = 0. \qquad (2)$$

На верхнюю грань действует сила

$$F_1 = (\rho_1 g(h - x) + p_{атм})ab,$$

на нижнюю грань — сила

$$F_2 = (\rho_1 gh + \rho_2 g(l - x) + p_{атм})ab.$$

Подставив значения F_1, F_2 и $F_т$ в формулу (2), получим после преобразований $(\rho_2 - \rho_1)x = (\rho_2 - \rho_3)l$. Отсюда

$$\frac{x}{l} = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_2 - \rho_1}. \qquad (3)$$

Сравнивая формулы (1) и (3), находим

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_2 - \rho_1}.$$

326. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно погрузить в жидкость на глубину H вертикально ориентированный однородный цилиндр плотностью ρ_1, высотой h и диаметром d, если плотность жидкости ρ_2 и перед погружением нижнее основание цилиндра касалось поверхности жидкости? Плотность жидкости больше плотности цилиндра ($\rho_2 > \rho_1$).

Р е ш е н и е. При погружении цилиндра на него, кроме силы тяжести $\vec{F}_т$ и приложенной силы, действует архимедова сила, направленная вертикально вверх (рис. 122).

Пока цилиндр погружается в жидкость до верхнего основания, архимедова сила линейно возрастает от нуля до максимального значения F_A. Поэтому переменную архимедову силу при перемещении $s_1 = h$ можно заменить средней архимедовой силой:

$$F_{ср} = \frac{0 + F_A}{2} = \frac{F_A}{2},$$

считая ее постоянной. Чтобы медленно (равномерно) погружать цилиндр, к нему нужно приложить такую силу F_1, чтобы выполнялось условие равновесия

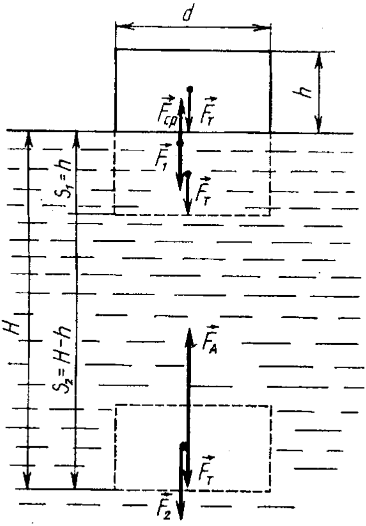


Рис. 122

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_т + \vec{F}_{ср} = \vec{0}.$$

Спроектировав все силы на вертикальное направление, получим

$$F_1 + F_т - F_{ср} = 0.$$

Отсюда $F_1 = F_{ср} - F_т$. Совершаемая этой силой работа $A = F_1 s_1$, или

$$A_1 = (F_A/2 - F_т)h.$$

Когда цилиндр полностью находится в жидкости, архимедова сила постоянна. Поэтому при перемещении $s_2 = H - h$ к цилиндру нужно приложить такую силу, чтобы выполнялось равенство $F_2 + F_т - F_A = 0$. Следовательно, $F_2 = F_A - F_т$. Работа этой силы

$$A_2 = F_2 s_2 = (F_A - F_т)(H - h).$$

Вся работа, совершаемая при погружении цилиндра,

$$A = A_1 + A_2 = (F_A/2 - F_т)h + (F_A - F_т)(H - h) = \\ = F_A(h/2 + H) - F_т H. \quad (1)$$

Учитывая, что $F_т = mg = \rho_1 Vg$, $F_А = \rho_2 gV$, где V – объем цилиндра, формулу (1) можно переписать так:

$$A = gV(\rho_2 h/2 + (\rho_2 - \rho_1)H).$$

Подставив сюда значение $V = \pi d^2 H/4$, найдем работу, совершаемую при погружении:

$$A = \frac{1}{4}\pi d^2 gH\left(\frac{\rho_2 h}{2} + (\rho_2 - \rho_1)H\right).$$

327. Определить минимальный объем наполненного водородом шара, который может поднять человека массой $m_1 = 70$ кг на высоту $h = 100$ м за время $t = 30$ с. Общая масса оболочки шара и корзины $m_2 = 20$ кг, плотность воздуха и водорода принять равными соответственно $\rho_1 = 1{,}3$ кг/м^3 и $\rho_2 = 0{,}10$ кг/м^3. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Направим координатную ось OY вертикально вверх (рис. 123). Вдоль этой оси шар движется равноускоренно, поэтому

$$h = a_y t^2/2,$$

где a_y – проекция ускорения шара на ось OY. Отсюда

$$a_y = 2h/t^2. \qquad (1)$$

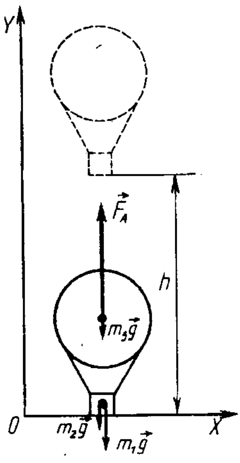


Рис. 123

На шар действуют следующие силы: сила тяжести человека $m_1\vec{g}$, оболочки и корзины $m_2\vec{g}$, водорода $m_3\vec{g}$, архимедова сила $\vec{F}_А$. Составим на основании второго закона Ньютона уравнение движения шара:

$$\vec{F}_А + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = m\vec{a}.$$

Для проекций на ось OY получим

$$F_А - m_1 g - m_2 g - m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3)a_y, \qquad (2)$$

где m_3 – масса водорода.

Пусть V – искомый объем шара. Тогда

$$F_A = \rho_1 gV, \ m_3 = \rho_2 V. \qquad (3)$$

Подставив значения (1) и (3) в уравнение (2), получим

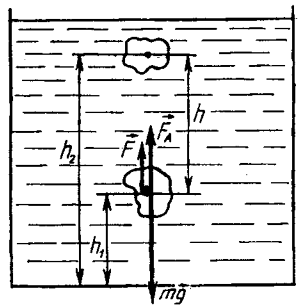
$$\rho_1 gV - m_1 g - m_2 g - \rho_2 gV = (m_1 + m_2 + \rho_2 V)2h/t^2.$$

Отсюда найдем объем шара:

$$V = \frac{(m_1 + m_2)(2h + gt^2)}{gt^2(\rho_1 - \rho_2) - 2h\rho_2}, \ V = 77 \text{ м}^3.$$

328. Рассчитать, как изменится потенциальная энергия погруженного в жидкость тела, если его поднять в жидкости на высоту h. Плотность жидкости ρ_1, плотность тела ρ_2, объем тела V.

Р е ш е н и е. Примем за нулевой уровень потенциальной энергии уровень дна. Пусть тело находилось на высоте h_1 над уровнем дна. Чтобы поднять тело на высоту $h = h_2 - h_1$, нужно приложить к нему силу $\vec{F}$ (рис. 124). Работа этой силы равна изменению механической энергии тела: $A = \Delta E_k + \Delta E_p$, где ΔE_k, ΔE_p – изменения соответственно кинетической и потенциальной энергии.



Р и с. 124

Если тело поднимается равномерно, то $\Delta E_k = 0$, следовательно,

$$A = \Delta E_p. \qquad (1)$$

Для равномерного поднятия тела к нему нужно приложить такую силу, чтобы выполнялось условие равновесия, т. е. сумма проекций всех сил на вертикальное направление была равна нулю: $F + F_A - mg = 0$. Отсюда $F = mg - F_A$. При перемещении h работа этой силы $A = Fh$ или

$$A = (mg - F_A)h. \qquad (2)$$

С учетом того, что $m = \rho_2 V$, $F_A = \rho_1 gV$, на основании равенств (1) и (2) можно записать:

$$\Delta E_p = (\rho_2 - \rho_1)gVh.$$

Если $\rho_2 > \rho_1$, то $\Delta E_p > 0$ – потенциальная энергия увеличивается; если $\rho_2 < \rho_1$, то $E_p < 0$ – потенциальная энергия уменьшается. При неравномерном поднятии изменение потенциальной энергии будет таким же.

Формулу (1) можно переписать так:

$$E_{p2} - E_{p1} = (mg - F_A)h_2 - (mg - F_A)h_1.$$

Так как при $h = 0$ (на дне) $E_p = 0$, получаем:

$$E_{p1} = (mg - F_A)h_1, \ E_{p2} = (mg - F_A)h_2.$$

Следовательно, потенциальная энергия тела, находящегося в жидкости на высоте H от нулевого уровня энергии, выражается так:

$$E_p = (mg - F_A)H. \qquad (3)$$

329. В баке находится вода. Расположенный у ее поверхности камень был брошен вертикально вниз в воду с начальной скоростью v_0 и опустился на дно. Масса камня m, объем V, вода налита до высоты H. Какое количество теплоты выделилось при падении камня?

Решение. По закону сохранения энергии механическая энергия камня превратилась в выделившееся количество теплоты:

$$Q = E_k + E_p, \qquad (1)$$

где E_k, E_p – соответственно кинетическая и потенциальная энергия.

Дно примем за поверхность нулевого уровня потенциальной энергии. Тогда на основании формулы (3) из задачи 328 потенциальная энергия камня в начальном состоянии

$$E_p = (mg - F_A)H.$$

Поскольку $F_A = \rho_1 gV$, где ρ_1 – плотность воды, то

$$E_p = (m - \rho_1 V)gH. \qquad (2)$$

Кинетическая энергия камня в момент бросания

$$E_k = mv_0^2/2. \qquad (3)$$

Учитывая формулы (1)–(3), получаем

$$Q = mv_0^2/2 + (m - \rho_1 V)gH.$$

330. Стеклянный шарик падает в воде с ускорением $a = 5{,}8$ м/с^2. Найти плотность стекла, если плотность воды $\rho_1 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3. Трение не учитывать.

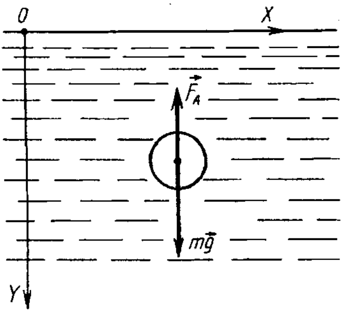
Р е ш е н и е. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и архимедова сила $\vec{F}_A$. Направим ось OY вертикально вниз (рис. 125). Составим уравнение движения шарика в векторной форме:

$$m\vec{g} + \vec{F}_A = m\vec{a}.$$

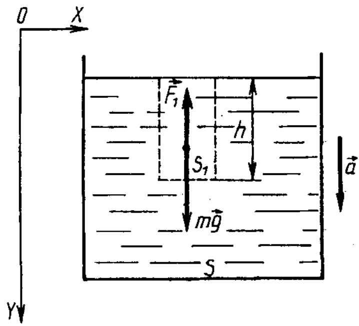
Для проекций на ось OY получим

$$mg - F_A = ma, \tag{1}$$

где m — масса шарика.



Р и с. 125



Р и с. 126

Пусть V — объем шарика, ρ_2 — плотность стекла. Тогда $m = \rho_2 V$, $F_A = \rho_1 g V$. Подставив эти значения в формулу (1), получим $\rho_2 Vg - \rho_1 Vg = \rho_2 Va$, откуда

$$\rho_2 = \rho_1 g/(g - a), \ \rho_2 = 2{,}5 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

331. Сосуд с жидкостью, плотность которой ρ, падает с ускорением $\vec{a}$, направленным вниз. Определить давление жидкости на глубине h и силу, с которой жидкость давит на дно сосуда. Высота уровня жидкости в сосуде H, площадь дна сосуда S.

Р е ш е н и е. Выделим внутри жидкости столбик высотой h и площадью основания S_1 (рис. 126). На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F}_1$, обусловленная давлением и направленная вверх. Ось OY направим вертикально вниз. Уравнение движения столбика жидкости, согласно второму закону Ньютона, имеет вид

$$m\vec{g} + \vec{F}_1 = m\vec{a}.$$

В проекциях на ось OY получим

$$mg - F_1 = ma, \qquad (1)$$

где m – масса столбика жидкости.

Пусть p – давление на глубине h. Тогда $F_1 = pS_1$. Кроме того, $m = \rho S_1 h$. Поэтому уравнение (1) можно переписать так:

$$\rho S_1 hg - pS_1 = \rho S_1 ha.$$

Отсюда $p = \rho(g - a)h$.

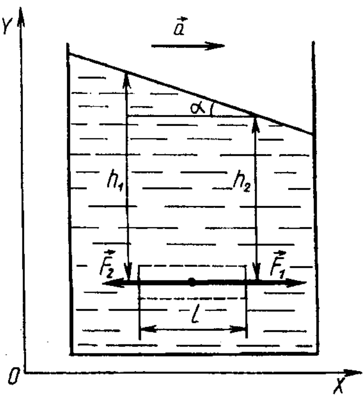
Сила, с которой жидкость действует на дно сосуда,

$$F = \rho(g - a)HS. \qquad (2)$$

Анализ формулы (2) показывает, что сила, с которой жидкость действует на дно сосуда, тем меньше, чем больше ускорение сосуда a. При $a = g$ (свободное падение) $F = 0$, т. е. наступает состояние невесомости. При $a > g$ жидкость будет свободно падать с ускорением g, а сосуд – с бóльшим ускорением, вследствие чего жидкость выйдет из сосуда.

332. Сосуд с жидкостью движется горизонтально с ускорением $\vec{a}$. Как расположена при этом свободная поверхность жидкости?

Р е ш е н и е. Выделим тонкий горизонтальный столбик жидкости длиной l и площадью поперечного сечения S, проведенного перпендикулярно направлению движения жидкости (рис. 127). Составим для этого столбика уравнение движения:



Р и с. 127

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{a},$$

где $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ – силы, обусловленные давлением на столбик соответственно слева и справа.

Для проекций на горизонтальную ось OX получим

$$F_1 - F_2 = ma. \qquad (1)$$

Так как вдоль оси OY ускорения нет, давление на глубине h определяется по формуле $p = \rho g h$. Поэтому давление на столбик слева $p_1 = \rho g h_1$, справа $p_2 = \rho g h_2$. Масса рассматриваемого столбика жидкости $m = \rho S l$. Учитывая эти значения, перепишем уравнение (1):

$$\rho g h_1 S - \rho g h_2 S = \rho S l a.$$

Отсюда

$$g(h_1 - h_2) = la,$$

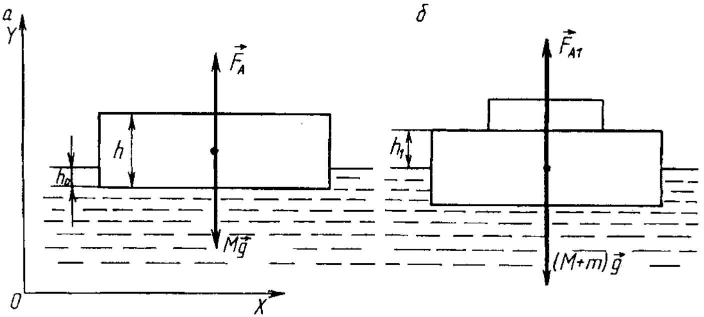
или

$$\frac{h_1 - h_2}{l} = \frac{a}{g}.$$

Но $(h_1 - h_2)/l = \operatorname{tg}\alpha$. Следовательно, поверхность жидкости будет представлять собой плоскость, наклоненную к горизонту под углом $\alpha = \operatorname{arctg}(a/g)$.

333. Прямоугольный понтон, масса которого $M = 700$ кг, имеет длину $l = 5$ м, ширину $d = 3$ м и высоту $h = 0{,}7$ м. Найти осадку понтона без груза и предельную грузоподъемность при высоте бортов над ватерлинией $h_1 = 0{,}2$ м. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. На понтон без груза действуют сила тяжести $M\vec{g}$ и архимедова сила $\vec{F}_A$ (рис. 128, *а*). Он находится в равновесии, следовательно, $\vec{F}_A + M\vec{g} = \vec{0}$, поэтому сумма проекций этих сил на ось OY равна нулю: $F_A - Mg = 0$. Находим:



Р и с. 128

$$F_A = \rho g V,$$

где V – объем погруженной в воду части понтона. При осадке h_0 этот объем $V = h_0 l d$. Следовательно,

$$F_A = \rho g h_0 l d,\ \rho g h_0 l d - Mg = 0.$$

Отсюда осадка понтона без нагрузки

$$h_0 = M/(\rho l d),\ h_0 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Если на понтоне лежит груз массой m (рис. 128, *б*), то условие равновесия будет иметь вид $F_{A1} - (M + m)g = 0$. При этом $F_{A1} = \rho g l d(h - h_1)$. Следовательно,

$$\rho g l d(h - h_1) - (M + m)g = 0.$$

Отсюда $m = \rho l d(h - h_1) - M$, $m = 7 \cdot 10^3$ кг.

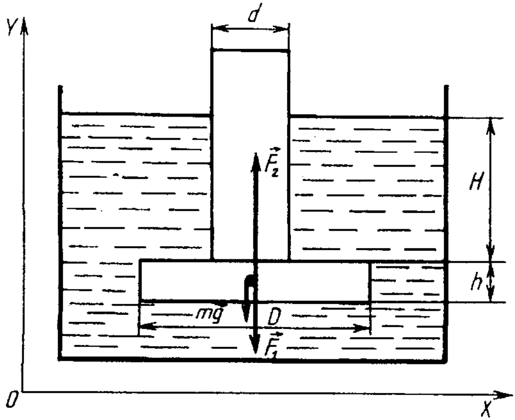
334. В бак с жидкостью опущена длинная трубка диаметром d, к которой снизу плотно прилегает диск толщиной h и диаметром $D > d$. Плотность материала диска ρ_1 больше плотности жидкости ρ_2. Трубку медленно поднимают вверх. Определить, на каком уровне диск оторвется от трубки.

Решение. На диск действуют три силы: сила $\vec{F}_1$, обусловленная атмосферным и гидростатическим давлениями, направленная вертикально вниз; сила $\vec{F}_2$, обусловленная гидростатическим давлением и направленная вертикально вверх; сила тяжести $m\vec{g}$ (рис. 129). Диск оторвется от трубки в тот момент, когда будет выполняться условие равновесия: сумма проекций на ось OY всех сил, действующих на диск, равна нулю, т. е.

$$mg + F_1 - F_2 = 0. \tag{1}$$

Выразим модули сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Сила $\vec{F}_1$ действует на верхнее основание диска, которое находится на расстоянии H от поверхности жидкости. Давление на этом уровне $p_1 = \rho_2 g H + p_{атм}$, где $p_{атм}$ – атмосферное давление. При этом сила, обусловленная атмосферным давлением, действует на все основание, а сила, обусловленная гидростатическим давлением, – только на площадь $S_1 = \pi D^2/4 - \pi d^2/4$. Следовательно,

$$F_1 = \rho_2 g H\left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}\right) + p_{атм}\frac{\pi D^2}{4}. \tag{2}$$



Р и с. 129

Модуль силы $\vec{F}_2$

$$F_2 = p_2 S = p_2 \frac{\pi D^2}{4}.$$

Здесь p_2 – давление на глубине $H + h$, на которой находится нижнее основание диска. Но $p_2 = \rho_2 g(H + h) + p_{\text{атм}}$, поэтому

$$F_2 = (\rho_2 g(H + h) + p_{\text{атм}})\frac{\pi D^2}{4}. \tag{3}$$

Масса диска

$$m = \rho_1 V = \rho_1 \frac{\pi D^2}{4} h. \tag{4}$$

Подставив теперь значения (2)–(4) в уравнение (1), получим

$$\rho_1 \frac{\pi D^2}{4} hg + \rho_2 g H\left(\frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}\right) + p_{\text{атм}} \frac{\pi D^2}{4} -$$
$$- (\rho_2 g(H + h) + p_{\text{атм}})\frac{\pi D^2}{4} = 0,$$

или после очевидных преобразований

$$\rho_1 D^2 h + \rho_2 H(D^2 - d^2) - \rho_2 D^2 (H + h) = 0.$$

Решив это уравнение относительно H, будем иметь

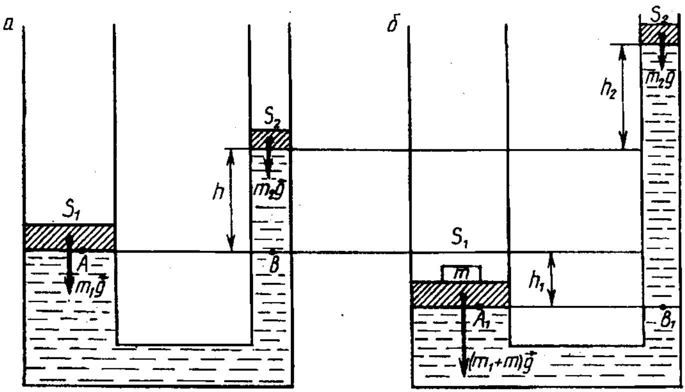
$$H = \frac{D^2 h(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_2 d^2}.$$

335. Гидравлический пресс, заполненный водой, имеет поршни, площади которых $S_1 = 200$ см^2 и $S_2 = 20$ см^2. На большой поршень положили груз массой $m = 60$ кг. На какую высоту поднимется после этого малый поршень? Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. Допустим, что в отсутствие груза малый поршень пресса находился выше большого на h (рис. 130, *а*) в состоянии равновесия. При равновесии давление в точках A и B, принадлежащих поверхности одного уровня, одинаковое: $p_A = p_B$, или

$$\frac{m_1 g}{S_1} = \frac{m_2 g}{S_2} + \rho g h, \tag{1}$$

где m_1, m_2 – массы большого и малого поршней соответственно.



Р и с. 130

После того как положили груз (рис. 130, *б*), малый поршень поднялся на некоторую высоту h_2, а большой опустился на h_1. Запишем для этого состояния условие равновесия как равенство давлений в точках A_1 и B_1 поверхности одного уровня: $p_{A_1} = p_{B_1}$, или

$$\frac{(m_1 + m)g}{S_1} = \frac{m_2 g}{S_2} + \rho g(h_1 + h + h_2).$$

После преобразований с учетом условия (1) получим

$$m/S_1 = \rho h_1 + \rho h_2. \tag{2}$$

Из условия несжимаемости жидкости следует, что $S_1 h_1 = S_2 h_2$. Отсюда $h_1 = S_2 h_2 / S_1$. Подставив это значение в уравнение (2) и решив его, найдем:

$$h_2 = \frac{m}{\rho(S_1 + S_2)}, \ h_2 = 2{,}7 \text{ м}.$$

336. Определить объем куска меди, который в воде имеет вес $P = 20$ Н. Плотность меди $\rho_1 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. Воспользуемся выведенной при решении задачи 322 формулой для веса тела массой m в жидкости, плотность которой ρ:

$$P = (m - \rho_2 V) g,$$

где m – масса куска меди; V – его объем. Учитывая, что $m = \rho_1 V$, получаем $P = (\rho_1 V - \rho_2 V) g$, откуда

$$V = \frac{P}{g(\rho_1 - \rho_2)}, \ V = 2{,}6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

337. Тело объемом $V = 1500$ см^3 при взвешивании в воздухе на равноплечих рычажных весах было уравновешено латунными гирями массой $m_1 = 1700$ г. Найти массу уравновешивающих гирь при взвешивании этого тела в вакууме. Плотность латуни $\rho_1 = 8500$ кг/м^3, плотность воздуха $\rho_2 = 1200$ г/м^3.

Р е ш е н и е. При взвешивании в воздухе на одну чашу весов действует вес тела $\vec{P}$, на другую – вес гирь $\vec{P}_1$ (см. решение задачи 280). При равновесии на равноплечих весах будет выполняться равенство $P = P_1$.

На основании формулы (1) из решения задачи 322 запишем выражения для веса тела и гирь в воздухе:

$$P = (m - \rho_2 V) g, \ P_1 = (m_1 - \rho_2 V_1) g,$$

где m – масса тела; V_1 – объем гирь. Так как $V_1 = m_1 / \rho_1$, то

$$P_1 = m_1 (1 - \rho_2 / \rho_1) g.$$

При равновесии в воздухе $P = P_1$, т. е.

$$(m - \rho_2 V) g = m_1 (1 - \rho_2 / \rho_1) g.$$

Отсюда находим массу тела:

$$m = m_1(1 - \rho_2/\rho_1) + \rho_2 V,\ \ m = 1702\ \text{г}.$$

При взвешивании в вакууме архимедова сила равна нулю. На одну из чаш действует вес тела, численно равный mg, на другую – вес уравновешивающих гирь, численно равный $m_2 g$, причем $m_2 \neq m_1$. Условие равновесия в этом случае имеет вид $mg = m_2 g$, откуда $m_2 = m$. Таким образом, масса уравновешивающих гирь при взвешивании в вакууме равна массе тела.

338. В жидкости плотностью ρ_1 плавает полый шар объемом V, изготовленный из материала плотностью ρ_2. Каков объем полости шара, если известно, что объем погруженной в жидкость части шара составляет $n = 0{,}75$ всего объема шара?

Р е ш е н и е. На шар действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и архимедова сила $\vec{F}_\text{А}$ (рис. 131). Поскольку шар плавает, то выполняется условие равновесия $m\vec{g} + \vec{F}_\text{А} = \vec{0}$. Следовательно,

$$mg = F_\text{А}, \tag{1}$$

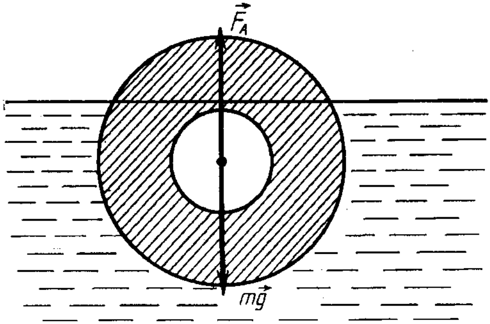
где m – масса шара. Если $V_\text{п}$ – объем полости шара, то $m = \rho_2(V - V_\text{п})$.

Модуль архимедовой силы $F_\text{А} = \rho_1 g V_1$, где V_1 – объем погруженной в жидкость части шара.

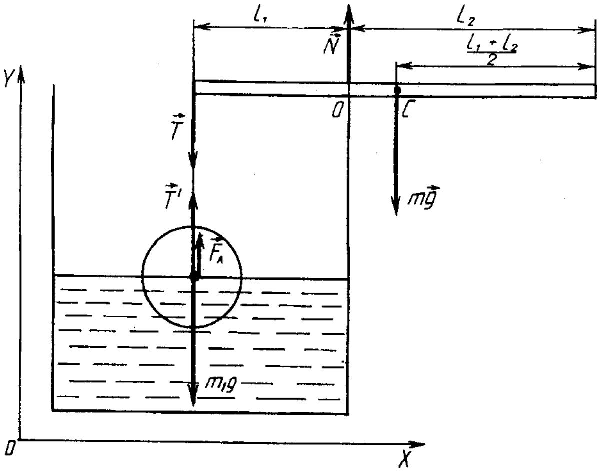
Подставив значения m и $F_\text{А}$ в выражение (1), получим

$$\rho_2(V - V_\text{п})g = \rho_1 g V_1$$

или с учетом того, что $V_1 = nV$,



Р и с. 131



Р и с. 132

$$\rho_2(V - V_п) = \rho_1 n V.$$

Отсюда $V_п = V(1 - n\rho_1/\rho_2)$.

339. К концу однородного стержня массой m = 4,0 г подвешен на нити алюминиевый шарик радиуса R = 50 мм. Стержень кладут на край стакана с водой, добиваясь такого положения равновесия, при котором погруженной в воду оказывается половина шарика (рис. 132). Определить, в каком отношении делится длина стержня точкой опоры. Плотность алюминия $\rho_1 = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. На стержень действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Стержень находится в равновесии, поэтому сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через точку O, равна нулю. Обозначим l_1 и l_2 длины частей стержня, на которые его делит точка опоры. Сила тяжести $m\vec{g}$ приложена в точке C, делящей стержень пополам. Тогда условие равновесия можно записать так:

$$mg\left(l_2 - \frac{l_1 + l_2}{2}\right) - Tl_1 = 0,$$

или

$$mgl_2 - mgl_1 - 2Tl_1 = 0.$$

Разделив это уравнение на l_1, получим

$$mg\frac{l_2}{l_1} - mg - 2T = 0,$$

откуда

$$\frac{l_2}{l_1} = 1 + \frac{2T}{mg}. \qquad (1)$$

Модуль силы натяжения $\vec{T}$ равен модулю силы $\vec{T}'$, с которой нить действует на шарик. На шарик действуют еще две силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$ и архимедова сила $\vec{F}_\text{A}$. Поскольку шарик находится в равновесии, то

$$\vec{F}_\text{A} + \vec{T}' + m_1\vec{g} = \vec{0}.$$

Следовательно, сумма проекций этих сил на ось OY равна нулю:

$$F_\text{A} + T' - m_1 g = 0,$$

или с учетом того, что $T' = T$,

$$F_\text{A} + T - m_1 g = 0, \qquad (2)$$

где m_1 – масса шарика:

$$m_1 = \rho_1 V; \qquad (3)$$

V – объем шарика.

Учитывая, что в воде находится половина шарика, находим модуль архимедовой силы:

$$F_\text{A} = \rho_2 g\frac{V}{2}. \qquad (4)$$

На основании выражений (2)–(4)

$$T = \frac{Vg(2\rho_1 - \rho_2)}{2}.$$

Объем шарика $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, поэтому

$$T = \frac{2\pi R^3 g(2\rho_1 - \rho_2)}{3}.$$

Подставив теперь это значение в формулу (1), найдем, что длина стержня делится точкой опоры в отношении

$$\frac{l_2}{l_1} = 1 + \frac{4\pi R^3(2\rho_1 - \rho_2)}{3m}, \quad \frac{l_2}{l_1} = 1{,}6.$$

Задачи для самостоятельного решения

340. Длинная вертикальная трубка погружена одним концом в сосуд с ртутью. В трубку наливают $m = 0{,}71$ кг воды. Определить изменение уровня ртути в трубке. Диаметр трубки $d = 0{,}06$ м, плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Толщиной стенок трубки пренебречь.

341. В подводной части судна образовалось отверстие, площадь которого $S = 5{,}0$ см^2. Отверстие находится ниже уровня воды на $h = 3{,}0$ м. Какая минимальная сила требуется, чтобы удержать заплату, закрывающую отверстие с внутренней стороны судна? Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

342. На какой глубине в открытом водоеме давление в $n = 3{,}0$ раза больше нормального атмосферного давления? Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3, нормальное атмосферное давление p_0 считать равным $1{,}0 \cdot 10^5$ Па.

343. В открытый цилиндрический сосуд налиты ртуть и вода в равных по массе количествах. Общая высота двух слоев жидкостей $h = 29{,}2$ см. Определить давление жидкостей на дно сосуда. Плотность ртути $\rho_1 = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2 = 1{,}00 \cdot 10^3$ кг/м^3.

344. Открытую с обеих сторон узкую цилиндрическую трубку длиной $l = 80$ см до половины погружают вертикально в ртуть. Затем закрывают верхнее отверстие в трубке и вынимают ее из ртути. При этом в трубке остается столбик ртути высотой $h = 22$ см. Чему равно атмосферное давление? Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

345. Цилиндрическая трубка с запаянным верхним концом опускается вертикально в ртуть так, что запаянный конец совпадает с поверхностью ртути в сосуде. При этом высота воздушного столба в трубке равна h. Определить длину трубки. Атмосферное давление равно $p_{\text{атм}}$, плотность ртути ρ. Температуру считать постоянной.

346. Аквариум доверху наполнен водой. С какой средней силой давит вода на плоскую вертикальную стенку аквариума длиной $l = 50$ см и высотой $h = 30$ см? Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

347. Снаряд массой $m = 8{,}0$ кг вылетает из ствола орудия со скоростью $v = 700$ м/с. Определить давление пороховых газов во время выстрела, считая движение снаряда внутри ствола равноускоренным. Сила сопротивления движению снаряда $F_c = 16{,}2$ кН, длина нарезной части ствола $l = 3{,}0$ м, диаметр $d = 77$ мм.

348. Дубовый шар лежит на дне сосуда с водой, причем половина его находится в воде. С какой силой давит на дно сосуда шар, если в воздухе он весит $P = 5{,}9$ Н? Плотность дуба $\rho_1 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_2 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3. Выталкивающей силой воздуха пренебречь.

349. В воздухе вес кипы хлопка $P = 1519$ Н. Определить вес этой кипы в вакууме, если плотность хлопка в кипе $\rho_1 = 800{,}0$ кг/м^3, а плотность воздуха $\rho_2 = 1{,}225$ кг/м^3. Взвешивание производилось с помощью пружинных весов.

350. Полый шар, отлитый из чугуна, плавает в воде, погрузившись ровно наполовину. Найти объем полости шара, если масса шара $m = 5$ кг. Плотность чугуна $\rho_1 = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_2 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

351. В воздухе вес куска пробки $P_1 = 0{,}15$ Н, куска свинца $P_2 = 1{,}1$ Н. Если эти куски связать, подвесить к динамометру и опустить в керосин, то динамометр покажет $P_3 = 0{,}6$ Н. Определить плотность ρ_1 пробки. Плотность свинца $\rho_2 = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, керосина $\rho_3 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Архимедовой силой в воздухе пренебречь.

352. Высота плоской льдины над уровнем океана $h = 2{,}0$ м. Определить толщину всей льдины, если плотность льда $\rho_1 = 0{,}90 \cdot 10^3$ кг/м^3, океанской воды $\rho_2 = 1{,}03 \cdot 10^3$ кг/м^3.

353. Найти минимальную массу груза, который нужно положить на плоскую льдину, чтобы она полностью погрузилась в воду. Площадь льдины $S = 1$ м^2, ее толщина $d = 20$ см, плотность льда $\rho_1 = 0{,}92 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

354. Каким должен быть минимальный объем полости $V_п$ железного буя для того, чтобы он мог плавать на поверхности воды? Объем буя V, плотность железа ρ_1, плотность воды ρ_2.

355. На концах легкого стержня длиной $l = 20$ см помещены два шарика: первый из свинца, второй из алюминия. Стержень шарнирно закреплен посередине и опущен в воду, где он находится в равновесии, занимая горизонтальное положение. На сколько нужно передвинуть по стержню второй шарик, чтобы равновесие восстановилось в воздухе? Плотность свинца $\rho_1 = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, алюминия $\rho_2 = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_3 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

356. Сосуд с водой уравновешен на одной из чашек рычажных весов. В сосуд опускают подвешенный на нити металлический брусок массой m так, что он оказывается полностью погруженным в воду, но не касается стенок и дна сосуда. Груз какой массы и на какую чашку надо положить, чтобы восстановить равновесие? Плотность металла ρ_1, воды ρ_2.

357. На чашах погруженных в воду равноплечих весов находятся алюминиевый и железный шары, массы которых одинаковы и равны m. Определить массу сплошного шара из меди, который надо добавить для восстановления равновесия. Плотность алюминия $\rho_1 = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, железа $\rho_2 = 7{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, меди $\rho_3 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_4 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

358. К коромыслу равноплечих весов подвешены два сплошных однородных шарика равной массы, сделанных из разных материалов. Если одновременно поместить один из шариков в жидкость плотностью $\rho_1 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, а другой – в жидкость плотностью $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, то равновесие сохранится. Считая, что плотности шариков больше плотностей жидкостей, найти отношение плотностей шариков.

359. Металлический брусок плавает в сосуде, в который налита ртуть, а поверх нее – вода. При этом в ртуть брусок погружен на $\alpha_1 = 1/4$ своей высоты, а в воду – на $\alpha_2 = 1/2$ высоты. Найти плотность металла. Плотность ртути $\rho_1 = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

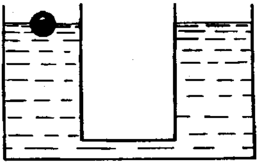
360. Плавающее в ртути тело погружено в нее на $n_1 = 0{,}25$ своего объема. Какая часть n_2 объема тела будет погружена в ртуть, если поверх ртути налить слой воды, полностью закрывающий тело? Плотность ртути $\rho_1 = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_2 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

361. В цилиндрических сообщающихся сосудах находится ртуть. Отношение диаметров сосудов $n = d_1/d_2 = 0{,}25$. В узкий сосуд наливают воду; высота столба воды $h = 80$ см. На сколько опустится уровень ртути в узком сосуде и на сколько он поднимется в широком? Плотность воды $\rho_1 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3, ртути $\rho_2 = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

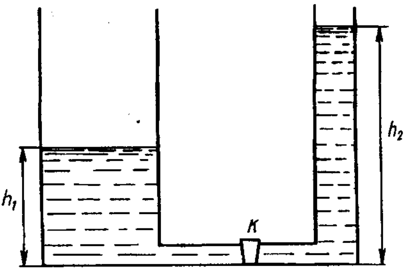
362. В сообщающиеся сосуды налита ртуть, поверх которой в один из сосудов налита вода. Разность уровней ртути $\Delta h = 20$ мм. Плотность ртути $\rho_1 = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_2 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найти высоту столба воды.

363. В двух сообщающихся цилиндрических сосудах с одинаковыми поперечными сечениями площадью $S = 1 \cdot 10^{-2}$ м^2 находится ртуть. В одни из сосудов поверх ртути наливают воду массой $m_1 = 20$ кг и опускают в нее плавать груз массой $m_2 = 7{,}2$ кг. На сколько поднимется уровень ртути во втором сосуде? Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

364. Шарик массой $m = 40$ г плавает в одном из двух одинаковых цилиндрических сообщающихся сосудов, заполненных водой (рис. 133). Площадь поперечного сечения каждого сосуда $S = 20$ см^2. На сколько изменится уровень воды, если вынуть шарик? Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3.



Р и с. 133



Р и с. 134

365. Два цилиндрических сосуда соединены у дна тонкой трубкой с краном (рис. 134). Один сосуд имеет площадь поперечного сечения $S_1 = 15$ см^2, второй – $S_2 = 5{,}0$ см^2. Сосуды заполнены водой: первый до высоты $h_1 = 20$ см, второй до высоты $h_2 = 40$ см. Каков будет уровень воды в сосудах, если открыть кран К в соединительной трубке?

366. Деталь отлита из сплава железа и никеля. Определить, сколько процентов по объему составляют железо и никель, а также объем всей детали, если в воздухе деталь весит $P_1 = 33{,}52$ Н, а в воде – $P_2 = 29{,}60$ Н. Плотность железа $\rho_1 = 7{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, никеля $\rho_2 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_3 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3. Архимедову силу в воздухе не учитывать.

367. Браслет массой $M = 80$ г сделан из сплава золота и серебра. Вычислить массу золота, содержащегося в браслете, располагая следующими данными: плотность золота $\rho_1 = 19{,}3$ г/см^3, плотность серебра $\rho_2 = 10{,}5$ г/см^3; при погружении браслета в воду, находящуюся в сосуде с вертикальными стенками и площадью основания $S = 25$ см^2, уровень воды поднимается на $h = 2{,}0$ мм.

368. Согласно желанию сиракузского властителя, Архимед должен был определить содержание золота в короне, состоящей из золотых и серебряных частей, не разрушая ее. Для этого Архимед взвесил корону в воздухе и получил вес $P_1 = 25{,}4$ Н, а затем в воде, получив вес $P_2 = 23{,}4$ Н. Зная плотность золота, серебра и воды (соответственно $\rho_1 = 19{,}3$ г/см^3, $\rho_2 = 10{,}5$ г/см^3 и $\rho_3 = 1{,}00$ г/см^3), определить, как и Архимед, массу золота, содержащегося в этой короне. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10{,}0$ м/с^2.

369. В цилиндрическом сосуде с не смешивающейся с водой жидкостью, плотность которой $\rho = 1{,}2$ г/см^3, при температуре $t = 0$ °С плавает льдинка массой $m = 1$ кг. На сколько изменится уровень этой жидкости в сосуде, когда льдинка растает? Площадь основания сосуда $S = 0{,}1$ м^2.

370. Теплоход, войдя в гавань, выгрузил часть груза; при этом его осадка уменьшилась на $h = 0{,}6$ м. Найти массу груза, оставленного теплоходом в гавани, если площадь поперечного сечения теплохода на уровне ватерлинии $S = 5400$ м^2. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

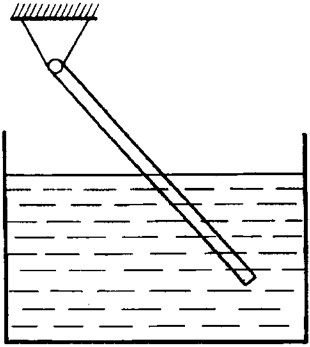
371. Определить наименьшую площадь плоской льдины толщиной $d = 40$ см, способной удержать на воде человека массой $m = 75$ кг. Плотность льда $\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_2 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

372. На плоту, состоящем из $n = 20$ одинаковых бревен, можно перевозить груз максимальной массой $m = 1800$ кг. Определить плотность древесины, если объем каждого бревна $V = 0{,}3$ м^3, а плотность воды $\rho_1 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

373. Для взятия пробы грунта на дно океана на стальном тросе опускают прибор. Найти предельную глубину погружения, если предел прочности на разрыв стали $\sigma_{пр} = 4{,}8 \cdot 10^8$ Па. Массой прибора по сравнению с массой троса пренебречь. Плотность стали $\rho_1 = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность океанской воды $\rho_2 = 1{,}03 \cdot 10^3$ кг/м^3.

374. Масса шара-зонда, включая массу газа в нем, $m = 50$ кг, а объем $V = 110$ м^3. Шар связан с землей веревкой. Плотность воздуха $\rho = 1{,}3$ кг/м^3. Каково натяжение веревки, когда она: находится в вертикальном положении; под действием ветра отклонилась на угол $\alpha = 30°$ от вертикали?

375. Тонкий однородный цилиндрический стержень верхним концом крепится к шарниру. Снизу под стержень под-



Р и с. 135

водится ванна с водой. Стержень наклоняется так, что в воде находится половина его длины (рис. 135). Определить плотность материала стержня. Плотность воды $\rho_1 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

376. В озере на глубине $h = 5{,}0$ м находится тело массой $m = 2{,}0$ кг и объемом $V = 1{,}0 \times 10^3$ см^3. Какая работа должна быть совершена при его подъеме на высоту $H = 5{,}0$ м над поверхностью воды? Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

377. Со дна водоема глубиной $h = 11$ м подъемным краном равномерно поднимают бетонный куб массой $m = 2200$ кг. Определить механическую работу по подъему этого куба до касания его верхней грани поверхности воды. Плотность бетона $\rho_1 = 2{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_2 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

378. Однородная прямая призма, площадь основания которой $S = 1$ м^2 и высота $h = 0{,}4$ м, плавает на поверхности воды так, что в воде находится половина ее объема. Найти минимальную работу, необходимую для полного погружения призмы в воду. Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

379. На какую глубину погрузится тело при падении в воду с высоты H и за какое время оно всплывет на поверхность? Трение тела о воздух и воду не учитывать. Плотность воды ρ_1, плотность тела $\rho_2 < \rho_1$. Начальная скорость тела $v_0 = 0$.

380. С какой высоты падал шарик, если он погрузился в воду на глубину $h = 0{,}1$ м? Плотность шарика $\rho_1 = 0{,}4 \times 10^3$ кг/м^3, его начальная скорость $v_0 = 0$, плотность воды $\rho_2 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3. Сопротивлением воздуха и воды пренебречь.

381. Сплошной однородный стеклянный шарик объемом $V = 0{,}5$ см^3 равномерно падает в воде. Какое количество теплоты выделится при перемещении шарика на $h = 6$ м? Плотность стекла $\rho_1 = 2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, воды $\rho_2 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

382. Сколько будет весить гиря массой $m = 1{,}0$ кг, взвешиваемая на пружинных весах в гондоле аэростата при его равноускоренном подъеме, если масса гондолы с оболочкой $M = 500$ кг? Оболочка имеет объем $V = 1000$ м^3 и наполнена водородом, плотность которого $\rho_1 = 0{,}10$ кг/м^3. Плотность воздуха $\rho_2 = 1{,}3$ кг/м^3.

383. Резиновый мяч, масса которого m и радиус R, погружают под воду на глубину h и отпускают. На какую высоту, считая от поверхности воды, подпрыгнет мяч? Плотность воды ρ. Сопротивление воды и воздуха при движении не учитывать.

II. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

6. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Методические указания к решению задач

Задачи на газовые законы можно решать по следующему плану.

Если в задаче задано одно состояние газа и требуется определить какой-либо параметр этого состояния, нужно воспользоваться уравнением Менделеева–Клапейрона. Если значения давления и объема явно не заданы, их выражают через заданные величины, подставляют в записанное уравнение и, решив его, находят неизвестный параметр.

В том случае, когда в задаче рассматриваются два различных состояния газа, нужно установить, изменяется ли масса газа при переходе из одного состояния в другое. Если масса газа остается постоянной, можно записать уравнение Клапейрона (уравнение объединенного газового закона). Если же при постоянной массе в данном процессе не изменяется какой-либо из параметров p, V или T (давление, объем, температура), применяют уравнение соответствующего закона (Гей-Люссака, Шарля или Бойля–Мариотта). Если в двух состояниях масса газа разная, для каждого состояния записывают уравнение Менделеева–Клапейрона. Затем систему уравнений решают относительно искомой величины.

Молярную массу вещества можно найти с помощью периодической системы элементов Д. И. Менделеева. Например, химическая формула углекислого газа CO_2. По таблице находим, что относительная атомная масса углерода приблизительно равна 12, кислорода – 16. Значит, относительная молекулярная масса углекислого газа $M_r = 12 + 2 \cdot 16 = 44$. Следовательно, его молярная масса $M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

При решении задач на пары́ и влажность применяют законы идеального газа (Бойля–Мариотта, Гей-Люссака, Шарля, Дальтона), уравнения Клапейрона, Менделеева–Клапейрона. Однако нужно обратить внимание на следующие особенности:

1) параметры двух различных состояний насыщенного пара не подчиняются объединенному газовому закону, так как в этих состояниях насыщенный пар имеет различную массу;

2) по заданной температуре насыщенного пара можно, пользуясь таблицами, найти его плотность и давление;

3) по заданной температуре T_1 ненасыщенного пара и его точке росы $T_р$ можно с помощью таблиц найти абсолютную влажность, так как при температуре $T_р$ этот пар станет насыщенным;

4) параметры каждого состояния насыщенного пара связаны между собой уравнением Менделеева–Клапейрона.

В задачах, связанных с силами поверхностного натяжения, необходимо учитывать, что эти силы направлены вдоль поверхности жидкости перпендикулярно линии, ограничивающей эту поверхность, и стремятся сократить ее. В капиллярах смачивающие жидкости поднимаются, а несмачивающие – опускаются.

Основные законы и формулы

Количество вещества

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A},$$

где m – масса вещества; M – его молярная масса; N – число молекул; N_A – постоянная Авогадро: $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа:

$$p = \frac{1}{3} m_0 n \langle v_{кв} \rangle^2,$$

где p – давление газа; m_0 – масса молекулы; n – концентрация молекул; $\langle v_{кв} \rangle$ – средняя квадратичная скорость молекул.

Средняя квадратичная скорость молекул газа

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}},$$

где $\langle v^2 \rangle$ – средний квадрат скорости молекул; k – постоянная Больцмана: $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К; T – термодинамическая (абсолютная) температура газа.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы газа

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2}kT.$$

Зависимость давления газа от концентрации его молекул и температуры выражается формулой

$$p = nkT.$$

Уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева–Клапейрона)

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где p – давление; V – объем; m – масса газа; M – молярная масса газа; R – универсальная (молярная) газовая постоянная: $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К); T – термодинамическая температура газа.

Закон Бойля–Мариотта: для газа данной массы при постоянной температуре (m = const, T = const – изотермический процесс)

$$pV = \text{const}.$$

Для любых двух состояний газа при изотермическом процессе

$$p_1V_1 = p_2V_2.$$

Закон Гей-Люссака: для газа данной массы при постоянном давлении (m = const, p = const – изобарный процесс)

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0\alpha T, \text{ или } V/T = \text{const},$$

где V – объем газа при t °С; V_0 – объем газа при 0 °С; α – температурный коэффициент объемного расширения: $\alpha \approx \frac{1}{273}$ К$^{-1}$ для всех газов.

Для любых двух состояний газа при изобарном процессе

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

Закон Шарля: для газа данной массы при постоянном объеме (m = const, V = const – изохорный процесс)

$$p = p_0(1 + \gamma t) = p_0\gamma T, \text{ или } P/T = \text{const},$$

где p – давление газа при t °С; p_0 – давление газа при 0 °С; γ – температурный коэффициент давления: $\gamma \approx \frac{1}{273}$ К$^{-1}$ для всех газов.

Для любых двух состояний газа при изохорном процессе

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

Уравнение Клапейрона (объединенный газовый закон): для газа данной массы (m = const)

$$pV/T = \text{const}.$$

Для любых двух состояний

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

Термодинамическая температура

$$T = t + 273{,}15,$$

где t – температура Цельсия. Изменение термодинамической температуры равно изменению температуры Цельсия: $\Delta T = \Delta t$.

Нормальные условия: давление p_0 = 101 325 Па (760 мм рт. ст.), температура T_0 = 273,15 К (0 °С).

Закон Дальтона: давление смеси химически не взаимодействующих идеальных газов равно сумме парциальных давлений этих газов:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$

Относительная влажность воздуха

$$\varphi = \frac{p}{p_0} \cdot 100\%,$$

где p – парциальное давление водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре; p_0 – давление насыщенного водяного пара при той же температуре.

Относительная влажность может быть определена также по формуле

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_0} \cdot 100\%,$$

где ρ – *абсолютная влажность воздуха* при данной температуре (величина, равная массе водяного пара, содержащегося в 1 м^3 воздуха); ρ_0 – плотность насыщенного водяного пара при той же температуре.

Сила поверхностного натяжения жидкости

$$F = \sigma l,$$

где σ – поверхностное натяжение; l – длина границы поверхностного слоя жидкости.

Высота поднятия (или *опускания*) *жидкости в капилляре*

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g R},$$

где θ – краевой угол; g – ускорение свободного падения; R – радиус капилляра. При полном смачивании $\theta = 0$, а при полном несмачивании $\theta = 180°$.

Примеры решения задач

384. Вычислить массу одной молекулы кислорода.

Р е ш е н и е. В одном моле любого вещества (твердого, жидкого или газообразного) содержится одно и то же число молекул или других структурных единиц (например, атомов, ионов), равное числовому значению постоянной Авогадро

$$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}.$$

Если M – молярная масса, то масса одной молекулы

$$m_0 = M/N_A. \qquad (1)$$

Для кислорода $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Следовательно, масса одной молекулы кислорода $m_0 = 5{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг.

По формуле (1) можно найти массу одной молекулы любого вещества, зная его молярную массу.

385. За время $t = 10$ сут из стакана полностью испарилось $m = 100$ г воды. Сколько в среднем молекул вылетало с поверхности воды за 1 с?

Р е ш е н и е. Пусть в стакане содержалось N молекул воды. Тогда за каждую секунду вылетало в среднем $n = N/t$ молекул. Очевидно, что $N = \nu N_A$, где ν – количество вещества воды в стакане. Поскольку масса воды m, то $\nu = m/M$, где $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воды. Следовательно,

$$n = \frac{mN_A}{Mt},\ n = 4 \cdot 10^{18}\ \text{с}^{-1}.$$

386. Резиновый шар содержит 2 л воздуха, находящегося при температуре 20 °С и атмосферном давлении $1 \cdot 10^5$ Па. Какой объем займет воздух, если шар будет опущен в воду на глубину 10 м? Температура воды 4 °С.

Высота поднятия (или *опускания*) *жидкости в капилляре*

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g R},$$

где θ – краевой угол; g – ускорение свободного падения; R – радиус капилляра. При полном смачивании $\theta = 0$, а при полном несмачивании $\theta = 180°$.

Примеры решения задач

384. Вычислить массу одной молекулы кислорода.

Р е ш е н и е. В одном моле любого вещества (твердого, жидкого или газообразного) содержится одно и то же число молекул или других структурных единиц (например, атомов, ионов), равное числовому значению постоянной Авогадро

$$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Если M – молярная масса, то масса одной молекулы

$$m_0 = M/N_A. \qquad (1)$$

Для кислорода $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Следовательно, масса одной молекулы кислорода $m_0 = 5{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг.

По формуле (1) можно найти массу одной молекулы любого вещества, зная его молярную массу.

385. За время $t = 10$ сут из стакана полностью испарилось $m = 100$ г воды. Сколько в среднем молекул вылетало с поверхности воды за 1 с?

Р е ш е н и е. Пусть в стакане содержалось N молекул воды. Тогда за каждую секунду вылетало в среднем $n = N/t$ молекул. Очевидно, что $N = \nu N_A$, где ν – количество вещества воды в стакане. Поскольку масса воды m, то $\nu = m/M$, где $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса воды. Следовательно,

$$n = \frac{mN_A}{Mt}, \; n = 4 \cdot 10^{18} \text{ с}^{-1}.$$

386. Резиновый шар содержит 2 л воздуха, находящегося при температуре 20 °С и атмосферном давлении $1 \cdot 10^5$ Па. Какой объем займет воздух, если шар будет опущен в воду на глубину 10 м? Температура воды 4 °С.

Давлением, обусловленным кривизной поверхности, пренебречь.

Р е ш е н и е. Пусть до погружения в воду воздух в шаре имел объем V_1, температуру T_1, давление p_1, а после погружения – соответственно V_2, T_2, p_2. Поскольку масса воздуха не изменяется, то выполняется объединенный газовый закон:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}. \qquad (1)$$

На глубине h полное давление

$$p_2 = \rho g h + p_{атм},$$

где $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3 – плотность воды. Под таким же давлением будет находиться и воздух в шаре, погруженном на эту глубину. До погружения давление воздуха $p_1 = p_{атм}$.

Подставив значения p_1 и p_2 в формулу (1), получим после очевидных преобразований и вычислений:

$$V_2 = \frac{p_{атм}V_1T_2}{T_1(\rho g h + p_{атм})}, \; V_2 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

387. В запаянной с одного конца длинной узкой стеклянной трубке, расположенной горизонтально, находится столбик воздуха длиной $l_1 = 307$ мм, запертый столбиком ртути длиной $l = 216$ мм. Какой будет длина воздушного столбика, если трубку поставить вертикально: отверстием вверх; отверстием вниз? Атмосферное давление $p_{атм} = 747$ мм рт. ст. Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Ртуть из трубки не выливается.

Р е ш е н и е. Если трубка расположена горизонтально (рис. 136, *а*), объем воздуха в закрытой части трубки и его давление выразятся так:

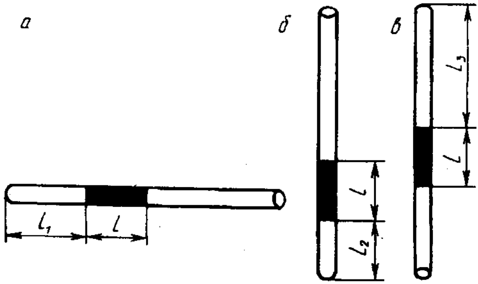
$$V_1 = l_1S, \; p_1 = p_{атм},$$

где S – площадь поперечного сечения трубки.

Если трубка расположена отверстием вверх (рис. 136, *б*), объем воздуха в закрытой части трубки и его давление равны соответственно:

$$V_2 = l_2S, \; p_2 = p_{атм} + \rho g l,$$

где ρ – плотность ртути.



Р и с. 136

Поскольку масса и температура воздуха не изменяются, то, согласно закону Бойля–Мариотта, $p_1V_1 = p_2V_2$, или

$$p_{атм}l_1S = (p_{атм} + \rho gl)l_2S.$$

Отсюда

$$l_2 = \frac{p_{атм}l_1}{p_{атм} + \rho gl}. \qquad (1)$$

Если трубка расположена отверстием вниз (рис. 136, *в*), объем воздуха в запертой части и его давление выразятся так:

$$V_3 = l_3S,\ p_3 = p_{атм} - \rho gl.$$

По закону Бойля–Мариотта $p_1V_1 = p_3V_3$, или

$$p_{атм}l_1S = (p_{атм} - \rho gl)l_3S.$$

Отсюда

$$l_3 = \frac{p_{атм}l_1}{p_{атм} - \rho gl}. \qquad (2)$$

Подставив числовые значения, получим: $l_2 = 238 \cdot 10^{-3}$ м, $l_3 = 432 \cdot 10^{-3}$ м.

З а м е ч а н и е. Расчетные формулы (1) и (2) можно упростить, выразив давление столба ртути высотой l и атмосферное давление в миллиметрах ртутного столба. Тогда:

$$l_2 = \frac{p_{атм}l_1}{p_{атм} + l} = 238\ мм,\ l_3 = \frac{p_{атм}l_1}{p_{атм} - l} = 432\ мм.$$

Однако, если бы в трубке была не ртуть, а какая-либо другая жидкость, такое упрощение невозможно. Таким образом, формулы (1) и (2) являются общим решением, пригодным для любой жидкости.

388. Сосуд, содержащий $m_1 = 2$ г гелия, разорвался при температуре $t_1 = 400$ °С. Найти максимальную массу азота, который может храниться в таком сосуде при температуре $t_2 = 30$ °С и пятикратном запасе прочности.

Р е ш е н и е. Для гелия в момент разрыва сосуда уравнение состояния будет иметь вид

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} R T_1, \qquad (1)$$

где V – объем гелия; $M_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – его молярная масса; $T_1 = 400 + 273 = 673$ К – термодинамическая температура в момент разрыва.

Для азота в условиях хранения уравнение состояния запишется так:

$$p_2 V = \frac{m_2}{M_2} R T_2, \qquad (2)$$

где $M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярная масса азота; $T_2 = 30 + 273 = 303$ К – температура азота.

Разделив почленно равенство (1) на (2), получим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1 T_1 M_2}{m_2 T_2 M_1}.$$

Отсюда

$$m_2 = \frac{m_1 T_1 M_2}{T_2 M_1 (p_1/p_2)}. \qquad (3)$$

Подставив в формулу (3) числовые значения и $p_1/p_2 = 5$, найдем $m_2 = 6 \cdot 10^{-3}$ кг.

389. Баллон содержит сжатый газ при температуре $t_1 = 27$ °С и давлении $p_1 = 2$ МПа. Каково будет давление, если из баллона выпустить $n = 0{,}3$ массы газа, а температуру понизить до $t_2 = 12$ °С?

Р е ш е н и е. Рассмотрим два состояния газа: до разрежения и после, когда осталось $1 - n$ массы. Параметры каждого из этих состояний связаны уравнением Менделеева–Клапейрона:

$$p_1 V = \frac{m}{M} R T_1, \quad p_2 V = \frac{(1-n)m}{M} R T_2,$$

где V – объем газа; m – масса; M – молярная масса; p_1, T_1, p_2, T_2 – соответственно давление и температура газа до и после выпуска.

Разделив почленно первое равенство на второе, получим

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{(1-n)T_2},$$

откуда

$$p_2 = \frac{(1-n)p_1T_2}{T_1}, \ p_2 = 1 \text{ МПа}.$$

390. Газ находится в цилиндре под невесомым поршнем, площадь которого $S = 100$ см^2. При температуре $T_1 = 280$ К на поршень положили гирю массой $m = 10$ кг. При этом поршень несколько опустился. На сколько нужно нагреть газ в цилиндре, чтобы поршень оказался на прежней высоте? Атмосферное давление $p_1 = 101$ кПа.

Р е ш е н и е. В первоначальном состоянии и после нагревания газ занимает один и тот же объем. Масса газа постоянна. Следовательно, на основании закона Шарля

$$p_1/T_1 = p_2/T_2, \tag{1}$$

где p_1, T_1, p_2, T_2 – соответственно давление и температура газа в начальном и конечном состояниях.

Гиря массой m, положенная на поршень, создает добавочное давление $p = mg/S$, поэтому $p_2 = p_1 + p = p_1 + mg/S$. Подставив это значение в формулу (1), получим

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{1}{T_2}\left(p_1 + \frac{mg}{S}\right),$$

откуда

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{mgT_1}{Sp_1}, \ \Delta T = 27 \text{ К}.$$

391. Начертить график изменения плотности газа в изобарном процессе и график зависимости плотности газа от давления в изотермическом процессе.

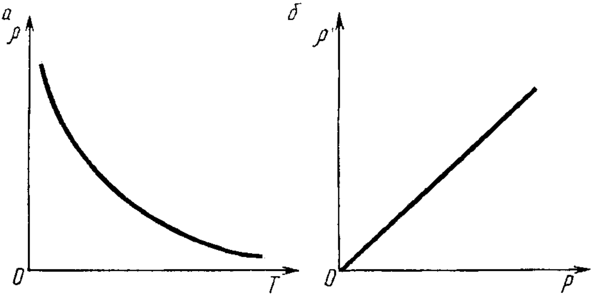
Р е ш е н и е. Из уравнения Менделеева–Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

учитывая, что $m/V = \rho$, получим выражение для плотности газа:

$$\rho = \frac{pM}{RT}, \tag{1}$$

отсюда $\rho T = pM/R$.



Р и с. 137

При изобарном процессе правая часть равенства (1) есть величина постоянная. Следовательно, $\rho T = \text{const}$. Поэтому график изменения плотности газа в изобарном процессе будет иметь вид, показанный на рис. 137, *а*.

Если процесс изотермический, то из формулы (1) получим

$$\frac{\rho}{p} = \frac{M}{RT}.$$

В этом выражении правая часть – величина постоянная при $T = \text{const}$. Поэтому $\rho / p = \text{const}$. Следовательно, график зависимости плотности ρ газа от давления p в изотермическом процессе представляет собой прямую (рис. 137, *б*).

392. При температуре $t = 36$ °C давление насыщенного водяного пара $p_0 = 5{,}945$ кПа. Влажный воздух при этой температуре, относительной влажности $\varphi = 80$ % и давлении $p = 101{,}3$ кПа занимает объем $V = 1$ м^3. Определить его массу.

Р е ш е н и е. Масса влажного воздуха равна сумме массы m_1 водяного пара и массы m_2 воздуха:

$$m = m_1 + m_2. \tag{1}$$

Пусть p_1 – давление, которое оказывал бы водяной пар, если бы воздух отсутствовал (парциальное давление пара), p_2 – давление, которое оказывал бы воздух, если бы пара не было (парциальное давление воздуха). Тогда по закону Дальтона давление влажного воздуха $p = p_1 + p_2$, откуда

$$p_2 = p - p_1. \tag{2}$$

Запишем уравнения состояния для пара и для воздуха:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT,\ p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT, \tag{3}$$

где M_1, M_2 – молярные массы соответственно водяного пара и воздуха; $T = (36 + 273)$ К $= 309$ К – термодинамическая температура. Из уравнений (3) находим:

$$m_1 = p_1 M_1 \frac{V}{RT},\ m_2 = p_2 M_2 \frac{V}{RT}. \tag{4}$$

Давление водяного пара $p_1 = \varphi p_0$, где $\varphi = 0{,}80$ – относительная влажность. Поэтому, согласно равенству (2), $p_2 = p - \varphi p_0$. Подставив значения давлений p_1 и p_2 в формулы (4), получим:

$$m_1 = \varphi p_0 M_1 \frac{V}{RT},\ \ m_2 = (p - \varphi p_0) M_2 \frac{V}{RT}. \tag{5}$$

На основании формул (1) и (5) найдем массу влажного воздуха:

$$m = \frac{V \varphi p_0}{RT}\left(M_1 + \left(\frac{p}{\varphi p_0} - 1\right) M_2\right).$$

Подставив в эту формулу числовые значения заданных величин и $M_1 = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $M_2 = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К), получим $m = 1$ кг.

393. В закрытом сосуде вместимостью $V = 2$ м^3 находится $m_1 = 0{,}9$ кг воды и $m_2 = 1{,}6$ кг кислорода. Найти давление в сосуде при температуре $t = 500$ °С, зная, что при этой температуре вся вода превращается в пар.

Р е ш е н и е. После испарения воды в сосуде находится смесь двух газов – водяного пара и кислорода. Давление смеси

$$p = p_1 + p_2, \tag{1}$$

где p_1 – давление водяного пара; p_2 – давление кислорода.

Из уравнения Менделеева–Клапейрона имеем:

$$p_1 = \frac{m_1}{M_1 V} RT,\ p_2 = \frac{m_2}{M_2 V} RT. \tag{2}$$

На основании формул (1) и (2) получаем

$$p = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{V}, \tag{3}$$

где $M_1 = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $M_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярные массы водяного пара и кислорода соответственно.

Подставив в выражение (3) числовые значения, получим $p = 3 \cdot 10^5$ Па.

На основании формулы (3) можно получить выражение для молярной массы газовой смеси. Перепишем формулу (3) в таком виде:

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT. \qquad (4)$$

Обозначим теперь через $M_{см}$ молярную массу смеси и запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси:

$$pV = \frac{m_1 + m_2}{M_{см}} RT. \qquad (5)$$

Сравнив выражения (4) и (5), найдем формулу для молярной массы смеси двух газов:

$$M_{см} = \frac{m_1 + m_2}{m_1/M_1 + m_2/M_2}.$$

Нетрудно показать, что в случае смеси n различных газов эта формула имеет вид

$$M_{см} = \frac{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}{m_1/M_1 + m_2/M_2 + \ldots + m_n/M_n},$$

где m_1, m_2, ..., m_n – массы отдельных газов, составляющих смесь; M_1, M_2, ..., M_n – молярные массы этих газов.

394. Вечером температура воздуха была $t_1 = 16$ °С, относительная влажность 65%. Ночью температура воздуха понизилась до $t_2 = 4$ °С. Была ли роса? При температуре 16 °С плотность насыщенного водяного пара $\rho_{01} = 13{,}6$ г/м^3, а при 4 °С – $\rho_{02} = 6{,}4$ г/м^3.

Решение. Насыщенный пар – это пар, имеющий максимальную плотность при данной температуре. Поэтому, чтобы узнать, была ли роса, нужно найти плотность ρ_1 водяного пара при температуре t_1 и сравнить ее с плотностью ρ_{02} насыщенного водяного пара при температуре t_2. Если $\rho_1 < \rho_{02}$, пар конденсироваться не будет (не будет росы). Если же $\rho_1 > \rho_{02}$, то роса будет, причем масса пара, сконденсировавшегося из объема V,

$$m = (\rho_1 - \rho_{02})V.$$

Так как относительная влажность $\varphi = \rho_1/\rho_{01}$, то $\rho_1 = \varphi\rho_{01} = 0{,}65 \cdot 13{,}6$ г/м^3 = 8,8 г/м^3. Сравнивая это значение с ρ_{02} = 6,4 г/м^3, делаем вывод: роса была, причем из V = 1 м^3 влажного воздуха сконденсировалось m = 2,4 г пара.

395. Найти абсолютную и относительную влажность воздуха в комнате при температуре t_1 = 20 °C, если точка росы t_2 = 9 °C. Как изменится относительная влажность при понижении температуры до t_3 = 16 °C, если абсолютная влажность останется прежней? Плотности насыщенного водяного пара при температурах t_1, t_2 и t_3 равны соответственно: $\rho_{01} = 17{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, $\rho_{02} = 8{,}8 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, $\rho_{03} = 13{,}6 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. При температуре t_2, которая является точкой росы, водяной пар в комнате становится насыщенным. Плотность ρ_{01} этого пара известна. Такую же плотность имеет этот пар при температуре t_1, т. е. при температуре t_1 абсолютная влажность воздуха $\rho_1 = \rho_{02} = 8{,}8 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3. Относительная влажность при этой температуре

$$\varphi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{01}} \cdot 100\%, \ \varphi_1 = 51\%.$$

При температуре t_3 относительная влажность

$$\varphi_3 = \frac{\rho_3}{\rho_{03}} \cdot 100\%.$$

Так как по условию абсолютная влажность осталась прежней, то $\rho_3 = \rho_1$. Следовательно, изменение относительной влажности

$$\Delta\varphi = \varphi_3 - \varphi_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{03}} \cdot 100\% - \varphi_1, \ \Delta\varphi = 14\%.$$

Таким образом, с понижением температуры относительная влажность воздуха возрастет ($\Delta\varphi > 0$) на 14% и станет равной 65%.

396. Баллон разделен перегородкой на две части. В первой части вместимостью V_1 находится идеальный газ под давлением p_1, имеющий температуру T_1. Во второй части вместимостью V_2 находится такой же газ под давлением p_2, имеющий температуру T_2. Какое давление установится в баллоне, если перегородку убрать, а температуру газа сделать равной T?

Р е ш е н и е. После того как уберут перегородку, газ займет объем, равный $V_1 + V_2$, а масса газа в баллоне будет равна $m_1 + m_2$. Уравнение состояния газа имеет вид

$$p(V_1 + V_2) = \frac{m_1 + m_2}{M} RT,$$

где M – молярная масса газа; R – универсальная газовая постоянная. Отсюда находим давление:

$$p = \frac{(m_1 + m_2)RT}{M(V_1 + V_2)}. \qquad (1)$$

Применив уравнение Менделеева–Клапейрона к газу, находящемуся в первой и второй частях сосуда с перегородкой, найдем:

$$\frac{m_1}{M} = \frac{p_1V_1}{RT_1}, \quad \frac{m_2}{M} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

Сложив эти уравнения, получим

$$m_1 + m_2 = \frac{M}{R}\left(\frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2}\right).$$

Подставив это значение в формулу (1), будем иметь

$$p = \left(\frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2}\right)\frac{T}{V_1 + V_2}.$$

397. При нормальных физических условиях ($p_0 = 101\,325$ Па, $T_0 = 273{,}15$ К) плотность воздуха $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3. На некоторой высоте давление воздуха $p = 1{,}1 \cdot 10^4$ Па, а температура $T = 220$ К. Определить плотность воздуха на этой высоте.

Р е ш е н и е. Считая воздух идеальным газом, из уравнения Менделеева–Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где M – молярная масса, найдем плотность воздуха при температуре T и давлении p:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \qquad (1)$$

При нормальных условиях плотность воздуха

$$\rho_0 = \frac{p_0 M}{RT_0}. \qquad (2)$$

Разделив левые и правые части уравнений (1) и (2), получим

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{pT_0}{p_0 T}.$$

Отсюда искомая плотность воздуха

$$\rho = \rho_0 \frac{pT_0}{p_0 T}, \ \rho = 1{,}8 \cdot 10^{-1} \text{ кг/м}^3.$$

398. В баллоне вместимостью $V = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$ м^3 находится газ под давлением $p = 5{,}0 \cdot 10^4$ Па. Сколькими ходами поршневого насоса, вместимость камеры которого $V_0 = 200$ см^3, можно откачать воздух из баллона до давления $p_n = 6{,}65$ Па? Процесс откачки происходит при постоянной температуре.

Решение. Перед первым ходом поршня насоса газ занимает объем V при давлении p. При первом ходе поршня газ заполнит объем, равный сумме вместимостей баллона и камеры насоса, т. е. $V + V_0$, а давление станет равным p_1. Поскольку температура газа и его масса при этом неизменны, то, согласно закону Бойля–Мариотта, $pV = p_1(V + V_0)$. Отсюда

$$p_1 = p\frac{V}{V + V_0}$$

Затем газ из камеры насоса удаляется в атмосферу, и начинается второй ход поршня; при этом начальное давление будет равно p_1, а в конце процесса засасывания – p_2. Снова применив закон Бойля–Мариотта, получим:

$$p_1 V = p_2(V + V_0), \ p_2 = p_1 \frac{V}{V + V_0} = p\frac{V^2}{(V + V_0)^2}.$$

Рассуждая аналогично, найдем, что после третьего хода давление

$$p_3 = p_2 \frac{V}{V + V_0} = p\frac{V^3}{(V + V_0)^3}.$$

После n-го хода поршня давление в сосуде

$$p_n = p\frac{V^n}{(V+V_0)^n}.$$

Прологарифмировав это уравнение и решив его затем относительно n, получим

$$n = \frac{\lg(p_n/p)}{\lg\frac{V}{V+V_0}},\ n = 49.$$

399. Металлическое кольцо, внешний диаметр которого $d_1 = 54$ мм, а внутренний $d_1 = 50$ мм, подвесили горизонтально на пружине жесткостью $k = 1{,}1$ Н/м. При этом пружина удлинилась на $\Delta l_1 = 15$ мм. Затем кольцо привели в соприкосновение с поверхностью жидкости и стали медленно опускать сосуд с жидкостью. В момент отрыва он нее кольца удлинение пружины $\Delta l_2 = 40$ мм. Определить поверхностное натяжение σ жидкости.

Решение. До соприкосновения с жидкостью сила тяжести $m\vec{g}$ кольца уравновешивалась силой упругости $\vec{F}$ пружины, и поэтому

$$F_1 = mg. \tag{1}$$

При отрыве кольца от поверхности жидкости на него действуют направленная вертикально вверх сила упругости $\vec{F}_2$, а также сила тяжести $m\vec{g}$ и сила поверхностного натяжения $\vec{F}_3$, которые направлены вертикально вниз, поэтому

$$F_2 = mg + F_3. \tag{2}$$

Длина линии, ограничивающей поверхность жидкости, равна сумме длин наружной и внутренней окружностей кольца, т. е. $\pi d_1 + \pi d_2$. Следовательно,

$$F_3 = \sigma\pi(d_1 + d_2). \tag{3}$$

Подставив в уравнение (2) значения (1), (3), $F_1 = k\Delta l_1$ и $F_2 = k\Delta l_2$, получим $k\Delta l_2 = k\Delta l_1 + \sigma\pi(d_1 + d_2)$. Отсюда

$$\sigma = \frac{k(\Delta l_2 - \Delta l_1)}{\pi(d_1 + d_2)},\ \sigma = 8{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{Н/м}.$$

400. Каким должен быть диаметр трубки ртутного барометра, чтобы поправка Δh, вносимая в его показания с учетом капиллярного опускания ртути, была равна 3,0 мм? Поверхностное натяжение ртути $\sigma = 472$ мН/м, ее плотность $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Под действием сил поверхностного натяжения ртуть в трубке, диаметр которой d, опустится на

$$\Delta h = \frac{2\sigma}{\rho g R} = \frac{4\sigma}{\rho g d}.$$

Отсюда находим $d = \dfrac{4\sigma}{\rho g \Delta h}$, $d = 4{,}7 \cdot 10^{-3}$ м.

Задачи для самостоятельного решения

401. Сколько молекул содержится в насыщенном водяном паре массой $m = 1$ кг и сколько в ненасыщенном водяном паре, имеющем такую же массу? Молярная масса воды $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \times$ $\times 10^{23}$ моль$^{-1}$.

402. Водород массой $m = 0{,}3$ г находится в сосуде вместимостью $V = 2$ л под давлением $p = 200$ кПа. Определить среднюю квадратичную скорость и среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул водорода. Молярная масса водорода $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

403. Найти концентрацию газа при нормальных условиях. Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

404. Под каким давлением находится в баллоне кислород, если вместимость баллона $V = 5$ л, а средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул кислорода $E = 6$ кДж?

405. Определить массу водорода и число молекул, содержащихся в сосуде вместимостью $V = 20$ л при давлении $p = 2{,}5 \cdot 10^5$ Па и температуре $t = 27$ °С. Молярная масса водорода $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К). Постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

406. Газ массой $m = 2{,}0$ кг занимает объем $V = 9{,}03$ м^3 при давлении $p = 100$ кПа. Вычислить среднюю квадратичную скорость молекул этого газа.

407. Баллон вместимостью $V = 50$ л содержит $m = 2{,}2$ кг углекислого газа. Баллон выдерживает давление не выше

$p = 4{,}0$ МПа. При какой температуре баллон может разорваться? Молярная масса углекислого газа $M = 44 \times \times 10^{-3}$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

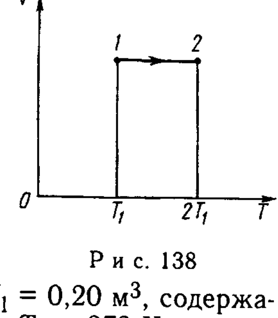
408. Цилиндрический сосуд высотой $l = 40$ см разделен на две части невесомым тонким поршнем, скользящим без трения. Поршень находится на высоте $h = 26{,}7$ см над дном цилиндра. Под поршнем находится водород, а над поршнем — газ с неизвестной молярной массой. Масса этого газа равна массе водорода. Найти молярную массу газа. Молярная масса водорода $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Температура газов одинаковая.

409. В воде на глубине $h_1 = 1$ м находится шарообразный пузырек воздуха. На какой глубине этот пузырек имеет вдвое меньший радиус? Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3. Атмосферное давление $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па. Температура воды постоянна и не зависит от глубины. Давлением, обусловленным кривизной поверхности, пренебречь.

410. Тонкостенный резиновый шар массой $m_0 = 50$ г наполнен азотом и погружен в озеро на глубину $h = 100$ м, где температура воды $t = 4$ °C, и находится в равновесии. Найти массу азота. Атмосферное давление $p_0 = 760$ мм рт. ст., молярная масса азота $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

411. В кабине космического корабля «Восток-2» температура во время полета колебалась от $t_1 = 10$ °C до $t_2 = 22$ °C. На сколько процентов изменялось при этом давление?

412. На $V{-}T$-диаграмме изображен процесс, который произошел с газом при постоянном давлении и постоянном объеме (рис. 138). Как при этом изменилась масса газа?



Р и с. 138

413. В баллоне был некоторый газ. После того как из баллона выпустили часть газа, температура газа уменьшилась в n раз, а давление — в k раз. Какая часть газа выпущена?

414. Из баллона вместимостью $V_1 = 0{,}20$ м^3, содержащего идеальный газ при температуре $T_1 = 273$ К под давлением $p_1 = 2{,}0 \cdot 10^6$ Па, выпустили часть газа, которая заняла при нормальных условиях объем $V_2 = 1{,}0$ м^3. После этого давление p_2 в баллоне стало равным $1{,}4 \cdot 10^6$ Па. Определить температуру газа, оставшегося в баллоне.

415. Определить плотность идеального газа при температуре $t = 100$ °С и давлении $p = 1 \cdot 10^5$ Па, а также массу одной молекулы этого газа, если его молярная масса $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

416. Определить плотность смеси, содержащей $m_1 = 4$ г водорода и $m_2 = 32$ г кислорода при температуре $t = 7$ °С и общем давлении $p = 1 \cdot 10^5$ Па. Молярная масса водорода $M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, кислорода $M_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

417. До какого давления накачали футбольный мяч вместимостью $V = 3$ л, если при этом было сделано $N = 40$ качаний поршневого насоса? За каждое качание мяч захватывает из атмосферы $V_0 = 150$ см^3 воздуха. Вначале мяч был пустой. Атмосферное давление $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па.

418. Давление p_0 воздуха в сосуде было равно $1{,}01 \cdot 10^5$ Па. После трех ходов откачивающего поршневого насоса давление воздуха упало до значения $p = 2$ кПа. Определить отношение вместимости сосуда к вместимости цилиндра поршневого насоса. Температуру воздуха в процессе откачки считать постоянной.

419. Сосуд вместимостью $V = 10$ л наполнили газом при давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Па. Найти массу воды, которая войдет в сосуд, если под водой на глубине $h = 40$ м в самой нижней части его будет сделано отверстие. Атмосферное давление $p_{атм} = 1 \cdot 10^5$ Па. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3. Изменением температуры воды с глубиной пренебречь.

420. С какой максимальной силой прижимается к телу человека банка, применяемая в медицинской практике для лечения, если диаметр ее отверстия $d = 4{,}0$ см? В момент прикладывания банки к телу воздух в ней прогрет до температуры $t_1 = 80$ °С, а температура окружающего воздуха $t_2 = 20$ °С. Атмосферное давление $p_{атм} = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па. Изменением объема воздуха в банке (из-за втягивания кожи) пренебречь.

421. В блюдце налита вода, а сверху ставится перевернутый вверх дном нагретый стакан с тонкими стенками. До какой наименьшей температуры T_1 должен быть нагрет стакан вместе с находящимся в нем воздухом, чтобы после остывания до температуры T_2 окружающего воздуха вся вода оказалась бы втянутой в стакан? Масса воды m, плотность воды ρ, атмосферное давление $p_{атм}$, площадь поперечного сечения стакана S, высота h. Объем налитой воды меньше вместимости стакана. Явлениями испарения, поверхностного натяжения и расширения стакана пренебречь. Блюдце считать широким, так что высота налитой в него воды мала.

422. Два сосуда, содержащих один и тот же газ при одинаковой температуре, соединены трубкой с краном. Вместимости сосудов V_1 и V_2, а давления в них p_1 и p_2. Каким будет давление газа после того, как откроют кран соединительной трубки? Температуру газа считать постоянной.

423. В расположенные вертикально сообщающиеся цилиндрические сосуды, первый из которых имеет площадь поперечного сечения S_1, а второй S_2, налили жидкость. Затем первый сосуд закрыли и находящийся в нем воздух нагрели от температуры T_1 до температуры T_2, в результате чего уровень жидкости во втором сосуде поднялся на величину h. Определить температуру T_2, если известно, что начальный объем воздуха в закрытом сосуде V_1, атмосферное давление $p_{атм}$, плотность жидкости ρ. Тепловым расширением сосуда и жидкости пренебречь.

424. Воздух находится в открытом сверху вертикальном цилиндрическом сосуде под поршнем массой $m = 20$ кг с площадью поперечного сечения $S = 20$ см^2. После того как сосуд стали двигать вертикально вверх с ускорением $a = 5{,}0$ м/с^2, высота столба воздуха между поршнем и дном сосуда уменьшилась и стала составлять $\alpha = 0{,}80$ начальной высоты. Считая температуру постоянной, найти по этим данным атмосферное давление. Трением между поршнем и стенками сосуда пренебречь.

425. По газопроводу течет газ при давлении $p = 0{,}83$ МПа и температуре $T = 300$ К. Какова скорость газа в трубе, если за время $\tau = 2{,}5$ мин через поперечное сечение трубы площадью $S = 5{,}0$ см^2 протекает $m = 20$ кг газа? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К), молярная масса газа $M = 40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

426. Относительная влажность воздуха в помещении $\varphi = 63\%$, температура $t_1 = 18$ °С. До какой температуры надо охладить блестящий предмет, чтобы на его поверхности можно было наблюдать осаждение водяных паров?

Давление насыщенного водяного пара при 18 °C равно $20{,}7 \cdot 10^2$ Па, при 10 °C – $12{,}3 \cdot 10^2$ Па, при 11 °C – $13{,}1 \cdot 10^2$ Па.

427. Воздух в помещении имеет температуру $t_1 = 24$ °C и относительную влажность $\varphi_1 = 50$ %. Определить влажность воздуха после его охлаждения до $t_2 = 20$ °C. Процесс охлаждения считать изохорным. Давление насыщенного водяного пара при 24 и 20 °C – соответственно $p_{01} = 2943$ Па и $p_{02} = 2330$ Па.

428. Над поверхностью площадью $S = 5{,}0$ км^2 слой воздуха толщиной $h = 1000$ м имеет температуру $t_1 = 20$ °C при относительной влажности $\varphi = 73\%$. Воздух охладился до температуры $t_2 = 10$ °C. Найти массу выпавшего дождя. Плотность насыщенного водяного пара при температурах t_1 и t_2 – соответственно $\rho_{01} = 17{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3 и $\rho_{02} = 9{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3.

429. Калорифер подает в помещение $V = 5{,}0 \cdot 10^4$ м^3 воздуха при температуре t_1 и относительной влажности $\varphi_1 = 60\%$, забирая его с улицы при температуре t_2 и относительной влажности $\varphi_2 = 80\%$. Сколько воды дополнительно испаряет калорифер в подаваемый воздух? При температуре t_1 плотность насыщенного водяного пара $\rho_{01} = 15{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3, а при температуре t_2 – $\rho_{02} = 9{,}4 \times$ $\times 10^{-3}$ кг/м^3.

430. Определить давление насыщенного водяного пара при температуре $t = 17$ °C, если в комнате вместимостью $V = 50$ м^3 при относительной влажности $\varphi = 65\%$ и указанной температуре находится $m = 0{,}476$ кг паров воды. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), молярная масса воды $M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

431. Смешали $V_1 = 1{,}0$ м^3 воздуха с относительной влажностью $\varphi_1 = 20\%$ и $V_2 = 2{,}0$ м^3 воздуха с влажностью $\varphi_2 = 30\%$. Обе порции были взяты при одинаковых температурах. Определить относительную влажность получившейся смеси.

432. Проволочная рамка с подвижной перекладиной длиной $l_1 = 8{,}0$ см затянута мыльной пленкой. Какую работу против сил поверхностного натяжения надо совершить, чтобы растянуть пленку на $l_2 = 2{,}0$ см? Поверхностное натяжение пленки $\sigma = 4{,}0 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

433. Из сосуда через вертикальную трубку, внутренний диаметр которой $d = 3{,}0$ мм, за некоторое время вытекло по каплям молоко массой $m = 50$ г. Определить количество упавших капель. Поверхностное натяжение молока $\sigma = 47$ мН/м. Считать диаметр шейки капли в момент отрыва равным внутреннему диаметру трубки.

434. Из плохо закрытого крана капает вода. Определить массу вытекшей за $t = 24$ ч воды, если время между отрывами ближайших капель $\tau = 1{,}0$ с. Диаметр шейки капли в момент ее отрыва считать равным диаметру трубы крана $d = 10$ мм. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 72{,}7$ мН/м.

435. Разность Δh уровней ртути в двух сообщающихся вертикальных капиллярах, диаметры которых $d_1 = 0{,}5$ мм и $d_2 = 1$ мм, равна 1,5 см. Определить поверхностное натяжение ртути. Плотность ртути $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3.

436. В воду на ничтожно малую глубину опущена вертикально капиллярная трубка, внутренний диаметр которой $d = 1{,}0$ мм. Определить массу вошедшей в трубку воды. Смачивание считать полным. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 72{,}7$ мН/м.

7. ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

Методические указания к решению задач

Если в задаче рассматривается процесс передачи энергии от одних тел к другим без совершения работы (теплообмен), нужно на основании закона сохранения и превращения энергии составить уравнение теплового баланса:

$$Q_{\text{от}} = Q_{\text{получ}},$$

где $Q_{\text{от}}$ – количество теплоты, отданное одними телами; $Q_{\text{получ}}$ – количество теплоты, полученное другими телами. Если задан КПД теплообмена, то $\eta Q_{\text{от}} = Q_{\text{получ}}$.

Если внутренняя энергия U системы изменяется вследствие совершения системой механической работы A_1 над внешними телами, то составляется уравнение

$$-\eta \Delta U = A_1,$$

где η – КПД процесса. (В таких задачах теплообмен между телами обычно не учитывается.)

Если внутренняя энергия системы увеличивается в результате того, что внешние тела совершают над ней механическую работу A_2, то $\Delta U = \eta A_2$.

Записав затем выражения для $Q_{от}$, $Q_{получ}$, ΔU, A_1 и A_2, подставляют их в приведенные выше уравнения и решают относительно искомой величины.

Применяя первый закон термодинамики, надо учитывать, что в его уравнении $Q = \Delta U + A$ каждая из величин может быть либо положительной, либо отрицательной, либо равной нулю в зависимости от характера процесса. Если система получает количество теплоты Q, то $Q > 0$, если отдает, то $Q < 0$, если теплообмена нет, $Q = 0$; $\Delta U > 0$, если внутренняя энергия системы увеличивается, $\Delta U < 0$ – если уменьшается, $\Delta U = 0$ при неизменной внутренней энергии; $A > 0$, если система совершает работу над внешними телами, $A < 0$, если внешние тела совершают работу над системой, $A = 0$, если работа не совершается.

При изобарном процессе $Q \neq 0$, $\Delta U \neq 0$, $A \neq 0$.

При изотермическом процессе $T = \text{const}$, внутренняя энергия газа не изменяется ($\Delta U = 0$), поэтому $Q = A$, т. е. все переданное системе количество теплоты идет на совершение работы над внешними телами.

При изохорном процессе объем газа $V = \text{const}$, поэтому $A = 0$ и $Q = \Delta U$, т. е. все сообщенное газу количество теплоты идет на увеличение его внутренней энергии.

При адиабатном процессе теплообмена нет, $Q = 0$ и поэтому $A = -\Delta U$, т. е. работа, совершаемая газом, равна убыли его внутренней энергии.

Основные законы и формулы

Внутренняя энергия одноатомного идеального газа, молярная масса которого равна M, а масса m, находится по формуле

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT,$$

где R – универсальная газовая постоянная; T – термодинамическая температура газа.

Работа, совершаемая газом при его расширении от объема V_1 до объема V_2 в любом процессе, вычисляется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV,$$

где p — давление газа.

Работа, совершаемая газом при изобарном расширении,

$$A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V.$$

Количество теплоты, необходимое для нагревания тела массой m от температуры T_1 до температуры T_2, подсчитывается по формуле

$$Q = cm(T_2 - T_1),$$

где c — удельная теплоемкость вещества.

Теплоемкость тела массой m

$$C = mc,$$

где c — удельная теплоемкость вещества.

Количество теплоты, необходимое для того, чтобы расплавить кристаллическое тело массой m,

$$Q_{\text{пл}} = \lambda m,$$

где λ — удельная теплота плавления. При кристаллизации выделяется такое же количество теплоты.

Количество теплоты, необходимое для превращения в пар жидкости массой m,

$$Q_{\text{пар}} = rm,$$

где r — удельная теплота парообразования жидкости. При конденсации выделяется такое же количество теплоты.

Количество теплоты, выделяемое при полном сгорании вещества массой m,

$$Q_{\text{сг}} = qm,$$

где q — удельная теплота сгорания вещества.

Закон сохранения и превращения энергии: во всех процессах, происходящих в природе, энергия не возникает из ничего и не исчезает, а лишь передается от одних тел к другим или превращается из одного вида в другой.

Первый закон термодинамики: количество теплоты, переданное системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы над внешними телами:

$$Q = \Delta U + A.$$

Коэффициент полезного действия теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где A – работа, совершаемая двигателем; Q_1, Q_2 – количество теплоты, соответственно полученное двигателем от нагревателя и отданное холодильнику.

Максимальное значение КПД теплового двигателя равно КПД идеальной тепловой машины:

$$\eta_{max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура холодильника.

Второй закон термодинамики: невозможно перевести теплоту от более холодной системы к более нагретой при отсутствии других одновременных изменений в обеих системах или в окружающих телах.

Примеры решения задач

437. В латунный калориметр массой $m_1 = 100$ г, содержащий $m_2 = 250$ г воды при температуре $T_1 = 280$ К, опустили тело массой $m = 200$ г, нагретое до температуры $T_2 = 373$ К. В результате теплообмена установилась окончательная температура $T = 293$ К. Определить удельную теплоемкость вещества, из которого изготовлено тело. Удельная теплоемкость латуни $c_1 = 380$ Дж/(кг · К), воды $c_2 = 4190$ Дж/(кг · К).

Решение. При охлаждении тело отдает количество теплоты

$$Q = cm(T_2 - T),$$

а калориметр и вода получают количество теплоты соответственно

$$Q_1 = c_1 m_1 (T - T_1), \; Q_2 = c_2 m_2 (T - T_1).$$

На основе закона сохранения энергии составляем уравнение теплового баланса: $Q = Q_1 + Q_2$, или

$$cm(T_2 - T) = c_1 m_1 (T - T_1) + c_2 m_2 (T - T_2).$$

Отсюда находим удельную теплоемкость вещества, из которого изготовлено тело:

$$c = \frac{(c_1 m_1 + c_2 m_2)(T - T_1)}{m(T_2 - T)}, \; c = 882 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

438. Смешивают $m_1 = 300$ г воды при температуре $t_1 = 10$ °С и $m_2 = 400$ г льда при температуре $t_2 = -20$ °С. Определить установившуюся температуру смеси. Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), льда $c_2 = 2{,}12 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330 \cdot 10^3$ Дж/кг.

Решение. Так как конечное состояние не очевидно, будем решать задачу поэтапно. Подсчитаем сначала количество теплоты, необходимое для нагревания льда до температуры плавления $t_{пл} = 0$ °С:

$$Q_2 = c_2 m_2 (t_{пл} - t_2), \; Q_2 = 16\,960 \text{ Дж}.$$

Теперь найдем количество теплоты, которое отдает вода, охлаждаясь до 0 °С:

$$Q_1 = c_1 m_1 (t_1 - t_{пл}), \; Q_1 = 12\,570 \text{ Дж}.$$

При вычислении учтено, что $\Delta t = \Delta T$.

Мы видим, что для того, чтобы нагреть весь лед до 0°С, недостает $Q_2 - Q_1 = 4390$ Дж. Такое количество теплоты выделится при превращении в лед некоторой части воды массой m_3:

$$Q_2 - Q_1 = \lambda m_3,$$

откуда

$$m_3 = (Q_2 - Q_1)/\lambda, \; m_3 = 13 \text{ г}.$$

Таким образом, в конечном состоянии в сосуде будет $m_2 + m_3 = 413$ г льда и $m_1 - m_3 = 287$ г воды при температуре $t = 0$ °С.

439. В сосуд, содержащий $m_1 = 10$ кг воды при температуре $T_1 = 293$ К, влили $m_2 = 7$ кг расплавленного свинца, взятого при температуре плавления $T_{пл} = 600$ К. При этом образовалось $\Delta m_1 = 0{,}05$ кг пара. Какая температура установится в сосуде после того, как свинец отвердеет? Удельные теплоемкости воды и свинца — соответственно $c_1 = 4190$ Дж/(кг · К) и $c_2 = 130$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления свинца $\lambda = 30 \cdot 10^3$ Дж/кг. Теплоемкостью сосуда пренебречь.

Решение. Количество теплоты, отданное свинцом при его отвердевании и охлаждении от температуры отвердевания $T_{пл}$ до установившейся температуры T,

$$Q_1 = \lambda m_2 + c_2 m_2 (T_{пл} - T).$$

Количество теплоты, полученное испарившейся водой,

$$Q_2 = c_1 (T_к - T_1)\Delta m_1 + r\Delta m_1,$$

где $T_к = 373$ К — температура кипения воды.

Количество теплоты, полученное неиспарившейся водой,

$$Q_3 = c_1(m_1 - \Delta m_1)(T - T_1).$$

Составим уравнение теплового баланса: $Q_1 = Q_2 + Q_3$, или

$$\lambda m_2 + c_2 m_2 (T_{пл} - T) =$$
$$= c_1 (T_к - T_1)\Delta m_1 + r\Delta m_1 + c_1(m_1 - \Delta m_1)(T - T_1).$$

Решив это уравнение относительно T, получим:

$$T = \frac{m_2(\lambda + c_2 T_{пл}) + c_1 m_1 T_1 - (c_1 T_к + r)\Delta m_1}{c_1(m_1 - \Delta m_1) + c_2 m_2}, \quad T = 3 \cdot 10^2 \text{ К}.$$

440. В калориметре при температуре $t_1 = 0$ °С находилось $m_в = 500$ г воды и $m_л = 100$ г льда. Сколько водяного пара при температуре $t_2 = 100$ °С было впущено в воду, если в результате весь лед растаял и в калориметре установилась температура $t = 90$ °С? Теплоемкость калориметра $C_к = 1600$ Дж/К, удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К). Потерями энергии в окружающую среду пренебречь.

Решение. Количество теплоты, отданное водяным паром массой $m_п$ при его конденсации и охлаждении образовавшейся воды от температуры конденсации до установившейся температуры T,

$$Q_1 = rm_п + cm_п(T_2 - T).$$

Количество теплоты, полученное льдом, водой, образовавшейся из льда, водой, находившейся в калориметре, и калориметром,

$$Q_2 = \lambda m_л + cm_л(T - T_1) + cm_в(T - T_1) + C_к(T - T_1).$$

На основании закона сохранения и превращения энергии составляем уравнение теплового баланса: $Q_1 = Q_2$, или

$$rm_п + cm_п(T_2 - T) = \lambda m_л + (cm_л + cm_в + C_к)(T - T_1).$$

Отсюда находим массу пара:

$$m_п = \frac{\lambda m_л + (c(m_в + m_л) + C_к)(T - T_1)}{r + c(T_2 - T)}, \ m_п = 0{,}2 \text{ кг}.$$

441. Автомобиль расходует $m = 5{,}67$ кг бензина на $s = 50$ км пути. Определить среднюю мощность, развиваемую при этом двигателем автомобиля, если средняя скорость движения $v_{ср} = 80$ км/ч и КПД двигателя $\eta = 22\%$. Удельная теплота сгорания бензина $q = 46 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Р е ш е н и е. Развиваемая двигателем средняя мощность $N = A/t$, где A – полезная работа, совершенная за счет теплоты, выделившейся при сгорании бензина; t – время, за которое расходуется бензин. При сгорании бензина выделяется количество теплоты $Q = qm$. Учитывая КПД, получаем $A = \eta qm$.

Путь s автомобиль проходит за время $t = s/v_{ср}$. Следовательно,

$$N = \eta qmv_{ср}/s, \ N = 2{,}6 \cdot 10^4 \text{ Вт}.$$

442. В тающую льдину попадает пуля, летящая со скоростью $v = 1000$ м/с. Масса пули $m = 10$ г. Считая, что половина энергии пули пошла на раздробление льда, а другая половина – на его плавление, найти массу растаявшего льда. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Р е ш е н и е. Количество теплоты, затраченное на плавление льда, $Q = \lambda m_1$, где m_1 – масса растаявшего льда. С другой стороны, эта теплота получается за счет половины кинетической энергии пули:

$$Q = \frac{1}{2}E_k = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{4}.$$

Следовательно, $mv^2/4 = \lambda m_1$, откуда масса растаявшего льда

$$m_1 = \frac{mv^2}{4\lambda}, \ m_1 = 7{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

443. С какой высоты упал без начальной скорости свинцовый шар, если при падении температура его повысилась на $\Delta T = 10$ К? Считать, что 80% энергии шара пошло на его нагревание. Сопротивлением воздуха пренебречь. Удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж/(кг · К).

Р е ш е н и е. Потенциальная энергия шара массой m на высоте h $E_p = mgh$. Эта энергия частично затрачена на увеличение внутренней энергии шара при ударе о землю. На основании закона сохранения и превращения энергии составим равенство:

$$\eta mgh = cm\Delta T,$$

где $\eta = 0{,}8$; c – удельная теплоемкость свинца. Отсюда находим высоту:

$$h = \frac{c\Delta T}{\eta g},\ h = 1{,}7 \cdot 10^2 \text{ м}.$$

444. В цилиндре при температуре $t_1 = 20$ °С находится $m = 2$ кг воздуха. Какая работа будет совершена при изобарном нагревании воздуха до температуры $t_2 = 120$ °С? Молярная масса воздуха $M = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Р е ш е н и е. При изобарном расширении работа газа

$$A = p\Delta V, \tag{1}$$

где p – давление; ΔV – изменение объема.

Запишем уравнение Менделеева – Клапейрона для двух состояний воздуха:

$$pV_1 = \frac{m}{M}RT_1,\ pV_2 = \frac{m}{M}RT_2.$$

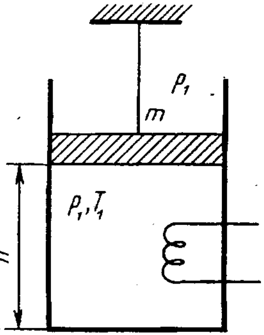
Вычитая почленно из второго уравнения первое, получаем

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1). \tag{2}$$

Но $V_2 - V_1 = \Delta V$, поэтому на основании равенств (1) и (2) находим:

$$A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1),\ A = 5{,}7 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

445. В теплоизолированном высоком цилиндрическом сосуде на расстоянии h от дна висит на нити поршень массой m (рис. 139). Под поршнем находится ν моль идеального газа. Давление под поршнем в начальный момент равно внешнему давлению, температура газа T_1. Газ нагревается спиралью. Какое количество теплоты нужно подвести к газу, чтобы поршень поднялся до высоты $2h$ от дна? Трение отсутствует. Внутренняя энергия моля газа $U = CT$, универсальная газовая постоянная R, ускорение свободного падения g.



Р и с. 139

Р е ш е н и е. По первому закону термодинамики сообщенное газу количество теплоты

$$Q = \Delta U + A, \qquad (1)$$

где ΔU – изменение внутренней энергии газа; A – работа, совершенная газом против внешних сил.

На поршень при расширении газа действуют две внешние силы: сила тяжести $m\bar{g}$ и сила, обусловленная внешним давлением p_1 и равная p_1S, где S – площадь поршня. Поднимая поршень от высоты h до $2h$, газ совершает работу

$$A = (mg + p_1S)h. \qquad (2)$$

Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = C(T_2 - T_1),$$

где T_2 – конечная температура газа; T_1 – начальная температура.

До нагревания газа уравнение его состояния имеет вид

$$p_1Sh = \nu RT_1. \qquad (3)$$

После подвода теплоты поршень поднялся, нить не натянута и газ находится под давлением, равным сумме внешнего давления и давления, обусловленного силой тяжести поршня:

$$p_2 = p_1 + mg/S.$$

Уравнение состояния газа теперь запишется так:

$$(p_1 + mg/S)2hS = \nu RT_2. \qquad (4)$$

Решая совместно уравнения (3) и (4), находим

$$T_2 = 2T_1 + 2mgh/\nu R.$$

Тогда

$$\Delta U = C(T_1 + 2mgh/\nu R). \tag{5}$$

Кроме того, из формул (2) и (3) найдем

$$A = mgh + \nu RT_1. \tag{6}$$

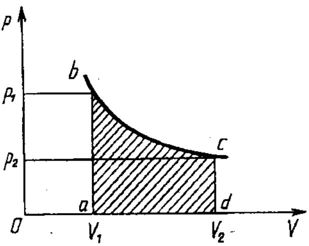
Подставив значения (5) и (6) в выражение (1), получим

$$Q = (C + \nu R)T_1 + mgh(1 + 2C/(\nu R)).$$

446. При изотермическом расширении азота массой $m = 100$ г, имевшего температуру $T = 280$ К, его объем увеличился в 3 раза. Найти: работу, совершенную газом при расширении; изменение внутренней энергии газа; количество теплоты, сообщенное газу.

Р е ш е н и е. Из уравнения Менделеева–Клапейрона находим

$$p = \frac{mRT}{MV},$$



Р и с. 140

откуда видно, что при $T = \text{const}$ (изотермический процесс) давление газа убывает обратно пропорционально объему (рис. 140). Работа газа численно равна площади фигуры, ограниченной графиком зависимости $p = f(V)$, осью V и отрезками ab и cd, численно равными давлениям p_1 и p_2 в начальном и конечном состояниях. Следовательно,

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{mRT}{MV}\,dV = \frac{m}{M}RT\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{m}{M}RT\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Молярная масса азота $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $V_2/V_1 = 3$, $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К). Подставив в последнюю формулу числовые значения, получим $A = 9 \cdot 10^3$ Дж.

Изменение внутренней энергии $\Delta U = 0$, так как $T = \text{const}$. Следовательно, согласно первому закону термодинамики, сообщенное газу количество теплоты $Q = A = 9 \cdot 10^3$ Дж.

447. Тепловой процесс, график которого изображен на рис. 141, совершают над идеальным газом, масса которого остается постоянной. Определить, как изменялась температура газа на участках 1–2, 2–3, 3–1. Выяснить, на каких участках газ получал некоторое количество теплоты и на каких отдавал.

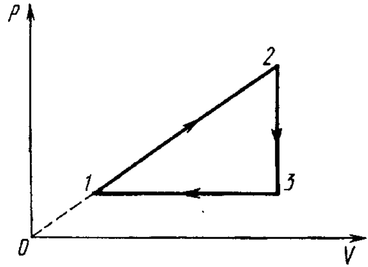


Рис. 141

Решение. Из графика видно, что на участке 1–2 давление газа прямо пропорционально объему: $p = aV$, где $a = \text{const}$ – коэффициент пропорциональности.

На основании уравнения Менделеева–Клапейрона получим

$$aV^2 = \frac{m}{M}RT,$$

откуда

$$T = \frac{aM}{mR}V^2.$$

Таким образом, с увеличением объема V газа его температура возрастала, внутренняя энергия увеличивалась, т. е. $\Delta U > 0$. При этом газ, расширяясь, совершал положительную работу: $A > 0$. Согласно первому закону термодинамики, $Q_{1-2} = \Delta U + A$. Следовательно, $Q_{1-2} > 0$, т. е. на участке 1–2 газу сообщалось некоторое количество теплоты.

На участке 2–3 совершался изохорный процесс, поэтому, согласно закону Шарля,

$$p_2/T_2 = p_3/T_3,$$

откуда

$$T_3 = T_2\frac{p_3}{p_2}.$$

Поскольку $p_3 < p_2$, то $T_3 < T_2$, и внутренняя энергия газа на этом участке уменьшилась ($\Delta U < 0$). В изохорном процессе работа газа $A = 0$. Следовательно, $Q_{2-3} < 0$, т. е. газ отдавал некоторое количество теплоты.

Переход из состояния 3 в состояние 1 происходил при постоянном давлении. По закону Гей-Люссака

$$V_3/T_3 = V_1/T_1,$$

откуда

$$T_1 = T_3 \frac{V_1}{V_3}.$$

Объем газа уменьшался, поэтому $A < 0$ и $T_1 < T_3$, следовательно, $\Delta U < 0$. На основании первого закона термодинамики приходим к выводу: $Q_{3-1} < 0$, т. е. газ на участке 3–1 отдавал некоторое количество теплоты.

448. Газ совершает круговой процесс, график которого изображен на рис. 142, *а*. Какая работа может быть совершена за один цикл при таком процессе, если наименьшая температура газа $t_1 = 0$ °С, а наибольшая $t_3 = 127$ °С? При температуре t_1 объем газа $V_1 = 5$ л, при t_3 $V_3 = 6$ л. Количество газа $\nu = 0{,}5$ моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Решение. Изобразим этот процесс в координатах p, V (рис. 142, *б*). Здесь работа, совершаемая газом при расширении, положительна и численно равна площади, ограниченной графиком $p_2 = p_3 = \text{const}$, осью V и отрезками ab и cd. Работа, совершаемая при сжатии, отрицательна и численно равна площади, ограниченной графиком $p_1 = p_4 = \text{const}$, осью V и отрезками ae и fd. Следовательно, суммарная работа, совершенная газом, равна разности этих площадей, т. е. численно равна плошади прямоугольника $bcfe$:

$$A = (p_2 - p_1)(V_3 - V_1). \qquad (1)$$

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для состояний, которым на графиках соответствуют точки 1 и 3:

$$p_1 V_1 = \nu R T_1, \; p_3 V_3 = \nu R T_3.$$

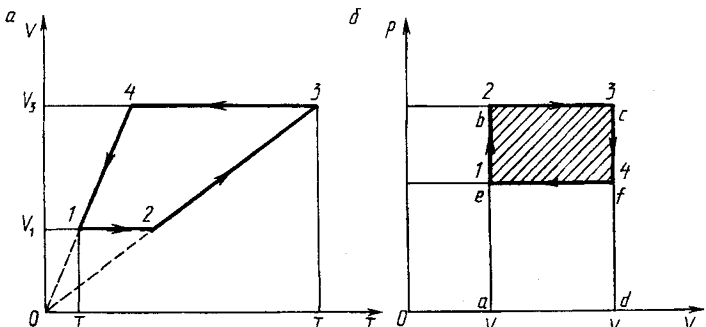


Рис. 142

Из первого уравнения следует, что $p_1 = \nu RT_1/V_1$. Из второго уравнения, учитывая, что $p_3 = p_2$, находим

$$p_2 = \nu RT_3/V_3.$$

Подставив значения p_1 и p_2 в выражение (1), получим:

$$A = \nu R\left(\frac{T_3}{V_3} - \frac{T_1}{V_1}\right)(V_3 - V_1),\ A = 5 \cdot 10\ \text{Дж}.$$

449. Герметичный сосуд вместимостью $V = 0{,}25$ м^3 содержит азот под давлением $p_1 = 120$ кПа. Какое давление установится в сосуде, если азоту сообщить количество теплоты $Q = 8{,}4$ кДж? Молярная теплоемкость азота в данных условиях $C = 21$ Дж/(моль · К). Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

Решение. Нагревание происходит при постоянном объеме, поэтому, согласно закону Шарля,

$$p_1/T_1 = p_2/T_2,$$

где T_1, T_2 – начальная и конечная температуры азота. Отсюда

$$p_2 = p_1 \frac{T_2}{T_1}. \qquad (1)$$

Используя уравнение Менделеева–Клапейрона, найдем начальную температуру:

$$T_1 = \frac{p_1 V}{\nu R}, \qquad (2)$$

где $\nu = m/M$ – количество вещества азота.

При изохорном процессе работа газа равна нулю. Поэтому, согласно первому закону термодинамики, изменение внутренней энергии азота равно сообщенному ему количеству теплоты. Пусть температура газа увеличилась на ΔT. Тогда $Q = \nu C \Delta T$, откуда

$$\Delta T = \frac{Q}{\nu C}. \qquad (3)$$

Следовательно, температура стала равной $T_2 = T_1 + \Delta T$.

Найдем отношение

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_1 + \Delta T}{T_1} = 1 + \frac{\Delta T}{T_1}.$$

Учитывая значения (2) и (3), получаем

$$\frac{\Delta T}{T_1} = \frac{QR}{CVp_1}.$$

Тогда

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{QR}{CVp_1}. \qquad (4)$$

На основании выражений (1) и (4) имеем:

$$p_2 = p_1 + \frac{QR}{CV}, \; p_2 = 1{,}3 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

450. В вертикальном цилиндре вместимостью $V = 200$ см^3 под тяжелым поршнем находится газ при температуре $T = 300$ К. Масса поршня $m = 50$ кг, его площадь $S = 50$ см^2. Для повышения температуры газа на $\Delta T = 100$ К ему было сообщено количество теплоты $Q = 46{,}5$ Дж. Найти изменение внутренней энергии газа. Атмосферное давление $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па. Трение не учитывать. Ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2.

Р е ш е н и е. Согласно первому закону термодинамики, количество теплоты Q, подведенное к газу, расходуется на изменение внутренней энергии ΔU и совершение работы A над внешними телами: $Q = \Delta U + A$. Отсюда

$$\Delta U = Q - A. \qquad (1)$$

Газ расширяется при постоянном давлении

$$p = p_0 + \frac{mg}{S},$$

совершая при этом работу $A = p\Delta V$, или

$$A = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)\Delta V, \qquad (2)$$

где ΔV – изменение объема газа. Согласно закону Гей-Люссака,

$$\frac{V}{T} = \frac{V + \Delta V}{T + \Delta T},$$

откуда

$$\Delta V = \frac{V\Delta T}{T}.$$

Подставив это выражение в формулу (2), получим

$$A = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)\frac{V\Delta T}{T}. \qquad (3)$$

На основании выражений (1) и (3) получим:

$$\Delta U = Q - \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)\frac{V\Delta T}{T}, \quad \Delta U = 33 \text{ Дж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

451. Чтобы охладить V = 4,5 л воды от температуры t_1 = 30 °C до t_2 = 10 °C, в воду бросают кусочки льда при температуре t_3 = 0 °C. Найти массу льда, необходимого для охлаждения воды. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость воды c = 4190 Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

452. В сосуд, содержащий m_1 = 2,35 кг воды при температуре T_1 = 293 К, опускают кусок олова, нагретого до температуры T_2 = 503 К. Температура воды в сосуде повысилась на ΔT = 15 К. Вычислить массу олова. Испарением воды пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), олова $c_2 = 2{,}5 \cdot 10^2$ Дж/(кг · К).

453. Нагретую железную болванку поставили на лед, имеющий температуру t_1 = 0 °C. В результате охлаждения болванки до 0 °C под ней расплавилось m_1 = 460 г льда. Какова была температура нагретой болванки, если ее масса m_2 = 3,3 кг? Удельная теплоемкость железа c = 460 Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

454. При нормальном атмосферном давлении некоторую массу воды нагревают до температуры кипения, пропуская через нее пар при температуре t_1 = 100 °C. Во сколько раз увеличится масса воды, когда она достигнет температуры кипения? Начальная температура воды t_2 = 20 °C, ее удельная теплоемкость и удельная теплота парообразования – соответственно $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), $r = 22{,}6 \cdot 10^5$ Дж/кг.

455. В калориметр налито m_1 = 2,0 кг воды при температуре t_1 = 6,0 °C и положен кусок льда массой m_2 = 2,0 кг, температура которого t_2 = −20 °C. Каково будет содержимое калориметра после установления теплового равновесия? Теплоемкостью калориметра и теплообменом с внешней средой пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), льда $c_2 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

456. В смесь, состоящую из льда массой $m_1 = 5$ кг и воды массой $m_2 = 4$ кг при температуре $t_1 = 0$ °С, впускают водяной пар массой $m_3 = 0{,}5$ кг при температуре $t_2 = 100$ °С. Определить температуру смеси t и массу m_4 растаявшего льда. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Д ж/(кг · К). Удельная теплота парообразования воды $r = 22{,}6 \cdot 10^5$ Дж/кг.

457. В калориметр, в котором находится вода массой m_1 при температуре T_1, вливают расплавленный металл, масса которого m_2, а температура равна температуре плавления $T_{пл}$. При этом температура воды в калориметре повышается до T_2, а часть воды выкипает. Определить массу выкипевшей воды. Удельная теплоемкость воды c_1, удельная теплоемкость металла c_2, удельная теплота плавления металла λ, удельная теплота парообразования воды r, температура кипения воды $T_к$.

458. С какой скоростью должна удариться о преграду свинцовая пуля, чтобы она расплавилась, если до удара температура пули была $T = 373$ К? При ударе на нагревание пули идет $\eta = 0{,}60$ ее энергии. Температура плавления свинца $T_{пл} = 600$ К, его удельная теплоемкость $c = 130$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления $\lambda = 30 \times 10^3$ Дж/кг.

459. Свинцовая пуля, летящая горизонтально со скоростью $v_0 = 500$ м/с, пробивает доску на высоте $h = 2{,}0$ м над поверхностью земли, не изменяя направления своей скорости. На каком расстоянии от доски пуля упадет на землю, если при движении через доску она нагревается на $\Delta T = 200$ К? Считать, что вся теплота, выделившаяся при движении через доску, пошла на нагревание пули. Удельная теплоемкость свинца $c = 130$ Дж/(кг · К). Сопротивлением воздуха пренебречь.

460. Поезд массой $m = 1000$ т при торможении с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2 остановился через $\tau = 100$ с. Какое количество теплоты выделилось при торможении?

461. Рабочий забивает в доску железный гвоздь массой $m = 50$ г и ударяет при этом $n = 5$ раз молотком, масса которого $M = 0{,}5$ кг. Импульс молотка непосредственно перед ударом $p = 6$ кг · м/с. На сколько градусов нагреется гвоздь, если вся выделившаяся при ударах теплота пошла на его нагревание? Удельная теплоемкость железа $c = 0{,}45$ кДж/(кг · К).

462. Лазер излучает световые импульсы с энергией $W = 0{,}1$ Дж. Частота повторения импульсов $\nu = 10$ Гц. КПД лазера, определяемый отношением излучаемой энергии к потребляемой, $\eta = 0{,}01$. Какой объем воды нужно прокачать за $\tau = 1$ ч через охлаждающую систему лазера, чтобы вода нагрелась не более чем на $\Delta t = 10$ °С?

463. Найти массу льда, имеющего температуру $t = -10$ °С, который можно растопить за $\tau = 10$ мин с помощью электрического нагревателя, работающего при токе силой $I = 3$ А от сети с напряжением $U = 220$ В? КПД нагревателя $\eta = 80\%$. Удельная теплоемкость льда $c = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

464. В кастрюлю налили холодной воды при температуре $t_1 = 10$ °С и поставили ее на электроплиту. Через время $\tau_1 = 5{,}0$ мин вода закипела. Через сколько времени после начала кипения вода полностью испарится? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг. Кипение происходит в открытой кастрюле при нормальном давлении.

465. Определить КПД нагревателя, расходующего $m_1 = 0{,}08$ кг керосина на нагревание $m_2 = 3{,}0$ кг воды на $\Delta T = 90$ К. Удельная теплота сгорания керосина $q = 4{,}2 \cdot 10^7$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

466. Для расплавления $m = 1000$ кг стали используется электропечь мощностью $P = 100$ кВт. Сколько времени продолжается плавка, если слиток до начала плавления надо нагреть на $\Delta T = 1500$ К? Удельная теплоемкость стали $c = 500$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления стали $\lambda = 2{,}7 \cdot 10^5$ Дж/кг.

467. Вертикальный цилиндр с тяжелым поршнем наполнен азотом, масса которого $m_1 = 0{,}1$ кг. После увеличения температуры азота на $\Delta T = 100$ К поршень поднялся на высоту $h = 0{,}1$ м. Над поршнем все время сохраняется нормальное атмосферное давление $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па. Площадь поршня $S = 0{,}02$ м^2. Определить массу поршня. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К), молярная масса азота $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

468. Определить изменение внутренней энергии газа, взятого в количестве $\nu = 0{,}5$ моль, при нагревании его при постоянном давлении от температуры $T_1 = 300$ К до температуры $T_2 = 320$ К, если газу было сообщено количество теплоты $Q = 290$ Дж. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

469. Найти внутреннюю энергию одноатомного газа, занимающего объем $V = 2$ м^3 при давлении $p = 200$ кПа.

470. Идеальный газ, количество вещества которого $\nu = 0{,}5$ моль, из состояния с температурой $T = 100$ К расширяется изобарно, а затем изохорно переходит в состояние с начальной температурой. Во сколько раз изменится при этом объем газа, если для перевода газа из начального состояния в конечное к нему подвели количество теплоты $Q = 831$ Дж? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

471. Вычислить работу, которую совершит газ при изобарном нагревании от $t_1 = 20$ °С до $t_2 = 100$ °С, если он находится в вертикальном цилиндрическом сосуде, закрытом подвижным поршнем с площадью поперечного сечения $S = 20$ см^2 и массой $m = 5$ кг. Первоначальный объем газа $V = 5 \cdot 10^{-3}$ м^3, атмосферное давление $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па. Трением пренебречь.

472. В вертикальном цилиндре вместимостью $V = 2$ л под тяжелым поршнем находится газ при температуре $T = 300$ К. Масса поршня $m = 50$ кг, его площадь $S = 50$ см^2. Температуру газа повысили на $\Delta T = 100$ К. Найти изменение внутренней энергии газа, если его теплоемкость $C = 5$ Дж/К. Атмосферное давление $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па. Трение поршня о стенки не учитывать. Принять $g = 10$ м/с^2.

473. Для нагревания некоторого количества идеального газа с молярной массой $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль на $\Delta T = 14$ К при постоянном давлении потребовалось количество теплоты $Q_1 = 10$ Дж. Чтобы охладить газ до исходной температуры при постоянном объеме, необходимо отнять от него количество теплоты $Q_2 = 8{,}0$ Дж. Найти массу газа. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

474. Газ, взятый при температуре $T = 100$ К в количестве $\nu = 5$ моль, сначала нагревают при постоянном объеме так, что термодинамическая температура газа возрастает в $n = 3$ раза, а затем сжимают при постоянном давлении, доводя температуру до первоначального значения. Какая работа совершена при сжатии? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

475. Найти удельную теплоемкость одноатомного идеального газа в изобарном c_p и изохорном c_V процессах. Молярная масса газа равна M, универсальная газовая постоянная равна R.

476. При изотермическом расширении идеальный газ совершил работу $A = 25$ Дж. Какое количество теплоты сообщено газу?

477. При адиабатном сжатии одноатомного идеального газа была совершена работа $A = 900$ Дж и температура газа увеличилась на $\Delta T = 24$ К. Определить количество вещества этого газа. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

478. В цилиндрическом сосуде под легким подвижным поршнем находится $\nu = 1{,}5$ моль идеального одноатомного газа при температуре $t = 27$ °С. Какое количество теплоты надо подвести к газу, чтобы его объем увеличился в $n = 3$ раза? Трением поршня о стенки сосуда пренебречь. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

479. Идеальный газ в количестве $\nu = 5$ моль, имевший начальную температуру $T = 300$ К, изобарно расширился, совершив работу $A = 12{,}5 \cdot 10^3$ Дж. Во сколько раз при этом увеличился объем газа?

480. Гелий массой $m = 10$ г нагрели на $\Delta T = 100$ К при постоянном давлении. Определить количество теплоты, переданное газу, изменение внутренней энергии и работу газа при расширении. Молярная масса гелия $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

481. Газ, занимающий при давлении $p = 1 \cdot 10^5$ Па объем $V = 0{,}1$ м^3, изобарно расширяется. При этом его термодинамическая температура увеличивается в $n = 2$ раза, а внутренняя энергия изменяется на $\Delta U = 26$ кДж. Найти массу угля, который необходимо сжечь для этого, если на нагревание газа затрачивается $\eta = 0{,}2$ количества теплоты, выделяющегося при сгорании. Удельная теплота сгорания угля $q = 30$ МДж/кг.

482. Процессы, происходящие в цилиндре теплового двигателя с идеальным газом, изображены на диаграмме $p - V$ (рис. 143). Известно, что $T_2 = 500$ К, $T_3 = 450$ К, $T_4 = 300$ К. Найти, на сколько кельвин температура в точке 1 отличается от температуры в точке 3.

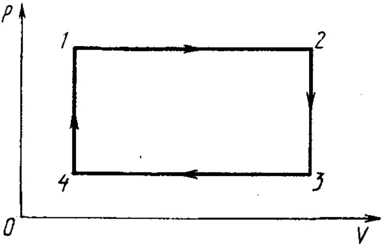


Рис. 143

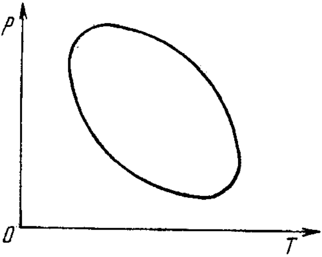


Рис. 144

483. На рис. 144 изображен график процесса, проводимого с идеальным газом. Объем газа постоянен. Найти точки, в которых масса газа максимальна и минимальна.

484. Идеальная тепловая машина, работающая при нормальных условиях окружающего воздуха, который для нее является холодильником, поднимает груз массой m = 400 кг. Рабочее тело машины получает от нагревателя с температурой t = 200 °C количество теплоты Q = 80 кДж. На какую максимальную высоту поднимает груз эта тепловая машина? Трением пренебречь.

485. Чтобы принять ванну, необходимо нагреть V = 200 л воды от температуры t_1 = 7 °C до температуры t_2 = 47 °C. Если такое количество теплоты сообщить идеальной тепловой машине, работающей при температуре нагревателя t_2 и холодильника t_1, то с помощью этой машины можно поднять груз массой $m = 4{,}2 \cdot 10^4$ кг на высоту H = 10 м. Определить по этим данным удельную теплоемкость воды. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

486. Температура газов, образующихся при сгорании топлива в цилиндрах двигателя автомобиля, t_1 = 827 °C, температура выхлопных газов t_2 = 97 °C. Сколько километров проедет с постоянной скоростью автомобиль, имеющий в баке V = 40 л топлива, если удельная теплота сгорания топлива $q = 46 \cdot 10^6$ Дж/кг, плотность топлива ρ = 710 кг/м^3, а сила сопротивления движению $\bar{F}$ остается постоянной и по модулю равной $1{,}7 \cdot 10^3$ Н? Двигатель считать идеальной тепловой машиной, работающей с максимально возможным КПД.

487. При расширении газа тепловая машина совершает работу, при этом объем газа увеличивается от $V_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ м^3

до $V_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3, а давление линейно убывает от $p_1 = 6 \cdot 10^5$ Па до $p_2 = 4 \cdot 10^5$ Па. Определить изменение внутренней энергии газа при его расширении и КПД тепловой машины, если известно, что количество теплоты, полученное за цикл тепловой машины от нагревателя, $Q_1 = 1$ кДж, а отданное холодильнику $Q_2 = 0{,}8$ кДж.

III. ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

8. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Методические указания к решению задач

При решении задач о взаимодействии точечных зарядов нужно, сделав рисунок, обозначить на нем силы, действующие на интересующий нас заряд. Если по условию задачи заряд находится в покое, записывают условие равновесия заряда (так же, как и для материальной точки в механике). Если заряд движется в однородном электрическом поле, составляют уравнение движения (так же, как и в механике).

Если в задаче речь идет о работе сил электрического поля над зарядом, следует составить уравнение на основе закона сохранения и превращения энергии. При взаимодействии заряженных тел и происходящем при этом перераспределении зарядов уравнение составляют согласно закону сохранения заряда. Полученную систему уравнений решают относительно искомой величины.

При решении задач о взаимодействии заряженных тел обычно используют формулы, устанавливающие связь между зарядами и потенциалами. Если задана сложная схема соединения конденсаторов, надо попытаться заменить ее другой схемой, по которой можно легко установить тип соединения (параллельное, последовательное или их комбинации). Иногда для этого достаточно начертить схему несколько иначе. В других случаях такую замену можно сделать путем соединения на заданной схеме точек с одинаковым потенциалом; при этом заряды на конденсаторах и разности потенциалов между обкладками не будут изменяться. После преобразования схемы устанавливают связь между зарядами, разностями потенциалов и емкостями конденсаторов.

Основные законы и формулы

Закон Кулона: сила взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов прямо пропорциональна произведению модулей зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2},$$

где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ – коэффициент пропорциональности в СИ; ε – диэлектрическая проницаемость среды; ε_0 – электрическая постоянная:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}\ \text{Ф/м} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{Ф/м}.$$

Закон сохранения электрического заряда: в замкнутой (электрически изолированной) системе алгебраическая сумма зарядов всех частиц остается неизменной.

Напряженность электростатического поля в данной точке

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0,$$

где $\vec{F}$ – сила, с которой поле действует на положительный точечный заряд q_0, помещенный в эту точку.

Принцип суперпозиции полей: если в данной точке пространства различные заряженные частицы создают поля, напряженности которых $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, ..., $\vec{E}_n$, то результирующая напряженность поля в этой точке

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n.$$

Поверхностная плотность электрического заряда

$$\sigma = q/S,$$

где q – заряд, равномерно распределенный по поверхности тела площадью S.

Напряженность электростатического поля точечного заряда q на расстоянии r от него

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2},$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Напряженность электростатического поля бесконечной равномерно заряженной плоскости

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0\varepsilon},$$

где σ – поверхностная плотность электрического заряда.

Напряженность электростатического поля металлической заряженной сферы радиуса R на расстоянии $r \geqslant R$ от центра сферы

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2},$$

где q – заряд сферы. Внутри сферы ($r < R$) $E = 0$.

Потенциал электростатического поля в данной точке

$$\varphi = W_{\mathrm{p}}/q_0,$$

где W_{p} – потенциальная энергия, которой обладает заряд q_0, помещенный в эту точку.

Потенциал поля, созданного несколькими точечными зарядами, равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых в данной точке каждым зарядом:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n,$$

где $\varphi_i > 0$ при $q_i > 0$; $\varphi_i < 0$ при $q_i < 0$.

Потенциал электростатического поля точечного заряда q на расстоянии r от него

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r}.$$

Потенциал электростатического поля металлической заряженной сферы радиуса R на расстоянии $r \geqslant R$ от центра сферы

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r},$$

где q – заряд сферы.

Внутри сферы потенциал во всех точках такой же, как на поверхности сферы ($r = R$).

Работа, совершаемая электростатическим полем при перемещении заряда q из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2,

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Связь между напряженностью однородного электрического поля и разностью потенциалов выражается формулой

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2)/d,$$

где $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между точками, находящимися одна от другой на расстоянии d вдоль линии напряженности поля.

Электрическая емкость проводника* – физическая величина, равная отношению заряда q, сообщенного проводнику, к его потенциалу φ:

$$C = q/\varphi.$$

Электрическая емкость конденсатора

$$C = q/U,$$

где q – заряд конденсатора; U – напряжение между обкладками конденсатора.

Емкость проводящей сферы радиуса R, находящейся в среде с диэлектрической проницаемостью ε,

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Емкость плоского конденсатора, площадь каждой пластины которого S, а расстояние между ними d,

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d,$$

где ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами.

Общая емкость конденсаторов, соединенных параллельно,

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n.$$

Общая емкость конденсаторов, соединенных последовательно, определяется по формуле

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}.$$

Энергия электрического поля заряженного конденсатора емкостью C

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2},$$

где U – напряжение между его обкладками, q – заряд конденсатора.

Примеры решения задач

488. В воздухе на некотором расстоянии друг от друга находятся два одинаковых маленьких шарика, имеющих заряды $q_1 = +0{,}5$ мкКл и $q_2 = -0{,}1$ мкКл. Шарики привели в соприкосновение, а затем раздвинули на расстояние

* Вместо терминов «электрическая емкость», «электрический заряд» применяются краткие формы: «емкость», «заряд».

$r = 10$ см. Найти силу взаимодействия шариков. Диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon = 1$.

Решение. После соприкосновения шариков их заряды стали одинаковыми. При этом, согласно закону сохранения заряда, сумма зарядов шариков осталась неизменной. Следовательно, после соприкосновения заряд каждого шарика

$$q = (q_1 + q_2)/2.$$

Шарики будут взаимодействовать с силой

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q_1 + q_2)^2}{4\varepsilon r^2}, \quad F = 3{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ Н}.$$

489. Два одинаковых маленьких шарика массой $m = 0{,}4$ г каждый подвешены на непроводящих нитях длиной $l = 1$ м к одной точке. После того как шарикам были сообщены одинаковые заряды q, они разошлись на расстояние $r = 9$ см. Определить заряды шариков и силу натяжения нити. Диэлектрическая проницаемость воздуха $\varepsilon = 1$.

Решение. На каждый шарик (рис. 145) действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила взаимодействия $\vec{F}$. Шарик находится в равновесии. Следовательно, выполняется условие

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0},$$

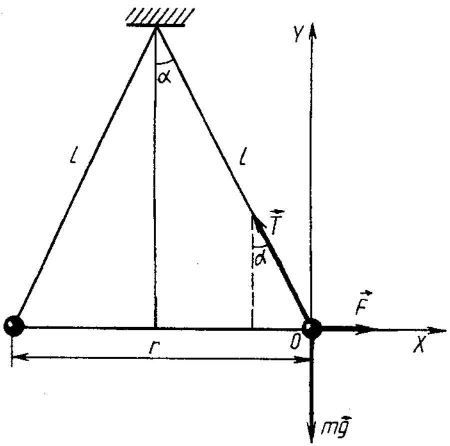


Рис. 145

поэтому суммы проекций сил на оси OX и OY равны нулю:

$$F - T\sin\alpha = 0,\ T\cos\alpha - mg = 0,$$

или

$$T\sin\alpha = F,\ T\cos\alpha = mg. \qquad (1)$$

Разделив равенства (1) почленно первое на второе, получим

$$\operatorname{tg}\alpha = F/(mg).$$

Так как угол α мал, то $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha = \frac{r/2}{l} = \frac{r}{2l}$, поэтому

$$\frac{r}{2l} = \frac{F}{mg}. \qquad (2)$$

По закону Кулона

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Подставим это выражение в равенство (2):

$$\frac{r}{2l} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2 mg},$$

откуда

$$q = r\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon mgr}{l}},\ q = 1\cdot10^{-8}\ \text{Кл}.$$

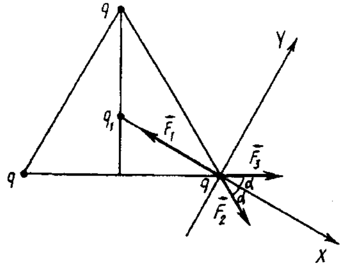
Из уравнения (1) найдем модуль силы натяжения нити:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mg}{\sqrt{1 - r^2/(4l^2)}} = \frac{2mgl}{\sqrt{4l^2 - r^2}},\ T = 4\cdot10^{-3}\ \text{Н}.$$

490. В вершинах правильного треугольника расположены одинаковые положительные точечные заряды $q = 3{,}2\cdot10^{-8}$ Кл. Какой отрицательный заряд надо поместить в центр треугольника, чтобы вся система зарядов находилась в равновесии? Система находится в воздухе ($\varepsilon = 1$).

Р е ш е н и е. На каждый заряд q, находящийся в вершине треугольника, действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ со стороны отдельных трех зарядов (рис. 146). По закону Кулона найдем модули этих сил:

$$F_1 = k\frac{|q_1|q}{\varepsilon r^2},\ F_2 = F_3 = k\frac{q^2}{\varepsilon a^2}, \qquad (1)$$



Р и с. 146

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; $r = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ – расстояние от вершины до центра правильного треугольника. При равновесии сумма этих сил равна нулю:

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}.$$

Следовательно, сумма проекций сил на любую координатную ось равна нулю. Совместим начало координат с вершиной треугольника, а оси OX и OY направим так, как показано на рис. 146. Для проекций сил на ось OX получим

$$F_2 \cos\alpha + F_3 \cos\alpha - F_1 = 0. \qquad (2)$$

(Равенство нулю суммы проекций сил на ось OY очевидно, так как $F_2 \sin\alpha = F_3 \sin\alpha$ и $F_2 = F_3$.) Из рисунка видно, что $\alpha = 30°$, поэтому $\cos\alpha = \cos 30° = \sqrt{3}/2$. Подставив это значение и $r = a\sqrt{3}/3$ в равенства (1) и (2), получим после очевидных преобразований и вычислений:

$$|q_1| = \frac{q\sqrt{3}}{3},\ |q_1| = 1{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл},\ q_1 = -1{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{Кл}.$$

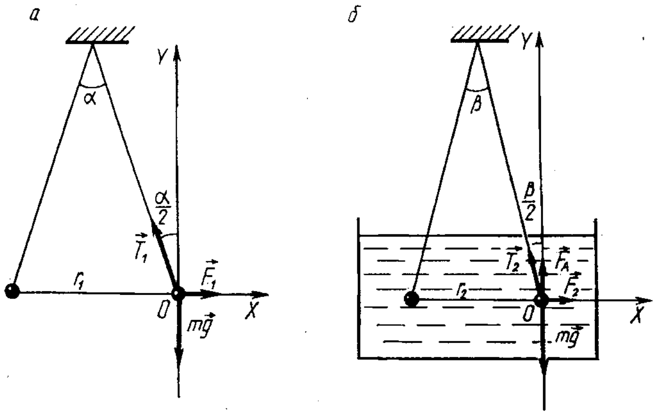
491. Два одинаковых маленьких шарика подвесили на нитях равной длины, закрепленных в одной точке. Шарикам сообщили одинаковые одноименные заряды. После этого шарики погрузили в жидкий диэлектрик, плотность которого ρ_1. Плотность шариков ρ_2. Найти диэлектрическую проницаемость среды, если угол расхождения нитей в воздухе равен α, а в жидкости β.

Р е ш е н и е. До погружения в жидкость на каждый шарик действовали сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T_1}$ и сила отталкивания $\vec{F_1}$ (рис. 147, *а*). Поскольку шарик находился в равновесии, то выполнялось условие $m\vec{g} + \vec{T_1} + \vec{F_1} = \vec{0}$.

Для проекций на оси OX и OY сил, действующих на шарик, получим:

$$T_1 \sin\frac{\alpha}{2} = F_1,\ \ T_1 \cos\frac{\alpha}{2} = mg.$$

Отсюда, разделив почленно первое уравнение на второе, получим



Р и с. 147

$$F_1 = mg \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Когда шарики погружены в жидкость (рис. 147, *б*), на каждый из них действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}_2$, архимедова сила $\vec{F}_A$ и сила отталкивания $\vec{F}_2$. Из условия равновесия шарика $m\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{F}_A + \vec{F}_2 = \vec{0}$ следует:

$$T_2 \sin\frac{\beta}{2} = F_2, \; T_2 \cos\frac{\beta}{2} = mg - F_A.$$

Отсюда

$$F_2 = (mg - F_A) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}. \tag{2}$$

Модуль архимедовой силы $F_A = \rho_1 g V$, где V – объем шарика: $V = m/\rho_2$; m – масса шарика; ρ_2 – его плотность. Тогда

$$F_A = \rho_1 g m/\rho_2.$$

Подставив это выражение в формулу (2), получим

$$F_2 = mg\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}. \tag{3}$$

По закону Кулона

$$F_1 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}, \; F_2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2},$$

где q – модуль заряда каждого шарика; ε – диэлектрическая проницаемость жидкости (для воздуха $\varepsilon = 1$); r_1, r_2 – расстояния между шариками в воздухе и в жидкости соответственно.

Разделив почленно два последних равенства, найдем

$$\varepsilon = \frac{F_1}{F_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2. \qquad (4)$$

Как видно из рис. 147,

$$r_1 = 2l\sin\frac{\alpha}{2},\ r_2 = 2l\sin\frac{\beta}{2}, \qquad (5)$$

где l – длина нити.

Заменив в формуле (4) величины F_1, F_2, r_1 и r_2 их выражениями (1), (3) и (5), получим после преобразований

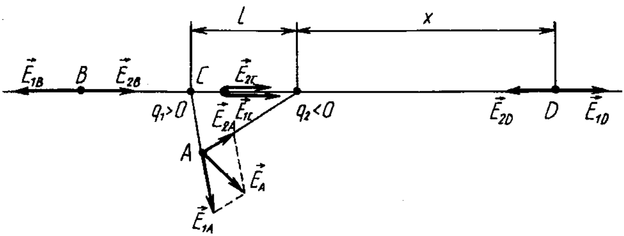
$$\varepsilon = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\sin^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}.$$

492. Два точечных заряда $q_1 = +2{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2 = -0{,}91 \cdot 10^{-8}$ Кл находятся на расстоянии $l = 6$ см друг от друга. Определить положение точки, в которой напряженность поля равна нулю.

Р е ш е н и е. Результирующая напряженность в любой точке поля

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ – напряженности полей, создаваемых зарядами q_1 и q_2 в этой точке. Очевидно, что $\vec{E} = \vec{0}$ только в той точке, в которой векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ равны по модулю и противоположны по направлению. В любой точке A (рис. 148), кото-



Р и с. 148

рая не лежит на прямой, проходящей через заряды, результирующая напряженность $\vec{E}_A \neq \vec{0}$. Рассмотрим напряженность в точках прямой, соединяющей заряды.

В любой точке B на прямой слева от q_1 $\vec{E}_B \neq \vec{0}$, так как $|q_1| > |q_2|$. В любой точке C, расположенной между зарядами, векторы $\vec{E}_{1C}$ и $\vec{E}_{2C}$ направлены в одну сторону, поэтому их сумма отлична от нуля. Таким образом, мы приходим к выводу, что искомая точка D лежит на прямой, проходящей через данные заряды, справа от заряда q_2 на некотором расстоянии x от него. В этой точке $E_{1D} = E_{2D}$ или

$$\frac{|q_1|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(l + x)^2} = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon x^2}.$$

Отсюда

$$x = \frac{l\sqrt{|q_2|}}{\sqrt{|q_1|} - \sqrt{|q_2|}}, \quad x = 8{,}8 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

493. Два точечных заряда $q_1 > 0$ и $q_2 < 0$ расположены в воздухе на расстоянии d друг от друга. Найти напряженность и потенциал поля, создаваемого этими зарядами в точке A, находящейся на расстоянии r_1 от положительного заряда и на расстоянии r_2 от отрицательного. (Точка A не лежит на прямой, соединяющей заряды q_1 и q_2, $d < r_1 + r_2$.)

Решение. Согласно принципу суперпозиции полей, в точке A (рис. 149) напряженность электрического поля $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ – напряженности полей, создаваемых в этой точке зарядами q_1 и q_2 соответственно. Сложив векторы $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ по правилу параллелограмма, найдем модуль вектора $\vec{E}$, воспользовавшись теоремой косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha},$$

где $E_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}$; $E_2 = \dfrac{|q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$;

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

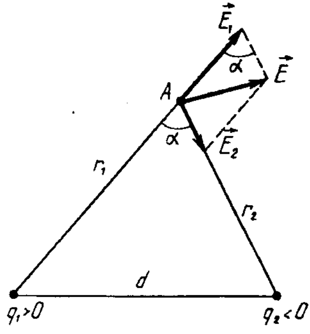


Рис. 149

В точке A потенциал поля $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где φ_1, φ_2 – потенциалы полей, создаваемых в этой точке зарядами q_1 и q_2:

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}, \ \varphi_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}.$$

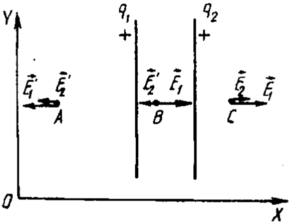


Рис. 150

494. Две параллельные металлические пластины, площадь каждой из которых равна S, несут положительные заряды q_1 и $q_2 < q_1$. Расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров. Определить напряженность электростатического поля в точках A, B и C (рис. 150).

Решение. В любой точке пространства (между пластинами и вне их) напряженность поля, согласно принципу суперпозиции, равна векторной сумме напряженностей полей каждой пластины. Поэтому

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1' + \vec{E}_2', \ \vec{E}_B = \vec{E}_1 + \vec{E}_2', \ \vec{E}_C = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

где $\vec{E}_1$, $\vec{E}_1'$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_2'$ – напряженности электростатических полей соответственно первой и второй пластин справа и слева от них.

Направим координатную ось OX перпендикулярно пластинам. Спроектировав векторы напряженности на эту ось, получим:

$$E_{Ax} = -(E_1' + E_2'), \ E_{Bx} = E_1 - E_2', \ E_{Cx} = E_1 + E_2.$$

Поскольку размеры пластин велики по сравнению с расстояниями от них до рассматриваемых точек, напряженности полей этих пластин можно вычислять так же, как для бесконечной плоскости. Поэтому

$$E_1 = E_1' = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0\varepsilon S}, \ E_2 = E_2' = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S},$$

где σ_1, σ_2 – поверхностные плотности зарядов; ε – диэлектрическая проницаемость воздуха: $\varepsilon = 1$. Следовательно,

$$E_{Ax} = -\frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}, \ E_{Bx} = \frac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}, \ E_{Cx} = \frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

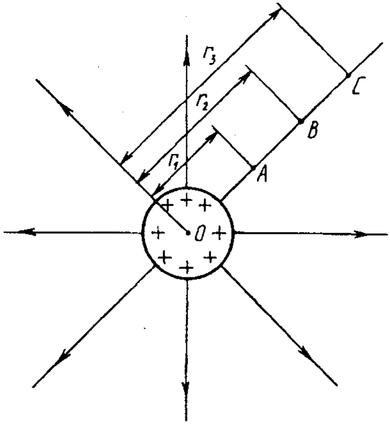
495. Положительно заряженный металлический шар (рис. 151) создает поле, напряженность которого в точке A $E_1 = 100$ В/м, а в точке C – $E_3 = 36$ В/м. Какова напряженность поля в точке B, лежащей посередине между точками A и C? Шар находится в воздухе.

Р е ш е н и е. Обозначим расстояние от центра шара O до точек A, B и C через r_1, r_2 и r_3 соответственно. Тогда напряженность поля в точке B

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2^2}, \qquad (1)$$

где q – заряд шара; ε – диэлектрическая проницаемость воздуха: $\varepsilon = 1$.

Учитывая, что $AB = BC$, найдем



Р и с. 151

$$r_2 = r_1 + \frac{r_3 - r_1}{2} = \frac{r_1 + r_3}{2}. \qquad (2)$$

Напряженности поля в точках A и C равны соответственно:

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2},\ E_3 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3^2}.$$

Выразим отсюда расстояния r_1 и r_3:

$$r_1 = \sqrt{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E_1}},\ r_3 = \sqrt{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon E_3}}.$$

Учитывая эти значения, по формуле (2) находим

$$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}}\left(\sqrt{\frac{1}{E_1}} + \sqrt{\frac{1}{E_3}}\right). \qquad (3)$$

Подставив значение (3) в формулу (1), получим после преобразований и вычислений:

$$E_2 = \frac{4E_1E_3}{E_1 + 2\sqrt{E_1E_3} + E_3},\ E_2 = 56\ \text{В/м}.$$

496. По проволочному кольцу радиуса $R = 10$ см равномерно распределен положительный заряд $q = 5{,}0 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найти напряженность электростатического поля на оси кольца в точках, расположенных от центра кольца на расстояниях $l_1 = 0$, $l_2 = 5{,}0$ см, $l_3 = 15$ см.

Решение. Разобьем кольцо на отрезки, малые по сравнению с расстоянием r до точки A (рис. 152). Тогда заряд Δq, находящийся на каждом отрезке, можно считать

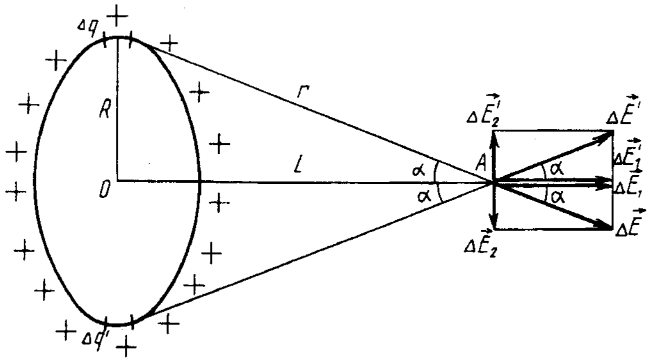


Рис. 152

точечным. Он создает в точке A поле напряженностью $\Delta\vec{E}$, модуль которой

$$\Delta E = \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}.$$

Согласно принципу суперпозиции, результирующая напряженность в точке A равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых в этой точке каждым отрезком с зарядом Δq.

Разложим вектор $\Delta\vec{E}$ на две составляющие: $\Delta\vec{E}_1$, направленную вдоль оси кольца, и $\Delta\vec{E}_2$, направленную перпендикулярно этой оси. При сложении векторов напряженности полей, создаваемых всеми отрезками в точке A, сумма составляющих, направленных перпендикулярно оси, получится равной нулю. Это объясняется тем, что для каждого отрезка с зарядом Δq существует диаметрально противоположный отрезок с зарядом $\Delta q' = \Delta q$, поэтому

$$\Delta\vec{E}_2 + \Delta\vec{E}_2' = \vec{0}.$$

Следовательно, результирующая напряженность $\vec{E}$ в точке A равна сумме составляющих, направленных вдоль оси кольца, а модуль напряженности в точке A равен сумме модулей этих составляющих, так как направления их одинаковы.

Постольку $\Delta E_1 = (\Delta E)\cos\alpha = \frac{\Delta q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos\alpha$, то

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\cos\alpha.$$

Из рис. 152 видно, что

$$r^2 = R^2 + l^2,\ \cos\alpha = l/\sqrt{R^2 + l^2}.$$

Учитывая это, получаем

$$E = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\sqrt{(R^2 + l^2)^3}} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R^2 + l^2)^{3/2}}.$$

По этой формуле вычисляем модули напряженности в точках, находящихся на расстояниях $l_1 = 0$, $l_2 = 5{,}0$ см, $l_3 = 15$ см, учитывая при этом, что $\varepsilon = 1$ (воздух) и $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Н $\cdot$ м^2/Кл^2. Получаем: $E_1 = 0$, $E_2 = 1{,}6 \cdot 10^3$ В/м, $E_3 = 1{,}2 \cdot 10^3$ В/м.

497. Какую работу надо совершить, чтобы перенести точечный заряд $q = 6$ нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $l = 10$ см от поверхности металлического шарика, потенциал которого $\varphi = 200$ В, а радиус $R = 2$ см? Шарик находится в воздухе ($\varepsilon = 1$).

Р е ш е н и е. Работа A, которую надо совершить, чтобы перенести заряд из точки с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2, отличается от работы $A_п$ электростатического поля только знаком: $A = -A_п$. А так как $A_п = q(\varphi_2 - \varphi_1)$, то

$$A = -q(\varphi_1 - \varphi_2) = q(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (1)$$

В рассматриваемом случае начальная точка находится на бесконечности, поэтому $\varphi_1 = 0$. Найдем потенциал φ_2 в конечной точке. Пусть Q – заряд шарика. Тогда потенциал шарика

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}, \qquad (2)$$

а потенциал в конечной точке, находящейся на расстоянии $l + R$ от центра шарика,

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon(R + l)}. \qquad (3)$$

Разделив почленно равенство (3) на (2), найдем

$$\varphi_2 = \frac{R\varphi}{R + l}. \qquad (4)$$

Подставив в формулу (1) значения $\varphi_1 = 0$ и φ_2, получим:

$$A = \frac{qR\varphi}{R + l}, \; A = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Дж}.$$

498. Проводящий шар наэлектризован так, что поверхностная плотность заряда равна σ. На расстоянии l от поверхности шара потенциал поля равен φ. Какова емкость шара (шар находится в воздухе)?

Решение. Емкость проводящего шара

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R, \qquad (1)$$

где R – радиус шара. Чтобы найти радиус шара, запишем выражение для потенциала поля на расстоянии l от поверхности шара (т. е. на расстоянии $R + l$ от центра шара):

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (R + l)},$$

где $q = \sigma S$ – заряд шара; $S = 4\pi R^2$ – площадь поверхности шара. Поэтому

$$\varphi = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 (R + l)}.$$

Отсюда

$$\sigma R^2 - \varphi\varepsilon_0 R - \varphi\varepsilon_0 l = 0. \qquad (2)$$

Решив это квадратное уравнение относительно R, получим

$$R = \frac{\varphi\varepsilon_0}{2\sigma}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma l}{\varphi\varepsilon_0}}\right). \qquad (3)$$

Второй корень уравнения (2) отрицательный, физического смысла не имеет.

Подставив значение R из формулы (3) в (1), найдем емкость шара:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0^2\varphi}{\sigma}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\sigma l}{\varepsilon_0\varphi}}\right).$$

499. Определить потенциал большой шарообразной капли, получившейся в результате слияния $n = 1000$ одинаковых шарообразных малых капель воды, каждая из которых была заряжена до потенциала $\varphi = 0{,}01$ В.

Р е ш е н и е. Потенциал на поверхности большой шарообразной капли (с учетом $\varepsilon = 1$)

$$\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}, \tag{1}$$

где q_1 – заряд капли; R – ее радиус.

Потенциал на поверхности малой капли

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{2}$$

где q – заряд капли; r – ее радиус.

Если n одинаковых капель сливаются в одну, ее заряд $q_1 = nq$. С учетом этого получим, разделив почленно равенство (1) на (2),

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = n\frac{r}{R}. \tag{3}$$

Очевидно, что объем большой капли равен сумме объемов малых капель:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

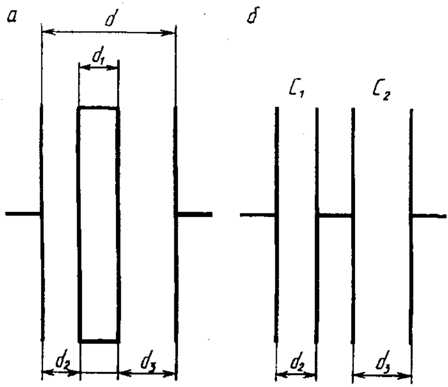
Отсюда $r/R = 1/\sqrt[3]{n}$. Подставив это значение в соотношение (3), получим:

$$\varphi_1 = \frac{n}{\sqrt[3]{n}}\varphi, \ \varphi_1 = 1 \text{ В}.$$

500. Однородное электростатическое поле, напряженность которого $E = 1 \cdot 10^4$ В/м, образовано двумя заряженными параллельными пластинами, расположенными на расстоянии $d = 2$ см друг от друга в воздухе. Какова разность потенциалов между пластинами? Чему будет равна разность потенциалов, если между пластинами параллельно им поместить металлический лист толщиной $d_1 = 0{,}5$ см?

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой, устанавливающей связь между напряженностью E однородного электрического поля и разностью потенциалов U: $E = U/d$. Отсюда

$$U = Ed. \tag{1}$$



Р и с. 153

Если между пластинами параллельно им поместить металлический лист толщиной d_1 (рис. 153, *а*), это приведет к образованию двух последовательно соединенных конденсаторов с расстояниями между обкладками d_2 и d_3 (рис. 153, *б*). Емкости этих конденсаторов:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_2}, \; C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d_3}, \tag{2}$$

где S – площадь одной пластины. Пусть C – их общая емкость при последовательном соединении. Тогда

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2},$$

откуда

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Подставляя сюда значения (2) и учитывая, что $d_2 + d_3 = d - d_1$, получаем

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d - d_1}. \tag{3}$$

Обозначим через C_0 емкость конденсатора, образованного двумя заряженными пластинами до внесения металлического листа. Заряд конденсатора до и после внесения листа один и тот же, так как конденсатор отключен от источника тока. Поэтому $q = C_0 U = C U_1$. Отсюда

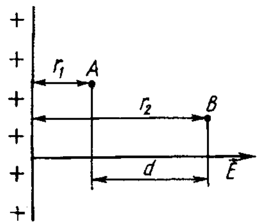
$$U_1 = C_0 U / C. \tag{4}$$

Подставив в формулу (4) $C_0 = \varepsilon_0 \varepsilon S/d$, а также значения (1) и (3), после очевидных преобразований получим:

$$U_1 = E(d - d_1), \quad U_1 = 2 \cdot 10^2 \text{ В/м}. \qquad (5)$$

Формулы (3) и (5) показывают, что введение проводящей пластины толщиной d_1 между обкладками конденсатора эквивалентно уменьшению расстояния между обкладками на эту толщину. В отключенном от источника тока конденсаторе это приводит к уменьшению разности потенциалов между обкладками.

501. Точки A и B (рис. 154) находятся на расстояниях r_1 = 4,0 см и r_2= 12 см от бесконечной плоскости, на которой равномерно распределен положительный заряд. Разность потенциалов U между этими точками равна 1200 В. Найти поверхностную плотность заряда на плоскости.



Р и с. 154

Р е ш е н и е. Бесконечная плоскость, равномерно заряженная с поверхностной плотностью заряда $\sigma > 0$, создает в вакууме однородное электростатическое поле, модуль напряженности которого

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где ε_0 – электрическая постоянная; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Отсюда

$$\sigma = 2\varepsilon_0 E. \qquad (1)$$

В однородном поле напряженность и разность потенциалов связаны соотношением

$$E = U/d,$$

где d – расстояние между точками A и B вдоль линии напряженности поля. Линии напряженности перпендикулярны заряженной плоскости и направлены влево и вправо от нее. Из рисунка, где показана только одна линия напряженности $\bar{E}$, видно, что $d = r_2 - r_1$. Следовательно,

$$E = \frac{U}{r_2 - r_1}. \qquad (2)$$

Подставив выражение (2) в формулу (1), получим:

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0 U}{r_2 - r_1}, \ \sigma = 2{,}7 \cdot 10^{-7} \text{ Кл/м}^2.$$

502. Капелька масла, заряженная отрицательно, помещена между пластинами горизонтально расположенного плоского конденсатора. Напряженность электростатического поля подобрана так, что капелька покоится. Определить заряд капельки, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 500$ В, расстояние между пластинами $d = 0{,}50$ см, радиус капельки $r = 7{,}6 \cdot 10^{-5}$ см, плотность масла $\rho = 0{,}90 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. На капельку, находящуюся в электростатическом поле конденсатора, действуют две силы (рис. 155): сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F} = q\vec{E}$ со стороны электростатического поля (m – масса капельки, q – ее заряд). Поскольку капелька находится в равновесии, сумма проекций этих сил на ось OY, направленную вертикально вверх, равна нулю: $qE - mg = 0$. Отсюда

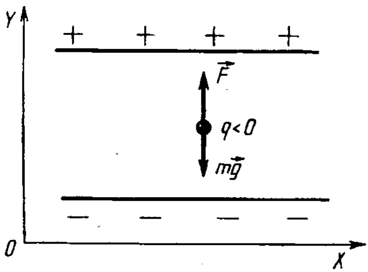


Рис. 155

$$q = mg/E. \tag{1}$$

Масса капельки $m = \rho V$, где $V = 4\pi r^3/3$ – ее объем. Напряженность электростатического поля $E = U/d$. Подставив значения m и E в формулу (1), получим:

$$q = \frac{4\pi r^3 \rho g d}{3U}, \ q = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}.$$

503. На точечный заряд, находящийся внутри конденсатора, действует некоторая сила. Напряжение на конденсаторе $U = 10$ кВ, его емкость $C = 100$ мкФ. Во сколько раз увеличится сила, действующая на заряд, если конденсатор в течение времени $t = 120$ с подзаряжать током, сила которого $I = 0{,}10$ А?

Решение. Обозначим через q заряд, находящийся внутри конденсатора. Пусть $\vec{F}_1$ – сила, действующая на заряд до подзарядки конденсатора, $\vec{F}_2$ – после подзарядки. Тогда

$$F_1 = qE_1, \ F_2 = qE_2, \qquad (1)$$

где E_1, E_2 – модули напряженности электростатического поля конденсатора в первом и во втором случаях:

$$E_1 = \frac{|\sigma_1|}{\varepsilon\varepsilon_0}, \ E_2 = \frac{|\sigma_2|}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad (2)$$

σ_1, σ_2 – поверхностные плотности заряда.

Пусть S – площадь обкладки конденсатора, q_1 – начальный заряд конденсатора. За время t заряд конденсатора увеличится на $\Delta q = It$ и станет равным $q_2 = q_1 + It$. Следовательно,

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{S}, \ \sigma_2 = \frac{q_1 + It}{S}. \qquad (3)$$

На основании выражений (1)–(3) получим

$$\frac{F_2}{F_1} = 1 + \frac{It}{q_1},$$

а так как $q_1 = CU$, то

$$\frac{F_2}{F_1} = 1 + \frac{It}{CU}, \ \frac{F_2}{F_1} = 13.$$

504. Проводящий шар A радиуса $R_1 = 10$ см зарядили до потенциала $\varphi_1 = 2700$ В и отключили от источника тока. После этого шар A соединили проволокой, емкостью которой можно пренебречь, с незаряженным проводящим шаром B радиуса $R_2 = 5$ см. Шары находятся в воздухе. Определить: начальный заряд шара A; заряды и потенциалы шаров после соединения; энергию обоих шаров после соединения; энергию, выделившуюся при соединении.

Р е ш е н и е. Емкости шаров A и B:

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1, \ C_2 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_2,$$

где $\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}$ Ф/м; $\varepsilon = 1$ (воздух).

Начальный заряд шара A

$$q_1 = \varphi_1 C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1\varphi_1. \qquad (1)$$

После соединения заряд на шарах A и B распределится так, что потенциал φ их будет одинаков. Пусть q_2 – заряд шара B после соединения. Тогда на шаре A остался заряд $q_1' = q_1 - q_2$. Условие равенства потенциалов будет иметь вид

$$\frac{q_1 - q_2}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}, \text{ или } \frac{q_1 - q_2}{q_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Отсюда

$$q_2 = \frac{q_1 R_2}{R_1 + R_2}. \qquad (2)$$

Потенциал шаров после соединения

$$\varphi = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_1 R_2}{(R_1 + R_2) C_2} = \varphi_1 \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \qquad (3)$$

Энергия шаров после соединения $W = q_1\varphi/2$ или с учетом равенств (1) и (3)

$$W = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon\varphi_1^2 R_1^2}{R_1 + R_2}. \qquad (4)$$

Энергия, выделившаяся при соединении, равна разности энергий шаров до и после соединения:

$$W_1 = W_0 - W. \qquad (5)$$

Так как до соединения заряжен был только шар A, то

$$W_0 = \frac{C_1\varphi_1^2}{2} = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1\varphi_1^2. \qquad (6)$$

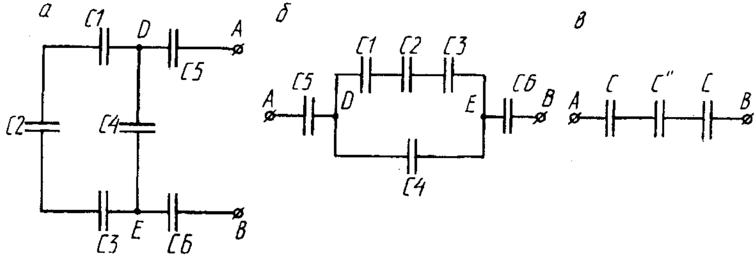
Подставив значения (4) и (6) в формулу (5), получим

$$W_1 = 2\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1\varphi_1^2\left(1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2}\right). \qquad (7)$$

Подставив числовые значения величин в формулы (1)–(4), (7), найдем: $q_1 = 3 \cdot 10^{-8}$ Кл, $q_2 = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл, $q_1' = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл, $\varphi = 2 \cdot 10^3$ В, $W = 3 \cdot 10^{-5}$ Дж, $W_1 = 1 \times 10^{-5}$ Дж.

505. Найти емкость батареи конденсаторов, соединенных по схеме, приведенной на рис. 156, *а*. Все конденсаторы имеют одинаковую емкость $C = 11$ мкФ.

Р е ш е н и е. На рис. 156, *б* изображена схема, эквивалентная данной схеме. Конденсаторы C1, C2 и C3 соединены последовательно. Их общая емкость $C' = C/3$. Параллельно этой цепи подключен конденсатор C4. Значит, емкость цепи между точками D и E



Р и с. 156

$$C'' = C' + C = 4C/3.$$

Теперь имеем схему, изображенную на рис. 156, *в*. Емкость этой батареи $C_б$ найдем из формулы для последовательного соединения конденсаторов:

$$\frac{1}{C_б} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C''} + \frac{1}{C},$$

откуда

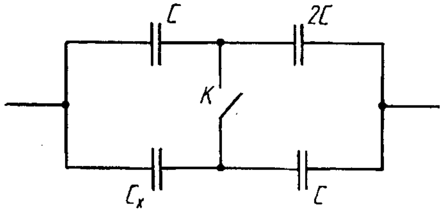
$$\frac{1}{C_б} = \frac{2}{C} + \frac{3}{4C}, \; C_б = \frac{4}{11}C, \; C_б = 4 \text{ мкФ}.$$

506. Конденсаторы емкостями C, $2C$ и C_x соединены по схеме, приведенной на рис. 157. Емкость батареи не изменяется при замыкании ключа K. Определить емкость C_x.

Р е ш е н и е. Найдем сначала емкость батареи при разомкнутом ключе. Если соединены последовательно два конденсатора емкостями C_1 и C_2, то их общая емкость

$$C_{общ} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Воспользуемся этой формулой и найдем, что при разомкнутом ключе емкость верхней ветви, состоящей из



Р и с. 157

последовательно соединенных конденсаторов емкостями C и $2C$, равна

$$\frac{C\cdot 2C}{C+2C}=\frac{2}{3}C.$$

Емкость нижней ветви, состоящей из последовательно соединенных конденсаторов емкостями C_x и C, равна

$$\frac{C_xC}{C_x+C}.$$

Верхняя и нижняя ветви соединены между собой параллельно. Поэтому емкость батареи

$$C'=\frac{2}{3}C+\frac{C_xC}{C_x+C}. \qquad (1)$$

При замкнутом ключе конденсаторы емкостями C и C_x соединены параллельно; их общая емкость равна $C + C_x$. Конденсаторы емкостями $2C$ и C тоже соединены параллельно; их общая емкость равна $2C + C = 3C$. Ветви, емкости которых $C + C_x$ и $3C$, соединены последовательно. Значит, при замкнутом ключе емкость батареи

$$C''=\frac{3C(C+C_x)}{3C+C+C_x}=\frac{3C(C+C_x)}{4C+C_x}. \qquad (2)$$

По условию $C' = C''$, поэтому на основании формул (1) и (2)

$$\frac{2}{3}C+\frac{C_xC}{C_x+C}=\frac{3C(C+C_x)}{4C+C_x}.$$

Решив это уравнение относительно C_x, получим значение искомой емкости: $C_x = C/2$.

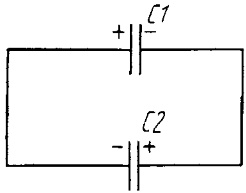
507. Два конденсатора одинаковой емкости зарядили до напряжений $U_1 = 100$ В и $U_2 = 200$ В соответственно, а затем одноименно заряженные обкладки конденсаторов соединили попарно. Какое установится напряжение между обкладками?

Р е ш е н и е. Пусть C – емкость одного конденсатора. Если соединить два таких конденсатора параллельно, получим батарею емкостью $C_1 = 2C$.

До соединения на конденсаторах были заряды $q_1 = CU_1$, $q_2 = CU_2$. После соединения суммарный заряд $q = q_1 + q_2 = C(U_1 + U_2)$. Следовательно, между обкладками напряжение

$$U = \frac{q}{C_1} = \frac{U_1 + U_2}{2}, \; U = 150 \text{ В}.$$

508. Два конденсатора C1 и C2 емкостями $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 3$ мкФ имеют электрические заряды $q_1 = 4 \cdot 10^{-6}$ Кл и $q_2 = 9 \cdot 10^{-6}$ Кл. Разноименно заряженные обкладки конденсаторов соединили попарно (рис. 158). Определить заряд каждого конденсатора после соединения.



Р и с. 158

Р е ш е н и е. После соединения разноименных обкладок конденсаторов общий заряд $q = q_2 - q_1$.

Общая емкость двух параллельно соединенных конденсаторов $C = C_1 + C_2$, а напряжение на каждом конденсаторе $U = \frac{q}{C} = \frac{q_2 - q_1}{C_1 + C_2}$. Учитывая это, находим заряды каждого конденсатора после соединения:

$$q_1' = C_1 U = \frac{C_1 (q_2 - q_1)}{C_1 + C_2}, \; q_2' = C_2 U = \frac{C_2 (q_2 - q_1)}{C_1 + C_2},$$

$$q_1' = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}, \; q_2' = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}.$$

509. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику электрического тока с постоянной ЭДС. Внутрь одного из них вносят диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon = 4$. Диэлектрик заполняет все пространство между обкладками. Как и во сколько раз изменится напряженность электростатического поля в этом конденсаторе?

Р е ш е н и е. Пусть U – напряжение, поддерживаемое источником тока на батарее, состоящей из двух последовательно соединенных конденсаторов емкостью C каждый. Тогда напряжение на каждом из них равно $U/2$, а напряженность поля в конденсаторе

$$E_1 = U/(2d), \tag{1}$$

где d – расстояние между пластинами конденсатора.

После внесения диэлектрика в один из конденсаторов емкость его увеличится в ε раз, и напряжения на конденсаторах будут равны соответственно:

$$U_1 = \frac{q}{C}, \; U_2 = \frac{q}{\varepsilon C} = \frac{U_1}{\varepsilon},$$

где q — заряд на конденсаторах.

Источник включен, поэтому

$$U = U_1 + U_2. \quad (2)$$

Подставив значения U_1 и U_2 в формулу (2), получим $U_2 = U/(\varepsilon + 1)$. Следовательно, теперь напряженность поля в конденсаторе с диэлектриком

$$E_2 = \frac{U_2}{d} = \frac{U}{(\varepsilon + 1)d}. \quad (3)$$

Разделив почленно равенство (3) на (1), получим:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{2}{\varepsilon + 1}, \; \frac{E_2}{E_1} = 0{,}4.$$

510. Плоский воздушный конденсатор емкостью $C = 3{,}0$ мкФ соединен с источником постоянного напряжения $U = 20$ В (рис. 159). Какую механическую работу надо совершить, чтобы расстояние между обкладками конденсатора увеличить в $n = 3{,}0$ раза? Какую работу совершает при этом источник? Рассмотреть два случая: 1) перед раздвиганием обкладок конденсатор отсоединяют от источника, т. е. ключ К разомкнут; 2) ключ К все время замкнут.

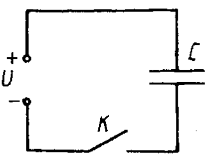


Рис. 159

Решение. Рассмотрим сначала первый случай. Заряженный конденсатор отсоединен от источника, поэтому заряд q конденсатора остается постоянным. До раздвигания обкладок энергия конденсатора

$$W_1 = \frac{q^2}{2C}.$$

После раздвигания обкладок емкость конденсатора уменьшилась в n раз (это следует из формулы емкости плоского конденсатора $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$). Следовательно, энергия конденсатора при этом увеличилась в n раз:

$$W_2 = \frac{nq^2}{2C}.$$

Механическая работа равна изменению энергии конденсатора:

$$A_{\text{мех}} = \Delta W = W_2 - W_1 = \frac{q^2}{2C}(n-1).$$

Учитывая, что $q = CU$, получаем:

$$A_{\text{мех}} = \frac{CU^2}{2}(n-1),\ A_{\text{мех}} = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\ \text{Дж}.$$

Работа источника напряжения $A_{\text{ист}} = 0$, так как он отключен.

Во втором случае ключ К замкнут, поэтому постоянным остается напряжение U на конденсаторе. Энергия конденсатора до раздвигания обкладок

$$W_1 = \frac{CU^2}{2}.$$

Так как после раздвигания обкладок емкость конденсатора уменьшилась в n раз, то и энергия конденсатора уменьшилась во столько же раз и стала равной

$$W_2 = \frac{CU^2}{2n}.$$

При этом уменьшается также и заряд конденсатора (это следует из формулы $q = CU$). Через источник в обратном направлении проходит заряд

$$\Delta q = q_2 - q_1 = \frac{C}{n}U - CU = -CU\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Если источником напряжения является конденсатор, то он заряжается. Источник совершает при этом работу

$$A_{\text{ист}} = U\Delta q = -CU^2\left(1 - \frac{1}{n}\right). \qquad (1)$$

Изменение энергии конденсатора

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{CU^2}{2n} - \frac{CU^2}{2} = -\frac{CU^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Это изменение равно сумме механической работы и работы источника, т. е. $\Delta W = \text{А}_{\text{мех}} + \text{А}_{\text{ист}}$. Отсюда следует, что

$$A_{\text{мех}} = \Delta W - A_{\text{ист}} = -\frac{CU^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + CU^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$= CU^2\left(1 - \frac{1}{n}\right). \qquad (2)$$

В результате вычислений по формулам (1) и (2) получим:

$$A_{\text{ист}} = -8{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж},\ A_{\text{мех}} = 4{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{Дж}.$$

511. В однородном электростатическом поле, вектор напряженности $\vec{E}$ которого направлен вертикально вниз, равномерно вращается шарик массой m с положительным зарядом q, подвешенный на нити длиной l. Угол отклонения нити от вертикали равен α. Найти силу натяжения нити и кинетическую энергию шарика.

Решение. Координатную ось OX направим горизонтально к центру O_1 окружности, а ось OY – вертикально вверх (рис. 160). На шарик действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила со стороны электростатического поля $\vec{F} = q\vec{E}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. По второму закону Ньютона

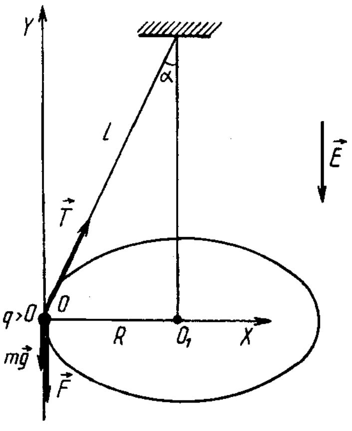


Рис. 160

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = m\vec{a},$$

где $\vec{a}$ – центростремительное ускорение шарика. Модуль этого ускорения $a = v^2/R$, где v – линейная скорость шарика, а R – радиус окружности.

Спроектировав силы и ускорение на ось OX, получим

$$T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}. \qquad (1)$$

Вдоль оси OY шарик не движется, поэтому сумма проекций сил на эту ось равна нулю: $T\cos\alpha - mg - qE = 0$. Отсюда сила натяжения

$$T = \frac{mg + qE}{\cos\alpha}.$$

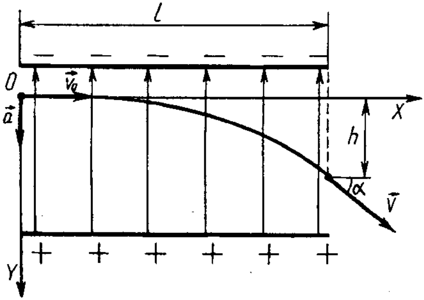
Из рисунка видно, что $R = l\sin\alpha$. Подставив это значение и значение T в уравнение (1), получим

$$\frac{(mg + qE)l\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{mv^2}{l\sin\alpha}.$$

Отсюда найдем кинетическую энергию шарика:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mg + qE)l\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}.$$

512. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v_0 = 1{,}0 \cdot 10^7$ м/с. Напряженность поля в конденсаторе $E = 100$ В/см, длина конденсатора $l = 5{,}0$ см. Найти модуль и направление скорости электрона в момент вылета его из конденсатора. На сколько отклонится электрон от первоначального направления?



Р и с. 161

Р е ш е н и е. Совместим начало координат с точкой, в которой находился электрон в момент влета в конденсатор, ось OX направим горизонтально, ось OY – вертикально вниз (рис. 161). В этой системе координат движение электрона можно представить как результат сложения двух прямолинейных движений: равномерного движения со скоростью $\vec{v}_0$ в горизонтальном направлении и равноускоренного движения с некоторым ускорением $\vec{a}$ вдоль оси OY. Наличие ускорения вдоль оси OY объясняется тем, что на электрон в этом направлении действует электрическая сила $\vec{F} = e\vec{E}$, где e – заряд электрона: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. (Силой тяжести, действующей на электрон, пренебрегаем по сравнению с силой $\vec{F}$.)

Проекцию ускорения $\vec{a}$ на ось OY найдем по второму закону Ньютона:

$$eE = m_e a_y,\ a_y = eE/m_e,$$

где m_e – масса электрона: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Выпишем начальные условия: $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $v_{0x} = v_0$, $v_{0y} = 0$. Значения проекций ускорения на оси координат: $a_x = 0$, $a_y = eE/m_e$. Тогда уравнения, определяющие зависимость координат x, y и проекций скорости v_x и v_y от времени, будут иметь вид:

$$x = v_0 t, \; y = eEt^2/(2m_e), \qquad (1)$$

$$v_x = v_0, \; v_y = eEt/m_e. \qquad (2)$$

В момент вылета электрона из конденсатора $x = l$, $y = h$, $t = t_1$. На основании уравнений (1) и (2) получим:

$$t_1 = \frac{l}{v_0}, \; v_y = \frac{eEl}{m_e v_0}, \; h = \frac{eEl^2}{2m_e v_0^2}, \; h = 2{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Модуль вектора скорости $\vec{v}$ электрона в момент вылета

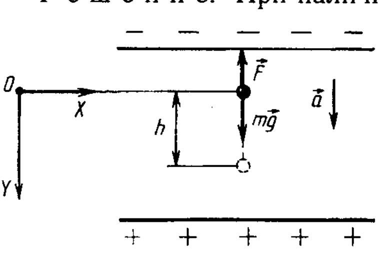
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eEl}{m_e v_0}\right)^2}, \; v = 1{,}3 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

Направление вектора скорости определяется углом α. Как видно из рисунка,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{eEl}{m_e v_0^2}, \; \alpha = \operatorname{arctg}\frac{eEl}{m_e v_0^2}, \; \alpha = 42°.$$

513. Между пластинами плоского воздушного горизонтально расположенного конденсатора находится заряженная капля масла массой $m = 3 \cdot 10^{-8}$ г. Заряд капли $q = 3 \cdot 10^{-15}$ Кл. При разности потенциалов между пластинами $U = 500$ В и начальной скорости $v_0 = 0$ капля проходит некоторое расстояние в 2 раза медленнее, чем при отсутствии электростатического поля. Найти расстояние между пластинами. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Р е ш е н и е. При наличии электростатического поля на каплю действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{F} = q\vec{E}$ со стороны электростатического поля (рис. 162). Под действием этих сил капля движется с ускорением $\vec{a}$, направленным вертикально вниз. По второму закону Ньютона



Р и с. 162

$$m\vec{g} + q\vec{E} = m\vec{a}.$$

В проекциях на ось OY уравнение примет вид

$$mg - qE = ma_y,$$

где a_y – проекция ускорения на ось OY. Отсюда

$$a_y = (mg - qE)/m.$$

Поскольку модуль напряженности электростатического поля $E = U/d$, где d – расстояние между пластинами конденсатора, то

$$a_y = \frac{mg - q(U/d)}{m}. \quad (1)$$

Кинематическое уравнение движения капли имеет вид

$$y = a_y t^2/2.$$

Если капля проходит некоторое расстояние $y = h$ за время $t = t_1$, то

$$h = a_y t_1^2/2. \quad (2)$$

При отсутствии поля капля будет свободно падать с ускорением $\vec{g}$, и поэтому, рассуждая аналогично, получаем

$$h = g t_2^2/2, \quad (3)$$

где t_2 – время, за которое капля пройдет расстояние h.

Из соотношений (2) и (3) находим

$$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2 = \frac{g}{a_y},$$

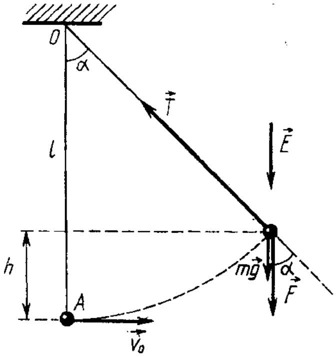
а так как $t_1/t_2 = 2$, то $4a_y = g$, или с учетом формулы (1)

$$4\frac{mg - q(U/d)}{m} = g.$$

Решив это уравнение относительно d, получим:

$$d = \frac{4qU}{3mg}, \ d = 7 \cdot 10^{-3}\,\text{м}.$$

514. В однородном электростатическом поле, вектор напряженности которого направлен вертикально вниз и



Р и с. 163

по модулю равен 10 кВ/м, находится заряженный шарик A, подвешенный к точке O на тонкой изолирующей нити длиной $l = 1$ м (рис. 163). Заряд шарика $q = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл, масса $m = 10$ г. Шарику сообщили начальную скорость $v_0 = 1$ м/с, направленную перпендикулярно вектору напряженности $\vec{E}$. Найти силу натяжения нити в момент достижения шариком крайнего положения.

Р е ш е н и е. После сообщения скорости v_0 шарик движется по окружности, радиус которой равен длине нити l. Согласно второму закону Ньютона, сумма проекций всех действующих на шарик сил на координатную ось, направленную от шарика к центру окружности O, равна произведению массы шарика и его центростремительного ускорения $a = v^2/R = v^2/l$. Но в крайнем положении скорость шарика $v = 0$, поэтому и сумма проекций сил равна нулю.

На шарик действуют три силы: сила натяжения нити $\vec{T}$, сила тяжести $m\vec{g}$ и сила со стороны электростатического поля $\vec{F} = q\vec{E}$. Учитывая изложенное выше, составим уравнение:

$$T - (mg + qE)\cos\alpha = 0.$$

Отсюда

$$T = \frac{mg + qE}{\cos\alpha}. \qquad (1)$$

Чтобы найти $\cos\alpha$, составим уравнение на основании закона сохранения энергии, принимая за нулевой уровень потенциальной энергии уровень начального положения шарика:

$$mv_0^2/2 = (mg + qE)h.$$

Как видно из рис. 163,

$$h = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha),$$

поэтому

$$mv_0^2/2 = (mg + qE)\,l\,(1 - \cos\alpha).$$

Отсюда

$$\cos\alpha = 1 - \frac{mv_0^2}{2(mg + qE)l}.$$

Подставив это значение в формулу (1), получим:

$$T = mg + qE - \frac{mv_0^2}{2l}, \; T = 0{,}1 \text{ Н}.$$

515. В пространство, где одновременно действуют горизонтальное и вертикальное однородные электростатические поля, напряженности которых $E_г = 4 \cdot 10^2$ В/м и $E_в = 3 \cdot 10^2$ В/м, вдоль направления результирующего поля влетает электрон, скорость которого после прохождения пути $l = 2{,}7$ мм уменьшается в 2 раза. Определить скорость электрона в конце пути. Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{19}$ Кл.

Решение. Согласно принципу суперпозиции, вектор напряженности результирующего электростатического поля является векторной суммой напряженностей двух полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_г + \vec{E}_в.$$

Этот вектор есть диагональ прямоугольника, построенного на векторах $\vec{E}_г$ и $\vec{E}_в$ (рис. 164), следовательно, модуль его $E = \sqrt{E_г^2 + E_в^2}$.

На электрон, влетевший вдоль силовой линии результирующего поля, действует направленная противоположно вектору $\vec{E}$ сила $\vec{F}$, модуль которой

$$F = eE = e\sqrt{E_г^2 + E_в^2}. \qquad (1)$$

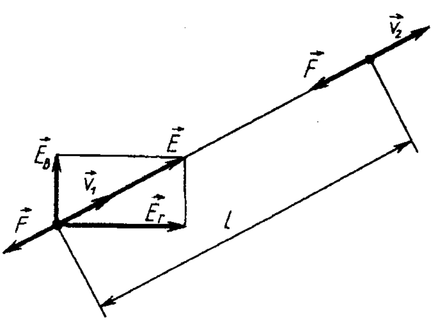


Рис. 164

Изменение кинетической энергии электрона равно работе действующей на него внешней силы $\vec{F}$ (силой тяжести пренебрегаем):

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -Fl.$$

Подставив в эту формулу вместо F ее значение (1), а также $v_1 = 2v_2$, получим

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{m(2v_2)^2}{2} = -el\sqrt{E_\text{г}^2 + E_\text{в}^2}.$$

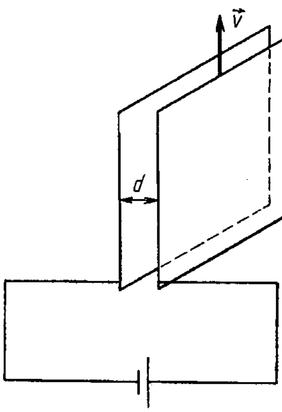
Отсюда

$$v_2 = \sqrt{\frac{2el}{3m}\sqrt{E_\text{г}^2 + E_\text{в}^2}},\ v_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ м/с}.$$

516. Пластины плоского конденсатора присоединены к источнику постоянного напряжения $U = 700$ В. Найти силу тока, который будет проходить по проводам при сдвигании одной пластины вдоль другой (рис. 165) со скоростью $v = 7$ м/с. Пластины конденсатора квадратные площадью $S = 400$ см^2. Расстояние между пластинами $d = 0{,}2$ см во время движения остается постоянным. Между пластинами находится воздух ($\varepsilon = 1$).

Р е ш е н и е. При движении пластины изменяется емкость конденсатора, а поскольку напряжение при этом поддерживается постоянным, то заряд конденсатора изменяется на некоторую величину Δq за время Δt. Вследствие этого по проводам будет проходить ток силой

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \tag{1}$$



Р и с. 165

В начальный момент времени емкость конденсатора $C_1 = \varepsilon_0 S/d$. Спустя промежуток времени Δt после начала движения площадь пластин, по которой они перекрывают друг друга, будет $S - vl\Delta t$, где l — ширина пластины, а емкость

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0(S - vl\Delta t)}{d}.$$

При этом заряд конденсатора уменьшится на

$$\Delta q = C_1U - C_2U = U(C_1 - C_2).$$

Подставив в это выражение значения C_1 и C_2, получим

$$\Delta q = \frac{\varepsilon_0 U v l \Delta t}{d}.$$

Теперь по формуле (1), учитывая, что $l = \sqrt{S}$, найдем силу тока:

$$I = \frac{\varepsilon_0 U v \sqrt{S}}{d}, \; I = 2 \cdot 10^{-9} \text{ А}.$$

517. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком. При некоторой разности потенциалов между пластинами энергия конденсатора $W = 2 \cdot 10^{-5}$ Дж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик из конденсатора вынули. При этом против сил электростатического поля надо было совершить работу $A = 7 \cdot 10^{-5}$ Дж. Найти диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

Решение. Пусть q — заряд конденсатора, C — его емкость при наличии диэлектрика между пластинами. Тогда энергия заряженного конденсатора $W = q^2/(2C)$.

После того как вынули диэлектрик, емкость конденсатора уменьшилась в ε раз: $C_1 = C/\varepsilon$, заряд остался прежним, а энергия приняла значение

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1} = \frac{\varepsilon q^2}{2C} = \varepsilon W.$$

Изменение энергии равно работе внешних сил: $W_1 - W = A$, или $\varepsilon W - W = A$. Отсюда $\varepsilon = 1 + A/W$, $\varepsilon = 5$.

518. Маленький шарик массой m, имеющий заряд q_1, скользит с высоты h по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α (рис. 166). В вершине прямого угла, образованного высотой h и горизонтом, находится неподвижный точечный заряд q_2. Определить скорость шарика

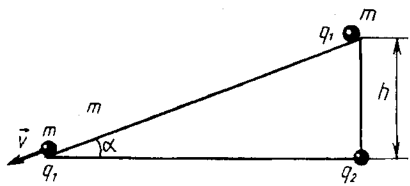


Рис. 166

у основания наклонной плоскости, если начальная скорость шарика равна нулю. Трением пренебречь.

Р е ш е н и е. На основании закона сохранения и превращения энергии составим уравнение:

$$W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2}, \qquad (1)$$

где W_{k1}, W_{p1} –кинетическая и потенциальная энергия шарика, находящегося на высоте h на наклонной плоскости; W_{k2}, W_{p2} – кинетическая и потенциальная энергия шарика у основания наклонной плоскости.

Нулевой уровень потенциальной энергии совместим с основанием наклонной плоскости. Тогда

$$W_{p1} = mgh + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon h}, \quad W_{k1} = 0.$$

Второе слагаемое в выражении для W_{p1} представляет собой потенциальную энергию, обусловленную взаимным расположением зарядов q_1 и q_2. Пусть v – скорость шарика у основания наклонной плоскости. Тогда

$$W_{k2} = mv^2/2.$$

В это время расстояние между зарядами, как видно из рисунка, равно $h/\operatorname{tg}\alpha$. Поэтому

$$W_{p2} = \frac{q_1 q_2 \operatorname{tg}\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon h}.$$

С учетом этих значений энергии уравнение (1) примет вид

$$mgh + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon h} = \frac{mv^2}{2} + \frac{q_1 q_2 \operatorname{tg}\alpha}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon h}.$$

Отсюда найдем скорость:

$$v = \sqrt{2gh + \frac{q_1 q_2}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon m h}(1 - \operatorname{tg}\alpha)}.$$

Предлагаем читателю самостоятельно определить, на какое расстояние смог бы приблизиться к заряду q_2 шарик, если бы он свободно падал с высоты h. Заряды одноименные, заряд q_2 укреплен неподвижно.

519. Карманный дозиметр радиоактивного облучения представляет собой воздушный конденсатор, заряженный до определенной разности потенциалов. Под влиянием облучения газ ионизируется, и ионы, перемещаясь к пластинам конденсатора, понижают разность потенциалов. При облучении в 1 рентген в каждом кубическом сантиметре воздуха при нормальных условиях образуется $n_0 = 2 \cdot 10^9$ пар ионов. Сколько рентген покажет дозиметр, если при емкости конденсатора $C = 3 \cdot 10^{-12}$ Ф разность потенциалов снизилась с $U_1 = 180$ В до $U_2 = 160$ В? Вместимость камеры $V = 1{,}8$ см^3. Полученный результат выразить в единицах СИ.

Р е ш е н и е. Вследствие ионизации воздуха заряд конденсатора уменьшился на величину

$$q = q_1 - q_2 = CU_1 - CU_2 = C(U_1 - U_2).$$

С другой стороны, при дозе 1 рентген общий заряд ионов одного знака, образуемых излучением в объеме V, $q_0 = en_0V$, где e — заряд электрона. Следовательно, доза излучения

$$X = \frac{q}{q_0} = \frac{C(U_1 - U_2)}{en_0V}, \; X = 0{,}1 \text{ Р}.$$

Рентген (Р) — внесистемная единица экспозиционной дозы рентгеновского и гамма-излучения. В СИ единицей этой дозы является кулон на килограмм (Кл/кг): 1 Р = $= 2{,}58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг. Выразим X в единицах СИ:

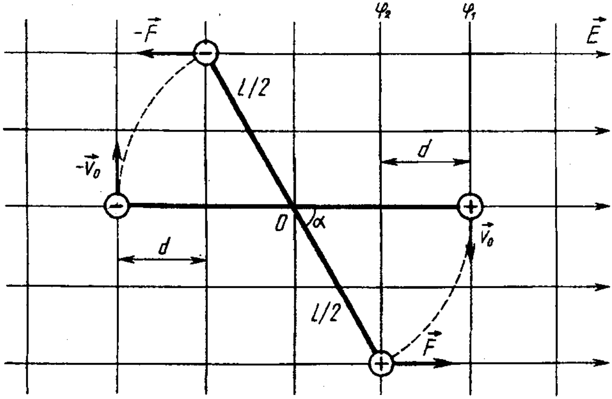
$$X = 0{,}1 \cdot 2{,}58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/кг}.$$

520. В однородное электростатическое поле, напряженность которого $E = 100$ В/см, поместили систему из двух одинаковых и противоположно заряженных шариков, соединенных тонким изолирующим стержнем длиной $l = 5$ см (рис. 167). Масса каждого шарика $m = 5$ г. Модуль заряда каждого шарика $q = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл. На какой угол повернется эта система, если шарикам сообщить начальные скорости, равные $v_0 = 0{,}1$ м/с и направленные перпендикулярно линиям напряженности поля? Силой тяжести пренебречь.

Р е ш е н и е. Силы электростатического поля при повороте системы оказывают тормозящее действие. Работа этих сил равна изменению кинетической энергии шариков:

$$\Delta W_\text{k} = A, \qquad (1)$$

где $\Delta W_\text{k} = W_\text{k2} - W_\text{k1}$. Конечное значение кинетической энергии шариков (в момент остановки) $W_\text{k2} = 0$, начальное $W_\text{k1} = 2 \cdot \frac{mv_0^2}{2} = mv_0^2$. Следовательно,



Р и с. 167

$$\Delta W_k = -mv_0^2. \qquad (2)$$

Совершаемая полем работа $A = A_1 + A_2$, где A_1 и A_2 – работа при перемещении положительного и отрицательного зарядов соответственно. На рис. 167 вертикальными линиями показаны эквипотенциальные поверхности. При перемещении положительного заряда q поле совершает работу $A_1 = -qEd$, где d – расстояние между двумя эквипотенциальными поверхностями. Из рисунка видно, что

$$d = \frac{l}{2} - \frac{l}{2}\cos\alpha = \frac{l}{2}(1 - \cos\alpha).$$

Тогда

$$A_1 = -\frac{1}{2}qEl(1 - \cos\alpha).$$

Такую же работу совершает поле и над отрицательным зарядом q, т. е. $A_2 = A_1$. Следовательно,

$$A = 2A_1 = -qEl(1 - \cos\alpha). \qquad (3)$$

Подставив значения (2) и (3) в выражение (1), получим

$$mv_0^2 = qEl(1 - \cos\alpha),$$

откуда $\cos\alpha = 1 - \frac{mv_0^2}{qEl}$. Следовательно,

$$\alpha = \arccos\left(1 - \frac{mv_0^2}{qEl}\right), \ \alpha = 60°.$$

Задачи для самостоятельного решения

521. В воздухе на тонкой непроводящей нити подвешен шарик массой $m = 2{,}0$ г, имеющий заряд $q_1 = 20$ нКл. Снизу на расстоянии $r = 50$ мм по вертикали от него укреплен одноименный заряд $q_2 = 120$ нКл. Точка подвеса, заряд и шарик находятся на одной прямой. Определить силу натяжения нити.

522. Два одинаковых точечных заряда $q_1 = 2$ нКл находятся в воздухе на расстоянии $r = 15$ см друг от друга. С какой силой они действуют на заряд $q_2 = 6$ нКл, находящийся на таком же расстоянии от каждого из них?

523. Два заряженных шарика, находящихся на расстоянии $r = 60$ см друг от друга в вакууме, притягиваются с силой $F = 0{,}3$ Н. Суммарный заряд шариков $Q = 4$ мкКл. Определить заряд каждого шарика. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 1/(4\pi \cdot 9 \cdot 10^9)$ Ф/м.

524. В каждой вершине квадрата находится положительный заряд q. Какой заряд следует поместить в центре квадрата, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

525. Два одинаковых шарика, имеющих одинаковые заряды $q = 3{,}3 \cdot 10^{-6}$ Кл, подвешены на одной высоте на тонких невесомых нитях равной длины (рис. 168). На одинаковом расстоянии от этих шариков и на $h = 20$ см ниже их расположен заряд Q. Определить этот заряд, если известно, что нити висят вертикально, а расстояние между ними $d = 30$ см.

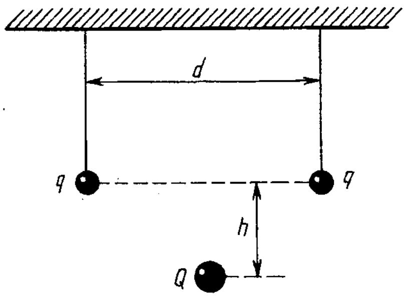


Рис. 168

526. В двух противоположных вершинах квадрата со стороной $a = 30$ см находятся заряды $q = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл. Найти напряженность электростатического поля в двух других вершинах квадрата.

527. Расстояние между зарядами диполя $l = 2$ мкм, а напряженность поля в точке, удаленной от каждого заряда на расстояние $d = 1$ см, $E = 2$ В/м. Вычислить модуль зарядов диполя.

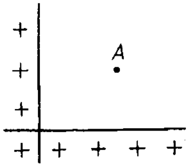


Рис. 169

528. Две бесконечные одноименно и равномерно заряженные плоскости пересекаются под прямым углом (рис. 169). Найти напряженность электростатического поля в точке A, расположенной вблизи линии пересечения. Поверхностная плотность заряда $\sigma = 1{,}0 \cdot 10^{-9}$ Кл/м^2 и одинакова для обеих плоскостей. Плоскости находятся в воздухе ($\varepsilon = 1$). Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

529. По поверхности проводящего шара равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ. Найти напряженность поля в точке, находящейся от поверхности шара на расстоянии, равном его диаметру. Электрическая постоянная равна ε_0.

530. Шарик массой $m = 0{,}1$ г, имеющий заряд $q = 9{,}8$ нКл, подвешен на нити в однородном электростатическом поле, напряженность которого направлена горизонтально, а ее модуль $E = 1 \cdot 10^5$ В/м. Найти угол отклонения нити от вертикали.

531. В двух вершинах равностороннего треугольника помещены одинаковые заряды $q_1 = q_2 = q = 4$ мкКл. Какой точечный заряд необходимо поместить в середину стороны, соединяющей заряды q_1 и q_2, чтобы напряженность электростатического поля в третьей вершине треугольника оказалась равной нулю?

532. Два разноименных заряда, модули которых $|q|$ одинаковы и равны $1{,}8 \cdot 10^{-8}$ Кл, расположены в двух вершинах правильного треугольника со стороной $a = 2{,}0$ м. Определить напряженность и потенциал электростатического поля в третьей вершине треугольника. Окружающая среда – воздух ($\varepsilon = 1$).

533. В вершинах квадрата со стороной a расположены четыре заряда: два из них положительные и два отрицательные, модули зарядов одинаковы и равны q. Определить напряженность электростатического поля в точке пересечения диагоналей квадрата. Рассмотреть все возможные случаи.

534. Какая работа совершается при перенесении точечного заряда $q = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии $r = 1$ см от поверхности проводящего шара радиуса $R = 1$ см с поверхностной плотностью заряда $\sigma = 1 \cdot 10^{-9}$ Кл/см^2?

535. Металлический шар радиуса $R_1 = 5{,}0$ см заряжен до потенциала $\varphi = 150$ В. Чему равна напряженность поля в точке, находящейся на расстоянии $r = 10$ см от поверхности шара? Какова будет напряженность поля в этой точке, если данный шар соединить тонкой проволокой с незаряженным шаром, радиус которого $R_2 = 10$ см, а затем второй шар убрать?

536. Какую работу требуется совершить для того, чтобы два одноименных заряда $q_1 = 2$ мкКл и $q_2 = 3$ мкКл, находящихся в воздухе ($\varepsilon = 1$) на расстоянии $r_1 = 60$ см друг от друга, сблизить до расстояния $r_2 = 30$ см?

537. В цепи, показанной на рис. 170, разность потенциалов между точками A и B $U = 250$ В. Емкости конденсаторов $C_1 = 1{,}5$ мкФ, $C_2 = 3{,}0$ мкФ, $C_3 = 4{,}0$ мкФ. Найти суммарный заряд на обкладках конденсаторов С1, С2 и С3.

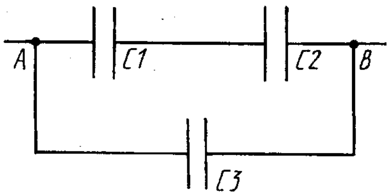


Рис. 170

538. Найти емкость батареи, состоящей из двух последовательно соединенных конденсаторов (рис. 171), если известны площадь S каждой обкладки конденсатора, расстояние d между обкладками каждого из конденсаторов, диэлектрическая проницаемость ε изолятора, заполняющего половину конденсатора (краевые эффекты во внимание не принимать).

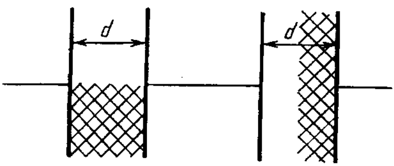


Рис. 171

539. Какой электрический заряд пройдет по проводам, соединяющим обкладки плоского конденсатора с зажимами аккумулятора, при погружении конденсатора в керосин? Площадь пластины конденсатора $S = 150$ см^2, расстояние между пластинами $d = 5{,}0$ мм, ЭДС аккумулятора $\mathscr{E} = 9{,}42$ В, диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2{,}1$.

540. Конденсатор емкостью $C_1 = 2$ мкФ заряжают до напряжения $U_1 = 110$ В. Затем, отключив от источника тока, замыкают этот конденсатор на конденсатор неизвестной емкости, который при этом заряжается до напряжения U_2 = 44 В. Определить емкость второго конденсатора.

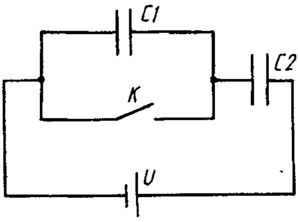
541. Плоский воздушный конденсатор, расстояние между обкладками которого d_1 = 1 см, зарядили до разности потенциалов U_1 = 100 В, а затем отключили от источника напряжения и раздвинули обкладки до расстояния d_2 = 2 см. Определить разность потенциалов между обкладками после того, как их раздвинули.

542. Конденсатор емкостью C_1 = 3 мкФ заряжен до разности потенциалов U_1 = 300 В. Конденсатор емкостью C_2 = 2 мкФ заряжен до разности потенциалов U_2 = 200 В. Разноименно заряженные обкладки конденсаторов соединили попарно. Определить среднюю силу тока, возникшего при соединении конденсаторов, если длительность его прохождения τ = 1 с.

543. На дне широкого сосуда с жидким диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого ε, закреплена пластина конденсатора. Другая пластина, имеющая вид бруска высотой H, плавает над ней в диэлектрике. Площади пластин одинаковы и равны S. На каком расстоянии от поверхности жидкости будет находиться нижняя плоскость бруска, если на пластины подать одинаковые по модулю, но противоположные по знаку заряды q? Плотность жидкости ρ_1, плотность бруска ρ_2 $(\rho_1 > \rho_2)$. Поле между пластинами считать однородным.

544. Два одинаковых конденсатора соединили параллельно, зарядили до напряжения U_1 и отключили от источника. Каким стало напряжение на конденсаторах, когда в один из них ввели пластину с диэлектрической проницаемостью ε, заполняющую весь объем конденсатора?

545. На рис. 172 показана электрическая цепь, в которой напряжение источника U = 10 В, а конденсаторы C1 и C2 имеют одинаковую емкость: $C_1 = C_2 = C$ = 10 мкФ. Какой заряд пройдет через источник после замыкания ключа К? Каким станет при этом заряд конденсатора C1?



Р и с. 172

546. Между вертикальными пластинами плоского воздушного конденсатора подвешен на тонкой шелковой нити маленький шарик, несущий заряд $q_0 = 3{,}0$ нКл. Какой заряд надо сообщить конденсатору, чтобы нить составила с вертикалью угол $\alpha = 45°$? Масса шарика $m = 4{,}0$ г, площадь каждой пластины конденсатора $S = 314$ см^2.

547. В электростатическом поле плоского воздушного конденсатора, пластины которого расположены горизонтально, находится во взвешенном состоянии капелька масла, несущая заряд, равный заряду электрона. Определить радиус капельки, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 5 \cdot 10^3$ В, расстояние между пластинами $d = 5 \cdot 10^{-4}$ м, плотность масла $\rho = 900$ кг/м^3. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

548. Заряженный шарик массой $m = 1{,}5$ г, прикрепленный к невесомой изолирующей нити, покоится в однородном горизонтальном электростатическом поле; при этом нить отклонена от вертикали на угол $\alpha = 30°$ (рис. 173). Затем направление поля мгновенно изменяется на противоположное. Найти силу натяжения нити в момент максимального отклонения нити от вертикали после переключения поля.

549. Два одноименно заряженных шарика массой $m = 0{,}50$ г каждый подвешены в вакууме на очень тонких невесомых, нерастяжимых и непроводящих нитях одинаковой длины (рис. 174). Каждая из нитей образует с вертикалью угол $\alpha = 30°$. Затем вся система погружается в неэлектропроводящую жидкость, плотность которой равна плотности материала шариков, а диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2{,}0$. Найти силу натяжения нитей после

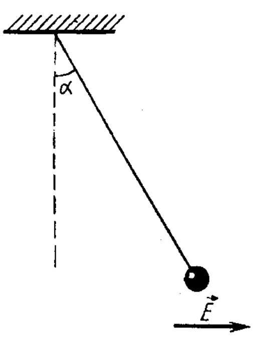


Рис. 173

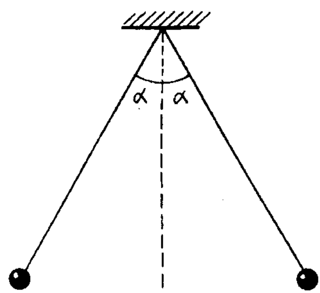


Рис. 174

погружения в жидкость. Каков характер равновесия шариков?

550. Шар, диаметр которого $d = 1$ см и заряд $q = 1 \times \times 10^{-6}$ Кл, помещен в масло плотностью $\rho_1 = 0,8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Плотность материала шара $\rho_2 = 8,6 \cdot 10^3$ кг/м^3. Определить направленную вертикально вверх напряженность электростатического поля, в которое надо поместить шар, чтобы он плавал в масле.

551. Как изменится ускорение падающего шарика массой $m = 4,0$ г, если ему сообщить заряд $q = 3,2 \cdot 10^{-8}$ Кл? Напряженность электрического поля Земли $E = 120$ В/м и направлена вертикально вниз.

552. Между пластинами плоского конденсатора, расположенного горизонтально, на расстоянии $l = 0,8$ см от нижней пластины «висит» заряженный шарик. Разность потенциалов между пластинами $U_1 = 300$ В. Через сколько секунд шарик упадет на нижнюю пластину, если разность потенциалов мгновенно уменьшится до $U_2 = 240$ В?

553. В вакууме между пластинами заряженного плоского конденсатора находится в состоянии равновесия заряженный шарик. Найти ускорение, с которым будет двигаться этот шарик после увеличения расстояния между пластинами на 10%. Ускорение свободного падения $g = 9,81$ м/с^2.

554. В горизонтально расположенном плоском воздушном конденсаторе, заряженном до разности потенциалов $U = 1$ кВ, от положительно заряженной верхней пластины по направлению поля двигалась без начальной скорости частица с зарядом $q = 0,1$ нКл. Когда она прошла некоторое расстояние, полярность пластин была мгновенно изменена на противоположную. Когда частица все же достигла нижней пластины, она обладала кинетической энергией $W_k = 6 \cdot 10^{-8}$ Дж. Расстояние между пластинами $d = 2$ см. Какое расстояние прошла частица к моменту изменения полярности пластин? Силой тяжести, действующей на частицу, пренебречь.

555. Анодное напряжение двухэлектродной электронной лампы (диода) $U = 180$ В. С какой скоростью электрон подлетает к аноду, если начальная скорость электрона (вблизи катода) равна нулю? Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

556. Электрон влетел в плоский конденсатор, находясь на одинаковом расстоянии от каждой пластины и имея скорость $v = 1 \cdot 10^7$ м/с, направленную параллельно пластинам. Расстояние между пластинами $d = 2$ см, длина каждой пластины $l = 2$ см. Какую наименьшую разность потенциалов нужно приложить к пластинам, чтобы электрон не вылетел из конденсатора? Заряд электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

557. Заряженный шарик массой $m = 10$ г, подвешенный на изолирующей нерастяжимой нити, движется с постоянной угловой скоростью $\omega = 10$ рад/с по окружности радиуса $r = 5,0$ см (рис. 175). Под точкой подвеса A находится другой, неподвижный заряженный, шарик B, причем расстояния AO и BO до центра окружности O одинаковы, а угол $\alpha = 45°$. Заряды обоих шариков одинаковы. Найти эти заряды.

558. Электрон влетел в однородное электростатическое поле напряженностью $E = 1 \cdot 10^4$ В/м со скоростью $v_0 = 8$ Мм/с перпендикулярно силовым линиям. Вычислить модуль и направление скорости электрона в момент времени $t = 2$ нс. Масса электрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

559. Два одинаковых заряженных шарика, масса каждого из которых $m = 10$ г, а заряд $q = 5 \cdot 10^{-7}$ Кл, соединены двумя изолирующими нитями длиной $l = 10$ см и $2l$ (рис. 176). Систему удерживают за середину длинной нити, а затем точку подвеса O начинают поднимать вверх с ускорением $\vec{a}$, равным по модулю ускорению свободного паде-

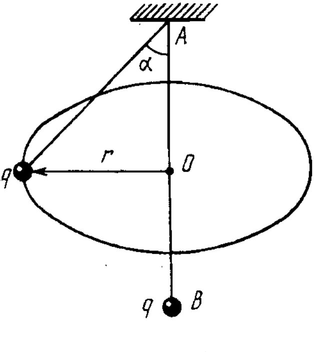


Рис. 175

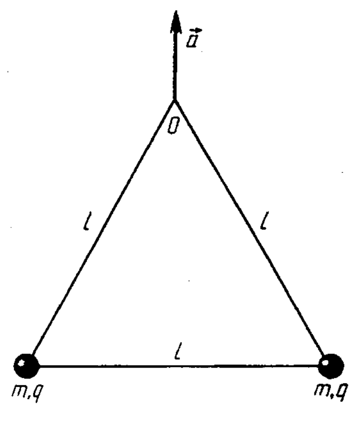


Рис. 176

ния $\vec{g}$. Определить силу натяжения короткой нити, соединяющей шарики, во время их подъема.

560. Электрон, двигаясь в вакууме по силовой линии электрического поля, полностью теряет свою скорость между точками с разностью потенциалов $U = 400$ В. Определить, какой была скорость электрона, когда он попал в электрическое поле. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

561. Какой путь по силовой линии проходит α-частица до полной остановки в однородном тормозящем электростатическом поле напряженностью $E = 2000$ В/м, если начальная скорость ее $v = 2 \cdot 10^7$ м/с. Заряд α-частицы положительный, $q = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Кл, ее масса $m = 6{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг.

562. Частица, масса которой $m = 1 \cdot 10^{-4}$ кг и заряд $q = 1 \cdot 10^{-8}$ Кл, влетает в область однородного электростатического поля шириной $b = 0{,}1$ м под углом $\alpha = 45°$, а вылетает под углом $\beta = 60°$ (рис. 177). Определить начальную скорость частицы, если напряженность однородного поля $E = 1 \cdot 10^6$ В/м. Траектория частицы лежит в плоскости чертежа.

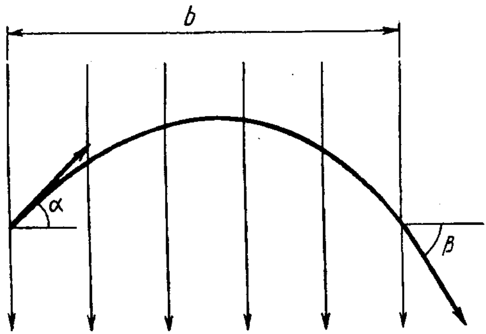


Рис. 177

563. В плоский конденсатор влетает электрон со скоростью $v = 2 \cdot 10^7$ м/с, направленной параллельно обкладкам конденсатора. На какое расстояние от своего первоначального направления сместится электрон за время полета внутри конденсатора, если расстояние между пластинами $d = 2$ см, длина конденсатора $l = 5$ см и разность потенциалов между обкладками $U = 200$ В? Отношение заряда электрона к его массе $e/m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

564. Электрон влетает в однородное электростатическое поле напряженностью $E = 148$ В/м (рис. 178). В некоторый момент времени скорость электрона $\vec{v}$ направлена под углом $\alpha = 60°$ к силовым линиям поля и модуль ее $v = 2 \cdot 10^6$ м/с. Найти угол β, под которым будет направлена скорость электрона через промежуток времени $\Delta t = 3 \cdot 10^{-8}$ с. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Силой тяжести электрона пренебречь.

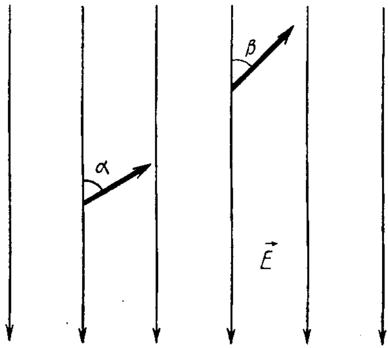


Рис. 178

565. Шарик массой $m = 2$ г, имеющий положительный заряд q, начинает скользить без начальной скорости из точки A по сферической поверхности радиуса $R = 10$ см (рис. 179). Потенциальная энергия взаимодействия заряда q и неподвижного отрицательного заряда Q в начальный момент $W_A = -2 \cdot 10^{-3}$ Дж. Определить потенциальную энергию взаимодействия зарядов, когда заряд q находится в точке B, если в этом случае результирующая сил реакции со стороны сферической поверхности и кулоновского взаимодействия, приложенная к шарику, $F = 0{,}1$ Н. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2. Трением между шариком и сферической поверхностью пренебречь.

566. Два одинаковых плоских конденсатора, один из которых воздушный, а другой заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε, соединены, как показано на рис. 180, и заряжены до напряжения U. Какую

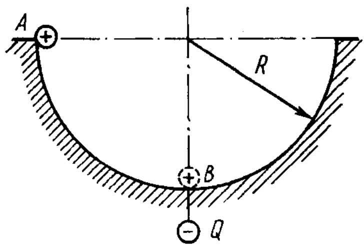


Рис. 179

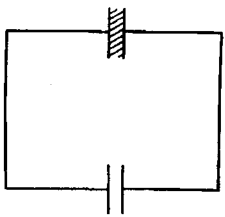


Рис. 180

работу надо совершить, чтобы извлечь диэлектрическую пластинку из конденсатора? Емкость воздушного конденсатора равна C.

567. Атом неона ионизируется при столкновении с электроном, если энергия электрона $W = 21{,}6$ эВ (энергия ионизации). Длина свободного пробега электрона в неоновой лампе между двумя последовательными соударениями $l = 1$ мм. Расстояние между плоскими электродами лампы $d = 1$ см. Определить напряжение, при котором зажигается неоновая лампа (будет происходить процесс ионизации). Считать, что при ударе электрон полностью передает энергию атому неона. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, 1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

568. Стеклянная пластинка целиком заполняет зазор между обкладками плоского конденсатора, емкость которого при отсутствии пластинки равна C_0. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения U. Найти механическую работу, которую необходимо совершить, чтобы извлечь пластинку из конденсатора. Какую работу совершит при этом источник? Диэлектрическая проницаемость стекла равна ε.

569. Напряженность электростатического поля плоского воздушного конденсатора емкостью $C = 4$ мкФ $E = 10$ В/см. Расстояние между обкладками $d = 1$ мм. Определить энергию электростатического поля конденсатора и ее плотность.

570. Определить количество электрической энергии, перешедшей в теплоту при соединении одноименно заряженных обкладок конденсаторов емкостями $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 0{,}5$ мкФ, заряженных до напряжений $U_1 = 100$ В и $U_2 = 50$ В соответственно.

571. На плоский воздушный конденсатор подается напряжение $U = 2{,}0$ кВ. Площадь каждой пластины $S = 0{,}24$ м^2, расстояние между ними $d_1 = 50$ мм. После зарядки конденсатор отключают от источника и затем раздвигают его обкладки так, что расстояние d_2 между ними становится равным 1,5 см. Определить работу, совершенную при раздвигании обкладок конденсатора.

572. Конденсатор емкостью C, заряженный до напряжения U, соединили параллельно с таким же незаряженным конденсатором. Определить изменение энергии системы после соединения.

573. Конденсатор емкость $C = 100$ мкФ заряжают постоянным током через резистор, сопротивление которого

$R = 100$ кОм. Через какое время после начала зарядки энергия, запасенная в конденсаторе, станет равной энергии, выделенной в резисторе?

9. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Методические указания к решению задач

При решении задач на расчет электрических цепей постоянного тока нужно начертить схему и внимательно проанализировать ее: выяснить, как соединены источники тока, резисторы, конденсаторы. Нередко заданную схему полезно начертить несколько иначе, чтобы получить новую схему, эквивалентную данной. При этом можно соединять и разъединять точки, имеющие равные потенциалы. На новой схеме надо выделить участки, где вид соединения проводников (параллельное, последовательное или их комбинации) стал очевиден. После этого используют формулы для расчета сопротивлений, а также закон Ома для участка цепи и для замкнутой цепи.

Необходимо учитывать, что постоянный ток через конденсатор не проходит. Если конденсатор в цепи постоянного тока соединен параллельно с резистором, то на конденсаторе такое же напряжение, как и на резисторе.

Расчет сложных разветвленных электрических цепей производят с помощью правил Кирхгофа, при этом действия следует выполнять в такой последовательности:

1) произвольно обозначить стрелками направления токов во всех участках цепи;

2) произвольно выбрать направления обхода контуров (по часовой стрелке или против);

3) составить систему уравнений согласно первому и второму правилам Кирхгофа, при этом: а) силы токов, входящих в узел, берутся со знаком «плюс», а силы токов, выходящих из узла, – со знаком «минус»; б) если направление тока совпадает с выбранным направлением обхода контура, то соответствующее произведение силы тока на сопротивление берется со знаком «плюс», если не совпадает, – со знаком «минус»; в) ЭДС следует брать со знаком «плюс», если при обходе контура приходится идти внутри

источника тока от отрицательного полюса к положительному, в противном случае — со знаком «минус»;

4) решить составленную систему уравнений; если при этом значения некоторых сил токов получатся со знаком «минус», это означает, что действительные направления этих токов противоположны указанным на схеме. Разумеется, правила Кирхгофа можно применять и при расчете простых цепей.

При решении задач на превращение электрической энергии в тепловую и механическую составляют уравнение на основе закона сохранения и превращения энергии. Задачи на электролиз решают путем составления уравнений на основе законов Фарадея.

Основные законы и формулы

Сила постоянного электрического тока

$$I = q/t,$$

где q — заряд, переносимый через поперечное сечение проводника за время t.

Плотность электрического тока

$$j = I/S,$$

где I — сила тока; S — площадь поперечного сечения проводника.

Закон Ома для участка цепи, не содержащего ЭДС:

$$I = U/R,$$

где I — сила тока, U — напряжение на этом участке; R — сопротивление.

Электрическое сопротивление проводника* длиной l с постоянной площадью поперечного сечения S

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ — удельное сопротивление проводника.

Сопротивление проводника при температуре t

$$R_t = R_0(1 + \alpha t),$$

*Вместо термина «электрическое сопротивление» применяется краткая форма «сопротивление», вместо «сила электрического тока» — «сила тока» и т. п.

где R_0 – сопротивление проводника при 0 °C; α – температурный коэффициент сопротивления.

Аналогично выражается зависимость удельного сопротивления от температуры:

$$\rho_t = \rho_0(1 + \alpha t).$$

Общее сопротивление при последовательном соединении проводников

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n,$$

где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ – сопротивления отдельных проводников. Если $R_1 = R_2 = \ldots = R_n$, то $R = nR_1$.

Общее сопротивление при параллельном соединении проводников удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}.$$

Если $R_1 = R_2 = \ldots = R_n$, то $R = R_1 / n$.

Закон Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

где I – сила тока в цепи, $\mathcal{E}$ – ЭДС источника; R – сопротивление внешнего участка цепи; r – внутреннее сопротивление источника.

Напряжение на зажимах источника

$$U = IR = \mathcal{E} - Ir,$$

если внутри источника ток направлен от отрицательного полюса к положительному; при противоположном направлении тока (это возможно при наличии в цепи нескольких источников тока)

$$U = \mathcal{E} + Ir.$$

Сила тока при коротком замыкании источника

$$I_0 = \mathcal{E} / r.$$

Сила тока в цепи при последовательном соединении различных источников

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_n}{R + r_1 + r_2 + \ldots + r_n},$$

где $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ – ЭДС источников; $r_1, r_2, \ldots, r_n$ – внутренние сопротивления источников.

Сила тока при последовательном соединении n одинаковых источников с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r

$$I = \frac{n\mathscr{E}}{R + nr}.$$

Сила тока в цепи при параллельном соединении n одинаковых источников

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r/n}.$$

Правила Кирхгофа:

I. Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в любом узле (т. е. в точке разветвления проводников), равна нулю:

$$I_1 + I_2 + \ldots + I_n = 0.$$

II. В любом замкнутом контуре сумма падений напряжения (т. е. произведений сил токов I_i на соответствующие сопротивления R_i) равна алгебраической сумме ЭДС, имеющихся в этом контуре:

$$I_1R_1 + I_2R_2 + \ldots + I_nR_n = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots + \mathscr{E}_m.$$

Работа постоянного электрического тока

$$A = qU = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t,$$

где q – заряд, прошедший по проводнику; U – напряжение; I – сила тока; t – время прохождения тока; R – сопротивление.

Мощность постоянного тока

$$P = qU/t = IU = I^2R = U^2/R.$$

Закон Джоуля–Ленца: количество теплоты, выделяемое проводником сопротивлением R с током силой I,

$$Q = I^2Rt,$$

где t – время прохождения тока.

Полная мощность, развиваемая источником тока,

$$P = I\mathscr{E} = I^2(R + r) = \frac{\mathscr{E}^2}{R + r},$$

где $\mathscr{E}$ – ЭДС источника с внутренним сопротивлением r, замкнутого на внешнее сопротивление R.

Полезная мощность (мощность, выделяемая на внешнем участке цепи, сопротивление которого равно R)

$$P_1 = IU = \frac{U^2}{R} = I\mathscr{E} - I^2r = \frac{\mathscr{E}^2R}{(R + r)^2}.$$

Коэффициент полезного действия (КПД) источника тока

$$\eta = \frac{P_1}{P} = \frac{U}{\mathscr{E}} = \frac{R}{R + r}.$$

Законы Фарадея для электролиза:

I. Масса m вещества, выделившегося на электроде, пропорциональна заряду q, прошедшему через электролит:

$$m = kq = kIt,$$

где k – электрохимический эквивалент вещества; I – сила тока; t – время его прохождения.

II. Электрохимический эквивалент вещества пропорционален его химическому эквиваленту:

$$k = \frac{1}{F}\frac{M}{n},$$

где F – постоянная Фарадея: $F = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль; $F = eN_A$, e – заряд электрона; N_A – постоянная Авогадро; M – молярная масса; n – валентность; M/n – химический эквивалент.

Объединенный закон Фарадея:

$$m = \frac{1}{F}\frac{M}{n}It.$$

Примеры решения задач

574. Найти сопротивление между точками *1* и *2* цепей, схемы которых изображены на рис. 181, *а* ($R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R$) и рис. 181, *б*.

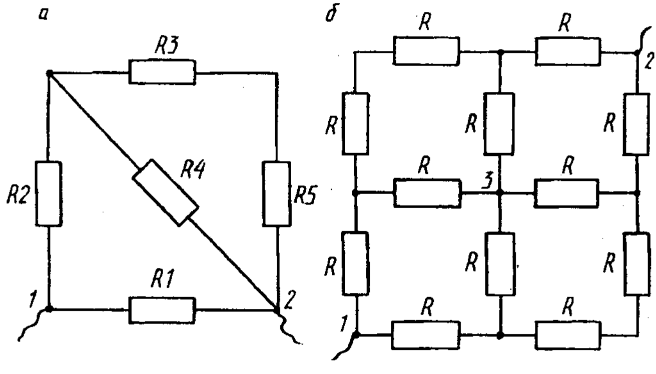
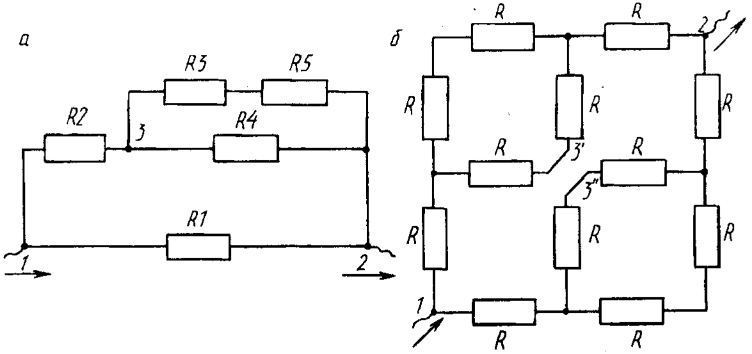


Рис. 181



Р и с. 182

Р е ш е н и е. Для схемы, показанной на рис. 181, *а*, начертим эквивалентную схему (рис. 182, *б*), из которой видно, что резисторы R3 и R5 соединены последовательно; их общее сопротивление равно $2R$. Параллельно с ними соединен резистор R4, сопротивление которого $R_4 = R$. Общее сопротивление участка цепи между точками *3* и *2*

$$R_{3-2} = 2RR/(2R + R) = 2R/3.$$

Последовательно с этим участком соединен резистор R2, в результате чего получается цепь, сопротивление которой

$$R' = R_{3-2} + R = 5R/3.$$

И, наконец, параллельно с этой цепью соединен резистор R1. Следовательно, общее сопротивление между точками *1* и *2*

$$R_{1-2} = R'R/(R' + R) = 5R/8.$$

Схему, приведенную на рис. 181, *б*, представим в виде двух одинаковых параллельно соединенных ветвей, разъединив точку *3* на две точки: *3′* и *3″* (рис. 182, *б*), которые вследствие симметричности схемы имеют одинаковый потенциал. Легко определить, что сопротивление между точками *1* и *2* (рис. 182, *б*) равно $3R/2$.

575. Имеется моток медной проволоки, площадь поперечного сечения которой $S = 0{,}10$ мм^2. Масса всей проволоки $m = 0{,}30$ кг. Определить сопротивление проволоки. Удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017 \cdot 10^{-6}$ Ом · м, плотность $D = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. Сопротивление проволоки длиной l

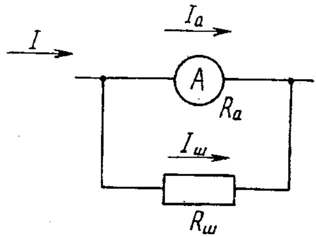
$$R = \rho \frac{l}{S}. \qquad (1)$$

Масса проволоки $m = DlS$, где D – плотность. Отсюда $l = m/(DS)$. Подставив это значение в формулу (1), получим:

$$R = \rho m/(DS^2), \ R = 57 \text{ Ом}.$$

576. Амперметр, предназначенный для измерения силы тока не более $I_а = 20$ мА, необходимо использовать для измерения силы тока до $I = 0{,}5$ А. Рассчитать сопротивление шунта $R_ш$, если сопротивление амперметра $R_а = 5$ Ом.

Р е ш е н и е. Если в цепи сила тока больше максимальной $I_а$, на которую рассчитан амперметр, то параллельно ему включается резистор (шунт), как показано на рис. 183. При этом ток силой I в цепи частично ответвляется в шунт:



Р и с. 183

$$I = I_а + I_ш,$$

где $I_а$, $I_ш$ – силы токов, идущих через амперметр и шунт. Пусть сила тока в цепи $I = nI_а$, т. е. в n раз больше $I_а$. Тогда через шунт идет ток силой

$$I_ш = I - I_а = nI_а - I_а = I_а(n - 1).$$

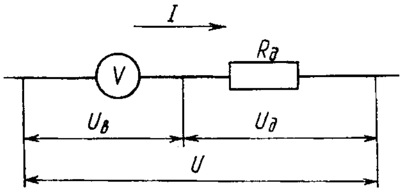
Напряжения на амперметре и шунте одинаковые: $I_а R_а = I_ш R_ш$. Отсюда $R_ш = I_а R_а / I_ш$. Следовательно,

$$R_ш = R_а/(n - 1),$$

где $n = I/I_а$. Подставив числовые значения, найдем $R_ш = 0{,}2$ Ом.

577. Вольтметр, рассчитанный на измерение напряжений до $U_в = 30$ В, имеет внутреннее сопротивление $R_в = 3{,}0$ кОм. Найти сопротивление $R_д$ добавочного резистора.

Р е ш е н и е. Если измеряемое напряжение больше максимального $U_в$, на которое рассчитан вольтметр, то можно последовательно с ним включить добавочный резистор (рис. 184). Пусть $R_в$ – сопротивление вольтметра, $R_д$ – сопротивление добавочного резистора, $U_в$ – предел



Р и с. 184

измерения вольтметра, $U = nU_в$ – измеряемое напряжение, в n раз большее допустимого. Поскольку вольтметр и добавочный резистор соединены последовательно, то $U = U_в + U_д$, отсюда

$$U_д = U - U_в = nU_в - U_в = U_в(n - 1).$$

Сила тока, проходящего через вольтметр и добавочный резистор, одна и та же. Поэтому, используя закон Ома для участка цепи, будем иметь

$$\frac{U_в}{R_в} = \frac{U_в(n-1)}{R_д},$$

откуда $R_д = R_в(n - 1)$, $R_д = 27$ кОм.

578. При температуре $t_1 = 20$ °C сопротивление платиновой проволоки $R_1 = 20$ Ом, а при температуре $t_2 = 500$ °C $R_2 = 59$ Ом. Найти значение температурного коэффициента сопротивления платины.

Р е ш е н и е. Выражения для сопротивления проволоки при температурах t_1 и t_2 имеют соответственно вид:

$$R_1 = R_0(1 + \alpha t_1), \; R_2 = R_0(1 + \alpha t_2),$$

где R_0 – сопротивление проволоки при 0 °C; α – температурный коэффициент сопротивления. Разделив почленно первое равенство на второе, получим

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}.$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{R_2 - R_1}{R_1 t_2 - R_2 t_1}, \; \alpha = 4{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}.$$

579. В цепи, схема которой изображена на рис 185, сопротивления резисторов R1, R2, R3 равны соответственно 2, 4 и 6 Ом; ЭДС источника тока $\mathcal{E} = 10$ В, его внутреннее сопротивление $r = 0{,}4$ Ом. Что покажет амперметр? Сопротивлением амперметра пренебречь.

Р е ш е н и е. *I способ.* Амперметр покажет силу тока I_3, идущего через резистор R3. Пусть I_1 – сила тока, идущего через резистор R1. В узле B он разветвляется на токи силой I_2 и I_3, поэтому

$$I_1 = I_2 + I_3. \qquad (1)$$

Напряжения на резисторах R2 и R3 равны, т. е.

$$I_2 R_2 = I_3 R_3. \qquad (2)$$

Решив совместно уравнения (1) и (2), получим

$$I_3 = I_1 R_2 / (R_2 + R_3). \qquad (3)$$

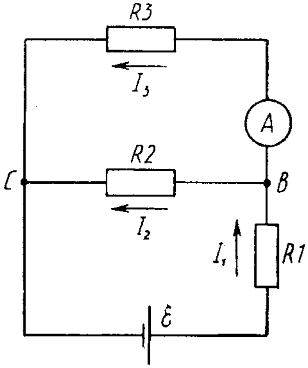


Рис 185

Силу тока I_1 найдем по закону Ома для замкнутой цепи:

$$I_1 = \mathscr{E}/(R + r), \qquad (4)$$

где R – сопротивление внешней части цепи; r – внутреннее сопротивление источника. Учитывая, что R2 и R3 соединены параллельно, а R1 – последовательно с ними, нетрудно найти, что

$$R = R_1 + R_2 R_3 / (R_2 + R_3).$$

Подставив это значение в формулу (4), получим

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}(R_2 + R_3)}{(R_2 + R_3)(R_1 + r) + R_2 R_3}.$$

Тогда, согласно формуле (3), будем иметь:

$$I_3 = \frac{\mathscr{E} R_2}{(R_2 + R_3)(R_1 + r) + R_2 R_3}, \; I_3 = 0{,}8 \text{ А}.$$

II способ. Для узла B на основании первого правила Кирхгофа составим уравнение:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \qquad (1)$$

Обходя контуры $BR_2C\mathscr{E}R_1B$ и BR_3CR_2B против часовой стрелки, на основании второго правила Кирхгофа составим уравнения:

$$I_2 R_2 + I_1 r + I_1 R_1 = \mathscr{E}, \; I_3 R_3 - I_2 R_2 = 0. \qquad (2)$$

Подставив в уравнения (1), (2) числовые значения заданных величин, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0,\\ 4I_2 + 2{,}4I_1 &= 10,\\ 6I_3 - 4I_2 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

решив которую, найдем $I_3 = 0{,}8$ А.

580. Несколько источников тока соединены так, как показано на рис. 186. Каковы показания амперметра и вольтметра? Сопротивление вольтметра считать бесконечно большим. Сопротивлением амперметра и соединительных проводов пренебречь. Рассмотреть два случая: когда все источники тока одинаковы и когда они имеют различные ЭДС и различные внутренние сопротивления.

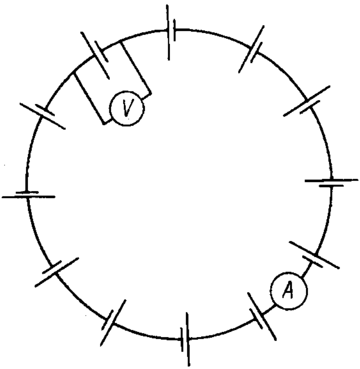


Рис. 186

Решение. Если все n источников одинаковы, то сила тока в цепи

$$I = \frac{n\mathscr{E}}{nr} = \frac{\mathscr{E}}{r}.$$

Таково показание амперметра.

Как следует из закона Ома для замкнутой цепи, вольтметр покажет на зажимах источника напряжение $U = \mathscr{E} - Ir$. Подставив сюда значения силы тока, получим $U = 0$.

Если все источники различны, то сила тока в цепи

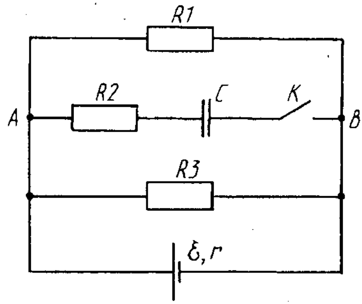
$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots + \mathscr{E}_n}{r_1 + r_2 + \ldots + r_n}.$$

В этом случае вольтметр покажет $U_1 \neq 0$.

581. В цепи, схема которой приведена на рис. 187, сопротивления резисторов R1, R2, R3 – соответственно $R_1 = R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 5$ Ом, ЭДС источника $\mathscr{E} = 34$ В, его внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом, емкость конденсатора $C = 20$ мкФ. Определить, какой заряд q пройдет через ключ К при его замыкании.

Решение. При замкнутом ключе конденсатор зарядится до некоторого напряжения U, после чего ток через резистор R2 проходить не будет. Напряжение U на конденсаторе равно напряжению между точками A и B. Между этими точками параллельно включены резисторы R1 и R3 (ток через R2 не идет). Поэтому

$$U = I\frac{R_1R_3}{R_1 + R_3}.$$



Р и с. 187

Заряд на конденсаторе

$$q = CU = CI\frac{R_1R_3}{R_1 + R_3}.$$

Силу тока найдем по закону Ома для замкнутой цепи:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_1R_3/(R_1 + R_3) + r}.$$

Подставив это значение в выражение для заряда, получим:

$$q = \frac{C\mathscr{E}}{1 + r\dfrac{R_1 + R_3}{R_1R_3}},\ q = 4\cdot10^{-4}\ \text{Кл}.$$

582. ЭДС батареи $\mathscr{E} = 16$ В, внутреннее сопротивление $r = 3{,}0$ Ом. Найти сопротивление внешней части цепи, если известно, что в ней выделяется мощность $P_1 = 16$ Вт. Определить КПД батареи.

Р е ш е н и е. Мощность, выделяемая во внешней части цепи (полезная мощность), $P_1 = I^2R$, где R – внешнее сопротивление. Силу тока найдем по закону Ома для замкнутой цепи:

$$I = \mathscr{E}/(R + r).$$

Тогда

$$P_1 = \frac{\mathscr{E}^2R}{(R+r)^2},\ \text{или}\ R^2 + \left(2r - \frac{\mathscr{E}^2}{P_1}\right)R + r^2 = 0.$$

Подставим числовые значения заданных величин в это квадратное уравнение и решим его относительно R:

$$R^2 + \left(2\cdot 3 - \frac{16^2}{16}\right)R + 3^2 = 0,\ R^2 - 10R + 9 = 0,$$

$$R_1 = 1\ \text{Ом},\ R_2 = 9\ \text{Ом}.$$

КПД будет иметь два значения, соответствующих двум найденным значениям внешнего сопротивления:

$$\eta_1 = \frac{R_1}{R_1 + r} = 0{,}25, \ \eta_2 = \frac{R_2}{R_2 + r} = 0{,}75.$$

583. ЭДС источника тока $\mathscr{E} = 1{,}6$ В, его внутреннее сопротивление $r = 0{,}5$ Ом. Чему равен КПД источника при силе тока $I = 2{,}4$ А?

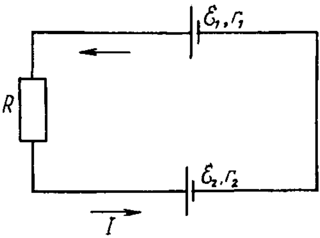
Р е ш е н и е. Полная мощность, развиваемая источником тока, $P = I\mathscr{E}$. Внутри источника выделяется мощность $P_2 = I^2\mathscr{E}$. Следовательно, полезная мощность, выделяемая на внешнем участке цепи,

$$P_1 = I\mathscr{E} - I^2 r.$$

КПД источника при силе тока I

$$\eta = \frac{P_1}{P} = \frac{I\mathscr{E} - I^2 r}{I\mathscr{E}} = 1 - \frac{Ir}{\mathscr{E}}, \ \eta = 0{,}3.$$

584. В цепи, схема которой дана на рис. 188, ЭДС и внутреннее сопротивление первого источника тока — соответственно $\mathscr{E}_1 = 2$ В и $r_1 = 1$ Ом, второго источника — $\mathscr{E}_2 = 1$ В и $r_2 = 0{,}5$ Ом. Сопротивление внешнего участка цепи $R = 3{,}5$ Ом. Найти силу тока в цепи и напряжение на зажимах каждого источника.



Р и с. 188

Р е ш е н и е. Данная цепь содержит два последовательно соединенных источника тока. Будем считать положительным направление обхода цепи против часовой стрелки. Тогда $\mathscr{E}_1 > 0$, $\mathscr{E}_2 < 0$, и полная ЭДС в цепи $\mathscr{E} = |\mathscr{E}_1| - |\mathscr{E}_2|$. Согласно закону Ома, сила тока

$$I = \frac{|\mathscr{E}_1| - |\mathscr{E}_2|}{R + r_1 + r_2}. \quad (1)$$

Поскольку $|\mathscr{E}_1| > |\mathscr{E}_2|$, ток внутри первого источника направлен от отрицательного полюса к положительному, поэтому напряжение на его зажимах

$$U_1 = \mathscr{E}_1 - Ir_1. \quad (2)$$

Внутри второго источника ток направлен от положительного полюса к отрицательному, поэтому напряжение на его зажимах

$$U_2 = \mathscr{E}_2 + Ir_2. \qquad (3)$$

Вычисления по формулам (1)–(3) дают: $I = 0{,}2$ А, $U_1 = 2$ В, $U_2 = 1$ В.

585. Батарея, состоящая из двух одинаковых параллельно соединенных элементов с ЭДС $\mathscr{E} = 2$ В, замкнута резистором, сопротивление которого $R = 1{,}4$ Ом. Внутренние сопротивления элементов $r_1 = 1$ Ом и $r_2 = 1{,}5$ Ом. Найти силу тока в каждом элементе и во всей цепи.

Решение. При параллельном соединении одинаковых элементов батарея имеет такую же ЭДС, как и ЭДС одного элемента. Внутреннее же сопротивление батареи рассчитывают по обычному правилу параллельного соединения сопротивлений. Согласно закону Ома, сила тока в цепи (рис. 189)

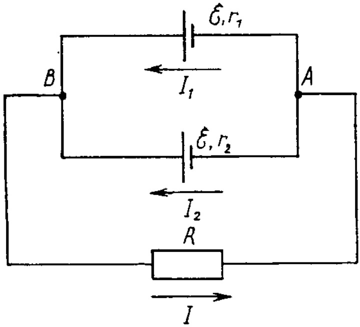


Рис. 189

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R + r_1 r_2/(r_1 + r_2)}, \quad I = 1 \text{ А}.$$

Этот ток разветвляется в точке A на токи силой I_1 и I_2, которые обратно пропорциональны сопротивлениям r_1 и r_2. Имеем:

$$I_1 + I_2 = I, \quad I_1 r_1 = I_2 r_2.$$

Подставив в эти уравнения значения I, r_1 и r_2 и решив полученную систему, найдем: $I_1 = 0{,}6$ А, $I_2 = 0{,}4$ А.

586. К разноименным полюсам батареи, ЭДС которой $\mathscr{E} = 120$ В и внутреннее сопротивление $r = 10$ Ом, подключены два провода с одинаковыми сопротивлениями $R = 20$ Ом. Свободные концы проводов и их середины соединены друг с другом через две лампочки сопротивлением $R_1 = 200$ Ом каждая. Найти силу тока, идущего через батарею, и силы токов, проходящих через лампочки.

Решение. Схема соединения показана на рис. 190. Обозначим на схеме направления токов I, I_1 и I_2, проходящих через батарею, провода и лампочки. Обходя контуры

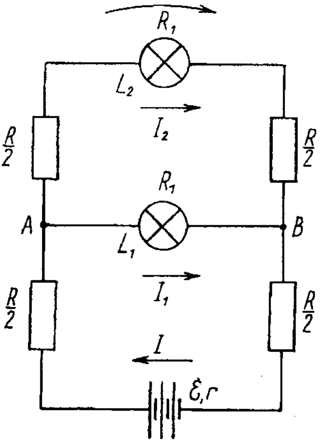


Рис. 190

$AL_1B\mathscr{E}A$ и AL_2BL_1A по часовой стрелке, составляем по второму правилу Кирхгофа уравнения:

$$Ir + I\frac{R}{2} + I_1R_1 + I\frac{R}{2} = \mathscr{E}, \quad (1)$$

$$I_2R_1 + I_2\frac{R}{2} - I_1R_1 + I_2\frac{R}{2} = 0. \quad (2)$$

По первому правилу Кирхгофа составим уравнение для узла A:

$$I - I_1 - I_2 = 0. \quad (3)$$

Упростив уравнения (1) и (2) и добавив к ним уравнение (3), получим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\left.\begin{array}{l} I(R + r) + I_1R_1 = \mathscr{E}, \\ I_2(R_1 + r) = I_1R_1, \\ I - I_1 - I_2 = 0. \end{array}\right\}$$

Подставив числовые значения величин, получим:

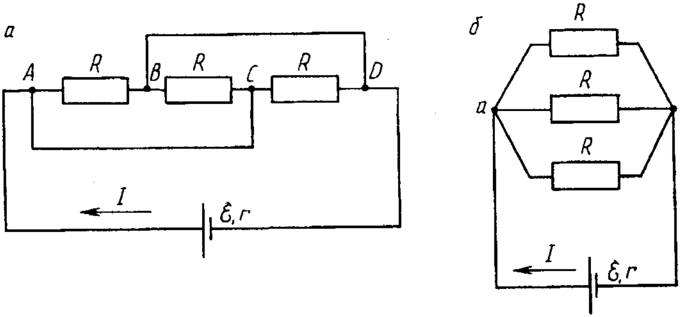
$$\left.\begin{array}{l} 30I + 200I_1 = 120, \\ 220I_2 = 200I_1, \\ I - I_1 - I_2 = 0. \end{array}\right\}$$

Отсюда найдем: $I = 0{,}89$ А, $I_1 = 0{,}47$ А, $I_2 = 0{,}42$ А.

Предлагаем читателю решить эту задачу, не применяя правил Кирхгофа, а используя закон Ома для замкнутой цепи.

587. К источнику, ЭДС которого $\mathscr{E} = 18$ В и внутреннее сопротивление $r = 0{,}5$ Ом, подключены три одинаковых проводника сопротивлением $R = 4{,}5$ Ом каждый, соединенных по схеме, показанной на рис. 191, *а*. Сопротивлением соединительных проводов AC и BD пренебречь. Определить силы токов, проходящих через каждый проводник.

Решение. В заданной цепи точки A и C имеют одинаковый потенциал, поэтому их можно объединить. Одинаковый потенциал имеют и точки B, D. Объединив точки A и C, а также B и D, получим схему (рис. 191, *б*), на



Р и с. 191

которой тип соединения проводников очевиден. Теперь задача решается просто. Поскольку проводники соединены параллельно, их общее сопротивление равно $R/3$. По закону Ома сила тока

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R/3 + r}.$$

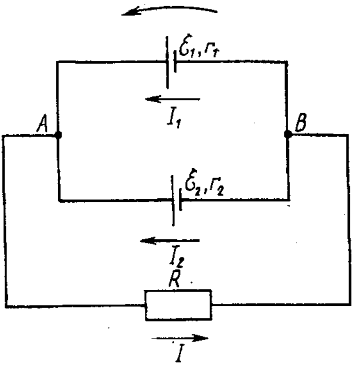
Этот ток разветвляется в точке a, и по каждому проводнику проходит ток силой

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{I}{3} = \frac{\mathscr{E}}{R + 3r} = 3\ \text{А}.$$

588. Два элемента, ЭДС которых $\mathscr{E}_1 = 6$ В и $\mathscr{E}_2 = 12$ В и внутренние сопротивления $r_1 = 0{,}2$ Ом и $r_2 = 0{,}5$ Ом, соединены параллельно и замкнуты на резистор сопротивлением $R = 4$ Ом (рис. 192). Найти силу тока в каждом элементе и в резисторе.

Р е ш е н и е. Обозначим произвольно направления токов силой I, I_1, I_2. Обходя контуры $B\mathscr{E}_1A\mathscr{E}_2B$ и $A\mathscr{E}_2BRA$ против часовой стрелки, по второму правилу Кирхгофа составим уравнения:

$$I_1r_1 - I_2r_2 = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2,$$
$$IR + I_2r_2 = \mathscr{E}_2.$$



Р и с. 192

Добавим к ним уравнение для узла A, составленное по первому правилу Кирхгофа:

$$I_1 + I_2 - I = 0,$$

и, подставив числовые значения сопротивлений, получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}2I_1 - 0{,}5I_2 = -6, \\ 4I + 0{,}5I_2 = 12, \\ I_1 + I_2 - I = 0. \end{array}\right\}$$

Решив эту систему, найдем: $I = 2$ А, $I_1 = -7$ А, $I_2 = 9$ А. Минус перед I_1 указывает на то, что действительное направление тока силой I_1 противоположно произвольно обозначенному.

589. Имеется источник тока с ЭДС, равной $\mathscr{E}$, и внутренним сопротивлением r, замкнутый на реостат (рис. 193). Выразить мощность P_1, выделяемую во внешней части цепи, как функцию силы тока I. Построить график этой функции. При какой силе тока эта мощность будет максимальной?

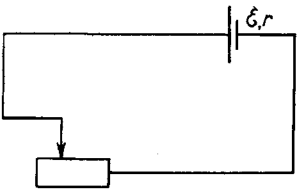


Рис. 193

Решение. Развиваемая источником полная мощность $P = I\mathscr{E}$. Часть этой мощности $P_2 = I^2 r$ выделяется внутри источника, остальная — во внешней части цепи:

$$P_1 = I\mathscr{E} - I^2 r. \qquad (1)$$

Графиком этой функции является парабола, обращенная ветвями вниз. Для построения графика преобразуем выражение (1):

$$P_1 = -r\left(I^2 - 2\frac{\mathscr{E}}{2r}I + \frac{\mathscr{E}^2}{4r^2} - \frac{\mathscr{E}^2}{4r^2}\right) = -r\left(I - \frac{\mathscr{E}}{2r}\right)^2 + \frac{\mathscr{E}^2}{4r^2}.$$

Отсюда видно, что координаты вершины параболы (рис. 194) $I_1 = \mathscr{E}/(2r)$, $P_{1m} = \mathscr{E}^2/(4r)$. Следовательно, при токе силой

$$I_1 = \mathscr{E}/(2r) \qquad (2)$$

мощность, выделяемая во внешней части цепи, будет иметь максимальное значение: $P_{1m} = \mathscr{E}^2/(4r)$.

Пусть внешний участок цепи имеет такое сопротивление R, при котором сила тока равна I_1. Тогда по закону Ома для замкнутой цепи

$$I_1 = \mathscr{E}/(R + r).$$

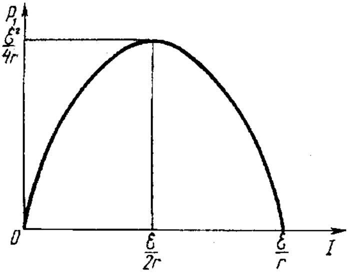


Рис. 194

Сравнивая это выражение с формулой (2), находим, что $R = r$. Таким образом, мы приходим к важному выводу: полезная мощность (мощность, выделяемая на внешнем участке цепи) максимальна в том случае, когда внутреннее сопротивление источника равно сопротивлению внешнего участка цепи. При этом КПД источника

$$\eta = \frac{R}{R + r} = \frac{r}{2r} = 0{,}5, \text{ или } \eta = 50\,\%.$$

Из графика, приведенного на рис. 194, также видно, что каждому значению полезной мощности, кроме максимального, соответствуют два значения сопротивления внешнего участка цепи. При силе тока короткого замыкания $I_0 = \mathscr{E}/r$ полезная мощность равна нулю.

590. Нагреватель кипятильника состоит из четырех секций. Сопротивление каждой секции $R = 1$ Ом. Нагреватель питается от аккумуляторной батареи, ЭДС которой $\mathscr{E} = 8$ В и внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Как следует подключить элементы нагревателя, чтобы вода в кипятильнике нагрелась в максимально короткий срок? Каковы при этом полная мощность, расходуемая аккумулятором, и его КПД?

Решение. В решении задачи 589 показано, что максимальную полезную мощность источник дает в том случае, когда сопротивление внешнего участка цепи равно внутреннему сопротивлению источника. Следовательно, чтобы вода нагрелась в максимально короткий срок, нужно секции включить так, чтобы их общее сопротивление r было равно 1 Ом. Это условие выполняется, если включить только одну секцию или соединить секции в две параллельные ветви по две секции в каждой. При этом аккумулятор расходует мощность

$$P = I\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}}{2R}\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}^2}{2R}, \; P = 32 \text{ Вт}.$$

Как показано в решении задачи 589, КПД кипятильника $\eta = 50\%$.

591. ЭДС батареи $\mathscr{E} = 12$ В. Наибольшая сила тока, которую может дать батарея, $I_m = 10$ А. Определить максимальную мощность, которая может выделяться во внешней цепи.

Р е ш е н и е. В решении задачи 589 показано, что максимальная мощность, которая может выделяться во внешней цепи,

$$P_{1m} = \mathscr{E}^2/(4r),$$

где r — внутреннее сопротивление источника.

Из закона Ома для замкнутой цепи $I = \mathscr{E}/(R + r)$ видно, что сила тока будет наибольшей при $R = 0$ (короткое замыкание). В этом случае $I_m = I_0 = \mathscr{E}/r$. Отсюда $r = \mathscr{E}/I_m$. Подставив это значение в формулу мощности, получим:

$$P_{1m} = \frac{\mathscr{E}I_m}{4},\ P_{1m} = 30 \text{ Вт}.$$

592. Электрическая плитка имеет сопротивление $R = 50$ Ом и питается от сети, напряжение которой $U = 220$ В. КПД плитки $\eta = 0{,}8$. Сколько времени надо нагревать на этой плитке лед массой $m = 2$ кг, взятый при температуре $T_1 = 263$ К, чтобы превратить его в воду, а полученную воду довести до кипения и превратить в пар? Удельная теплоемкость льда $c_1 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c_2 = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $r = 22{,}6 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Р е ш е н и е. Учитывая КПД, составляем уравнение теплового баланса:

$$\eta Q_1 = Q_2, \tag{1}$$

где Q_1 — количество теплоты, выделяемое плиткой; Q_2 — количество теплоты, затраченное на нагревание льда до температуры плавления $T_{\text{пл}} = 273$ К, на плавление льда, нагревание полученной воды до температуры кипения $T_{\text{к}} = 373$ К и испарение воды.

Если плитка была включена в течение времени t, то

$$Q_1 = \frac{U^2}{R}t. \tag{2}$$

Составим выражение для Q_2:

$$Q_2 = c_1 m(T_{пл} - T_1) + \lambda m + c_2 m(T_к - T_{пл}) + rm. \quad (3)$$

Подставив значения (2) и (3) в уравнение (1), найдем:

$$t = \frac{Rm(c_1(T_{пл} - T_1) + \lambda + c_2(T_к - T_{пл}) + r)}{\eta U^2},$$

$$t = 8 \cdot 10^3 \text{ с} = 2 \text{ ч}.$$

593. Два потребителя, сопротивления которых R_1 и R_2, подключаются к сети постоянного тока первый раз параллельно, а второй последовательно. В каком случае потребляется бо́льшая мощность от сети? Отдельно рассмотреть случай, когда $R_1 = R_2$.

Р е ш е н и е. Потребляемая от сети мощность

$$P = U^2/R, \quad (1)$$

где U – напряжение в сети; R – общее сопротивление потребителей.

При параллельном соединении потребителей их общее сопротивление $R' = R_1R_2/(R_1 + R_2)$, а при последовательном $R'' = R_1 + R_2$. В первом случае, согласно выражению (1), потребляется мощность

$$P_1 = \frac{U^2(R_1 + R_2)}{R_1R_2}, \quad (2)$$

а во втором

$$P_2 = \frac{U^2}{R_1 + R_2}. \quad (3)$$

Разделив почленно равенство (2) на (3), получим

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1R_2} = \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} + 2 \geqslant 4. \quad (4)$$

Таким образом, при параллельном подключении нагрузок потребляется бо́льшая мощность от сети, чем при последовательном.

Из формулы (4) следует, что при $R_1 = R_2$ будем иметь $P_1/P_2 = 4$, т. е. две параллельно соединенные одинаковые нагрузки потребляют от сети в 4 раза бо́льшую мощность, чем те же нагрузки, соединенные последовательно.

594. Обмотка электродвигателя постоянного тока сделана из провода общим сопротивлением $R = 2$ Ом. По обмотке работающего двигателя, включенного в сеть с напряжением $U = 110$ В, идет ток силой $I = 10$ А. Какую мощность потребляет двигатель? Каков КПД двигателя?

Р е ш е н и е. Электродвигатель потребляет мощность

$$P = IU,\ P = 1{,}1 \cdot 10^3 \text{ Вт}.$$

Часть этой мощности затрачивается на нагревание провода обмотки: $P_1 = I^2R$, остальная мощность P_2 – полезная (превращается в механическую мощность). На основании закона сохранения и превращения энергии $IU = I^2R + P_2$. Отсюда $P_2 = IU - I^2R$. Следовательно, КПД электродвигателя

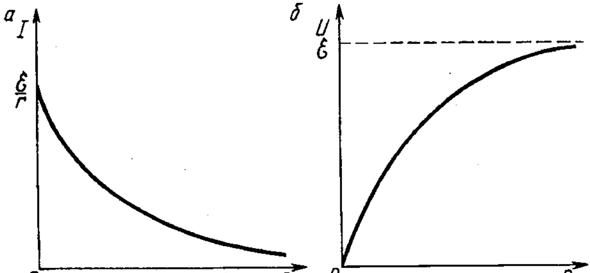
$$\eta = \frac{P_2}{P} = \frac{IU - I^2R}{IU} = 1 - \frac{IR}{U},\ \eta = 0{,}8.$$

595. Замкнутая цепь состоит из источника тока, ЭДС которого $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r, и реостата (см. рис. 193). Построить графики зависимости силы тока в цепи и напряжения на зажимах источника от внешнего сопротивления R.

Р е ш е н и е. По закону Ома для замкнутой цепи

$$I = \mathcal{E}/(R + r).$$

В соответствии с этой формулой график зависимости $I = f(R)$ показан на рис. 195, *а*.



Р и с. 195

Выразим напряжение на зажимах источника как функцию R:

$$U = \mathcal{E} - Ir = \mathcal{E} - \frac{\mathcal{E}r}{R + r} = \frac{\mathcal{E}}{1 + r/R}.$$

График этой функции показан на рис. 195, *б*.

596. Найти напряжения на конденсаторах емкостями C_1 и C_2 в цепи, показанной на рис. 196, если известно, что при коротком замыкании сила тока, проходящего через источник, возрастает в n раз.

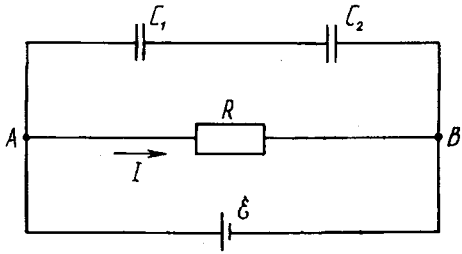


Рис. 196

Решение. Конденсаторы соединены последовательно, поэтому заряды на них одинаковы:

$$q = C_1U_1 = C_2U_2, \tag{1}$$

где U_1, U_2 – напряжения на первом и втором конденсаторах соответственно.

Пусть U – напряжение на резисторе (между точками A и B). Тогда

$$U = U_1 + U_2, \tag{2}$$

так как последовательно соединенные конденсаторы включены параллельно резистору.

Решив совместно уравнения (1) и (2) относительно U_1 и U_2, получим:

$$U_1 = \frac{UC_2}{C_1 + C_2}, \quad U_2 = \frac{UC_1}{C_1 + C_2}. \tag{3}$$

В ветви AC_1C_2B ток отсутствует, поэтому, как следует из закона Ома для замкнутой цепи,

$$U = \mathscr{E} - Ir, \tag{4}$$

где $\mathscr{E}$ – ЭДС источника; I – сила тока, проходящего через резистор и источник; r – внутреннее сопротивление источника.

Согласно условию, $I = I_0/n$, где I_0 – сила тока при коротком замыкании. Так как $I_0 = \mathscr{E}/r$, то

$$I = \mathscr{E}/(nr). \qquad (5)$$

Из формул (4) и (5) находим

$$U = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\mathscr{E} = \frac{(n-1)\mathscr{E}}{n}.$$

Подставив это значение U в выражения (3), найдем напряжения на конденсаторах:

$$U_1 = \frac{(n-1)\mathscr{E}C_2}{n(C_1 + C_2)}, \quad U_2 = \frac{(n-1)\mathscr{E}C_1}{n(C_1 + C_2)}.$$

597. Через двухэлектродную лампу (диод) с плоскими электродами идет ток силой I = 10 мА. Напряжение на лампе U = 100 В. С какой силой действуют на анод лампы падающие на него электроны, если скорость их вблизи катода равна нулю? Отношение заряда электрона к его массе $e/m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

Решение. Пусть $\vec{v}_1$ – скорость электрона в момент соударения его с анодом. За время t при силе тока I число соударений

$$N = \frac{q}{e} = \frac{It}{e}, \qquad (1)$$

где q – заряд, переносимый N электронами; e – заряд электрона.

По второму закону Ньютона импульс силы, действующей со стороны анода на электроны при соударениях, равен изменению суммарного импульса электронов:

$$\vec{F}t = N(m_e\vec{v}_2 - m_e\vec{v}_1),$$

где m_e – масса электрона; $\vec{v}_2$ – скорость электрона после соударения. В проекциях на координатную ось, направленную от анода к катоду, это уравнение будет иметь вид

$$Ft = N(m_e v_2 + m_e v_1),$$

или с учетом того, что $v_2 = 0$,

$$Ft = Nm_e v_1, \qquad (2)$$

где F – модуль суммарной силы, с которой анод действует на электроны. Согласно третьему закону Ньютона, с такой же по модулю силой действуют электроны на анод. Из соотношений (1) и (2) получим

$$F = Im_e v_1 / e. \qquad (3)$$

Найдем модуль скорости $\vec{v}_1$, исходя из того, что изменение кинетической энергии электрона в промежутке между анодом и катодом равно работе электрического поля:

$$m_e v_1^2 / 2 = eU.$$

Отсюда $v_1 = \sqrt{2eU/m_e}$. Подставив это значение скорости в формулу (3), получим:

$$F = \frac{Im_e}{e}\sqrt{\frac{2eU}{m_e}} = I\sqrt{\frac{2U}{e/m_e}}, \; F = 3{,}4 \cdot 10^{-7} \text{ Н}.$$

598. Резистор и конденсатор соединены последовательно с аккумулятором; при этом заряд на обкладках конденсатора $q_1 = 60 \cdot 10^{-5}$ Кл. Если же резистор и конденсатор подключить к аккумулятору параллельно, то заряд на обкладках конденсатора $q_2 = 40 \cdot 10^{-5}$ Кл. Найти внутреннее сопротивление аккумулятора, если сопротивление резистора $R = 45$ Ом.

Решение. В первом случае (рис. 197, *а*) тока в цепи нет, напряжение на конденсаторе равно ЭДС источника $\mathscr{E}$, поэтому заряд на конденсаторе емкостью C

$$q_1 = CU_1 = C\mathscr{E}. \qquad (1)$$

Во втором случае (рис. 197, *б*) отсутствует ток в ветви ACB, напряжение на конденсаторе такое же, как и на подключенном к нему параллельно резисторе, т. е. $U_2 = IR$, где I — сила тока. Ее мы найдем по закону Ома для замкнутой цепи:

$$I = \mathscr{E}/(R + r),$$

где r — внутреннее сопротивление аккумулятора. Тогда

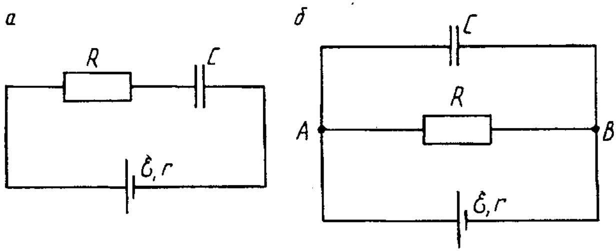


Рис. 197

$$U_2 = \mathscr{E}R/(R+r),$$

а заряд на конденсаторе

$$q_2 = CU_2 = C\mathscr{E}R/(R+r). \qquad (2)$$

На основании выражений (1) и (2) получим уравнение

$$q_2 = q_1 R/(R+r),$$

решив которое относительно r, найдем:

$$r = R(q_1 - q_2)/q_2, \; r = 23 \text{ Ом}.$$

599. Дуговая лампа горит под напряжением $U = 80$ В и потребляет мощность $P = 800$ Вт. На сколько повысится температура подводящих проводов через промежуток времени $\tau = 1$ мин после включения лампы, если проводка выполнена медным проводом, площадь поперечного сечения которого $S = 4$ мм^2? Половина выделившегося количества теплоты отдается окружающей среде. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, плотность меди $D = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость $c = 395$ Дж/(кг · К).

Решение. По проводам проходит ток силой $I = P/U$. За время τ в них, согласно закону Джоуля–Ленца, выделится количество теплоты

$$Q_1 = I^2 R\tau = \frac{P^2}{U^2} R\tau,$$

где R – сопротивление проводов: $R = \rho \frac{l}{S}$; l – длина проводов. Выразим l через объем V и площадь поперечного сечения S: $l = V/S$. А так как объем меди $V = m/D$, где m – масса меди, D – ее плотность, то

$$l = \frac{m}{DS}, \; R = \frac{\rho m}{DS^2}.$$

Следовательно,

$$Q_1 = \frac{P^2 \rho m \tau}{U^2 DS^2}. \qquad (1)$$

Количество теплоты, затраченное на нагревание меди на ΔT,

$$Q_2 = cm\Delta T. \qquad (2)$$

Учитывая условие $Q_2 = \eta Q_1$, где $\eta = 0{,}5$, получаем на основании выражений (1) и (2)

$$cm\Delta T = \eta \frac{P^2 \rho m \tau}{U^2 D S^2}.$$

Отсюда

$$\Delta T = \frac{\eta P^2 \rho \tau}{U^2 S^2 c D}, \ \Delta T = 0{,}9 \text{ К}.$$

600. Источник тока, ЭДС которого $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r, замкнут на внешнюю цепь. При изменении ее сопротивления сила тока I в цепи также изменяется. Найти зависимость КПД источника от силы тока I. Начертить график этой зависимости.

Решение. КПД источника тока

$$\eta = P_1/P, \qquad (1)$$

где P_1 – мощность, выделяемая на внешней цепи (полезная мощность); P – полная мощность, развиваемая источником. Полезную мощность P_1 можно выразить как разность между полной мощностью и мощностью P_2, выделяемой внутри источника: $P_1 = P - P_2$.

При силе тока I и ЭДС $\mathscr{E}$ будем иметь:

$$P = I\mathscr{E}, \ P_2 = I^2 r,$$

где r – внутреннее сопротивление источника. Тогда

$$P_1 = I\mathscr{E} - I^2 r.$$

Подставив значения P_1 и P_2 в формулу (1), получим:

$$\eta = \frac{I\mathscr{E} - I^2 r}{I\mathscr{E}}, \text{ или } \eta = 1 - \frac{r}{\mathscr{E}} I.$$

Графиком зависимости КПД источника η от силы тока I является прямая (рис. 198). Из рисунка, в частности, видно, что при силе тока $I_0 = \mathscr{E}/r$, т. е. при коротком замыкании, КПД источника равен нулю.

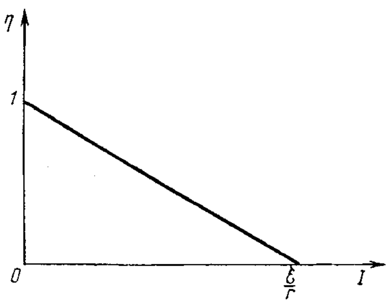
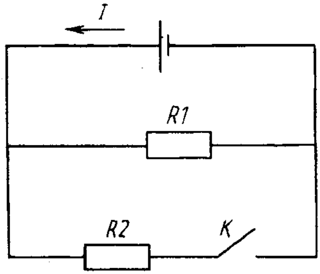


Рис. 198

601. В цепи, схема которой изображена на рис. 199, тепловая мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова при замкнутом и разомкнутом ключе К.



Р и с. 199

Определить внутреннее сопротивление источника, если $R_1 = 12$ Ом, $R_2 = 4$ Ом.

Р е ш е н и е. Выделяемая во внешней цепи тепловая мощность

$$P = I^2 R,$$

где I – сила тока; R – сопротивление внешней цепи.

При замкнутом ключе внешняя цепь состоит из двух соединенных параллельно резисторов, и ее сопротивление, следовательно,

$$R = R_1 R_2 / (R_1 + R_2). \tag{1}$$

Во внешней цепи в этом случае выделяется мощность

$$P_1 = I_1^2 R = \left(\frac{\mathscr{E}}{R + r}\right)^2 R, \tag{2}$$

где $\mathscr{E}$ – ЭДС источника тока; r – его внутреннее сопротивление.

При разомкнутом ключе внешняя цепь состоит из одного резистора, сопротивление которого R_1, поэтому в ней выделяется мощность

$$P_2 = I_2^2 R_1 = \left(\frac{\mathscr{E}}{R_1 + r}\right)^2 R_1. \tag{3}$$

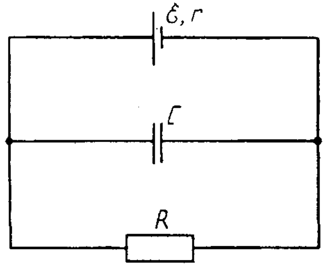
Учитывая, что $P_1 = P_2$, на основании формул (2) и (3) получаем

$$\frac{\mathscr{E}^2 R}{(R + r)^2} = \frac{\mathscr{E}^2 R_1}{(R_1 + r)^2}.$$

Решив это уравнение относительно r, найдем $r = \sqrt{R_1 R}$. Подставив значение R из формулы (1), получим:

$$r = \sqrt{\frac{R_1^2 R_2}{R_1 + R_2}}, \quad r = 6 \text{ Ом}.$$

602. Батарея аккумуляторов замкнута резистором, параллельно которому присоединен конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ (рис. 200). Определить ЭДС батареи, если заряд на конденсаторе $q = 4{,}6 \times 10^{-4}$ Кл, а в резисторе выделяется мощность $P = 23$ Вт и известно, что сила тока при коротком замыкании батареи $I_0 = 5{,}0$ А.



Р и с. 200

Р е ш е н и е. ЭДС равна сумме падений напряжения на внешнем и внутреннем участках цепи:

$$\mathscr{E} = U + Ir, \qquad (1)$$

где U – падение напряжения на резисторе; I – сила тока в цепи; r – внутреннее сопротивление батареи.

Падение напряжения на резисторе равно напряжению на конденсаторе:

$$U = q/C. \qquad (2)$$

Выделяемая в резисторе мощность $P = IU$. Отсюда сила тока

$$I = P/U = PC/q. \qquad (3)$$

Сила тока при коротком замыкании $I_0 = \mathscr{E}/r$, откуда

$$r = \mathscr{E}/I_0. \qquad (4)$$

Подставив в уравнение (1) значения (2)–(4), получим

$$\mathscr{E} = \frac{q}{C} + \frac{PC\mathscr{E}}{qI_0}. \qquad (5)$$

Решив уравнение (5) относительно $\mathscr{E}$, найдем:

$$\mathscr{E} = \frac{q^2 I_0}{C(qI_0 - PC)}, \; \mathscr{E} = 51 \text{ В}.$$

603. Электродуговая печь потребляет ток силой $I = 200$ А от сети с напряжением $U = 220$ В. Последовательно с печью включен ограничивающий резистор сопротивлением $R = 0{,}2$ Ом. Определить мощность, потребляемую печью.

Р е ш е н и е. Сила тока, проходящего через резистор, равна I, так как резистор включен последовательно с печью. Значит, в нем выделяется мощность $P_1 = I^2R$. Печь вместе с резистором потребляет мощность $P = IU$. Следовательно, потребляемая печью мощность

$$P_2 = P - P_1 = IU - I^2R.$$

После подстановки числовых значений величин получим $P_2 = 3{,}6 \cdot 10^4$ Вт.

604. Электрическая плитка мощностью $P_1 = 550$ Вт для сети с напряжением $U_1 = 220$ В была включена в сеть с напряжением $U_2 = 127$ В. Какая мощность потребляется плиткой при таком включении? На сколько нужно укоротить спираль, чтобы плитка потребляла мощность P_1 при напряжении U_2?

Решение. При заданном включении потребляемая плиткой мощность

$$P_2 = U_2^2/R_1, \qquad (1)$$

где R_1 − сопротивление плитки.

При включении в сеть с напряжением U_1 потребляемая мощность $P_1 = U_1^2/R_1$. Отсюда $R_1 = U_1^2/P_1$. Подставив это значение в формулу (1), получим:

$$P_2 = P_1(U_2/U_1)^2, \; P_2 = 185 \text{ Вт}.$$

Чтобы плитка потребляла мощность P_1 при напряжении $U_2 < U_1$, надо укоротить спираль на некоторую величину Δl, т. е. $l_2 = l_1 - \Delta l$. Поскольку сопротивление спирали прямо пропорционально ее длине, то

$$\frac{l_1 - \Delta l}{l_1} = \frac{R_2}{R_1}. \qquad (2)$$

При напряжении U_2 и сопротивлении R_2 мощность

$$P_1 = U_2^2/R_2.$$

Учитывая, что $P_1 = U_1^2/R_1$, получаем $U_1^2/R_1 = U_2^2/R_2$. Отсюда $R_2/R_1 = (U_2/U_1)^2$. Подставив значение этого отношения в формулу (2), будем иметь

$$\frac{l_1 - \Delta l}{l_1} = \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2,$$

откуда

$$\frac{\Delta l}{l_1} = 1 - \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2, \quad \frac{\Delta l}{l_1} = 0{,}67,$$

т. е. спираль надо укоротить на 0,67 ее длины.

605. Сколько времени нужно пропускать ток силой $I = 1{,}8$ А через раствор соли серебра, чтобы на $N = 12$ ложках, служащих катодом и имеющих площадь поверхности $S = 50$ см^2 каждая, отложился слой серебра толщиной $h = 0{,}058$ мм? Плотность серебра $\rho = 10{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, молярная масса серебра $M = 108 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, его валентность $n = 1$. Постоянная Фарадея $F = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль.

Р е ш е н и е. По закону Фарадея масса серебра, отложившегося на ложках,

$$m = \frac{1}{F}\frac{M}{n}It, \tag{1}$$

где t – время прохождения тока.

С другой стороны,

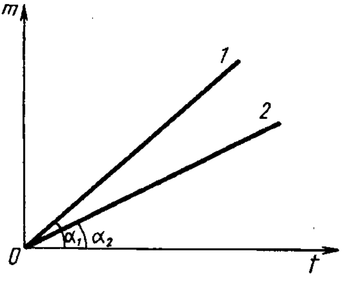
$$m = \rho V = \rho NSh, \tag{2}$$

где V – объем выделившегося серебра; h – толщина слоя.

Из выражений (1) и (2) следует, что

$$t = \frac{nF\rho NSh}{MI}, \; t = 1{,}8 \cdot 10^4 \text{ с} = 5 \text{ ч}.$$

606. На рис. 201 представлены графики зависимости массы двух различных веществ, выделяемых на электродах при электролизе, от времени прохождения тока через электролит. Какому из этих графиков (*1* или *2*) соответствует вещество с бо́льшим электрохимическим эквивалентом, если сила тока, проходящего через электролит, в обоих случаях одинакова? Ответ обосновать.



Р и с. 201

Р е ш е н и е. Согласно закону Фарадея, масса вещества, выделяемого на электроде за время t при силе тока I, $m = kIt$, где k – электрохимический эквивалент вещества. Отсюда следует, что график зависимости $m = f(t)$ есть прямая, составляющая с положительным направлением оси t такой угол α, что $\operatorname{tg}\alpha = kI$. Из рис. 201 видно, что $\alpha_1 > \alpha_2$. Следовательно, $k_1 I > k_2 I$ и $k_1 > k_2$, т. е. веществу с бо́льшим электрохимическим эквивалентом соответствует график *1*.

607. При электролизе раствора медного купороса на катоде за некоторое время выделилось $m = 2{,}0$ г меди при силе тока $I = 0{,}25$ А. Расстояние между прямоугольными электродами $l = 30$ см, площадь каждого электрода $S = 50$ см^2. Найти изменение расхода электроэнергии, требуемой для получения такой же массы меди при той же силе тока, если расстояние между электродами увеличилось вдвое, а глубина погружения электродов – в 4 раза. Удельное сопротивление раствора $\rho = 0{,}33$ Ом · м, электрохимический эквивалент меди $k = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

Р е ш е н и е. Согласно закону Фарадея, масса меди, выделившейся на катоде, $m = kIt$, где t – время, в течение которого ток пропускали через раствор.

Поскольку в первом и во втором случаях выделяется одинаковая масса меди при той же силе тока, то время пропускания тока тоже одинаковое: $t_1 = t_2 = t = m/(kI)$. В первом случае расход электроэнергии

$$W_1 = I^2 R_1 t,$$

во втором

$$W_2 = I^2 R_2 t,$$

где R_1, R_2 – сопротивление электролита в первом и втором случаях соответственно.

Пусть d – ширина электрода, h – глубина погружения в первом случае. Тогда $dh = S$ и

$$R_1 = \rho \frac{l}{dh} = \rho \frac{l}{S}, \quad R_2 = \rho \frac{2l}{d \cdot 4h} = \rho \frac{l}{2S}.$$

Отсюда видно, что $R_2 < R_1$. Следовательно, $W_2 < W_1$. Значит, расход энергии во втором случае меньше, чем в первом, на величину

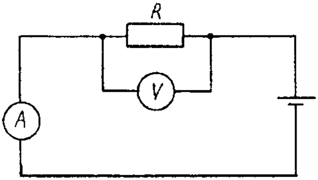
$$W_1 - W_2 = I^2 t(R_2 - R_1) = I^2 \frac{m}{kI}\left(\rho \frac{l}{S} - \rho \frac{l}{2S}\right) = \frac{Im\rho l}{2kS},$$

$$W_1 - W_2 = 1{,}5 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

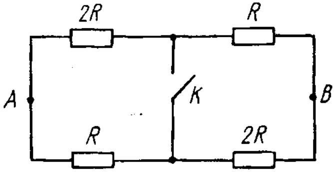
Задачи для самостоятельного решения

608. Найти среднюю скорость упорядоченного движения электронов в медном проводнике, площадь поперечного сечения которого $S = 4{,}0$ мм^2, при силе тока $I = 1{,}0$ А, предполагая, что концентрация свободных электронов равна концентрации атомов проводника. Заряд электрона $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ Кл, плотность меди $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, молярная масса меди $M = 63{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

609. Какую относительную погрешность делают, вычисляя сопротивление R по показаниям амперметра и вольтметра (рис. 202) без учета силы тока, проходящего через вольтметр? Амперметр показывает $I_а = 2{,}4$ А, вольтметр – $U_в = 7{,}2$ В. Сопротивление вольтметра $R_в = 1000$ Ом.



Р и с. 202

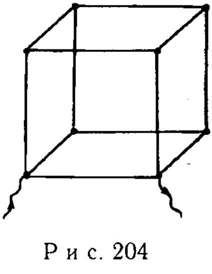


Р и с. 203

610. Когда ключ К замкнут, сопротивление R_1 между точками A и В цепи, схема которой изображена на рис. 203, равно 80 Ом. Определить сопротивление между этими точками, когда ключ разомкнут.

611. Сопротивление проволоки $R_1 = 64$ Ом. Когда ее разрезали на несколько разных частей и соединили эти части параллельно, полученная цепь имела сопротивление $R_2 = 4$ Ом. На сколько частей разрезали проволоку?

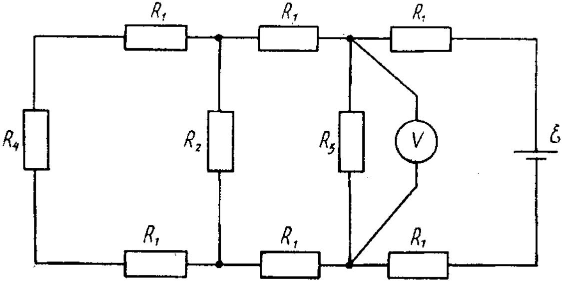
612. Найти сопротивление проволочного куба, если он включен в цепь так, что ток проходит в направлении, показанном на рис. 204. Сопротивление каждого ребра $R = 6$ Ом.



Р и с. 204

613. В цепи, схема которой приведена на рис. 205, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $\mathscr{E} = 50$ В. Какое напряжение покажет вольтметр? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

614. Вольтметр, рассчитанный на измерение напряжений до $U_в = 10$ В, имеет сопротивление $R_в = 400$ Ом. Найти сопротивление добавочного резистора, который необходимо подключить к вольтметру, чтобы измерять напряжение до $U = 100$ В.



Р и с. 205

615. Параллельно амперметру, сопротивление которого $R_а = 0{,}03$ Ом, включен медный проводник длиной $l = 10$ см и диаметром $d = 1{,}5$ мм. Какова сила тока в цепи, если амперметр показывает $I_а = 0{,}40$ А? Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

616. Амперметр, сопротивление которого $R_а = 2$ Ом, рассчитан на токи силой до $I_а = 0{,}1$ А. Его требуется использовать для измерения токов силой до $I = 10$ А. Сколько метров медной проволоки с площадью поперечного сечения $S = 1{,}7 \cdot 10^{-6}$ м^2 необходимо для этого подсоединить к амперметру? Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

617. Два вольтметра, сопротивления которых $R_1 = 4200$ Ом и $R_2 = 4800$ Ом, соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения $U = 300$ В. Каждый вольтметр рассчитан на предельное напряжение 150 В. Каковы будут показания вольтметров?

618. При перемещении заряда $q = 20$ Кл по проводнику сопротивлением $R = 0{,}5$ Ом совершена работа $A = 100$ Дж. Найти время, в течение которого по проводнику шел постоянный ток.

619. Лампа мощностью $P = 500$ Вт рассчитана на напряжение $U_1 = 110$ В. Определить сопротивление добавочного резистора, позволяющего включать ее в сеть напряжением $U_2 = 220$ В.

620. Два электрических нагревателя мощностями $P_1 = 600$ Вт и $P_2 = 400$ Вт, рассчитанные на одинаковое напряжение, соединены последовательно и включены в сеть с таким же напряжением. Какая мощность потребляется при таком включении каждым нагревателем?

621. Мощность $P = 5$ кВт необходимо передать на некоторое расстояние. Мощность потерь энергии не должна превышать kP, где $k = 0{,}1$. Какое наибольшее сопротивление может иметь линия электропередачи, если напряжение между проводами $U = 110$ В?

622. Если батарею замкнуть проводником сопротивлением $R_1 = 2{,}0$ Ом, то сила тока в цепи $I_1 = 1{,}6$ А, а если эту же батарею замкнуть проводником с сопротивлением $R_2 = 1{,}0$ Ом, то сила тока $I_2 = 2{,}0$ А. Найти мощность потерь энергии внутри батареи и КПД батареи в обоих случаях.

623. Два одинаковых резистора сопротивлением R каждый подключаются к источнику, ЭДС которого $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r, сначала параллельно, а затем последовательно. В каком случае выделяется бóльшая мощность во внешней цепи?

624. Определить напряжение источника, к которому с помощью нихромового провода длиной $l = 19{,}2$ м и диаметром $d = 3{,}0 \cdot 10^{-4}$ м надо подключить лампочку мощностью $P = 40$ Вт, рассчитанную на напряжение $U_1 = 120$ В, чтобы она горела нормально. Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом $\cdot$ м.

625. Какова минимальная масса медного провода, предназначенного для передачи потребителю мощности $P = 12$ кВт на расстояние $l = 100$ м от генератора напряжением $U = 220$ В, если мощность потерь энергии равна kP, где $k = 0{,}02$? Плотность меди $D = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м.

626. Резистор сопротивлением R, подключенный к источнику тока, потребляет мощность P. Если к нему подключить параллельно еще такой же резистор, то вместе они потребляют такую же мощность. Каковы ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока?

627. Две лампы имеют мощности $P_1 = 20$ Вт и $P_2 = 40$ Вт при стандартном напряжении сети. При их последовательном включении в сеть с другим напряжением оказалось, что в первой лампе выделяется такая же мощность, что и при стандартном напряжении. Какая мощность выделяется при этом во второй лампе? Изменением сопротивления нитей ламп с температурой пренебречь.

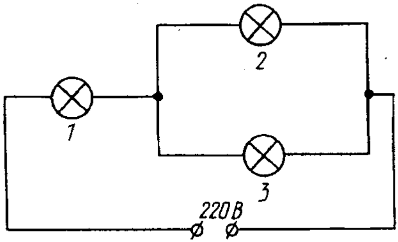
628. Электродвигатель, сопротивление обмоток которого $R = 2$ Ом, подключен к генератору с ЭДС $\mathscr{E} = 240$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}4$ Ом. При работе двигателя через его обмотки проходит ток силой I =10 А. Найти КПД электродвигателя. Сопротивление подводящих проводов пренебрежимо мало.

629. Электродвигатель подъемного крана работает под напряжением U = 380 В при силе тока I = 20 А. Каков КПД двигателя, если груз массой m = 1000 кг кран поднимает равномерно на высоту h = 19 м за время t = 50 с?

630. Источник тока с ЭДС $\mathscr{E}$ = 6 В дает ток, максимальная сила которого I_{max} = 2 А (при коротком замыкании). Какова наибольшая мощность, которая может быть выделена на внешнем участке цепи?

631. При подключении резистора сопротивлением R = 15 Ом к источнику тока с ЭДС $\mathscr{E}$ = 10 В мощность, выделяемая на этом резисторе, составляет k = 0,75 полной мощности. Какую максимальную мощность может выделить во внешней цепи данный источник?

632. Три лампочки мощностью P_1 = 50 Вт, P_2 = 25 Вт и P_3 = 50 Вт, рассчитанные на напряжение U_1 = 110 В каждая, соединены, как показано на рис. 206, и включены в сеть с напряжением U_2 = 220 В. Определить мощность, потребляемую каждой лампочкой.



Р и с. 206

633. К аккумулятору, внутреннее сопротивление которого r = 1,0 Ом, подключена проволока сопротивлением R = 4,0 Ом, а затем параллельно ей – еще одна такая же. Во сколько раз изменится количество теплоты, выделяющееся в первой проволоке, после подключения второй? Время прохождения тока в обоих случаях одинаковое.

634. При ремонте электроплитки ее спираль укоротили на 0,10 ее первоначальной длины. Во сколько раз изменилась при этом мощность плитки?

635. В электронагревателе, рассчитанном на напряжение U = 120 В, используется нихромовая проволока, площадь поперечного сечения которой $S = 0{,}50$ мм^2. С помощью этого нагревателя необходимо за время $\tau = 10$ мин превратить в пар воду массой $m = 1{,}0$ кг, взятую при температуре $t_1 = 20$ °С. Какой должна быть длина проволоки, если КПД нагревателя $\eta = 0{,}8$? Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $r = 22{,}6 \cdot 10^5$ Дж/кг.

636. Как изменится температура медного стержня, если по нему в течение времени $t = 0{,}5$ с будет проходить ток, плотность которого $j = 9$ А/мм^2? При расчете принять, что теплообмен с окружающими телами отсутствует. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, ее плотность $D = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость $c = 380$ Дж/(кг · К).

637. При силе тока $I_1 = 3{,}0$ А во внешней цепи батареи выделяется мощность $P_1 = 18$ Вт, при силе тока $I_2 = 1{,}0$ А – соответственно $P_2 = 10$ Вт. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление батареи.

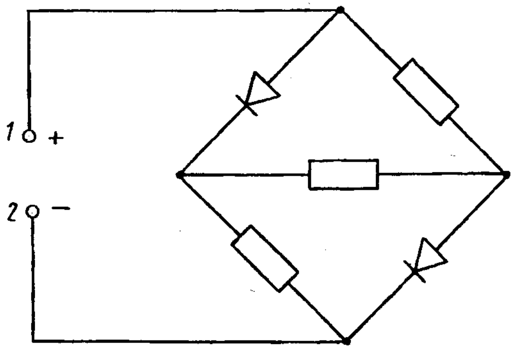
638. Электрический нагреватель работает от сети с напряжением $U = 120$ В при силе тока $I = 5{,}0$ А и за время $\tau = 20$ мин нагревает $m = 1{,}5$ кг воды от $t_1 = 16$ °С до $t_2 = 100$ °С. Определить потери энергии в процессе нагревания и КПД нагревателя. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

639. В нагревателе электрической плитки две секции. При включении одной секции вода в кастрюле закипает через $\tau_1 = 8{,}0$ мин, а при включении второй (без первой) – через $\tau_2 = 20$ мин. Через сколько минут закипит вода в кастрюле, если обе секции включить: параллельно; последовательно? Условия нагревания во всех случаях одинаковы.

640. Нагреватель электрического чайника состоит из двух спиралей, сопротивления которых одинаковы. При параллельном соединении спиралей и включении их в сеть вода в чайнике закипает через $t_1 = 3$ мин. Через сколько времени закипит вода, имеющая ту же массу и такую же начальную температуру, если спирали нагревателя соединить последовательно и включить в ту же сеть?

641. Источник тока замыкается один раз проводником сопротивлением $R_1 = 4$ Ом, а другой – сопротивлением $R_2 = 9$ Ом. В обоих случаях количество теплоты, выделившееся в проводниках за одно и то же время, одинаково. Определить внутреннее сопротивление источника.

642. Во сколько раз изменится тепловая мощность, выделяющаяся в электрической цепи, при перемене полярности на клеммах *1* и *2* (рис. 207)? Считать модуль напряжения на клеммах постоянным, диоды идеальными, сопротивления резисторов одинаковыми.



Р и с. 207

643. Лампочка накаливания мощностью $P = 180$ Вт используется для обогрева аквариума, содержащего $V = 1 \cdot 10^{-3}$ м^3 воды. За $\tau = 2$ мин вода нагревается на $\Delta T = 3$ К. Какая часть расходуемой лампочкой энергии теряется в виде лучистой энергии? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

644. Аккумулятор, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь, поочередно замыкают на два разных резистора, при этом в первом случае сила тока $I_1 = 3$ А, а во втором – $I_2 = 6$А. Найти силу тока, идущего через аккумулятор, если замкнуть его на эти резисторы, соединенные последовательно.

645. Схема электрической цепи и ее параметры показаны на рис. 208. Найти заряды на каждом конденсаторе. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

646. Если вольтметр, имеющий конечное сопротивление, подключен параллельно резистору сопротивлением R_1, то он показывает напряжение $U_1 = 6$ В, а если параллельно резистору сопротивлением R_2, – то $U_2 = 4$ В (рис. 209). Каковы будут напряжения на резисторах, если вольтметр не подключать? ЭДС батареи $\mathscr{E} = 12$ В, ее внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.

642. Во сколько раз изменится тепловая мощность, выделяющаяся в электрической цепи, при перемене полярности на клеммах *1* и *2* (рис. 207)? Считать модуль напряжения на клеммах постоянным, диоды идеальными, сопротивления резисторов одинаковыми.

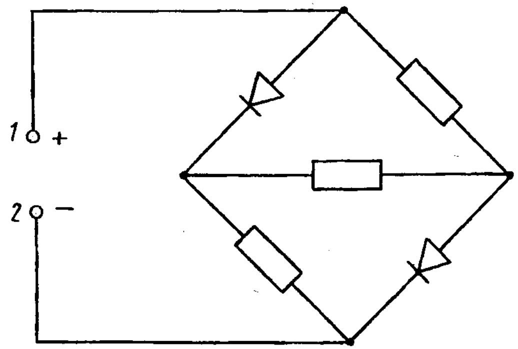


Рис. 207

643. Лампочка накаливания мощностью P = 180 Вт используется для обогрева аквариума, содержащего $V = 1 \cdot 10^{-3}$ м^3 воды. За τ = 2 мин вода нагревается на ΔT = 3 К. Какая часть расходуемой лампочкой энергии теряется в виде лучистой энергии? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К), плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

644. Аккумулятор, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь, поочередно замыкают на два разных резистора, при этом в первом случае сила тока I_1 = 3 А, а во втором – I_2 = 6А. Найти силу тока, идущего через аккумулятор, если замкнуть его на эти резисторы, соединенные последовательно.

645. Схема электрической цепи и ее параметры показаны на рис. 208. Найти заряды на каждом конденсаторе. Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

646. Если вольтметр, имеющий конечное сопротивление, подключен параллельно резистору сопротивлением R_1, то он показывает напряжение U_1 = 6 В, а если параллельно резистору сопротивлением R_2, – то U_2 = 4 В (рис. 209). Каковы будут напряжения на резисторах, если вольтметр не подключать? ЭДС батареи $\mathscr{E}$ = 12 В, ее внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.

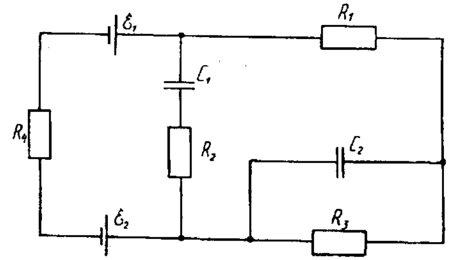


Рис. 208

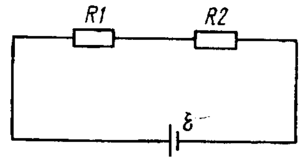


Рис. 209

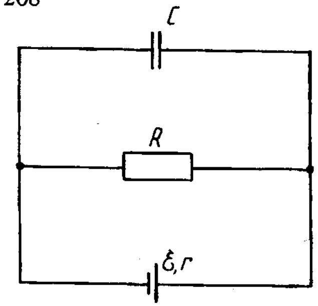


Рис. 210

647. Найти сопротивление резистора, включенного в цепь, схема которой приведена на рис. 210, если известно, что в плоском конденсаторе напряженность электрического поля E = 2250 В/м, расстояние между пластинами конденсатора d = 0,2 см, ЭДС источника тока $\mathscr{E}$ = 5 В, его внутреннее сопротивление r = 0,5 Ом.

648. При замкнутом ключе К (рис. 211) вольтметр V1 показывает напряжение $U = 0{,}8\mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ – ЭДС источника тока. Что покажут вольтметры V1 и V2 при разомкнутом ключе, если их сопротивления равны?

649. Определить заряд конденсатора, если при коротком замыкании источника (рис. 212) сила тока в нем уве-

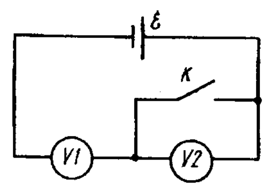


Рис. 211

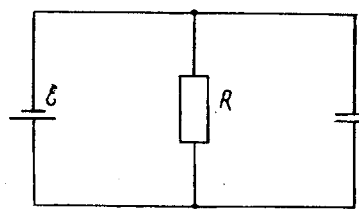
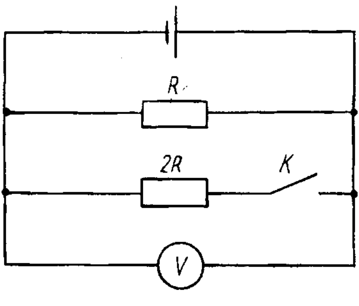


Рис. 212

личивается в n раз. ЭДС источника равна $\mathscr{E}$, емкость конденсатора C.

650. Два одинаковых резистора сопротивлением $R = 100$ Ом каждый, соединенных параллельно, и последовательно соединенный с ними резистор сопротивлением $R = 200$ Ом подключены к источнику постоянного тока. К концам параллельно соединенных резисторов подключен конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Определить ЭДС источника тока, если заряд на конденсаторе $q = 2{,}2 \cdot 10^{-4}$ Кл. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов пренебречь.

651. Напряжение на внешнем участке цепи $U_1 = 5$ В, сила тока $I_1 = 3$ А. После изменения сопротивления этого участка напряжение $U_2 = 8$ В, а сила тока $I_2 = 2$ А. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока.



Р и с. 213

652. Два резистора, источник постоянного тока и вольтметр соединены, как показано на рис. 213. При замкнутом ключе К вольтметр показывает напряжение $U_1 = 16$ В. Если ключ разомкнуть, вольтметр показывает $U_2 = 20$ В. Найти ЭДС источника, пренебрегая ответвлением тока в вольтметр.

653. В цепи, схема которой изображена на рис. 214, емкость конденсатора $C = 23$ мкФ, резисторы имеют одинаковые сопротивления $R = 20$ Ом. ЭДС батареи $\mathscr{E} = 12$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 2{,}0$ Ом. Определить заряд на конденсаторе.

654. Аккумулятор, внутреннее сопротивление которого $r = 1{,}0$ Ом, заряжается от источника напряжением $U = 24$ В. При зарядке через аккумулятор идет ток силой $I = 1{,}0$ А. Найти ЭДС аккумулятора.

655. Зарядка аккумулятора производится током силой $I_1 = 4{,}0$ А при напряжении на клеммах аккумулятора $U_1 = 12{,}6$ В. При разрядке аккумулятора сила тока в цепи $I_2 = 6{,}0$ А, напряжение на клеммах $U_2 = 11{,}1$ В. Найти силу тока короткого замыкания.

656. Два источника тока с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 4$ В и $\mathscr{E}_2 = 6$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}1$ Ом и $r_2 = 0{,}4$ Ом соединены последовательно. При каком сопротивлении внешней цепи напряжение на зажимах второго источника будет равно нулю?

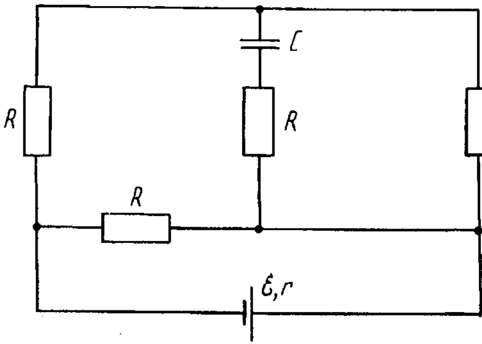


Рис. 214

657. Два источника тока с внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом каждый и с одинаковыми ЭДС соединены параллельно и подключены к резистору (рис. 215, *а*). Если эти источники соединить последовательно и замкнуть тем же резистором (рис. 215, *б*), то выделяющаяся в нем мощность возрастет в $k = 2{,}25$ раза. Определить сопротивление резистора R.

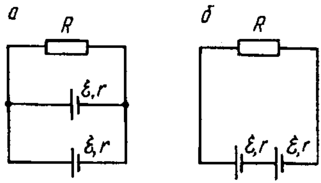


Рис. 215

658. Батарея, состоящая из нескольких одинаковых аккумуляторов, включена во внешнюю цепь, сопротивление которой R. При каком значении внутреннего сопротивления r аккумулятора сила тока в цепи будет одинакова как при последовательном, так и при параллельном соединении аккумуляторов в батарею?

659. Три одинаковых источника тока соединены последовательно и замкнуты проводником, сопротивление которого $R = 2$ Ом. При этом соединении сила тока в проводнике $I_1 = 2$ А. При параллельном соединении источников в том же проводнике идет ток силой $I_2 = 0{,}9$ А. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление каждого источника.

660. Источники тока, имеющие одинаковые внутренние сопротивления $r = 0{,}5$ Ом, подключены к резисторам, каждый из которых имеет сопротивление R (рис. 216). ЭДС

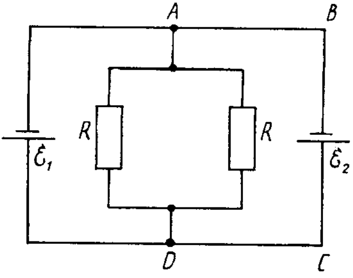


Рис. 216

источников тока — соответственно $\mathscr{E}_1 = 12$ В и $\mathscr{E}_2 = 6$ В. Найти сопротивление R, при котором ток в цепи $ABCD$ не идет.

661. Электрическая лампочка мощностью $P = 60$ Вт, рассчитанная на напряжение $U = 110$ В, подключена к источнику с ЭДС $\mathscr{E} = 120$ В и внутренним сопротивлением $r = 60$ Ом. Найти мощность, которую потребляет лампочка при таком включении. Будет ли она гореть полным накалом?

662. При электролизе раствора серной кислоты за $\tau = 50$ мин выделилось $m = 0{,}30$ г водорода. Определить мощность, затраченную на нагревание электролита, если его сопротивление $R = 0{,}40$ Ом. Электрохимический эквивалент водорода $k = 0{,}01 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл.

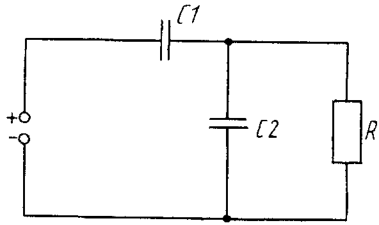
663. Для проверки правильности показаний амперметра его включают последовательно с электролитической ванной. Какую абсолютную погрешность дает амперметр, если он показывает ток силой $I = 1{,}7$ А, а за время $t = 21$ мин на катоде ванны откладывается $m = 0{,}6$ г никеля? Электрохимический эквивалент никеля $k = 3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

664. Какой заряд проходит через раствор медного купороса за время $t = 10$ с, если сила тока за это время равномерно возрастает от 0 до $I = 4{,}0$ А? Сколько меди выделяется при этом на катоде? Электрохимический эквивалент меди $k = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

665. Для получения меди включено последовательно $N = 400$ электролитических ванн. Площадь катодных пластин в каждой ванне $S = 16$ м^2. Плотность электрического тока $j = 200$ А/м^2. Найти массу меди, получаемой за время $t = 24$ ч, и расход энергии за то же время, если напряжение на ваннах $U = 100$ В. Электрохимический эквивалент меди $k = 3{,}3 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл.

666. При никелировании пользуются током, плотность которого $j = 0{,}14$ А/дм^2. Сколько времени требуется для отложения слоя никеля толщиной $h = 0{,}05$ мм? Электрохимический эквивалент никеля $k = 3{,}0 \cdot 10^{-7}$ кг/Кл, плотность никеля $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

667. Какое количество электроэнергии расходуется на получение $m = 1{,}0$ кг алюминия, если электролиз ведется при напряжении $U = 10$ В, а КПД всей установки $\eta = 80\%$? Молярная масса алюминия $M = 27 \times \times 10^{-3}$ кг/моль, его валентность $n = 3$. Постоянная Фарадея $F = 9{,}65 \cdot 10^4$ Кл/моль.



Р и с. 217

668. В цепи, схема которой приведена на рис. 217, конденсатор C2 имеет емкость $C_2 = 10$ мкФ, сопротивление резистора $R = 2$ кОм, площадь пластин конденсатора C1 $S = 100$ см^2, а расстояние между ними $d = 5$ мм. Воздух между обкладками конденсатора C1 ионизируется с помощью рентгеновского излучателя мощностью $w = 2 \cdot 10^{12}$ пар носителей заряда за 1 с в 1 м^3. Заряд каждого носителя равен элементарному заряду $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Все образованные за единицу времени носители долетают до пластин конденсатора C1. Определить заряд на конденсаторе C2.

669. В электронно-лучевой трубке сила тока в электронном пучке $I = 600$ мкА, ускоряющее напряжение $U = 10$ кВ. Найти, с какой силой давит электронный пучок, считая, что все электроны поглощаются экраном.

10. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Методические указания к решению задач

При решении задач, в которых рассматривается проводник или контур с током в магнитном поле, нужно на схематическом чертеже указать направление тока, направления вектора магнитной индукции и сил, действующих на проводник или контур. Если по условию задачи проводник (контур) находится в равновесии, то, как и при решении задач по статике, записывают условия равновесия.

Задачи на движение заряженных частиц в магнитном и электрическом полях решают в большинстве случаев путем составления уравнения движения материальной точки с учетом всех сил, действующих на частицу со стороны магнитного и электрического полей.

Если требуется найти ЭДС индукции, необходимо установить, изменением какой величины – вектора магнитной индукции ($\vec{B}$), площади поверхности (S), ограниченной контуром, или угла (α) между вектором $\vec{B}$ и нормалью к поверхности – вызывается изменение $\Delta\Phi$ потока магнитной индукции, а затем воспользоваться законом электромагнитной индукции. Составив уравнение на основе этого закона, решают его относительно неизвестной величины.

Основные законы и формулы

Закон Ампера: на проводник длиной l с током силой I, помещенный в магнитное поле, действует сила, модуль которой

$$F = IBl\sin\alpha,$$

где B – модуль вектора магнитной индукции $\vec{B}$; α – угол между направлением тока и вектором магнитной индукции. Направление этой силы определяется правилом левой руки: если левую руку расположить так, чтобы перпендикулярная проводнику составляющая вектора магнитной индукции $\vec{B}$ входила в ладонь, а четыре вытянутых пальца были направлены по току, то отогнутый на 90° большой палец покажет направление силы Ампера $\vec{F}$.

Момент сил, действующих на плоский контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$M = ISB\sin\alpha,$$

где I – сила тока в контуре; S – площадь поверхности, охватываемой контуром; B – модуль вектора магнитной индукции; α – угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к поверхности.

Принцип суперпозиции магнитных полей: магнитная индукция поля, создаваемого несколькими электрическими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом в отдельности:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \ldots + \vec{B}_n.$$

Магнитная индукция поля бесконечного прямолинейного проводника с током силой I в точке, удаленной от проводника на расстояние r,

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2\pi r},$$

где μ – магнитная проницаемость среды; μ_0 – магнитная постоянная: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Магнитная индукция поля в центре кругового витка с током

$$B = \mu\mu_0 \frac{I}{2R},$$

где I – сила тока; R – радиус витка.

Магнитная индукция поля внутри соленоида (цилиндрической катушки с током)

$$B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I,$$

где μ – магнитная проницаемость сердечника, вставленного в соленоид; μ_0 – магнитная постоянная; N – число витков соленоида; l – длина соленоида.

Магнитный поток (поток вектора магнитной индукции) через поверхность площадью S

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

где B – модуль вектора магнитной индукции; α – угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к поверхности.

Сила Лоренца – это сила, действующая на заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле. Модуль этой силы

$$F_{Л} = |q|vB\sin\alpha,$$

где q – заряд частицы; v – модуль ее скорости; B – модуль магнитной индукции поля; α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$.

Направление силы Лоренца определяется *правилом левой руки:* если левую руку расположить так, чтобы составляющая магнитной индукции $\vec{B}$, перпендикулярная вектору скорости заряженной частицы, входила в ладонь, а четыре вытянутых пальца направлены вдоль вектора скорости частицы, если ее заряд положительный, или против вектора скорости, если заряд отрицательный, то отогнутый на 90° большой палец покажет направление силы Лоренца.

Закон электромагнитной индукции: ЭДС индукции, возникающая в замкнутом контуре, равна по модулю и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром:

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Минус в этой формуле следует из правила Ленца.

Правило Ленца: возникающий в замкнутом контуре индукционный ток имеет такое направление, что магнитный поток этого тока через поверхность, ограниченную контуром, противодействует изменению магнитного потока, вызывающего индукционный ток.

ЭДС индукции в проводнике, движущемся в постоянном во времени магнитном поле с индукцией $\vec{B}$,

$$\mathscr{E}_i = Blv\sin\alpha,$$

где l – длина проводника; v – модуль его скорости; α – угол, составленный вектором магнитной индукции $\vec{B}$ с направлением скорости проводника.

Магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром, возникающий при прохождении по этому контуру тока силой I,

$$\Phi = LI,$$

где L – индуктивность контура.

ЭДС самоиндукции, возникающая в замкнутом контуре, прямо пропорциональна скорости изменения силы тока в нем:

$$\mathscr{E}_s = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},$$

где L – индуктивность контура; ΔI – изменение силы тока за время Δt.

Энергия магнитного поля тока силой I, проходящего по проводнику с индуктивностью L,

$$W = LI^2/2.$$

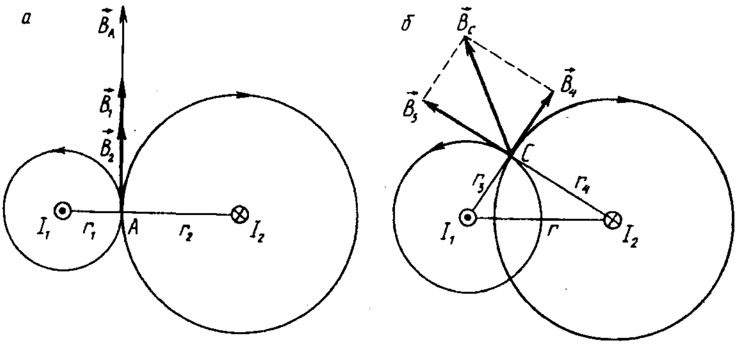
Примеры решения задач

670. По двум длинным параллельным проводам, находящимся на расстоянии $r = 10$ см друг от друга в вакууме, идут в противоположных направлениях* токи силой $I_1 = I_2 = I = 16$ А. Определить индукцию магнитного поля в точке A, удаленной на $r_1 = 2$ см от одного провода и на $r_2 = 8$ см от другого, и в точке C, удаленной на $r_3 = 6$ см от одного провода и на $r_2 = 8$ см от другого.

---

*Символ •, подобный острию летящей навстречу стрелы, показывает, что ток идет от рисунка к читателю. Если же ток идет от читателя к рисунку, то это обозначается символом ×, напоминающим оперение (хвост) улетающей стрелы. Так же обозначают направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$.

Р е ш е н и е. Направления векторов магнитной индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ в точке A (рис. 218, *а*), а также $\vec{B}_3$ и $\vec{B}_4$ в точке C (рис. 218, *б*) определим по правилу буравчика (правого винта).



Р и с. 218

Согласно принципу суперпозиции, магнитная индукция в точке A

$$\vec{B}_A = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Как видно из рисунка, векторы $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ имеют одинаковое направление, поэтому модуль вектора $\vec{B}_A$ равен сумме модулей векторов $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$:

$$B_A = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} + \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}.$$

Учитывая, $I_1 = I_2 = I$, получаем:

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \; B_A = 2 \cdot 10^{-4} \text{ Тл}.$$

В точке C результирующий вектор магнитной индукции $\vec{B}_C$ является диагональю прямоугольника, так как $r^2 = r_3^2 + r_4^2$. (В общем случае, при других расстояниях, результирующий вектор индукции является диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах как на сторонах.)

Модуль вектора магнитной индукции $\vec{B}_C$ найдем по теореме Пифагора:

$$B_C = \sqrt{B_3^2 + B_4^2} = \sqrt{\left(\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_3}\right)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_4}\right)^2}.$$

Поскольку $I_1 = I_2 = I$, то

$$B_C = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_3 r_4}\sqrt{r_3^2 + r_4^2},\; B_C = 7\cdot 10^{-5}\ \text{Тл}.$$

671. Проводник AC (рис. 219, *а*) массой $m = 20$ г и длиной $l = 20$ см подвешен на двух тонких проволочках и помещен в однородное магнитное поле, вектор индукции которого направлен вертикально вверх, а модуль этого вектора $B = 0{,}5$ Тл. На какой угол α от вертикали отклонятся проволочки, поддерживающие проводник, если по нему пропустить ток силой $I = 1$ А? Проволочки находятся за пределом магнитного поля.

Решение. На проводник с током, помещенный в магнитное поле (рис. 219, *б*), действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, две силы натяжения проволочек $\vec{T}$ и сила Ампера $\vec{F}$ (силой тяжести проволочек пренебрегаем). Координатную ось OY направим вдоль вектора магнитной индукции $\vec{B}$ (вертикально вверх), ось OX – горизонтально.

Проводник находится в равновесии, поэтому суммы проекций всех действующих на него сил на оси OX и OY равны нулю:

$$F - 2T\sin\alpha = 0,\; 2T\cos\alpha - mg = 0,$$

или

$$2T\sin\alpha = BIl,\; 2T\cos\alpha = mg.$$

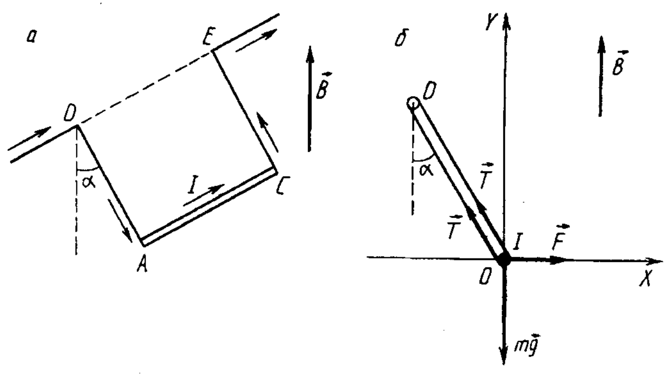


Рис. 219

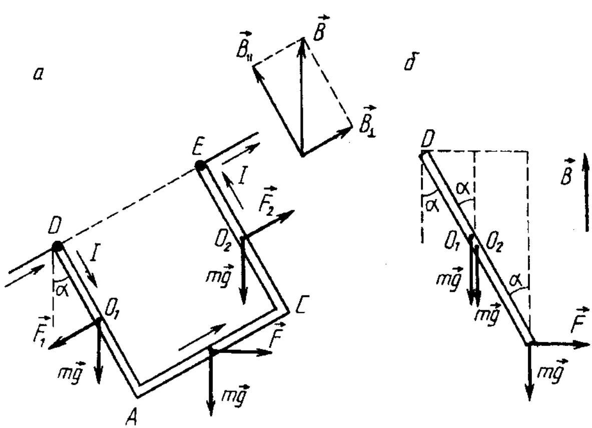
Отсюда, разделив почленно первое уравнение на второе, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BIl}{mg}, \ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{BIl}{mg}, \ \alpha = 27^\circ.$$

672. Алюминиевый провод, площадь поперечного сечения которого S, согнут в виде трех сторон квадрата и прикреплен своими концами к горизонтальной оси, вокруг которой он может свободно вращаться в однородном вертикальном магнитном поле (рис. 220, *а*). По проводу пропускают ток силой I. На какой угол α отклонился провод от вертикальной плоскости? Плотность алюминия ρ.

Р е ш е н и е. В отличие от предыдущей задачи в данном случае в магнитном поле находится не только горизонтальный провод, но и подвески (две другие стороны квадрата). Кроме того, здесь нельзя пренебречь силой тяжести подвесок. Учитывая это, обозначим все силы, действующие на согнутый проводник (рис. 220, *а*): силы тяжести $m\vec{g}$, приложенные к каждой из трех сторон квадрата, силу Ампера $\vec{F}$, действующую на горизонтальную сторону квадрата, силы Ампера $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$, действующие на подвески. Для определения направлений сил $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ мы разложили вектор магнитной индукции $\vec{B}$ на составляющие по двум направлениям: вдоль подвесок и перпендикулярно им.

Проводник находится в равновесии, следовательно, сумма моментов всех приложенных к нему сил относительно



Р и с. 220

оси вращения DE равна нулю. Поскольку силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ параллельны оси DE, они не создают вращающего момента относительно этой оси. Очевидно, что моменты сил реакции шарниров (на рисунке эти силы не показаны) относительно оси DE равны нулю. Обозначим $DA = AC = CE = l$. Тогда $DO_1 = EO_2 = l/2$, и уравнение моментов относительно оси DE (рис. 220, *б*) будет иметь вид

$$mgl\sin\alpha + 2mg\frac{l}{2}\sin\alpha - Fl\cos\alpha = 0.$$

Подставив сюда значения $m = \rho Sl$ и $F = IBl$, получим после преобразований

$$2\rho Sg\sin\alpha = IB\cos\alpha.$$

Отсюда $\operatorname{tg}\alpha = IB/(2\rho Sg)$.

673. Рамка с током, изображенная на рис. 221, *а*, имеет размеры l = 4,0 см, b = 5,0 см. Индукция однородного магнитного поля B = 0,20 Тл. Когда рамка повернута так, что нормаль к ней составляет с линиями магнитной индукции угол α = 30°, на рамку действует со стороны магнитного поля момент сил $M = 2 \cdot 10^{-3}$ Н · м. Определить силу тока в рамке.

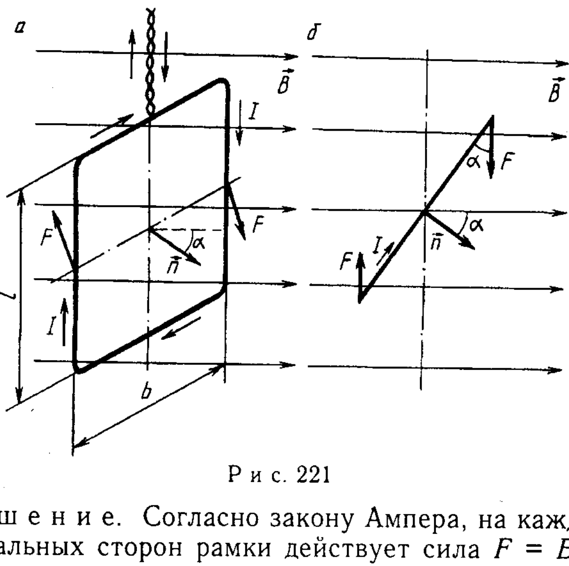


Рис. 221

Решение. Согласно закону Ампера, на каждую из вертикальных сторон рамки действует сила $F = BIl$, направленная перпендикулярно плоскости, в которой лежат эта сторона и вектор магнитной индукции $\vec{B}$. Суммарный момент этих сил

$$M = 2F\frac{b}{2}\sin\alpha = Fb\sin\alpha,$$

потому что плечо каждой из сил равно $\frac{b}{2}\sin\alpha$, где α – угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью $\vec{n}$ к плоскости витка (рис. 221, *б*). Подставив сюда значение F, получим

$$M = IBlb\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$I = \frac{M}{Blb\sin\alpha}, \ I = 10 \text{ A}.$$

674. Два очень длинных тонких параллельных провода с токами силой $I_1 = I_2 = 5{,}0$ А расположены в вакууме на расстоянии $r = 40$ см друг от друга. Определить силу, действующую на единицу длины каждого провода.

Решение. Предположим, что токи силой I_1 и I_2 идут в одном и том же направлении (рис. 222). Применив правило буравчика, определим направления векторов индукции $\vec{B}_1$ и $\vec{B}_2$ магнитных полей токов силой I_1 и I_2 соответственно на расстоянии r от проводов. Провод с током силой I_2 находится в поле, создаваемом током силой I_1. Модуль вектора магнитной индукция этого поля

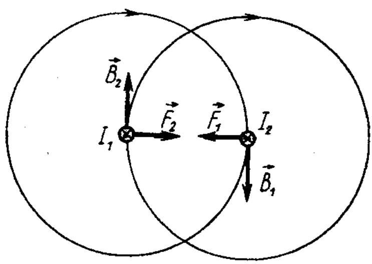


Рис. 222

$$B_1 = \mu\mu_0\frac{I_1}{2\pi r}.$$

Следовательно, на любой отрезок длиной l провода с током силой I_2 по закону Ампера действует сила $\vec{F}_1$, модуль которой

$$F_1 = I_2B_1l = \mu\mu_0\frac{I_1I_2}{2\pi r}l,$$

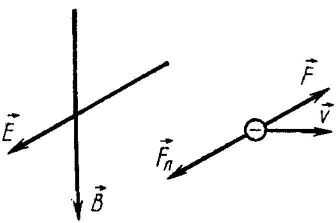
где $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Легко показать, что на отрезок провода с током силой I_1 такой же длины действует сила $\vec{F}_2$, модуль которой $F_2 = F_1$, а направление противоположно направлению силы $\vec{F}_1$. Таким образом,

$$F_1 = F_2 = F = \mu\mu_0 \frac{I_1 I_2}{2\pi r} l, \quad F = 1{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ Н}.$$

675. В области пространства одновременно существуют однородные и постоянные магнитное поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл и перпендикулярное ему электрическое поле напряженностью $E = 4 \cdot 10^5$ В/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, электрон. Какова его скорость?

Р е ш е н и е. На электрон, движущийся одновременно в магнитном и электрическом полях, действуют две силы: $\vec{F} = e\vec{E}$ со стороны электрического поля и сила Лоренца $\vec{F}_Л$ со стороны магнитного поля (рис. 223). Эти силы имеют противоположные направления. Электрон не будет отклоняться от прямолинейной траектории, если модули этих сил равны, т. е. $F = F_Л$ или $eE = evB$. Отсюда $v = E/B = 2 \cdot 10^6$ м/с.



Р и с. 223

676. Электрон влетает в однородное магнитное поле в вакууме со скоростью $v = 1 \cdot 10^7$ м/с, направленной перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определить траекторию движения электрона в магнитном поле, если модуль вектора магнитной индукции $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл.

Р е ш е н и е. На электрон, движущийся в магнитном поле, действует сила Лоренца, зависящая от скорости электрона и индукции магнитного поля. Сила Лоренца перпендикулярна скорости электрона, поэтому она не совершает работу. Значит, кинетическая энергия электрона не изменяется. Следовательно, не изменяется и модуль его скорости, а поскольку и индукция магнитного поля постоянна, то модуль силы Лоренца постоянен. Под действием этой силы электрон приобретает постоянное центростремительное ускорение, а это означает, что электрон в магнитном поле движется равномерно по окружности. Найдем ее радиус R.

По второму закону Ньютона $F_Л = m_e a$, где $a = v^2/R$ — центростремительное ускорение. Учитывая, что $F_Л = evB$, будем иметь

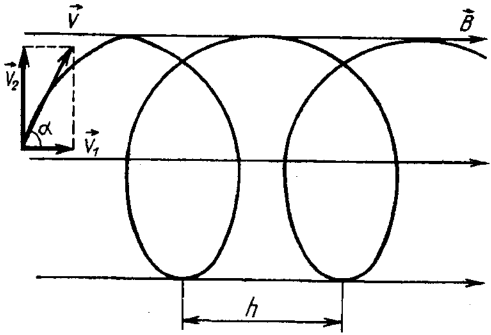
$$evB = m_e v^2/R,$$

где $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг – его масса. Отсюда

$$R = \frac{m_e v}{eB}, \quad R = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

677. Частица массой m, обладающая зарядом q, влетает со скоростью v в однородное магнитное поле с индукцией B под углом α к линиям магнитной индукции. Определить траекторию движения частицы.

Р е ш е н и е. Разложим вектор скорости $\vec{v}$ частицы на две составляющие (рис. 224): $\vec{v}_1$, направленную вдоль линий магнитной индукции, и $\vec{v}_2$, перпендикулярную этим линиям. Модули этих составляющих – соответственно $v_1 = v\cos\alpha$ и $v_2 = v\sin\alpha$.



Р и с. 224

На частицу действует сила Лоренца, обусловленная составляющей $\vec{v}_2$. Вследствие этого (см. решение задачи 676) частица движется по окружности со скоростью $\vec{v}_2$ в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Радиус этой окружности определим, составив уравнение на основании второго закона Ньютона:

$$F = m\frac{v_2^2}{R}, \text{ или } qv_2B = \frac{mv_2^2}{R}.$$

Отсюда

$$R = mv\sin\alpha/(qB). \tag{1}$$

Одновременно частица будет двигаться и вдоль поля. Это равномерное движение со скоростью $\vec{v}_1$, так как составляющая $\vec{v}_1$ не вызывает появления силы Лоренца. В результате одновременного движения по окружности и по прямой частица будет двигаться по винтовой линии, «навиваясь» на линии магнитной индукции.

Шаг винтовой линии

$$h = v_1 T, \qquad (2)$$

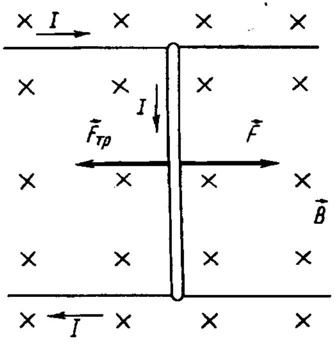
где T – период обращения частицы по окружности:

$$T = 2\pi R / v_2. \qquad (3)$$

Учитывая соотношения (1) и (3), получаем по формуле (2)

$$h = 2\pi m v \cos\alpha / (qB).$$

678. Горизонтальные рельсы находятся в вертикальном однородном магнитном поле на расстоянии $l = 0{,}3$ м друг от друга. На рельсах лежит стержень, перпендикулярный им. Какой должна быть индукция магнитного поля, для того чтобы стержень начал равномерно двигаться вдоль рельсов, если по нему пропускать ток силой $I = 50$ А? Коэффициент трения стержня о рельсы $\mu = 0{,}2$, масса стержня $m = 0{,}5$ кг.



Р и с. 225

Р е ш е н и е. При пропускании тока по стержню на него действует сила Ампера, модуль которой $F = IBl$, и сила трения $F_{тр}$, которая в данном случае равна μmg (рис. 225). Стержень будет двигаться равномерно, если модули этих сил равны: $\mu mg = IBl$. Отсюда

$B = \mu mg / (Il)$, $B = 7 \cdot 10^{-2}$ Тл.

679. Проволочное кольцо радиуса $R = 5$ см расположено в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл так, что вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости кольца. Определить среднюю ЭДС индукции, возникающую в кольце, если его повернуть на угол 90° за время $\Delta t = 10^{-1}$ с.

Р е ш е н и е. Когда кольцо расположено так, что вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости кольца, магнитный поток через поверхность, ограниченную кольцом,

$$\Phi_1 = BS = B\pi R^2,$$

где S – площадь кольца.

Если повернуть кольцо на 90°, то магнитный поток $\Phi_2 = 0$. Изменение магнитного потока

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -B\pi R^2.$$

Средняя скорость изменения магнитного потока

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{B\pi R^2}{\Delta t}.$$

Согласно закону электромагнитной индукции, в кольце возникает средняя ЭДС индукции

$$\langle \mathscr{E}_i \rangle = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B\pi R^2}{\Delta t}, \ \langle \mathscr{E}_i \rangle = 8 \cdot 10^{-2} \text{ В}.$$

680. Самолет летит горизонтально со скоростью $v = 1200$ км/ч. Найти разность потенциалов, возникающую между концами крыльев, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B_в = 5{,}0 \cdot 10^{-5}$ Тл. Размах крыльев $l = 40$ м. Чему равна максимальная разность потенциалов, которая может возникнуть при полете самолета? Горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B_г = 2, \cdot 10^{-5}$ Тл.

Решение. Разность потенциалов, возникающая между концами крыльев самолета, равна ЭДС индукции: $U = \mathscr{E}_i$. При горизонтальном полете скорость самолета направлена перпендикулярно вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли, поэтому разность потенциалов

$$U = B_в l v, \ U = 0{,}67 \text{ В}.$$

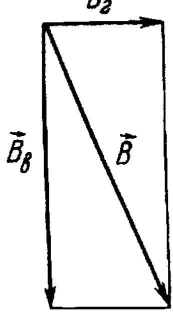


Рис. 226

Максимальная разность потенциалов U_m при данных скорости и размахе крыльев может возникнуть тогда, когда скорость самолета будет направлена перпендикулярно вектору $\vec{B}$ индукции магнитного поля Земли (рис. 226). Согласно теореме Пифагора, модуль вектора $\vec{B}$

$$B = \sqrt{B_г^2 + B_в^2},$$

поэтому $U_m = lv\sqrt{B_г^2 + B_в^2}$, $U_m = 0{,}72$ В.

681. Проволочная рамка площадью $S = 400$ см^2 равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 2{,}0 \cdot 10^{-2}$ Тл вокруг оси, перпендикулярной направлению поля. Период вращения рамки $T = 0{,}05$ с. Рамка состоит из $N = 300$ витков. Определить максимальное значение ЭДС, возникающей в рамке.

Р е ш е н и е. Рассмотрим один виток рамки. При равномерном вращении его вокруг оси OO' (рис. 227) с угловой скоростью ω магнитный поток, пронизывающий площадь, ограниченную этим витком, будет непрерывно изменяться с течением времени по закону

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

где S – площадь рамки; α – угол между нормалью к плоскости и вектором $\vec{B}$.

Время будем отсчитывать с момента, когда $\alpha = 0$. Тогда в момент времени t $\alpha = \omega t$, следовательно,

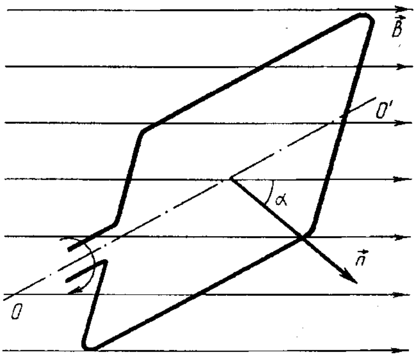
$$\Phi_1 = BS\cos\omega t,$$

а в момент времени $t + \Delta t$

$$\Phi_2 = BS\cos\omega(t + \Delta t).$$

За промежуток времени Δt магнитный поток изменится на

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = BS(\cos\omega(t + \Delta t) - \cos\omega t) =$$
$$= BS(\cos\omega t\cos\omega\Delta t - \sin\omega t\sin\omega\Delta t - \cos\omega t).$$



Р и с. 227

Если Δt очень мало, можно считать $\cos\omega\Delta t \approx 1$ и $\sin\omega\Delta t \approx \omega\Delta t$, поэтому

$$\Delta\Phi = -BS\omega\Delta t \sin\omega t.$$

ЭДС индукции в одном витке

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = BS\omega\sin\omega t. \qquad (1)$$

В N витках ЭДС индукции будет в N раз больше, т. е.

$$\mathcal{E}_i = NBS\omega\sin\omega t, \text{ или } \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_m \sin\omega t,$$

где $\mathcal{E}_m$ – максимальное (амплитудное) значение ЭДС индукции:

$$\mathcal{E}_m = NBS\omega. \qquad (2)$$

Таким образом, при равномерном вращении проводящей рамки в однородном магнитном поле в ней возникает переменная синусоидальная ЭДС индукции.

Подставив в выражение (2) значение угловой скорости $\omega = 2\pi/T$, где T – период вращения рамки, найдем:

$$\mathcal{E}_m = \frac{2\pi NBS}{T}, \ \mathcal{E}_m = 30 \text{ В}.$$

Заметим, что формулу (1) можно получить проще, воспользовавшись понятием производной. Если $\Phi(t)$ – функция времени, то, как известно, производная этой функции есть скорость изменения ее в момент времени t. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции в замкнутом контуре равна скорости изменения потока магнитной индукции через поверхность, ограниченную контуром. Поэтому с учетом знака ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = -\Phi'$, где Φ' – производная функции $\Phi(t)$, выражающей зависимость магнитного потока от времени. Так как $\Phi(t) = BS\cos\omega t$, то, взяв производную функции $\Phi(t)$ по времени, получим

$$\mathcal{E}_i = BS\omega\sin\omega t.$$

682. Определить скорость изменения силы тока в катушке индуктивностью $L = 100$ мГн, если в ней возникла ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s = 80{,}0$ В.

Р е ш е н и е. Находим $|\mathcal{E}_s| = L\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right|$, где $\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right|$ – скорость изменения силы тока. Отсюда

$$\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right| = \frac{|\mathscr{E}_s|}{L}, \quad \left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right| = 800 \text{ А/с}.$$

683. На горизонтальных проводящих стержнях лежит металлическая перемычка массой $m = 50$ г (рис. 228). Коэффициент трения между стержнями и перемычкой $\mu = 0{,}15$. Стержни замкнуты на резистор сопротивлением $R = 5$ Ом. Система находится в магнитном поле, магнитная индукция которого направлена вертикально вверх, а ее модуль изменяется со временем по закону $B = At$, где $A = 5$ Тл/с. Определить момент времени, в который перемычка начнет двигаться по стержню. Геометрические размеры: $l = 1$ м, $h = 0{,}3$ м. Сопротивлением перемычки и проводящих стержней пренебречь.

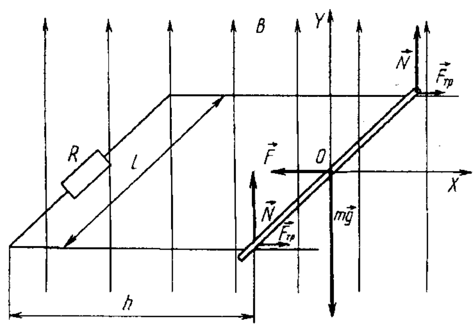


Рис. 228

Решение. Проводящие стержни с резистором и перемычка образуют контур. Этот контур находится в переменном магнитном поле, поэтому в нем возникает индукционный ток. Следовательно, на перемычку будет действовать сила Ампера, модуль которой в момент времени t

$$F = IBl = IAtl,$$

где I – сила тока.

Кроме того, на перемычку действуют две силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, модуль каждой из которых $F_{\text{тр}} = \mu N$, где N – сила нормальной реакции стержня.

Перемычка начнет двигаться при условии, что сумма проекций всех сил на ось OX равна нулю, т. е. $2F_{\text{тр}} - F = 0$, или

$$2\mu N - IAtl = 0. \qquad (1)$$

Чтобы найти N, спроектируем силы на ось OY и составим уравнение $2N - mg = 0$. Отсюда

$$N = mg/2. \quad (2)$$

Согласно закону Ома, сила тока $I = \mathcal{E}_i / R$, где $\mathcal{E}_i$ – ЭДС индукции. По закону электромагнитной индукции

$$\left|\mathcal{E}_i\right| = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|,$$

где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока за время Δt.

Пусть $t_1 = 0$, тогда $\Delta t = t$, $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = BS = AtS$, $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = AtS$, $\left|\mathcal{E}_i\right| = AS = Alh$, где $S = lh$ – площадь, ограниченная контуром. Следовательно, сила тока

$$I = Alh/R. \quad (3)$$

Подставив значения (2) и (3) в уравнение (1), получим

$$\mu mg - \frac{A^2 l^2 h}{R} t = 0.$$

Отсюда

$$t = \frac{\mu mgR}{A^2 l^2 h}, \quad t = 5 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$$

684. Горизонтально расположенный проводящий стержень, сопротивление которого R и масса m, может скользить без нарушения электрического контакта по двум вертикальным медным шинам. Расстояние между шинами равно l. Снизу их концы соединены с источником тока, ЭДС которого равна $\mathcal{E}$ (рис. 229). Перпендикулярно плоскости, в которой находятся шины, приложено однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Найти постоянную скорость, с которой будет подниматься стержень. Сопротивлением шин и источника тока, а также трением пренебречь.

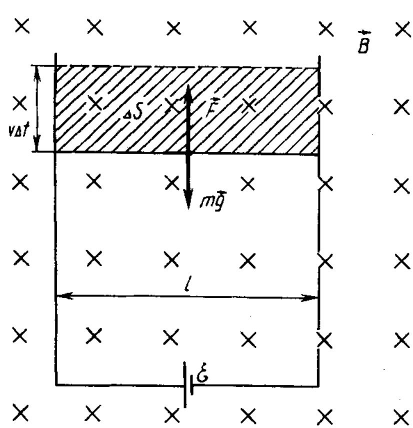


Рис. 229

Р е ш е н и е. На стержень действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и направленная вверх сила Ампера $\vec{F}$, модуль которой

$$F = IBl, \qquad (1)$$

где I — сила тока в цепи.

Так как стержень движется с постоянной скоростью, то выполняется условие равновесия

$$F - mg = 0. \qquad (2)$$

Кроме ЭДС источника $\mathscr{E}$, в цепи действует ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$. По закону Ома для замкнутой цепи сила тока

$$I = \frac{\mathscr{E} + \mathscr{E}_i}{R}. \qquad (3)$$

Согласно закону электромагнитной индукции,

$$\mathscr{E}_i = -\Delta\Phi/\Delta t, \qquad (4)$$

где $\Delta\Phi$ — изменение магнитного потока за время Δt. Магнитная индукция в данном случае постоянна, следовательно, $\Delta\Phi = B\Delta S$, где $\Delta S = S_2 - S_1$ — изменение площади, ограниченной контуром, за время Δt. Как видно из рис. 229, $\Delta S = lv\Delta t$. Следовательно, $\Delta\Phi = Blv\Delta t$, и на основании формулы (4) $\mathscr{E}_i = -Blv$. Подставив это значение ЭДС индукции в формулу (3), получим

$$I = \frac{\mathscr{E} - Blv}{R}. \qquad (5)$$

На основании выражений (1), (2) и (5) получим

$$Bl\frac{\mathscr{E} - Blv}{R} - mg = 0,$$

откуда

$$v = \frac{\mathscr{E}}{Bl} - \frac{Rmg}{B^2l^2}.$$

Нетрудно убедиться, что при равномерном движении стержня вниз со скоростью v_1 возникала бы ЭДС индукции $\mathscr{E}_i = Blv_1$, так как в этом случае площадь контура уменьшается и поэтому $\Delta S = -lv_1\Delta t$. Предлагаем читателю самостоятельно найти значение v_1.

685. Однозарядные ионы, массовые числа которых $A_1 = 20$ и $A_2 = 22$, разгоняются в электрическом поле при разности потенциалов $U = 4{,}0 \cdot 10^3$ В, затем влетают в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}25$ Тл перпендикулярно силовым линиям и, описав полуокружность, вылетают двумя пучками. Определить расстояние между этими пучками. Заряд одновалентного иона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, атомная единица массы $m_0 = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг.

Р е ш е н и е. Найдем скорости v_1 и v_2 ионов, которые они имели при вылете из электрического поля. Работа сил электрического поля равна изменению кинетической энергии каждого иона:

$$eU = m_1 v_1^2/2, \ eU = m_2 v_2^2/2.$$

Отсюда

$$v_1 = \sqrt{2eU/m_1}, \ v_2 = \sqrt{2eU/m_2}, \qquad (1)$$

где m_1, m_2 – массы ионов:

$$m_1 = A_1 m_0, \ m_2 = A_2 m_0. \qquad (2)$$

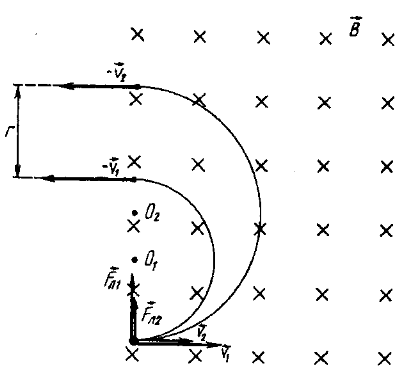
В магнитном поле на ионы действуют силы Лоренца $\vec{F}_{Л1}$ и $\vec{F}_{Л2}$ (рис. 230), модули которых – соответственно

$$F_{Л1} = ev_1 B, \ F_{Л2} = ev_2 B.$$

Эти силы сообщают ионам центростремительное ускорение, вследствие чего ионы движутся по окружностям таких радиусов R_1 и R_2, что, согласно второму закону Ньютона,

$$ev_1 B = m_1 v_1^2/R_1, \ ev_2 B = m_2 v_2^2/R_2.$$

Отсюда



Р и с. 230

$$R_1 = \frac{m_1 v_1}{eB}, \ R_2 = \frac{m_2 v_2}{eB}. \qquad (3)$$

Подставив в выражения (3) значения (1) и (2), получим:

$$R_1 = \frac{\sqrt{2eUA_1 m_0}}{eB}, \ R_2 = \frac{\sqrt{2eUA_2 m_0}}{eB}. \qquad (4)$$

Так как $A_2 > A_1$, из формул (4) следует, что $R_2 > R_1$. Это и показано на рис. 230. Из него видно, что ионы вылетают из магнитного поля двумя пучками, расстояние между которыми равно разности диаметров полуокружностей, т. е.

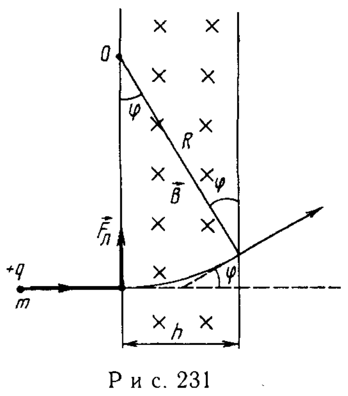
$$r = 2R_2 - 2R_1 = 2(R_2 - R_1).$$

Подставив в это выражение значения R_1 и R_2 из формул (4), найдем:

$$r = \frac{2\sqrt{2}}{B}\sqrt{\frac{m_0 U}{e}}\left(\sqrt{A_2} - \sqrt{A_1}\right), \ r = 1{,}6 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

686. α-Частица влетает по нормали в область поперечного однородного магнитного поля с индукцией $B = 0{,}1$ Тл (рис. 231). Размер области $h = 0{,}2$ м. Найти скорость частицы, если после прохождения магнитного поля она отклонилась на угол $\varphi = 30°$ от первоначального направления. Отношение заряда α-частицы к ее массе $q/m = 0{,}5 \cdot 10^8$ Кл/кг.

Р е ш е н и е. В магнитном поле на α-частицу действует сила Лоренца $\vec{F}_Л$, модуль которой $F_Л = qvB$. Эта сила сообщает частице центростремительное ускорение $a = v^2/R$, где R – радиус окружности, по дуге которой движется частица в магнитном поле.



Р и с. 231

По второму закону Ньютона уравнение движения имеет вид

$$qvB = mv^2/R,$$

где m – масса частицы; v – ее скорость. Отсюда

$$v = \frac{q}{m}RB.$$

Как видно из рис. 231, $R = h/\sin\varphi$. Следовательно,

$$v = \frac{q}{m}\frac{hB}{\sin\varphi}, \ v = 2 \cdot 10^6 \text{ м/с}.$$

687. Из электронной пушки, ускоряющее напряжение в которой $U = 600$ В, вылетает электрон и попадает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1{,}2$ Тл. Направление скорости составляет с направлением линий магнитной индукции угол $\alpha = 30°$. Найти ускорение электрона в магнитном поле. Отношение заряда электрона к его массе $e/m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

Р е ш е н и е. Сила Лоренца $\vec{F}_Л$, действующая на движущийся в магнитном поле электрон, сообщает ему ускорение $\vec{a}$, сонаправленное с этой силой. По второму закону Ньютона имеем уравнение движения $\vec{F}_Л = m_e\vec{a}$, или в проекциях на направление силы Лоренца $F_Л = m_e a$, откуда

$$a = F_Л/m_e. \tag{1}$$

Модуль силы Лоренца

$$F_Л = evB\sin\alpha, \tag{2}$$

где v – скорость электрона, с которой он вылетел из электронной пушки.

Изменение кинетической энергии электрона в электронной пушке равно работе электростатического поля: $m_e v^2/2 = eU$. Отсюда

$$v = \sqrt{2U\frac{e}{m_e}}. \tag{3}$$

Подставив значения (2) и (3) в формулу (1), получим

$$a = \frac{e}{m_e}B\sqrt{2U\frac{e}{m_e}}\sin\alpha, \ a = 1{,}5 \cdot 10^{18} \text{ м/с}.$$

688. Из двух одинаковых проводников изготовлены два контура – квадратный и круговой. Оба контура помещены в одной плоскости в изменяющемся во времени однородном магнитном поле. В круговом контуре индуцируется постоянный ток силой $I_1 = 0{,}41$ А. Найти силу тока в квадратном контуре.

Р е ш е н и е. По закону Ома сила тока в круговом контуре

$$I_1 = \mathscr{E}_1/R_1, \tag{1}$$

в квадратном

$$I_2 = \mathscr{E}_2/R_2, \tag{2}$$

где $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ – ЭДС индукции в этих контурах; R_1, R_2 – сопротивления контуров. Так как проводники одинаковые, то $R_1 = R_2$.

Разделив почленно равенство (1) на (2), получим $I_1/I_2 = \mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2$, откуда сила тока в квадратном контуре

$$I_2 = I_1 \frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1}. \tag{3}$$

По закону электромагнитной индукции находим ЭДС индукции в контурах:

$$\mathscr{E}_1 = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = -\frac{S_1 \Delta B}{\Delta t}, \quad \mathscr{E}_2 = -\frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = -\frac{S_2 \Delta B}{\Delta t}, \tag{4}$$

где $\Delta B/\Delta t$ – скорость изменения магнитной индукции, одинаковая для обоих контуров и постоянная во времени, так как индукционные токи постоянны; S_1, S_2 – площади, ограниченные соответственно круговым и квадратным контуром.

Из формул (4) следует

$$\mathscr{E}_2/\mathscr{E}_1 = S_2/S_1. \tag{5}$$

Пусть l – длина проводника. Тогда сторона квадрата равна $l/4$, а радиус кругового контура $R = l/(2\pi)$. Следовательно,

$$S_1 = \pi R^2 = \frac{l^2}{4\pi}, \quad S_2 = \frac{l^2}{16}. \tag{6}$$

Поэтому, учитывая выражения (5) и (6), будем иметь $\mathscr{E}_2/\mathscr{E}_1 = \pi/4$. Подставив это значение в формулу (3), найдем:

$$I_2 = \frac{\pi}{4} I_1, \quad I_2 = 3{,}2 \cdot 10^{-1}\ \text{А}.$$

689. Металлическое кольцо, диаметр которого d и сопротивление R, расположено в однородном магнитном поле так, что плоскость кольца перпендикулярна вектору магнитной индукции $\vec{B}$. Кольцо вытягивают в сложенный вдвое отрезок прямой; при этом площадь, ограниченная контуром проводника, уменьшается равномерно. Определить заряд q, который пройдет по проводнику.

Р е ш е н и е. При деформации кольца изменяется площадь, ограниченная контуром. Следовательно, изменяется магнитный поток, что приводит к возникновению ЭДС индукции. За время Δt по проводнику пройдет заряд

$$q = I\Delta t, \qquad (1)$$

где I – сила индукционного тока; по закону Ома

$$I = \mathscr{E}_i / R; \qquad (2)$$

$\mathscr{E}_i$ – ЭДС индукции. Согласно закону электромагнитной индукции,

$$\mathscr{E}_i = -\Delta\Phi / \Delta t, \qquad (3)$$

где $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ – изменение магнитного потока. Начальный магнитный поток $\Phi_1 = BS_1$, где S_1 – площадь, ограниченная кольцом. Так как $S_1 = \pi d^2/4$, то $\Phi_1 = B\pi d^2/4$.

Когда кольцо вытянули в сложенный вдвое отрезок прямой, получили $S_2 = 0$, поэтому $\Phi_2 = BS_2 = 0$. Следовательно,

$$\Delta\Phi = -B\pi d^2/4. \qquad (4)$$

На основании формул (1)–(4) получим $q = B\pi d^2/(4R)$.

690. Проводящий контур с источником тока, имеющим внутреннее сопротивление $r = 0{,}2$ Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости контура и направлен так, как показано на рис. 232. Проводник AC может скользить по направляющим рельсам, не теряя электрического контакта. Найти силу тока в цепи при движении проводника AC со скоростью $v_1 = 10$ м/с вправо, если при движении его в том же направлении со скоростью $v_2 = 40$ м/с ток отсутствует. Сопротивление проводника AC $R = 0{,}1$ Ом, его длина $l = 10$ см. Сопротивлением направляющих рельсов и силами трения пренебречь.

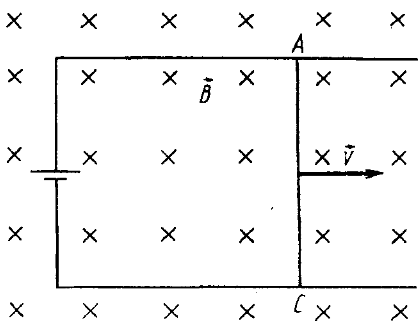


Рис. 232

Р е ш е н и е. При движении проводника AC вправо площадь контура увеличивается, и поэтому в нем, как это показано в решении задачи 684, возникает ЭДС индукции

$$\mathscr{E}_i = -Blv,$$

где B – модуль вектора магнитной индукции; l – длина проводника; v – его скорость.

По закону Ома сила тока в контуре

$$I = \frac{\mathscr{E} + \mathscr{E}_i}{R + r} = \frac{\mathscr{E} - Blv}{R + r},$$

где $\mathscr{E}$ – ЭДС источника тока.

При скорости v_1 сила тока

$$I_1 = \frac{\mathscr{E} - Blv_1}{R + r}, \qquad (1)$$

при скорости v_2

$$I_2 = \frac{\mathscr{E} - Blv_2}{R + r}. \qquad (2)$$

Из формулы (2), учитывая, что $I_2 = 0$, находим ЭДС источника тока: $\mathscr{E} = Blv_2$. Подставив это значение ЭДС в выражение (1), получим:

$$I_1 = \frac{Bl(v_2 - v_1)}{R + r}, \quad I_1 = 1 \text{ А}.$$

691. Проводящая рамка, имеющая $N = 500$ витков площадью $S = 12$ см^2 каждый, замкнута на гальванометр, сопротивление которого $R = 5$ кОм. Рамка находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-2}$ Тл, причем силовые линии поля перпендикулярны плоскости рамки. Какой заряд пройдет по цепи гальванометра, если рамку повернуть на 180°?

Р е ш е н и е. При повороте рамки в ней индуцируется ЭДС, среднее значение которой

$$\mathscr{E}_i = -\Delta\Phi/\Delta t, \qquad (1)$$

где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока; Δt – время, в течение которого происходил поворот.

Сила тока в рамке $I = \mathscr{E}_i/R$. Прошедший по цепи за время Δt заряд

$$q = I\Delta t = \frac{\mathscr{E}_i}{R}\Delta t. \qquad (2)$$

Изменение магнитного потока

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1. \tag{3}$$

Начальный магнитный поток через поверхность, ограниченную рамкой (рис. 233, *а*), $\Phi_1 = NBS$, так как угол α_1

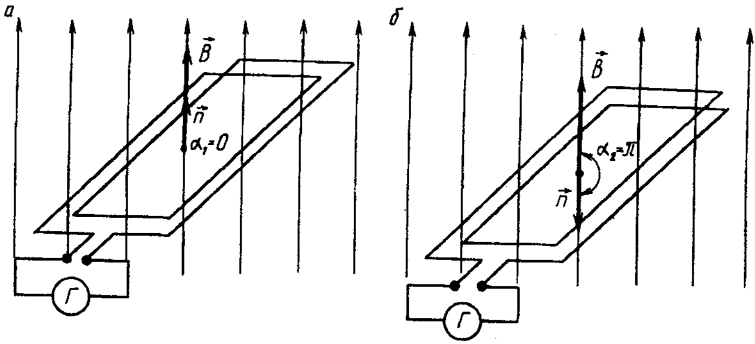


Рис. 233

между векторами $\vec{B}$ и $\vec{n}$ (нормали к поверхности) равен нулю и $\cos\alpha_1 = 1$. После поворота на 180° векторы $\vec{B}$ и $\vec{n}$ направлены противоположно (рис. 233, *б*), $\alpha_2 = \pi$, $\cos\alpha_2 = -1$, следовательно, $\Phi_2 = -NBS$. Подставив значения Φ_1 и Φ_2 в выражение (3), получим

$$\Delta\Phi = -2NBS.$$

Теперь формула (1) примет вид

$$\mathscr{E}_i = 2NBS/(\Delta t),$$

и, подставив это значение в выражение (2), найдем заряд:

$$q = 2NBS/R, \; q = 5 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}. \tag{4}$$

Полезно обратить внимание на то, что описанным в данной задаче методом можно измерять магнитную индукцию B. В самом деле, зная число витков N, площадь витка S, сопротивление цепи R (при этом надо учитывать и сопротивление гальванометра) и измерив заряд q с помощью гальванометра, можно по формуле (4) найти B.

Задачи для самостоятельного решения

692. Квадратная рамка со стороной $a = 10$ см, сделанная из проводника, площадь поперечного сечения которого $S = 1$ мм^2 и удельное сопротивление $\rho = 2 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, присоединена к источнику постоянного напряжения $U = 4$ В и помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Определить максимальный момент сил, действующих на рамку со стороны поля.

693. В однородное магнитное поле с индукцией $B = 2 \cdot 10^{-4}$ Тл перпендикулярно линиям индукции помещен прямолинейный проводник с током силой $I = 50$ А. Найти совокупность точек, в которых результирующая магнитная индукция равна нулю. Определить силу, действующую со стороны магнитного поля на отрезок проводника длиной $l = 50$ см.

694. Прямой провод длиной $l = 10$ см, по которому идет ток силой $I = 20$ А, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1 \cdot 10^{-2}$ Тл. Каков угол между вектором магнитной индукции $\vec{B}$ и направлением тока, если на провод действует сила $F = 1 \cdot 10^{-2}$ Н?

695. Прямолинейный проводник массой $m = 3$ кг, по которому проходит ток силой $I = 5$ А, поднимается вертикально вверх в однородном магнитном поле с индукцией $B = 3$ Тл, двигаясь под углом $\alpha = 30°$ к линиям магнитной индукции. Через время $t = 2$ с после начала движения он приобретает скорость $v = 10$ м/с. Определить длину проводника.

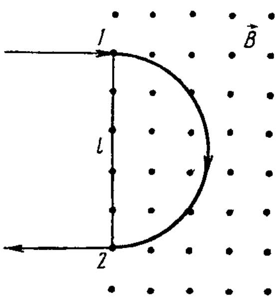
696. Жесткая проводящая рамка квадратной формы лежит на горизонтальной поверхности и находится в магнитном поле, силовые линии которого параллельны двум сторонам рамки. Масса рамки $m = 20$ г, длина ее стороны $a = 4$ см, магнитная индукция $B = 0{,}5$ Тл. Какой силы постоянный ток нужно пропускать по рамке, чтобы одна из ее сторон начала приподниматься?

697. Проводник длиной $l = 10$ см, по которому идет ток силой $I = 15$ А, перемещается в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}50$ Тл на расстояние $s = 20$ см. Определить максимальную работу, которая совершается при перемещении проводника. Как при этом должен двигаться проводник?

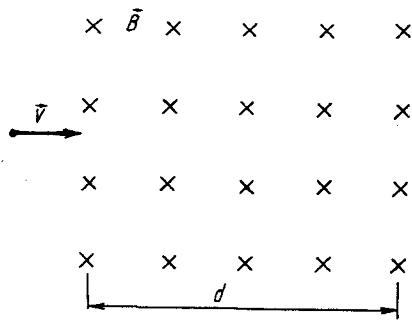
698. Электрон движется по окружности радиуса $R = 10$ мм в магнитном поле с индукцией $B = 0{,}02$ Тл. Какова кинетическая энергия электрона? Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

699. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $v_0 = 2 \cdot 10^7$ м/с. Длина конденсатора $l = 10$ см, напряженность электростатического поля конденсатора $E = 200$ В/см. При вылете из конденсатора электрон попадает в магнитное поле, линии которого перпендикулярны силовым линиям электростатического поля. Магнитная индукция поля $B = 2 \cdot 10^{-2}$ Тл. Найти радиус винтовой траектории электрона в магнитном поле.

700. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 200$ В, влетела в точке *1* (рис. 234) в однородное магнитное поле с индукцией $B = 4 \cdot 10^{-3}$ Тл, перпендикулярной скорости частицы, и вылетела в точке *2*. Расстояние l между точками *1* и *2* равно 1 м. Найти отношение заряда частицы к ее массе.



Р и с. 234



Р и с. 235

701. Однородное магнитное поле с индукцией B создано в полосе шириной d (рис. 235). Пучок электронов направляется перпендикулярно полосе и линиям магнитной индукции. При каких скоростях электроны не пролетят на другую сторону полосы («отразятся» от «магнитной стенки»)? Заряд электрона e, его масса m_e.

702. Заряженная частица влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 45°$ к линиям магнитной индукции и движется по винтовой линии с шагом $h = 20$ мм. Магнитная индукция поля $B = 1 \cdot 10^{-2}$ Тл, заряд частицы $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Определить импульс частицы.

703. Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью $v = 2 \cdot 10^5$ м/с, которая составляет с вектором магнитной индукции $\vec{B}$ угол $\alpha = 60°$. При каком наименьшем значении индукции магнитного поля электрон сможет оказаться в точке, лежащей на той же линии магнитной индукции на расстоянии $L = 2$ см от начальной точки? Отношение заряда электрона к его массе $e/m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

704. Протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}40$ Тл под углом $\alpha = 30°$ к направлению вектора $\vec{B}$ и движется по винтовой линии радиуса $R = 0{,}50$ см. Найти кинетическую энергию протона. Масса протона $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг, заряд протона $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

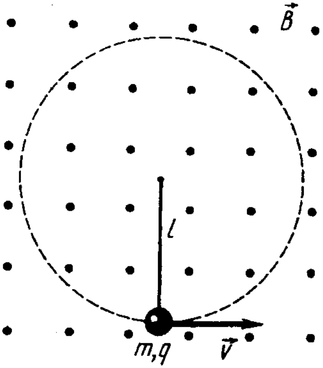
705. Электрон влетает в однородное магнитное поле со скоростью $v = 400$ км/с под углом $\alpha = 60°$ к вектору магнитной индукции $\vec{B}$, модуль которого $B = 1 \cdot 10^{-3}$ Тл. Сколько витков опишет электрон вдоль магнитного поля на расстоянии $r = 2$ м? Отношение заряда электрона к его массе $e/m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

706. Пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 3{,}52 \cdot 10^3$ В, электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл перпендикулярно линиям магнитной индукции и движется по окружности радиуса $R = 2{,}0$ см. Вычислить отношение заряда электрона к его массе.

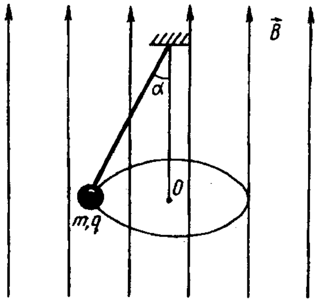
707. Электрон влетает в область пространства с однородным электростатическим полем напряженностью $E = 6 \cdot 10^4$ В/м перпендикулярно линиям напряженности. Определить модуль и направление вектора магнитной индукции однородного магнитного поля, которое надо создать в этой области для того, чтобы электрон пролетел ее, не испытывая отклонений. Энергия электрона $W = 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ Дж, масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

708. Электрон движется по окружности радиуса $R = 10$ см в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл. Параллельно магнитному полю возбуждается однородное электростатическое поле напряженностью $E = 100$ В/м. За какой промежуток времени кинетическая энергия электрона возрастет в $n = 5$ раз?

709. Небольшое заряженное тело массой m, прикрепленное к нити длиной l, может двигаться по окружности в вертикальной плоскости. Перпендикулярно этой плоскости направлены линии магнитной индукции однородного



Р и с. 236



Р и с. 237

магнитного поля с индукцией $\vec{B}$ (рис. 236). Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить телу в нижней точке, чтобы оно совершило полный оборот? Заряд тела положителен и равен q.

710. В однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной вертикально вверх, находится конический маятник: подвешенный на невесомой нити длиной l шарик массой m с положительным зарядом q равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости (рис. 237). При этом нить образует с вертикалью угол α, а шарик движется по часовой стрелке, если смотреть сверху. Найти скорость шарика.

711. Магнитный поток через катушку, состоящую из $N = 75$ витков, $\Phi = 4{,}8 \cdot 10^{-3}$ Вб. За сколько времени должен исчезнуть этот поток, чтобы в катушке возникла средняя ЭДС индукции $\mathscr{E}_i = 0{,}75$ В?

712. Рамка, имеющая форму равностороннего треугольника, помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Плоскость рамки составляет с направлением вектора магнитной индукции угол $\alpha = 30°$. Определить длину стороны рамки, если при равномерном уменьшении магнитного поля до нуля за время $\tau = 0{,}01$ с в рамке индуцируется ЭДС $\mathscr{E}_i = 2 \cdot 10^{-3}$ В.

713. В однородном магнитном поле с индукцией B расположена замкнутая катушка диаметром d. Плоскость катушки перпендикулярна линиям магнитной индукции. Какой заряд пройдет по цепи катушки, если ее повернуть на

180°? Проволока, из которой намотана катушка, имеет площадь поперечного сечения S и удельное сопротивление ρ.

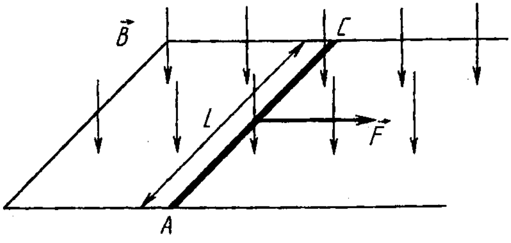
714. Определить разность потенциалов между концами оси железнодорожного вагона, имеющей длину $l = 1{,}6$ м, если на горизонтальном участке пути скорость поезда $v = 45$ км/ч, а вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B = 2 \cdot 10^{-5}$ Тл.

715. По горизонтальным рельсам, расположенным в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 1 \cdot 10^{-2}$ Тл, скользит проводник длиной $l = 1$ м с постоянной скоростью $v = 10$ м/с. Концы рельсов замкнуты на резистор сопротивлением $R = 2$ Ом. Определить количество теплоты, которое выделяется в резисторе за время $t = 4$ с. Сопротивлением рельсов и проводника пренебречь.

716. С какой угловой скоростью надо вращать прямой проводник вокруг одного из его концов в однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной силовым линиям поля, чтобы в проводнике возникла ЭДС $\mathscr{E} = 0{,}30$ В? Длина проводника $l = 20$ см. Магнитная индукция поля $B = 0{,}20$ Тл.

717. Длина подвижного проводника AC равна l, его сопротивление R (рис. 238). Сопротивление неподвижного проводника, по которому скользит без трения проводник AC, пренебрежимо мало. Перпендикулярно плоскости проводников приложено магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Какую силу $\vec{F}$ нужно приложить к проводнику AC для того, чтобы он двигался с постоянной скоростью $\vec{v}$? Система проводников находится в горизонтальной плоскости.

718. Проволочный виток, имеющий площадь $S = 100$ см^2, разрезан в некоторой точке, и в разрез включен конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Виток помещен в однородное магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны плос-

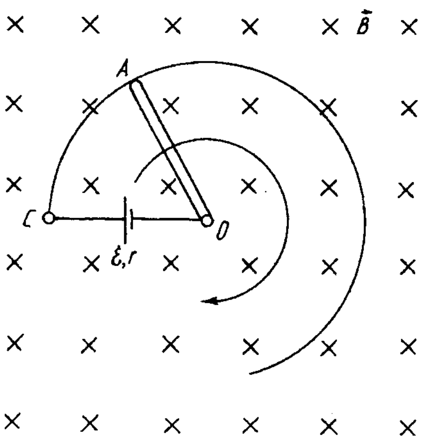


Р и с. 238

кости витка. Магнитная индукция поля равномерно изменяется во времени со скоростью $\Delta B/\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл/с. Определить заряд конденсатора.

719. Плоский виток изолированного провода перегибают, придавая ему вид «восьмерки», а затем помещают в однородное магнитное поле перпендикулярно силовым линиям. Длина витка $l = 120$ см. Петли «восьмерки» можно считать окружностями с отношением радиусов 1 : 2. Какой силы ток пройдет по проводу, если поле будет убывать с постоянной скоростью $\Delta B/\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$ Тл/с? Сопротивление витка $R = 1$ Ом.

720. Проводящий стержень OA длиной $l = 10$ см вращается с угловой скоростью $\omega = 300$ рад/с вокруг оси, проходящей через один из его концов, в плоскости, перпендикулярной магнитной индукции $\vec{B}$, модуль которой $B = 1$ Тл. Свободный конец стержня скользит но проводнику в виде дуги окружности, радиус которой равен длине стержня. Между точкой C проводника и точкой закрепления стержня на оси вращения включена батарея, как показано на рис. 239. На этом же рисунке указаны направления вектора магнитной индукции $\vec{B}$ и вращения стержня. Сопротивления стержня, проводника и контакта между ними пренебрежимо малы по сравнению с внутренним сопротивлением батареи. Найти напряжение на зажимах батареи.



Р и с. 239

721. Квадратная рамка со стороной $l = 10$ см вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью $\omega = 300$ рад/с. Определить максимальное значение силы тока в рамке, если ее сопротивление $R = 10$ Ом, магнитная индукция поля $B = 0{,}02$ Тл. Ось вращения рамки перпендикулярна линиям магнитной индукции.

722. Плоский замкнутый металлический контур площадью $S_1 = 10$ см^2 деформируется в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 1 \cdot 10^{-2}$ Тл. Площадь контура за время $\tau = 2$ с равномерно уменьшается (плоскость контура при этом остается перпендикулярной силовым линиям поля) до величины $S_2 = 2$ см^2. Определить силу тока, проходящего по контуру в течение времени τ, если сопротивление контура $R = 1$ Ом.

723. Квадратная рамка со стороной $a = 50$ см помещена в однородное магнитное поле так, что плоскость ее перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить магнитную индукцию, если известно, что при исчезновении магнитного поля в течение времени $\tau = 0{,}01$ с среднее значение ЭДС индукции, возникающей в рамке, $\mathscr{E} = 50$ мВ.

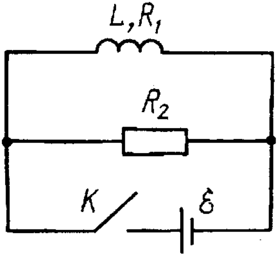
724. Проволочное кольцо радиуса $r = 0{,}1$ м лежит на столе. Какой заряд пройдет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли $B = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ Тл. Сопротивление кольца $R = 1$ Ом.

725. Катушка, имеющая $N = 100$ витков, расположена в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1 \cdot 10^{-2}$ Тл. Плоскости ее витков перпендикулярны линиям магнитной индукции. Площадь одного витка $S = 10$ см^2. Катушка присоединена к баллистическому гальванометру так, что сопротивление всей цепи $R = 10$ Ом. При повороте катушки на угол α через гальванометр проходит заряд $q = 5 \cdot 10^{-5}$ Кл. Определить угол α.

726. В однородном магнитном поле находится замкнутая обмотка, состоящая из $N = 1000$ витков квадратной формы. Линии магнитной индукции перпендикулярны плоскости витков. Магнитная индукция изменяется на $\Delta B = 2 \cdot 10^{-2}$ Тл за время $\Delta t = 0{,}1$ с. Длина стороны квадрата (витка) $a = 0{,}1$м, площадь поперечного сечения провода обмотки $S = 1 \cdot 10^{-6}$ м^2, удельное сопротивление $\rho = 1 \cdot 10^{-7}$ Ом · м. Какое количество теплоты выделяется в обмотке за время Δt?

727. Прямоугольная рамка из проводника сопротивлением $R = 1$ Ом, двигаясь поступательно с постоянной скоростью $v = 4$ м/с, пересекает полосу однородного магнитного поля с индукцией $B = 0{,}5$ Тл. Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости рамки. Стороны рамки $l_1 = 10$ см, $l_2 = 5$ см, ширина полосы $l_3 > l_2$, рамка движется вдоль стороны l_2. Определить количество теплоты, которое выделится в рамке к моменту, когда она пересечет полосу.

728. Катушка, индуктивность которой $L = 0{,}06$ мГн, и резистор соединены параллельно и подключены к источнику тока (рис. 240). По катушке идет ток силой $I = 1{,}2$ А. При размыкании ключа К сила тока в катушке изменяется практически до нуля за время $\Delta t = 120$ мкс. Определить среднюю ЭДС самоиндукции, возникающую в катушке, и количество теплоты, которое выделится в катушке и в резисторе.



Р и с. 240

729. Катушка индуктивностью $L = 25$ мГн и сопротивлением $R = 5$ Ом соединена параллельно с резистором, на котором поддерживается постоянное напряжение $U = 50$ В (см. рис. 240). Найти энергию, которая выделится при размыкании ключа К. Какая средняя ЭДС самоиндукции возникает при этом в катушке, если энергия будет выделяться в течение времени $\Delta t = 10$ мс?

730. В катушке индуктивности сила тока линейно увеличивается со скоростью $\Delta I/\Delta t = 10$ А/с. Найти ЭДС индукции, возникающую при этом в катушке, если резонансная частота ν колебательного контура, образованного из этой катушки и конденсатора емкостью $C = 100$ пФ, равна 100 кГц.

IV. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

11. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Методические указания к решению задач

Если в задаче дана формула, описывающая зависимость координаты колеблющегося тела от времени, то величины, характеризующие колебания (амплитуда, частота, фаза, начальная фаза, период), могут быть найдены путем сопоставления данной формулы и ее общего вида. Следует обратить внимание на то, что эту формулу можно записать как в виде $x = x_m \cos(\omega t + \varphi_{02})$, так и в виде $x = x_m \sin(\omega t + \varphi_{01})$, в зависимости от выбора начальной фазы.

В задачах о математическом маятнике необходимо учитывать, что если маятник находится в неинерциальной системе отсчета, т. е. в системе отсчета, которая движется относительно инерциальной системы с некоторым ускорением $\vec{a}$, то период колебаний его

$$T = 2\pi\sqrt{l/g_{\text{н}}},$$

где $g_{\text{н}}$ – ускорение свободного падения в неинерциальной системе отсчета. Это ускорение можно найти из векторного уравнения $\vec{g}_{\text{н}} = \vec{g} + (-\vec{a})$, где $\vec{g}$ – ускорение свободного падения в инерциальной системе отсчета.

Например, при нахождении периода колебаний маятника, точка подвеса которого движется с ускорением $\vec{a}$, направленным горизонтально, надо учитывать, что в этом случае $g_{\text{н}} = \sqrt{g^2 + a^2}$. Такой результат получится, если геометрически найти вектор $\vec{g}_{\text{н}}$ в соответствии с приведенным выше векторным уравнением, а затем его модуль $g_{\text{н}}$.

Основные законы и формулы

Координата (смещение от положения равновесия) x гармонически колеблющегося тела (материальной точки) в момент времени t определяется формулой

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где x_m – амплитуда колебаний (модуль наибольшего смещения тела от положения равновесия); ω – круговая (циклическая, угловая) частота; $\omega t + \varphi_0 = \varphi$ – фаза колебаний в момент времени t; φ_0 – начальная фаза колебаний. Эта формула может быть записана также и с помощью синуса:

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi_1),$$

где $\varphi_1 = \varphi_0 + \pi/2$.

Обе формулы равнозначны и различаются только начальными фазами на величину $\pi/2$.

Период колебаний – это минимальный промежуток времени T, по истечении которого повторяются значения всех физических величин, характеризующих периодический колебательный процесс.

Частота колебаний, т. е. число колебаний, совершаемых за единицу времени,

$$\nu = 1/T,$$

где T – период.

Круговая (циклическая, угловая) частота колебаний

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T,$$

где ν – частота колебаний; T – период.

Проекция скорости тела, совершающего гармонические колебания,

$$v_x = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Проекция ускорения тела, совершающего гармонические колебания,

$$a_x = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

Проекция силы, под действием которой тело совершает гармонические колебания,

$$F_x = -kx,$$

где $k = m\omega^2$; m – масса тела; ω – круговая частота.

Полная механическая энергия колеблющегося тела

$$E = E_\text{k} + E_\text{p} = kx_m^2/2,$$

где E_k, E_p – соответственно кинетическая и потенциальная энергия.

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g},$$

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

Период колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{m/k},$$

где m – масса груза, прикрепленного к пружине; k – жесткость (коэффициент упругости) пружины.

Связь между длиной волны λ, скоростью волны v и периодом T (или частотой ν) выражается формулой

$$v = \lambda/T = \lambda\nu.$$

Примеры решения задач

731. Материальная точка совершает гармонические колебания, при которых координата $x = 50\cos 100\pi t$ (длина выражена в миллиметрах, время – в секундах). Определить амплитуду, частоту и период колебаний. Найти смещение x_1 для фазы $\varphi_1 = 2\pi/9$.

Р е ш е н и е. Зависимость координаты гармонически колеблющейся точки от времени описывается уравнением

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Сопоставляя с ним заданное уравнение, находим, что амплитуда $x_m = 50$ мм, начальная фаза $\varphi_0 = 0$, фаза $100\pi t = \omega t$. Подставив в последнее равенство значение $\omega = 2\pi/T$, где T – период, получим $T = 0{,}02$ с. Тогда частота $\nu = 1/T$, $\nu = 50$ Гц.

Подставив в заданное уравнение значение фазы $\varphi_1 = 2\pi/9$, найдем для нее смещение:

$$x_1 = 50\cos\frac{2\pi}{9},\ x_1 = 40 \text{ мм}.$$

732. Тело массой $m = 0{,}5$ г колеблется по закону $x = 10\cos 200\pi t$, где t выражено в секундах, x – в миллиметрах. Найти максимальное значение возвращающей силы.

Р е ш е н и е. При гармонических колебаниях ускорение колеблющейся точки изменяется по закону

$$a_x = -\omega^2 x = -\omega^2 x_m \cos\omega t,$$

если начальная фаза равна нулю. Проекция возвращающей силы

$$F_x = ma_x = -m\omega^2 x_m \cos\omega t.$$

Отсюда видно, что максимальное значение проекции возвращающей силы

$$F_{xm} = -m\omega^2 x_m. \qquad (1)$$

Из заданного уравнения $x = 10\cos 200\pi t$, сопоставив его с уравнением $x = x_m \cos\omega t$, находим: $200\pi t = \omega t$, $\omega = 200\pi$, $x_m = 10$ мм $= 10 \cdot 10^{-3}$ м. Подставив значения x_m, m и ω в выражение (1), получим $F_{xm} = -2$ Н. Минус указывает на то, что направление силы противоположно направлению смещения. Максимальное значение возвращающей силы $F_m = 2$ Н.

733. К динамометру подвесили груз, вывели его из состояния равновесия и отпустили. При этом возникли колебания, частота которых $\nu = 2$ Гц. На каком расстоянии от нулевого положения остановится указатель динамометра после прекращения колебаний? Массу пружины не учитывать.

Р е ш е н и е. После прекращения колебаний груз будет находиться в состоянии равновесия. На груз действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $\vec{F}$, которые равны по модулю: $F = mg$. По закону Гука $F = k\Delta l$, где k — жесткость пружины; Δl — ее удлинение. Поэтому $k\Delta l = mg$, откуда

$$\Delta l = mg/k. \qquad (1)$$

Из формулы периода колебаний пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ найдем жесткость:

$$k = 4\pi^2 m/T^2.$$

Так как частота $\nu = 1/T$, то $k = 4\pi^2 m\nu^2$. Подставив это значение в выражение (1), найдем:

$$\Delta l = \frac{g}{4\pi^2\nu^2},\ \Delta l = 6 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

734. Определить частоту звуковых колебаний в стали, если расстояние между ближайшими различающимися по фазе на $\Delta\varphi = 90°$ точками звуковой волны $l = 1{,}54$ м. Скорость звуковых волн в стали $\upsilon = 5000$ м/с.

Р е ш е н и е. Частота звуковых колебаний

$$\nu = v/\lambda, \tag{1}$$

где v – скорость распространения волн; λ – длина волны.

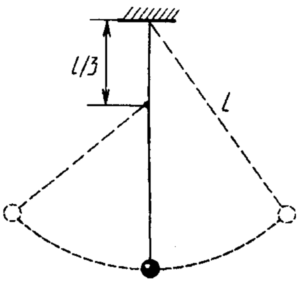
Две точки волны, расстояние между которыми l, различаются по фазе на $\Delta\varphi = 2\pi l/\lambda$. Отсюда

$$\lambda = \frac{2\pi l}{\Delta\varphi} = \frac{2\pi l}{\pi/2} = 4l.$$

Подставив это значение в выражение (1), получим:

$$\nu = v/(4l), \ \nu = 812 \text{ Гц}.$$

735. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки. Под точкой подвеса маятника на расстоянии $l/3$ от нее в стенку забит гвоздь (рис. 241). Найти период колебаний маятника.



Р и с. 241

Р е ш е н и е. Период колебаний маятника

$$T = t_1 + t_2, \tag{1}$$

где t_1, t_2 – время движения маятника соответственно справа и слева от вертикали. Время t_1 равно половине периода колебаний маятника длиной l:

$$t_1 = \frac{T_1}{2} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Время t_2 равно половине периода колебаний маятника длиной $2l/3$:

$$t_2 = \frac{T_2}{2} = \pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

Подставив значения t_1 и t_2 в выражение (1), получим

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

736. В кабине лифта находится математический маятник. Когда кабина неподвижна, период его колебаний $T_0 = 1$ с. В движущейся с постоянным ускорением кабине период $T = 1{,}2$ с. Определить модуль и направление ускорения кабины.

Р е ш е н и е. В неподвижной кабине период колебаний маятника

$$T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}, \qquad (1)$$

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

В ускоренно движущейся кабине период

$$T = 2\pi\sqrt{l/g_н}, \qquad (2)$$

где $g_н$ – ускорение свободного падения в кабине.

Кабина, движущаяся с ускорением $\vec{a}$, представляет собой неинерциальную систему отсчета. Можно доказать, что $\vec{g}_н = \vec{g} + (-\vec{a})$. В частности (см. решение задачи 97), когда лифт поднимается с ускорением $\vec{a}$, направленным вверх, ускорение свободного падения в лифте равно по модулю $g + a$. Если же ускорение $\vec{a}$ направлено вниз, то в лифте тела свободно падают с ускорением $g - a$. Направление скорости лифта при этом не играет роли.

Согласно условию, $T > T_0$. Поэтому на основании формул (1) и (2) приходим к выводу, что $g_н < g$. Следовательно, ускорение лифта $\vec{a}$ направлено вниз, при этом $g_н = g - a$.

Возведя в квадрат левые и правые части равенств (1) и (2) и разделив их почленно, получим

$$\frac{T_0^2}{T^2} = \frac{g - a}{g},$$

откуда модуль ускорения лифта

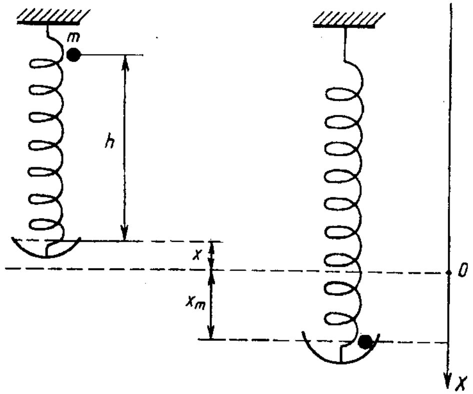
$$a = g(1 - T_0^2/T^2), \ a = 3 \text{ м/с}^2.$$

737. На чашку, подвешенную на пружине жесткостью k (рис. 242), с высоты h падает груз массой m и остается на чашке (удар абсолютно неупругий). Определить амплитуду колебаний. Массой чашки и пружины пренебречь.

Р е ш е н и е. В результате абсолютно неупругого удара чашка с грузом будет иметь скорость $\vec{u}$, модуль которой найдем из уравнения, составленного в проекциях на ось OX согласно закону сохранения импульса:

$$mv = (m + m_1)u, \qquad (1)$$

где m_1 – масса чашки, v – скорость груза в момент падения, ее мы найдем из закона сохранения энергии:



Р и с. 242

$mgh = mv^2/2$, откуда $v = \sqrt{2gh}$. Подставляя это значение скорости в уравнение (1) и учитывая, что $m_1 = 0$, получаем $u = \sqrt{2gh}$.

Кинетическая энергия чашки переходит в потенциальную энергию растянутой пружины. Система будет совершать гармонические колебания относительно некоторого положения равновесия. Относительно этого положения пружина в момент удара обладала потенциальной энергией

$$E_{p1} = kx^2/2,$$

где x – смещение, которое найдем из условия, что в положении равновесия $mg = kx$. Отсюда $x = mg/k$. Следовательно,

$$E_{p1} = m^2g^2/(2k). \quad (2)$$

Кинетическая энергия системы сразу после удара

$$E_{k1} = mu^2/2 = mgh. \quad (3)$$

Максимальная потенциальная энергия пружины

$$E_{pm} = kx_m^2/2, \quad (4)$$

где x_m – амплитуда колебаний.

Согласно закону сохранения энергии, составим уравнение:

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{pm}$$

или, учитывая значения (2)–(4),

$$mgh + \frac{m^2g^2}{2k} = \frac{kx_m^2}{2}.$$

Отсюда найдем амплитуду колебаний:

$$x_m = \frac{1}{k}\sqrt{(mg)^2 + 2mghk}.$$

738. Капли воды падают через одинаковые промежутки времени с некоторой высоты на пластину, закрепленную на пружине. Частота собственных колебаний пластины равна ω_0. Известно, что амплитуда колебаний пластины при этом оказывается максимальной. Найти расстояние между отрывающейся каплей и ближайшей к ней падающей каплей. Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. Расстояние между отрывающейся каплей и ближайшей к ней падающей каплей

$$h = g\tau^2/2, \qquad (1)$$

где τ – промежуток времени, через который падают капли.

Под действием падающих капель пластина совершает вынужденные колебания. Так как амплитуда их максимальна, это означает, что возник резонанс. При резонансе частота внешней силы (в данном случае частота падения капель) совпадает с частотой собственных колебаний системы: $\omega = \omega_0$. Отсюда следует, что промежуток времени τ равен периоду собственных колебаний пластины: $\tau = T_0 = 2\pi/\omega_0$. Подставив это значение в формулу (1), получим

$$h = 2\pi^2 g/\omega_0^2.$$

739. При какой скорости поезда рессоры вагонов будут особенно сильно колебаться под действием толчков колес на стыках рельсов? Длина рельса l, на рессору действует сила F_1, рессора прогибается на h при силе F_2.

Р е ш е н и е. Рессоры будут особенно сильно колебаться при возникновении резонанса; при этом период собственных колебаний рессор равен периоду внешней силы, т. е. промежутку времени между двумя соседними толчками:

$$T_0 = \tau. \qquad (1)$$

При скорости поезда v толчки повторяются через промежуток времени, за который поезд проходит путь, равный длине рельса:

$$\tau = l/v. \tag{2}$$

Период собственных колебаний рессоры

$$T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}, \tag{3}$$

где k – жесткость рессоры; m – масса груза, действующего на рессору с силой F_1. Так как $F_1 = mg$, то $m = F_1/g$. Жесткость $k = F_2/h$.

Подставив значения m и k в формулу (3), получим

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{F_1 h}{F_2 g}}. \tag{4}$$

На основании условия (1) и выражений (2) и (4) имеем

$$2\pi\sqrt{\frac{F_1 h}{F_2 g}} = \frac{l}{v},$$

откуда

$$v = \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{F_2 g}{F_1 h}}.$$

740. Маятниковые часы, точно идущие на уровне моря, подняты на высоту $h = 1000$ м. На сколько отстанут они за время $t_0 = 1$ сут $= 86\,400$ с? Радиус Земли $R = 6370 \cdot 10^3$ м. Маятник считать математическим.

Решение. Пусть t – показание часов на высоте h по истечении суток. Тогда отставание часов

$$\Delta t = t_0 - t, \tag{1}$$

где t_0 – показание часов на уровне моря.

Показание часов пропорционально числу колебаний маятника:

$$t/t_0 = N/N_0, \tag{2}$$

где N_0, N – число колебаний маятника за сутки соответственно на уровне моря и на высоте h.

С увеличением высоты уменьшается ускорение свободного падения, поэтому период колебаний маятника увеличивается, а следовательно, за сутки на высоте h маятник совершит меньше колебаний, чем за то же время на уровне моря ($N < N_0$), поэтому часы отстанут. Они покажут время

$$t = t_0 \frac{N}{N_0}, \qquad (3)$$

как это следует из выражения (2).

На уровне моря период колебаний маятника

$$T_0 = 2\pi\sqrt{l/g_0},$$

на высоте h

$$T = 2\pi\sqrt{l/g_h},$$

где g_0, g_h – ускорение свободного падения соответственно на уровне моря и на высоте h. Поэтому $N_0 = t_0/T_0$, $N = t_0/T$. Следовательно,

$$\frac{N}{N_0} = \frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{g_h}{g_0}}. \qquad (4)$$

Но

$$g_0 = G\frac{M}{R^2}, \; g_h = G\frac{M}{(R+h)^2},$$

где G – гравитационная постоянная; M – масса Земли; R – радиус Земли. Поэтому

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{R^2}{(R+h)^2}.$$

Подставив значение этого отношения в формулу (4), получим

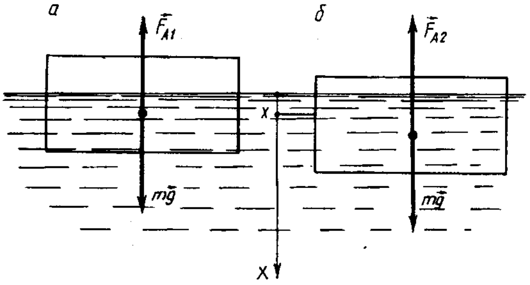
$$\frac{N}{N_0} = \frac{R}{R+h}. \qquad (5)$$

Теперь на основании формул (1), (3) и (5) найдем отставание часов за сутки:

$$\Delta t = \left(1 - \frac{N}{N_0}\right)t_0 = \left(1 - \frac{R}{R+h}\right)t_0 = \frac{h}{R+h}t_0, \; \Delta t = 14 \text{ с}.$$

741. Деревянный брусок массой $m = 3{,}2$ кг с площадью основания $S = 400$ см^2 плавает в воде. Брусок слегка погрузили в воду глубже и отпустили. Найти частоту колебаний бруска. Силой трения пренебречь. Плотность воды $\rho = 1{,}0$ г/см^3.

Р е ш е н и е. При равновесии на брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и архимедова сила $\vec{F}_{A1}$ (рис. 243, *а*) и выполняется условие $m\vec{g} + \vec{F}_{A1} = \vec{0}$.



Р и с. 243

Проведем ось OX, направленную вертикально вниз, с началом на поверхности воды. Спроектировав силы на эту ось, получим $mg - F_{A1} = 0$. Отсюда, учитывая, что $F_{A1} = \rho g V_1$, где V_1 – объем погруженной части бруска, получим

$$mg - \rho g V_1 = 0. \qquad (1)$$

Если брусок погрузить глубже на расстояние x (рис. 243, *б*), то архимедова сила станет равной $\vec{F}_{A2}$, а ее модуль $F_{A2} = \rho g(V_1 + xS)$. Равновесие нарушится, на брусок будет действовать результирующая сила

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{F}_{A2}.$$

В проекциях на ось OX будем иметь

$$F_x = mg - \rho g(V_1 + xS). \qquad (2)$$

Из уравнения (1) следует, что $mg = \rho g V_1$. Подставив это значение mg в формулу (2), получим $F_x = -\rho g S x$, или $F_x = -kx$, где $k = \rho g S$. Следовательно, период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho g S}},$$

а частота

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\rho g S}{m}}, \ \nu = 1{,}8 \text{ Гц}.$$

Задачи для самостоятельного решения

742. Тело массой $m = 2{,}0$ кг совершает гармонические колебания по закону $x = 50\cos\frac{\pi}{3}t$, где все величины выражены в единицах СИ. Определить максимальные значения смещения, скорости, ускорения и силы. Найти полную энергию тела.

743. Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению

$$x = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right),$$

в котором все величины заданы в единицах СИ. Найти период колебаний, амплитуду и начальную фазу.

744. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить вместо медного алюминиевый шарик такого же объема? Плотность меди $\rho_1 = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, алюминия $\rho_2 = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3.

745. Тело, прикрепленное к пружине, вывели из состояния равновесия и отпустили, в результате чего оно стало совершать гармонические колебания вдоль горизонтального стержня. Определить отношение кинетической энергии системы к ее потенциальной энергии по истечении времени t после начала колебаний, если их период равен T. Массой пружины пренебречь.

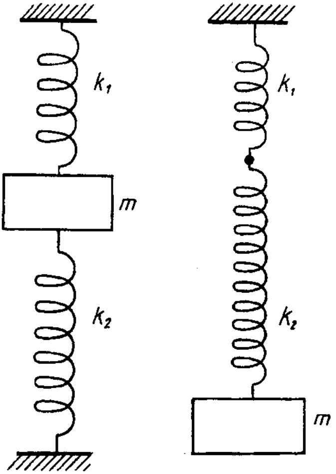
746. Пружина под действием подвешенного к ней груза растянулась на $x = 6{,}5$ см. Если после этого груз оттянуть вниз, а затем отпустить, то он начнет колебаться вдоль вертикальной оси. Определить период этих колебаний.

747. Шарик, подвешенный на пружине, сместили на расстояние $a = 0{,}01$ м вниз от положения равновесия и отпустили. Какой путь пройдет шарик за $t = 2$ с, если частота колебаний этой системы $\nu = 5$ Гц? Затуханием пренебречь.

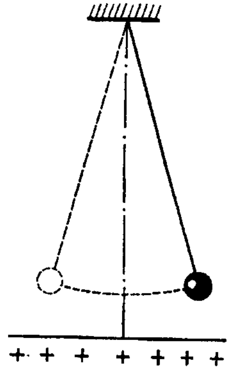
748. Груз массой $m = 400$ г, подвешенный на пружине жесткостью $k = 250$ Н/м, совершает колебания с амплитудой $x_m = 15$ см. Найти наибольшую скорость груза.

749. От груза, висящего на пружине жесткостью k, отделяется его часть массой m. На какую максимальную высоту поднимется оставшаяся часть груза? Сопротивлением воздуха пренебречь.

750. Найти циклические частоты колебаний маятников, изображенных на рис. 244. Известно, что жесткости пружин равны k_1 и k_2, масса груза m. Массами пружин пренебречь.



Р и с. 244



Р и с. 245

751. Два математических маятника одновременно начинают колебаться. За один и тот же промежуток времени первый совершает $N_1 = 20$, а второй – $N_2 = 10$ колебаний. Определить отношение длин этих маятников.

752. Положительно заряженный шарик массой $m = 30$ г совершал гармонические колебания над положительно заряженной бесконечной горизонтальной плоскостью (рис. 245). При этом сила электрического взаимодействия шарика и плоскости $F = 0{,}10$ Н, а период его колебаний $T = 2{,}0$ с. Затем шарик перезарядили так, что его заряд стал отрицательным, но по модулю равным первоначальному. Определить период гармонических колебаний шарика в новом состоянии.

753. Определить длину математического маятника, если известно, что при уменьшении длины нити на $\Delta l = 5$ см частота колебаний маятника увеличивается в $n = 1{,}5$ раза.

754. Часы с маятником длиной $l = 1$ м за сутки ($t = 24$ ч) отстают на $\Delta t = 1$ ч. На сколько нужно изменить длину маятника, чтобы часы показывали точное время?

755. Два математических маятника с периодами колебаний $T_1 = 6$ с и $T_2 = 5$ с соответственно одновременно начинают колебания в одинаковых фазах. Через какое наименьшее время фазы их колебаний снова будут одинаковыми?

756. Шарик плотностью ρ_1 подвешен на невесомой и нерастяжимой нити длиной l в жидкой среде, плотность которой равна ρ_2. Определить период колебаний шарика. Трением пренебречь.

757. Шарик, имеющий массу $m = 10$ г и заряд $q = 2 \cdot 10^{-4}$ Кл, подвешен на невесомой и нерастяжимой нити длиной $l = 25$ см в электрическом поле плоского горизонтального конденсатора. Разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 120$ В, расстояние между ними $d = 30$ см. Чему равен период колебаний шарика на нити?

758. Математический маятник состоит из шарика массой $m = 50$ г, подвешенного на нити длиной $l = 1$ м. Определить наименьшую силу натяжения нити, если шарик проходит через положение равновесия со скоростью $v = 1{,}4$ м/с.

759. При какой скорости поезда математический маятник длиной $l = 11$ см, подвешенный в вагоне, особенно сильно раскачивается, если длина рельсов $L = 12{,}5$ м?

760. Математический маятник колеблется по закону

$$x = x_m \cos(2\pi t + \varphi_0).$$

Какова длина маятника? Величины в уравнении выражены в единицах СИ.

761. В кабине лифта находится математический маятник. Когда лифт неподвижен, период колебаний маятника $T_0 = 1$ с. Определить модуль и направление ускорения лифта, если период колебаний в движущемся лифте $T = 0{,}9$ с.

762. Период колебаний математического маятника на уровне моря $T_0 = 2$ с. На сколько изменится период колебаний этого маятника, если его поднять на высоту $h = 10$ км над уровнем моря? Радиус Земли $R = 6370$ км.

763. Ракета поднимается вертикально вверх с ускорением $a = 3g$. Сколько полных колебаний совершит помещенный в ракете маятник длиной $l = 1{,}0$ м за время, в течение которого ракета поднимается на высоту $h = 1480$ м? Зависимостью ускорения свободного падения от высоты пренебречь.

764. Кабина лифта, к потолку которой подвешен математический маятник длиной $l = 1$ м, движется с ускорением $a = 2{,}4$ м/с^2, направленным вниз. Определить период колебаний маятника. В каком направлении движется лифт — вверх или вниз?

765. Масса колеблющейся частицы $m = 0{,}01$ г, частота колебаний $\nu = 500$ Гц, амплитуда $x_m = 2$ мм. Определить: кинетическую энергию частицы при прохождении положения равновесия; потенциальную энергию при смещении, равном амплитуде; полную энергию частицы.

766. Математический маятник, состоящий из стального шарика, диаметр которого $d = 4$ см, и нити длиной $l = 2{,}43$ м, совершает гармонические колебания с амплитудой $x_m = 10$ см. Определить скорость шарика при прохождении положения равновесия и наибольшее значение возвращающей силы. Плотность стали $\rho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

767. За время $t = 120$ с математический маятник совершил $N_1 = 120$ колебаний. Когда длину маятника увеличили на $\Delta l = 74{,}7$ см, он за то же время совершил $N_2 = 60$ колебаний. Найти начальную длину маятника, его конечную длину и ускорение свободного падения в месте проведения опыта.

768. Математический маятник длиной $l = 50{,}0$ см колеблется в кабине самолета. Каков период его колебаний, если самолет: а) движется равномерно; б) летит горизонтально с ускорением $a = 2{,}50$ м/с^2; в) планирует вниз под углом $\alpha = 15°$ к горизонту?

769. Математический маятник длиной $l = 1$ м установлен в лифте, который поднимается с ускорением $a = 2{,}5$ м/с^2, направленным вверх. Определить период колебаний маятника.

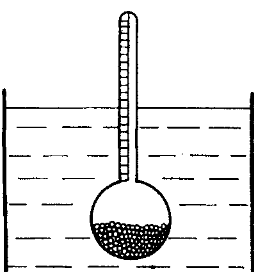


Рис. 246

770. Ареометр массой m состоит из закрытого стеклянного сосуда с грузом и цилиндрической трубки, площадь поперечного сечения которой равна S. Он помещен в жидкость плотностью ρ (рис. 246). Ареометр погружают в жидкость несколько глубже, чем это нужно для его равновесия, и затем отпускают. Найти период свободных колебаний ареометра. Трением пренебречь.

771. На гладком горизонтальном столе покоится брусок массой $M = 20$ г, прикрепленный пружиной жесткостью $k = 50$ Н/м к стене (рис. 247). В брусок ударяется шарик массой $m = 10$ г, движущийся по столу со скоростью $v_0 = 30$ м/с, направленной вдоль пружины. Считая соударение шарика и бруска абсолютно упругим, найти амплитуду колебаний бруска после удара. Время удара пренебрежимо мало по сравнению с периодом колебаний бруска.

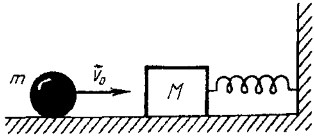


Рис. 247

772. В U-образную трубку, площадь поперечного сечения которой $S = 10$ см^2, налита вода массой $m = 200$ г. Если воду вывести из положения равновесия (рис. 248), то она будет колебаться. Найти частоту колебаний. Плотность воды $\rho = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

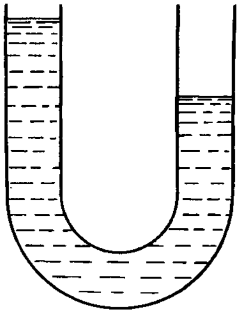


Рис. 248

773. Однородный сплошной деревянный цилиндр плавает в воде в вертикальном положении. Если цилиндр притопить и отпустить, то он будет совершать колебания, период которых $T = 1$ с. Определить высоту цилиндра. Плотность воды $\rho_1 = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность дерева $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Силу трения не учитывать.

774. Скорость волны вдоль резинового шнура $v = 3$ м/с при частоте $\nu = 2$ Гц. Какова разность фаз между точками, отстоящими друг от друга на $l = 75$ см?

775. Длина волны $\lambda = 60$ см. На каком расстоянии друг от друга находятся точки волны с противоположными фазами колебаний? На каком расстоянии находятся точки с разностью фаз $\Delta\varphi = \pi/4$?

776. В некоторой среде распространяется волна. За время, в течение которого частица среды совершает $N = 140$ колебаний, волна распространяется на расстояние $l = 112$ м. Найти длину волны.

777. Звуковая волна распространилась из воздуха в воду. Длина этой волны в воздухе $\lambda_1 = 1$ м. Какова длина звуковой волны в воде? Скорость звука в воздухе $v_1 = 0{,}34 \cdot 10^3$ м/с, в воде — $v_2 = 1{,}36 \cdot 10^3$ м/с.

778. Имеются два когерентных источника звука. В точке, отстоящей от первого источника на $l_1 = 2{,}3$ м, а от второго на $l_2 = 2{,}48$ м, звук не слышен. Минимальная частота колебаний, при которой это возможно, $\nu = 1$ кГц. Найти скорость звука.

779. Дорожный мастер, приложив ухо к рельсу, услышал звук начавшегося движения поезда, а через $t = 2$ с до него донесся гудок локомотива при отправлении. На каком расстоянии от станции отправления находился мастер? Скорости звуковых волн в воздухе и в стали принять равными $v_1 = 330$ м/с и $v_2 = 5000$ м/с соответственно.

780. Из пункта A в пункт B дважды был послан звуковой сигнал, частота которого $\nu = 50$ Гц, причем в первый раз скорость звука была $v_1 = 330$ м/с. Во второй раз температура воздуха была выше, поэтому скорость звука повысилась и стала равной $v_2 = 340$ м/с. Число волн, укладывающихся на расстоянии от A до B, во второй раз оказалось, как и в первый, целым, но на две волны меньше. Определить расстояние между пунктами.

12. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Методические указания к решению задач

Ряд задач на электромагнитные колебания решается с применением формулы Томсона, а также формулы емкости плоского конденсатора и формулы связи между длиной волны, скоростью распространения колебаний и периодом. При этом необходимо учитывать, что формула Томсона справедлива только в том случае, если активным сопротивлением колебательного контура можно пренебречь. В процессах, происходящих в колебательном контуре, выполняется закон сохранения и превращения энергии.

При решении задач на переменный ток необходимо помнить, что сила тока, напряжение и ЭДС в цепях переменного тока совершают гармонические колебания с различными фазами. Поэтому при последовательном соединении сила тока на всех участках цепи в один и тот же момент времени одинакова, а напряжение во всей цепи, в отличие от цепи постоянного тока, не равно арифметической сумме напряжений на отдельных участках. Оно находится по правилу сложения векторных величин, при этом учитывается наличие активного, индуктивного и емкостного сопротивлений.

Основные законы и формулы

Формула Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где T – период свободных электромагнитных колебаний в колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L.

Мгновенные значения ЭДС e, напряжения u и силы i переменного тока соответственно равны:

$$e = \mathscr{E}_m \sin(\omega t + \varphi),\ u = U_m \sin(\omega t + \varphi),\ i = I_m \sin\omega t,$$

где $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ – круговая (циклическая, угловая) частота; T – период; ν – частота; φ – начальная фаза ЭДС или напряжения (начальная фаза силы тока принята равной нулю); $\mathscr{E}_m$, U_m, I_m – амплитудные значения ЭДС, напряжения и силы тока.

Разность (сдвиг) фаз колебаний силы тока $i = I_m \sin\omega t$ и напряжения $u = U_m \sin(\omega t' + \varphi)$ определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R},$$

где L, C, R – соответственно индуктивность катушки, емкость конденсатора и активное сопротивление резистора, последовательно включенных в цепь переменного тока.

Индуктивное сопротивление катушки индуктивностью L

$$X_L = \omega L.$$

Емкостное сопротивление конденсатора емкостью C

$$X_C = 1/(\omega C).$$

Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Закон Ома для электрической цепи переменного тока:

$$I_m = \frac{U_m}{Z}, \text{ или } I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}},$$

где I_m, U_m – амплитудные значения силы тока и напряжения, R – активное сопротивление; ωL – индуктивное сопротивление; $1/(\omega C)$ – емкостное сопротивление.

Действующие значения силы переменного тока, напряжения и ЭДС:

$$I = I_m/\sqrt{2}, \; U = U_m/\sqrt{2}, \; \mathscr{E} = \mathscr{E}_m/\sqrt{2},$$

где I_m, U_m, $\mathscr{E}_m$ – амплитудные значения.

Количество теплоты, выделяемое проводником, активное сопротивление которого R, при прохождении по нему переменного тока в течение времени t,

$$Q = I^2 Rt.$$

На индуктивном и емкостном сопротивлениях теплота не выделяется.

Мощность переменного тока

$$P = IU\cos\varphi = \frac{I_m U_m}{2}\cos\varphi,$$

где $\cos\varphi$ – коэффициент мощности: $\cos\varphi = R/Z$; R – активное сопротивление цепи; Z – ее полное сопротивление.

Коэффициент трансформации

$$k = n_1/n_2 = U_1/U_2,$$

где n_1, n_2 – число витков первичной и вторичной обмоток трансформатора; U_1, U_2 – напряжения на первичной и вторичной обмотках.

Примеры решения задач

781. Сила тока в цепи изменяется с течением времени по закону $i = 5{,}0\sin 200\pi t$ А, где t выражается в секундах. Определить амплитудное значение силы тока, частоту и период. Найти силу тока для фазы $\varphi_1 = 3\pi/8$.

Р е ш е н и е. Задача решается аналогично задаче 731. Сопоставив уравнения $i = I_m \sin\omega t$ и $i = 5{,}0\sin 200\pi t$, найдем: $I_m = 5{,}0$ А, $\omega t = 200\pi t$ или $2\pi/T = 200\pi$, $T = 0{,}01$ с, $\nu = 100$ Гц.

Фазе $\varphi_1 = 3\pi/8$ соответствует сила тока

$$i_1 = 5{,}0 \sin\frac{3\pi}{8}\ \text{А},\ i_1 = 4{,}6\ \text{А}.$$

782. На какую длину волны настроен колебательный контур, если он состоит из катушки индуктивностью $L = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ Гн и плоского конденсатора? Расстояние между пластинами конденсатора $d = 1{,}0$ см, диэлектрическая проницаемость вещества, заполнившего пространство между пластинами, $\varepsilon = 11$. Площадь каждой пластины $S = 800$ см^2.

Р е ш е н и е. Длина волны $\lambda = cT$, где c – скорость электромагнитных волн ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с); T – период колебаний. Период найдем по формуле Томсона:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где L – индуктивность катушки; C – емкость конденсатора. Подставив в эту формулу значение емкости $C = \varepsilon_0\varepsilon S/d$, получим

$$T = 2\pi\sqrt{L\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}}.$$

Следовательно, длина волны

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{L\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}},\ \lambda = 2{,}4 \cdot 10^3\ \text{м}.$$

783. Определить сдвиг фаз колебаний напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ и силы тока $i = I_m \sin\omega t$ для электрической цепи, состоящей из последовательно включенных проводника с активным сопротивлением $R = 1$ кОм, катушки индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн и конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ. Определить мощность, которая выделяется в цепи, если амплитуда напряжения $U_m = 100$ В, а частота $\nu = 50$ Гц.

Р е ш е н и е. Сдвиг фаз между напряжением и силой тока, которые заданы уравнениями $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ и $i = I_m \sin\omega t$, определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

Циклическая частота $\omega = 2\pi\nu$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi\nu L - 1/(2\pi\nu C)}{R}. \qquad (1)$$

Мощность, которая выделяется в цепи, определим по формуле

$$P = \frac{I_m U_m}{2} \cos\varphi,$$

где I_m, U_m – амплитудные значения соответственно силы тока и напряжения. Так как $I_m = U_m/Z$, то

$$P = \frac{U_m^2}{2Z} \cos\varphi,$$

где Z – полное сопротивление цепи; его находим по формуле

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Следовательно,

$$P = \frac{U_m^2 \cos\varphi}{2\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}. \qquad (2)$$

Подставив числовые значения в формулу (1), найдем: $\operatorname{tg}\varphi = -3$, $\varphi = -72°$ (минус показывает, что напряжение отстает по фазе от тока), $\cos\varphi = 0{,}3$. Подставив числовые значения в формулу (2), получим $P = 0{,}5$ Вт.

784. Электропечь сопротивлением $R = 22$ Ом питается от генератора переменного тока. Определить количество теплоты, выделяемое печью за время $t = 1$ ч, если амплитуда силы тока $I_m = 10$ А.

Р е ш е н и е. Количество теплоты, выделяющееся в проводнике при прохождении по нему переменного тока,

$$Q = I^2 Rt,$$

где I – действующее значение силы тока. Поскольку $I = I_m/\sqrt{2}$, то

$$Q = I_m^2 Rt/2, \quad Q = 4 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

785. Радиолокатор работает на длине волны $\lambda = 20$ см и дает в секунду $n = 5000$ импульсов длительностью $\tau = 0{,}02$ мкс каждый. Сколько колебаний составляют один импульс и каково максимальное расстояние, на котором может быть обнаружена цель?

Р е ш е н и е. Число колебаний в одном импульсе $N = \nu\tau$, где ν – частота колебаний. Так как $\nu = c/\lambda$, где c – скорость электромагнитных волн в вакууме: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; λ – длина волны, то

$$N = c\tau/\lambda, \ N = 30.$$

За промежуток времени $t = 1/n$ между двумя последовательными импульсами электромагнитные волны доходят до цели и, отразившись, возвращаются обратно. Поэтому $2s = ct$, где s – расстояние до цели. Таким образом,

$$s = ct/2 = c/(2n), \ s = 3 \cdot 10^4 \text{ м}.$$

786. К источнику постоянного тока параллельно подключены конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и катушка с индуктивностью $L = 0{,}02$ Гн. При этом напряжение на конденсаторе $U_1 = 100$ В, а сила тока в катушке $I_1 = 2$ А. Затем источник отключают. Какой заряд будет на конденсаторе в момент, когда сила тока в катушке $I_2 = 1$ А? Потерями энергии на нагревание пренебречь.

Р е ш е н и е. Согласно закону сохранения энергии, сумма энергии заряженного конденсатора и энергии магнитного поля тока остается постоянной:

$$W_1 + W_{м1} = W_2 + W_{м2},$$

где W_1, W_2 – начальная и конечная энергия конденсатора; $W_{м1}$ и $W_{м2}$ – начальная и конечная энергия магнитного поля тока. Выразив значения этих энергий, получим уравнение

$$\frac{CU_1^2}{2} + \frac{LI_1^2}{2} = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI_2^2}{2},$$

где q – искомый заряд. Отсюда

$$q = \sqrt{C\left(CU_1^2 + L\left(I_1^2 - I_2^2\right)\right)}, \ q = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Кл}.$$

787. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивности и воздушного конденсатора, настроен на длину волны $\lambda_1 = 300$ м. При этом расстояние между пластинами конденсатора $d_1 = 4{,}8$ мм. Каким должно быть это расстояние, чтобы контур был настроен на длину волны $\lambda_2 = 240$ м?

Р е ш е н и е. Длина волны в первом случае $\lambda_1 = cT_1$, во втором $\lambda_2 = cT_2$, где c – скорость электромагнитных волн в вакууме: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; T_1, T_2 – периоды колебаний контура. Выразив периоды по формуле Томсона, будем иметь:

$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{LC_1}, \ \lambda_2 = 2\pi c\sqrt{LC_2},$$

где L – индуктивность катушки; C_1, C_2 – емкости конденсатора. Так как $C_1 = \varepsilon_0 S/d_1$, $C_2 = \varepsilon_0 S/d_2$, то

$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{L\frac{\varepsilon_0 S}{d_1}}, \ \lambda_2 = 2\pi c\sqrt{L\frac{\varepsilon_0 S}{d_2}}.$$

Разделив почленно первое равенство на второе, получим $\lambda_1/\lambda_2 = \sqrt{d_2/d_1}$, откуда

$$d_2 = d_1(\lambda_1/\lambda_2)^2, \ d_2 = 7{,}5 \text{ мм}.$$

788. Имеются два колебательных контура с одинаковыми катушками и конденсаторами. В катушку одного из контуров вставили железный сердечник, увеличивший ее индуктивность в $n = 4$ раза. Найти отношение резонансных частот контуров и их энергий, если максимальные заряды на конденсаторах одинаковы.

Р е ш е н и е. Пусть L_1 – индуктивность катушки без сердечника. Тогда индуктивность катушки с сердечником $L_2 = nL_1$.

Резонансные длины волн контуров (см. решение предыдущей задачи):

$$\lambda_1 = 2\pi c\sqrt{L_1 C}, \ \lambda_2 = 2\pi c\sqrt{nL_1 C},$$

где c – скорость электромагнитных волн в вакууме: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; C – емкость конденсатора, одинаковая в обоих контурах. Разделив почленно первое равенство на второе, получим

$$\lambda_1/\lambda_2 = \sqrt{1/n}. \qquad (1)$$

Если ν_1 и ν_2 – резонансные частоты, то $\lambda_1 = c/\nu_1$, $\lambda_2 = c/\nu_2$. Подставив эти значения в выражение (1), получим:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1}{n}}, \ \ \frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1}{2}.$$

789. Заряженный конденсатор емкостью $C = 0{,}2$ мкФ подключили к катушке индуктивностью $L = 8$ мГн. Через какое время от момента подключения энергия электрического поля конденсатора станет равной энергии магнитного поля катушки?

Р е ш е н и е. С течением времени t заряд конденсатора изменяется по закону

$$q = q_m \cos \omega t,$$

где q_m – амплитудное значение заряда; ω – циклическая частота.

Энергия электростатического поля конденсатора

$$W_э = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_m^2}{2C} \cos^2 \omega t. \qquad (1)$$

Энергия магнитного поля катушки

$$W_м = LI^2/2,$$

где I – сила тока. Сила тока равна производной заряда по времени:

$$I = q' = -q_m \omega \sin \omega t.$$

Следовательно,

$$W_м = \frac{L}{2} q_m^2 \omega^2 \sin^2 \omega t. \qquad (2)$$

Через время t_1 от момента отключения будет $W_{э1} = W_{м1}$. На основании этого равенства и выражений (1) и (2) получим

$$\frac{q_m^2}{2C} \cos^2 \omega t_1 = \frac{L}{2} q_m^2 \omega^2 \sin^2 \omega t_1,$$

откуда

$$\frac{\cos^2 \omega t_1}{C} = L\omega^2 \sin^2 \omega t_1.$$

Подставив в это уравнение значение $\omega^2 = 1/(LC)$, получим

$$\cos^2 \omega t_1 = \sin^2 \omega t_1.$$

Отсюда находим $\operatorname{tg} \omega t_1 = 1$. Следовательно, $\omega t_1 = \pi/4$, а так как $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то $\frac{1}{\sqrt{LC}} t_1 = \frac{\pi}{4}$, откуда

$$t_1 = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4}, \;\; t = 3 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

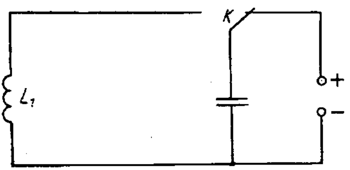
Задачи для самостоятельного решения

790. Катушка индуктивностью $L = 3 \cdot 10^{-5}$ Гн присоединена к плоскому конденсатору, площадь каждой пластины которого $S = 100$ см^2. Расстояние между пластинами конденсатора $d = 0{,}1$ мм. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора, если контур резонирует на волну длиной $\lambda = 750$ м? Скорость электромагнитных волн в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

791. Определить длину волны, на которую настроен приемник, если его приемный контур обладает индуктивностью $L = 0{,}003$ Гн и емкостью $C = 10$ мкФ. Скорость электромагнитных волн в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

792. Контур радиоприемника настроен на частоту $\nu = 9$ МГц. Как нужно изменить электроемкость переменного конденсатора этого контура, чтобы приемник был настроен на длину волны $\lambda = 50$ м? Скорость электромагнитных волн в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

793. После зарядки конденсатора от источника постоянного напряжения ключ К переключают на катушку индуктивностью L_1 (рис. 249). В контуре возникают гармонические колебания с амплитудой силы тока I_{m1}. Опыт повторяют по прежней схеме, заменив катушку на другую, индуктивностью $L_2 = 2L_1$. Найти амплитуду силы тока I_{m2} для второго случая.



Р и с. 249

794. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ мкГн и переменного конденсатора, емкость которого может изменяться от $C_1 = 50$ пФ до $C_2 = 450$ пФ. Какой диапазон частот и длин волн можно охватить настройкой этого контура? Скорость электромагнитных волн в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

795. Колебательный контур содержит катушку и конденсатор. Во сколько раз увеличится период собственных колебаний в контуре, если параллельно конденсатору подключить еще три таких же конденсатора?

796. В колебательном контуре с емкостью C и индуктивностью L совершаются свободные незатухающие колебания. Известно, что максимальное напряжение на конденсаторе равно U_m. Найти максимальную силу тока в контуре.

797. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 1$ мГн и конденсатора, обкладки которого – две круглые пластины диаметром $D = 20$ см каждая. Расстояние между пластинами $d = 1$ см. Определить период колебаний контура, если пространство между пластинами заполнено плексигласом, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon = 3$. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

798. В колебательном контуре происходят свободные незатухающие электромагнитные колебания. Зная, что максимальный заряд конденсатора $q_m = 1 \cdot 10^{-6}$ Кл, а максимальная сила тока $I_m = 10$ А, найти, на волну какой длины настроен контур. Скорость электромагнитных волн $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

799. Катушка индуктивности подключена к конденсатору, заряд которого $q = 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ Кл. В образованном контуре возникли свободные электромагнитные колебания, частота которых $\nu = 4 \cdot 10^7$ Гц. Определить максимальную силу электрического тока, проходящего через катушку. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

800. Зависимость силы тока от времени в колебательном контуре описывается уравнением $I = 0{,}1 \sin 300\pi t$ А. Найти индуктивность контура, если максимальная энергия электростатического поля конденсатора $W_m = 0{,}005$ Дж.

801. К источнику тока подключена катушка индуктивностью $L = 0{,}81$ Гн и резистор сопротивлением $R = 25$ Ом (рис. 250). Сразу после размыкания ключа K в резисторе выделяется тепловая мощность $P = 100$ Вт. Сопротивление обмотки катушки пренебрежимо мало. Какое количество теплоты выделится в резисторе к моменту исчезновения тока в цепи?

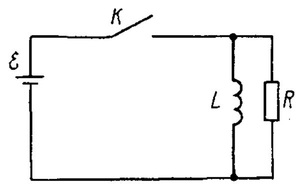


Рис. 250

802. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 1{,}2$ нФ и катушки индуктивностью $L = 6$ мкГн и активным сопротивлением $R = 0{,}5$ Ом. Какую мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие гармонические колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_m = 10$ В?

803. Рамка площадью $S = 1$ дм^2 из проволоки сопротивлением $R = 0{,}45$ Ом вращается с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл. Ось вращения рамки лежит в ее плоскости и перпендикулярна вектору магнитной индукции $\vec{B}$. Определить количество теплоты Q, которое выделится в рамке за $N = 1000$ оборотов. Самоиндукцией пренебречь.

804. Напряжение зажигания неоновой лампы $U_з = 80$ В, напряжение гашения $U_г = 70$ В. Вольтметр показывает, что в сети переменного тока напряжение $U = 60$ В. Будет ли лампочка гореть в этой сети?

805. В сеть переменного тока с действующим значением напряжения $U = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 200$ Ом, катушка индуктивностью $L = 40$ мГн и конденсатор емкостью $C = 80$ мкФ. Найти индуктивное, емкостное и полное сопротивления цепи, а также действующее и амплитудное значения силы тока.

806. Резистор сопротивлением $R = 30$ Ом включен последовательно с конденсатором в сеть переменного тока с действующим значением напряжения $U = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Амплитуда силы тока в цепи $I_m = 2$ А. Найти емкость конденсатора.

807. К источнику переменного напряжения с действующим значением $U = 100$ В и частотой $\nu = 500$ Гц подключена цепь, состоящая из последовательно включенных резистора сопротивлением $R = 20$ Ом, катушки, индуктивность которой $L = 40$ мГн, и конденсатора емкостью $C = 12$ мкФ. Найти силу тока в цепи и показания вольтметра на каждом элементе цепи.

808. Катушка индуктивности, конденсатор и проводник с активным сопротивлением соединены последовательно. Действующие напряжения на них — соответственно $U_L = 15$ В, $U_C = 10$ В, $U_R = 12$ В. Чему равно действующее напряжение на всем участке?

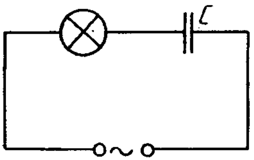


Рис. 251

809. Лампочку для карманного фонаря, рассчитанную на напряжение $U_1 = 3{,}5$ В и силу тока $I = 0{,}28$ А, и конденсатор соединили последовательно (рис. 251) и включили в сеть переменного тока с действующим значением напряжения $U_2 = 220$ В и частотой $\nu = 50$ Гц. Какой должна быть емкость конденсатора, чтобы накал лампочки был нормальным?

810. Электрическая печь, сопротивление которой $R = 20$ Ом, подключена к сети переменного тока. Найти количество теплоты, выделяемое печью за время $t = 2$ ч, если амплитуда силы тока $I_m = 10$ А.

811. В сеть переменного тока с частотой $\nu = 50$ Гц включили электроплитку, а затем последовательно с ней подключили катушку, вследствие чего мощность плитки уменьшилась в $n = 3$ раза. Рабочее сопротивление плитки $R_1 = 60$ Ом. Найти индуктивность катушки. Активное сопротивление катушки $R_2 = 2$ Ом.

· **812.** К электрической цепи подведено переменное напряжение $u = 180 \sin \omega t$ В. Амперметр, включенный в эту цепь, показывает силу тока $I = 1{,}4$ А. Определить коэффициент мощности цепи, если она потребляет мощность $P = 144$ Вт.

813. При подключении первичной обмотки трансформатора к источнику переменного синусоидального напряжения во вторичной обмотке возникает ЭДС $\mathscr{E}_1 = 16$ В. Если к тому же источнику подключить вторичную обмотку, то в первичной возникает ЭДС $\mathscr{E} = 4$ В. Найти напряжение источника. Потери энергии в трансформаторе не учитывать.

814. Первичная обмотка силового трансформатора для накала радиолампы имеет $n_1 = 2200$ витков и включена в сеть с действующим значением напряжения $U_1 = 220$ В. Сколько витков должна иметь вторичная обмотка, если ее активное сопротивление $r = 0{,}50$ Ом, а напряжение накала лампы $U_2 = 3{,}5$ В при силе тока накала $I = 1$ А?

815. Первичная обмотка понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 10$ включена в сеть с напряжением $U_1 = 220$ В. Сопротивление вторичной обмотки $r = 0{,}5$ Ом, ток во вторичной обмотке $I = 4$ А. Определить напряжение U_2 на зажимах вторичной обмотки. Потерями в первичной обмотке пренебречь.

816. Электроэнергия передается от генератора к потребителю по проводам, общее сопротивление которых $R_1 = 400$ Ом. Коэффициент полезного действия линии передачи $\eta = 0{,}95$. Определить сопротивление нагрузки, если внутреннее сопротивление генератора $r = 100$ Ом.

817. При передаче электроэнергии на большое расстояние используется трансформатор, повышающий напряжение до $U = 6 \cdot 10^3$ В и нагруженный до номинальной мощности $P = 10^6$ Вт. При этом разность показаний счетчиков электроэнергии, установленных на трансформаторной подстанции и в приемном пункте, увеличивается ежесуточно ($t = 24$ ч) на $\Delta W = 216$ кВт $\cdot$ ч. Во сколько раз необходимо повысить напряжение в линии, чтобы при передаче потери энергии не превышали $\eta = 0{,}1\%$?

V. ОПТИКА

13. ЗАКОНЫ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ СВЕТА

Методические указания к решению задач

При решении большинства задач по оптике важное значение имеет правильно сделанный чертеж.

В задачах о преломлении света на плоской границе раздела двух сред при построении хода луча нужно учитывать, что при переходе луча из оптически менее плотной среды в оптически более плотную угол преломления меньше угла падения, а при переходе из оптически более плотной среды в менее плотную угол преломления больше угла падения. Если же во втором случае угол падения больше предельного угла, то луч не переходит во вторую среду – происходит полное отражение света. Сделав чертеж, надо на основании закона преломления света составить уравнения для каждой границы раздела сред и дополнительные уравнения исходя из геометрических соображений. Затем из этой системы уравнений определяют искомую величину.

Основные законы и формулы

Законы отражения света:

1. Падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, проведенный в точке падения луча, лежат в одной плоскости.

2. Угол отражения равен углу падения.

Законы преломления света:

1. Падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, проведенный в точке падения луча, лежат в одной плоскости.

2. Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления для данных двух сред есть величина постоянная, называемая *относительным показателем преломления* второй среды относительно первой:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21}.$$

Абсолютным показателем преломления среды называется показатель преломления этой среды относительно вакуума. Он показывает, во сколько раз скорость света в среде меньше скорости света в вакууме: $n = c/v$, где c – скорость света в вакууме; v – скорость света в данной среде. Относительный показатель преломления

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

где v_1, v_2 –скорости света в первой и второй средах; n_1, n_2 – абсолютные показатели преломления этих сред.

Предельный угол полного отражения определяется из соотношения

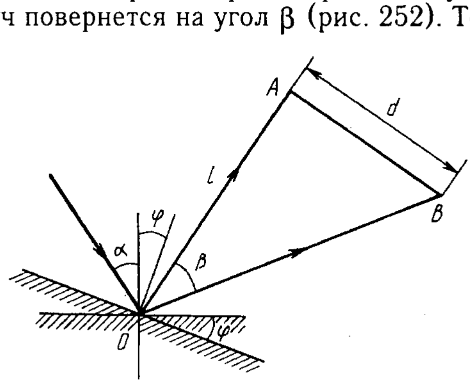
$$\sin\alpha_0 = n_2/n_1,$$

где n_2, n_1 – абсолютные показатели преломления сред.

Примеры решения задач

818. Луч света, отраженный от плоского зеркала, падает перпендикулярно на плоский экран, удаленный на $l = 8{,}0$ м от зеркала. На какое расстояние переместится световой зайчик на экране, если повернуть зеркало на угол $\varphi = 20°$ вокруг оси, лежащей в плоскости зеркала и перпендикулярной плоскости, в которой находятся падающий и отраженный лучи?

Р е ш е н и е. При повороте зеркала на угол φ отраженный луч повернется на угол β (рис. 252). Тогда свето-



Р и с. 252

вой зайчик переместится на расстояние d. Из прямоугольного треугольника OAB находим $d = l \operatorname{tg} \beta$.

Найдем теперь угол β. При повороте зеркала на угол φ перпендикуляр к зеркалу, восставленный в точке O падения луча, также повернется на угол φ, поэтому угол падения будет равен $\alpha + \varphi$, а угол между падающим и отраженным лучами равен $2(\alpha + \varphi)$. До поворота зеркала угол между падающим и отраженным лучами был равен 2α.

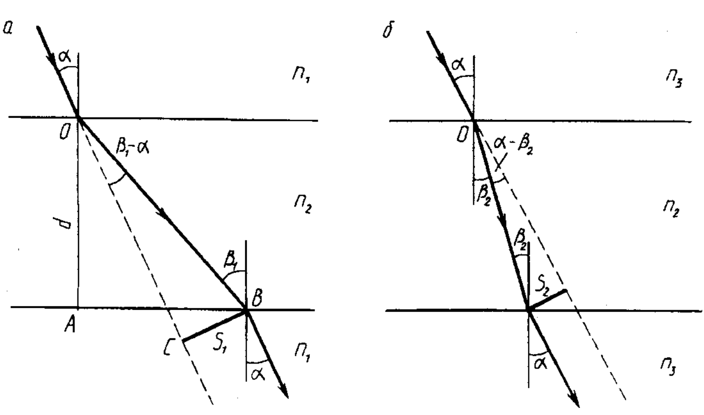
Поскольку направление падающего луча осталось неизменным, то отраженный луч повернулся на угол

$$\beta = 2(\alpha + \varphi) - 2\alpha = 2\varphi.$$

Таким образом, $d = l \operatorname{tg} 2\varphi$. Подставив числовые значения, найдем d = 6,7 м.

819. Световой луч падает под углом α = 30° на плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной d = 10 см. Определить смещение луча пластинкой, если она погружена: в сероуглерод; в воду. Показатели преломления сероуглерода, стекла и воды – соответственно $n_1 = 1{,}6$, $n_2 = 1{,}5$ и $n_3 = 1{,}3$.

Р е ш е н и е. Ход луча в первом и втором случаях показан на рис. 253, *а, б*. Показатель преломления сероуглерода больше показателя преломления стекла, а показатель преломления воды меньше показателя преломления стекла. Поэтому в первом случае преломленный луч в стекле удаляется от перпендикуляра, восставленного в точке падения, а во втором приближается к нему. Вышедший из



Р и с. 253

пластинки луч в обоих случаях будет параллелен падающему.

Определим смещение s_1 луча, когда пластина погружена в сероуглерод (рис. 253, *а*). Из прямоугольных треугольников AOB и COB получим

$$\frac{s_1}{\sin(\beta_1 - \alpha)} = \frac{d}{\cos\beta_1}.$$

Отсюда

$$s_1 = \frac{d\sin(\beta_1 - \alpha)}{\cos\beta_1}. \qquad (1)$$

По закону преломления света $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1} = \frac{n_2}{n_1}$, откуда

$$\sin\beta_1 = \frac{n_1 \sin\alpha}{n_2}. \qquad (2)$$

Следовательно,

$$\cos\beta_1 = \sqrt{1 - \sin^2\beta_1} = \frac{1}{n_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha}. \qquad (3)$$

Подставив значения (2) и (3) в формулу (1), после преобразований получим:

$$s_1 = d\left(\frac{n_1 \sin 2\alpha}{2\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\alpha}} - \sin\alpha\right),\ s_1 = 5{,}9 \cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

Для случая, когда пластинка погружена в воду, смещение определяется аналогично. Поэтому читателю рекомендуется найти смещение самостоятельно, используя рис. 253, *б*.

820. Определить угол отклонения светового луча трехгранной призмой с преломляющим углом φ, если угол падения луча на переднюю грань равен α, а показатели преломления среды вне призмы и материала призмы равны соответственно n_1 и n_2, причем $n_2 > n_1$.

Решение. Угол отклонения луча

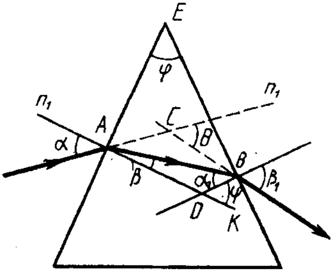
$$\theta = (\alpha - \beta) + (\beta_1 - \alpha_1) \qquad (1)$$

как внешний угол треугольника ABC (рис. 254). Кроме того, $\angle AEB = \angle BDK = \varphi$ как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Угол BDK является внешним углом треугольника ABD, поэтому

$$\varphi = \beta + \alpha_1. \qquad (2)$$

На основании выражений (1) и (2) получим

$$\theta = \alpha - \varphi + \beta_1. \qquad (3)$$



Р и с. 254

Используя закон преломления света, можем записать:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (4)$$

Отсюда

$$\sin\beta = \frac{n_1 \sin\alpha}{n_2}, \ \sin\beta_1 = \frac{n_2 \sin\alpha_1}{n_1}.$$

Из выражения (2) следует, что $\alpha_1 = \varphi - \beta$, поэтому

$$\sin\beta_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin(\varphi - \beta) = \frac{n_2}{n_1}(\sin\varphi\cos\beta - \cos\varphi\sin\beta).$$

Подставим в эту формулу значение $\sin\beta$ и произведем преобразования:

$$\sin\beta_1 = \frac{n_2}{n_1}\left((\sin\varphi)\sqrt{1 - \frac{n_1^2 \sin^2\alpha}{n_2^2}} - (\cos\varphi)\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right) =$$

$$= \frac{n_2}{n_1}(\sin\varphi)\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\alpha} - \cos\varphi\sin\alpha. \qquad (5)$$

Учитывая равенства (3) и (5), получаем значение угла отклонения луча призмой:

$$\theta = \alpha - \varphi + \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}(\sin\varphi)\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\alpha} - \cos\varphi\sin\alpha\right). \qquad (6)$$

Полезно обратить внимание на то, что в случае, когда преломляющий угол φ мал (призма тонкая) и угол падения α мал, выражение для угла отклонения θ имеет более простую форму. Действительно, в этом случае, заменяя в формулах (4) синусы углов их значениями (в радианах), получаем:

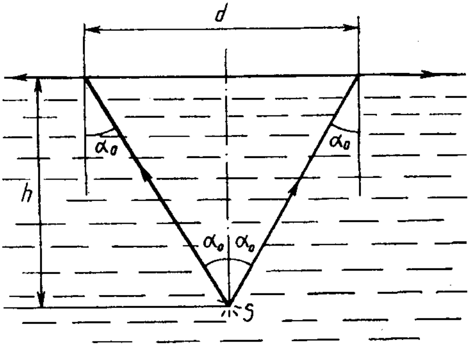
$$\alpha = \frac{n_2}{n_1}\beta, \ \beta_1 = \frac{n_2}{n_1}\alpha_1.$$

Подставив эти значения в формулу (3) и учитывая выражение (2), найдем

$$\theta = (n_2 / n_1 - 1)\varphi.$$

Эта формула является частным случаем формулы (6) при малых φ и α. Она может быть получена из формулы (6), если заменить синусы углов φ и α их значениями (в радианах) и пренебречь членами, пропорциональными α^2 и φ^2.

821. На какой глубине расположен точечный источник света S в воде, если с поверхности воды лучи выходят в воздух из круга диаметром $d = 20$ м (рис. 255)? Показатель преломления воды $n = 1{,}3$.



Р и с. 255

Р е ш е н и е. Вторая среда (воздух) оптически менее плотная, чем первая (вода), поэтому из воды выйдут только те лучи света, угол падения которых меньше предельного угла α_0. Как видно из рисунка, глубина

$$h = d/(2\,\mathrm{tg}\,\alpha_0). \qquad (1)$$

Для предельного угла справедливо соотношение $\sin\alpha_0 = n_2/n_1$, где n_1, n_2 —абсолютные показатели преломления соответственно воды и воздуха. Так как $n_1 = n$, $n_2 \approx 1$, то $\sin\alpha_0 = 1/n$. Тогда

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = \frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha_0}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Подставив это значение в формулу (1), получим:

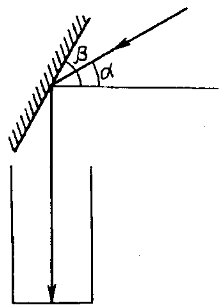
$$h = \frac{d\sqrt{n^2 - 1}}{2}, \quad h = 8{,}3 \text{ м}.$$

Задачи для самостоятельного решения

822. Лазерный визир применяется для задания направлений при геодезических работах. Дальность действия прибора $l_1 = 2$ км. На этом расстоянии диаметр светового пучка $d_1 = 200$ мм. Определить, на каком расстоянии диаметр светового пучка $d_2 = 10$ мм. Найти телесный угол этого пучка и плоский угол при вершине в осевом сечении конуса.

823. Плоское зеркало, находящееся в центре кривизны сферического экрана радиуса $R = 10$ м, вращается с постоянной частотой $n = 0{,}5$ $с^{-1}$. С какой скоростью перемещается по экрану «зайчик»?

824. Под каким углом к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы осветить дно колодца отраженными от зеркала солнечными лучами, в то время как свет падает под углом $\alpha = 30°$ под углом к горизонту (рис. 256)?



Р и с. 256

825. На плоское зеркало падает от источника света расходящийся под углом α пучок лучей. Определить угол между лучами после их отражения от зеркала.

826. Отражающая поверхность зеркала составляет с плоскостью стола угол $\alpha = 135°$. По направлению к зеркалу по столу катится шар со скоростью $v = 3$ м/с. В каком направлении и с какой скоростью движется изображение шара?

827. Угол падения луча света на границу двух сред (при переходе его из первой среды во вторую) $\alpha = 60°$. Абсолютный показатель преломления второй среды $n_2 = 2{,}4$. Найти абсолютный показатель преломления первой среды, если отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

828. Какова толщина плоскопараллельной стеклянной пластинки, если точку, нанесенную чернилами на нижней стороне пластинки, наблюдатель видит на расстоянии $h = 5$ см от верхней поверхности? Луч зрения перпендикулярен поверхности пластинки. Показатель преломления стекла $n = 1{,}6$. Для малых углов $\operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$.

829. В микроскоп резко видна верхняя грань плоскопараллельной пластинки толщиной $d = 3{,}0$ см. Чтобы получить резкое изображение нижней грани, тубус микроскопа опустили на $h = 2{,}0$ см. Определить показатель преломления вещества, из которого изготовлена пластинка.

830. Кажущаяся глубина водоема $h = 3$ м. Какова его истинная глубина? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

831. Пластинка состоит из нескольких плоскопараллельных слоев различных веществ. Луч света падает из воздуха на первый слой под углом α. Определить угол преломления в последнем слое, если показатель преломления вещества этого слоя равен n.

832. На горизонтальном дне водоема глубиной $h = 1{,}2$ м лежит плоское зеркало. На каком расстоянии от места вхождения луча в воду этот луч снова выйдет на поверхность воды после отражения от зеркала? Угол падения луча $\alpha = 30°$, показатель преломления воды $n = 1{,}3$.

833. Над погрузившейся на небольшую глубину подводной лодкой пролетает самолет на высоте $h = 3$ км. Какой покажется высота полета самолета при наблюдении с лодки? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

834. Пучок параллельных лучей света шириной $b = 20$ см выходит из стеклянной пластинки в воздух через плоскую грань пластинки. Определить ширину пучка в воздухе, если угол падения луча на границу стекло–воздух $\alpha = 30°$, а показатель преломления стекла $n = 1{,}8$.

835. Луч света падает под углом α на плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной d. Вычислить смещение луча при его прохождении сквозь пластинку. Показатель преломления стекла равен n.

836. Свет, падающий из воздуха на стеклянную плоскопараллельную пластинку, отражается от пластинки под углом $\gamma = 60°$ и преломляется в пластинке под углом $\beta = 30°$. Определить скорость света в пластинке. Скорость света в воздухе $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

837. На столе лежит лист бумаги. Луч света, падающий на бумагу под углом $\alpha = 45°$, образует на ней светлое пятно. На сколько сместится это пятно, если на бумагу положить стеклянную пластинку толщиной $d = 2$ см? Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

838. Точечный источник света расположен на дне водоема глубиной $h = 0{,}6$ м. В некоторой точке поверхности воды вышедший в воздух преломленный луч оказался перпендикулярным лучу, отраженному от поверхности воды обратно в воду. На каком расстоянии от источника на дне водоема достигнет дна отраженный луч? Показатель преломления воды $n = 4/3$.

839. На стеклянную плоскопараллельную пластинку падает луч света под углом α. Луч частично отражается от верхней поверхности, частично проходит внутрь пластинки, снова отражается от нижней поверхности и затем выходит через верхнюю. Найти угол выхода луча и длину пути, пройденного лучом в пластинке. Толщина пластинки d, показатель преломления стекла n.

840. Определить угол отклонения луча треугольной призмой, если угол падения этого луча на переднюю грань призмы $\alpha = 53°6'$, а преломляющий угол призмы $\varphi = 60°$. Показатели преломления среды, в которой находится призма, и вещества призмы – соответственно $n_1 = 1$ и $n_2 = 1{,}6$.

841. Луч света падает на грань стеклянной треугольной призмы перпендикулярно ее плоскости и выходит из противоположной грани, отклонившись от первоначального направления на угол α (рис. 257). Определить преломляющий угол призмы, если показатель преломления стекла n.

842. Внутри стекла имеется воздушная полость треугольного сечения (рис. 258). Угол при вершине треугольника $\varphi = 30°$. Показатели преломления стекла и воздуха – соответственно $n_c = \sqrt{3}$, $n_в = 1$. На боковую грань треугольной воздушной призмы падает луч света под углом $\alpha = 30°$. Определить, под каким углом выходит луч из другой грани призмы.

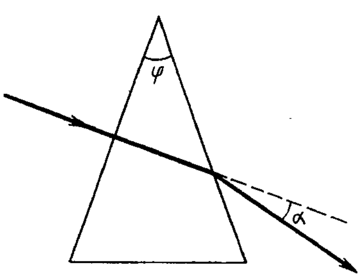


Рис. 257

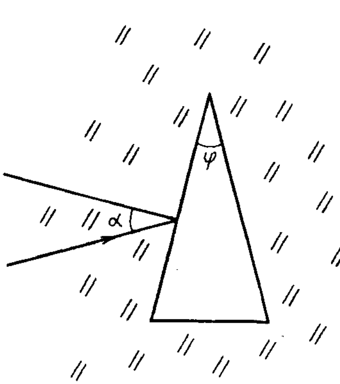


Рис. 258

843. Одна грань треугольной призмы с преломляющим углом $\varphi = 30°$ посеребрена. Луч, падающий на другую грань под углом $\alpha = 45°$, после преломления и отражения от посеребренной грани вернулся по прежнему направлению. Чему равен показатель преломления материала призмы?

844. Поперечное сечение стеклянной призмы имеет форму равностороннего треугольника. Луч света падает из воздуха на одну из граней призмы перпендикулярно ей. Найти угол между лучом, выходящим из призмы, и продолжением луча, падающего на призму. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

845. На какую максимальную глубину можно погрузить в воду точечный источник света, чтобы квадратный плот со стороной $a = 4{,}0$ м не пропускал свет в пространство над поверхностью воды? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$, центр плота находится над источником света.

846. На какой угол отклоняется луч от первоначального направления, выходя из стекла (показатель преломления $n = 1{,}57$) в воздух при угле падения $\alpha = 30°$? Может ли луч не выйти из стекла в воздух? Если да, то при каком условии?

847. Угол падения луча из воздуха на стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной d равен углу полного отражения для стекла, из которого изготовлена пластинка. Вычислить смещение луча в результате прохождения его сквозь пластинку. Показатель преломления стекла равен n.

14. СОБИРАЮЩИЕ И РАССЕИВАЮЩИЕ ЛИНЗЫ

Методические указания к решению задач

Решение задач, связанных с изображением предмета в линзе, рекомендуется начинать с построения изображения. При этом важно учитывать, как расположен предмет относительно характерных точек линзы, так как от этого зависит положение изображения. При построении изображения предмета надо найти изображение нескольких точек этого предмета, а затем по ним построить изображение всего предмета. Например, для построения изображения отрезка прямой достаточно сначала построить изображение концов этого отрезка. Чтобы найти изображение точки, достаточно построить ход двух лучей, исходящих из этой точки.

После построения изображения составляют уравнение на основе формулы линзы, а также другие уравнения, следующие из чертежа, затем решают систему относительно искомой величины.

При решении задач на изображение предмета в оптической системе, состоящей из нескольких тонких линз, сложенных вплотную, нужно сначала найти фокусное расстояние системы. Оптическая сила системы равна сумме оптических сил составляющих ее линз (при суммировании оптические силы отдельных линз, сложенных вплотную, берут со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, собирающие они или рассеивающие). Фокусное расстояние системы – величина, обратная ее оптической силе. Когда фокусное расстояние определено, расчеты ведутся по формуле линзы.

При построении изображения в оптической системе, состоящей из нескольких линз, находящихся друг от друга на некотором расстоянии, сначала строят изображение, даваемое первой линзой. Это изображение рассматривается как предмет для второй линзы и т. д. Для расчета каждого изображения применяется формула линзы.

Основные законы и формулы

Формула тонкой линзы:

$$\pm\frac{1}{F} = \pm\frac{1}{d} \pm \frac{1}{f},$$

где F – фокусное расстояние линзы; d – расстояние от предмета до линзы; f – расстояние от линзы до изображения. Правило расстановки знаков следующее: если фокус, предмет или изображение являются действительными, то перед соответствующими членами этой формулы ставится плюс, если мнимыми, – минус. Предмет считается мнимым, если на линзу падает сходящийся пучок лучей. Это возможно в оптических системах, где имеются две или несколько линз.

Оптическая сила линзы

$$D = 1/F,$$

где F – фокусное расстояние. Она может быть рассчитана по формуле

$$D = \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где n_1, n_2 – абсолютные показатели преломления вещества линзы и окружающей среды; R_1, R_2 – радиусы кривизны поверхностей линзы. Радиусы выпуклых поверхностей берутся со знаком «плюс», вогнутых – со знаком «минус».

Оптическая сила системы линз, сложенных вплотную, равна алгебраической сумме оптических сил линз, входящих в систему:

$$D = D_1 + D_2 + ... + D_n.$$

Линейное увеличение линзы

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{f}{d},$$

где H, h – линейные размеры соответственно изображения и предмета.

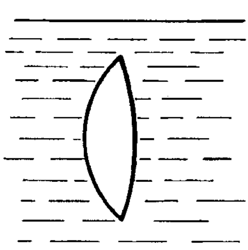
Увеличение лупы

$$\Gamma = d_0 / F,$$

где d_0 = 25 см – расстояние наилучшего видения для нормального глаза; F – фокусное расстояние лупы.

Примеры решения задач

848. Воздушная линза, образованная двумя тонкими стеклами с различными радиусами кривизны, помещена в воду (рис. 259). Найти фокусное расстояние этой линзы, зная, что стеклянная линза такой же формы имеет в воздухе фокусное расстояние F_1 = 40 см. Абсолютные показатели преломления стекла и воды – соответственно n_1 = 1,5 и n_2 = 1,3.



Р и с. 259

Р е ш е н и е. Пусть R_1 и R_2 – радиусы кривизны сферических поверхностей линз (у воздушной и стеклянной линз они, согласно условию, одинаковы), F_1 и F_2 – фокусные расстояния соответственно стеклянной линзы в воздухе и воздушной линзы в воде. Тогда, применяя формулу для расчета фокусного расстояния линзы, будем иметь:

$$\frac{1}{F_1} = \left(\frac{n_1}{n_3} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (1)$$

$$\frac{1}{F_2} = \left(\frac{n_3}{n_2} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \qquad (2)$$

где n_3 – абсолютный показатель преломления воздуха: $n_3 = 1$.

Разделив почленно равенство (1) на (2), найдем:

$$F_2 = F_1 \frac{n_1/n_3 - 1}{n_3/n_2 - 1}, \; F_2 = -87 \text{ см}.$$

Минус указывает на то, что линза рассеивающая.

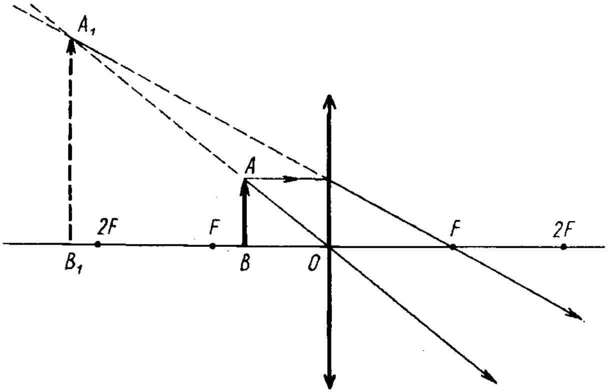
Полученный результат показывает, что двояковыпуклая линза является собирающей, если абсолютный показатель преломления среды, окружающей линзу, меньше абсолютного показателя преломления вещества линзы, или рассеивающей, если абсолютный показатель преломления среды больше абсолютного показателя преломления вещества линзы.

Читателю предлагается дать обоснованный ответ на вопрос: «Всегда ли двояковогнутая линза является рассеивающей?»

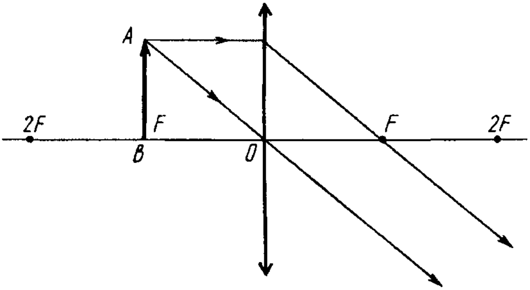
849. Плоский предмет AB установлен перпендикулярно главной оси оптической тонкой линзы. Построить изображение этого предмета в линзе при различных расстояниях d от предмета до линзы. Положения фокусов линзы и ее главной оптической оси заданы. Рассмотреть два случая: I – линза собирающая, II – линза рассеивающая.

Решение. I. Для построения изображения предмета необходимо найти изображение ряда точек этого предмета, а затем по ним построить изображение. Для построения изображения точки можно использовать любые два из следующих трех лучей: 1) луч, падающий на линзу параллельно главной оптической оси; 2) луч, проходящий через оптический центр линзы; 3) луч, проходящий через главный фокус. Ход этих лучей после прохождения через собирающую линзу известен: первый луч проходит через главный фокус линзы, второй не изменяет своего первоначального направления, а третий идет параллельно главной оптической оси.

На рис. 260–264 построено изображение A_1B_1 предмета AB в собирающей линзе для пяти различных случаев.



Р и с. 260



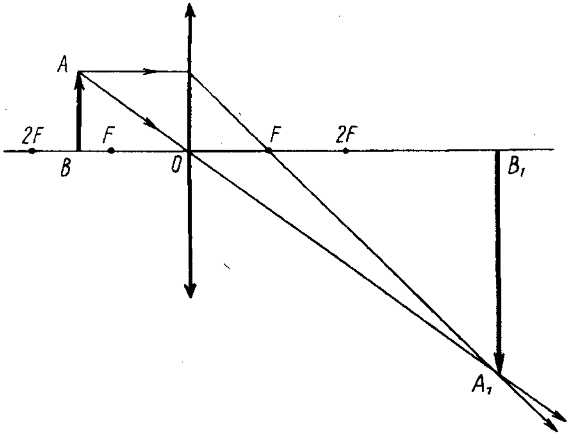
Р и с. 261

1. Если $d < F$, т. е. предмет находится между фокусом и линзой, то изображение мнимое, увеличенное и прямое (рис. 260).

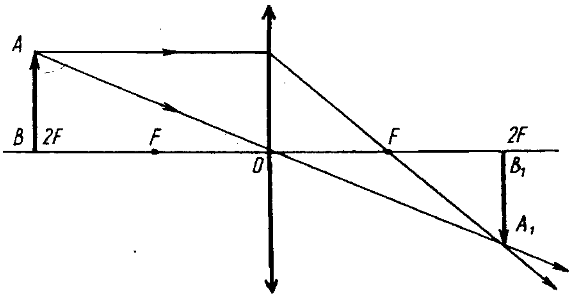
2. Если $d = F$, т. е. предмет находится на расстоянии, равном фокусному расстоянию, то изображение находится на бесконечности (рис. 261).

3. Если $F < d < 2F$, т. е. предмет находится между фокусом и точкой, отстоящей от линзы на расстоянии, равном двойному фокусному расстоянию, то изображение действительное, увеличенное и перевернутое (рис. 262).

4. Если $d = 2F$, т. е. предмет находится на расстоянии, равном двойному фокусному расстоянию, то изображение действительное, такое же по размеру, как и сам предмет, и перевернутое (рис. 263).



Р и с. 262

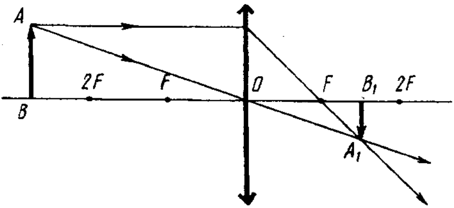


Р и с. 263

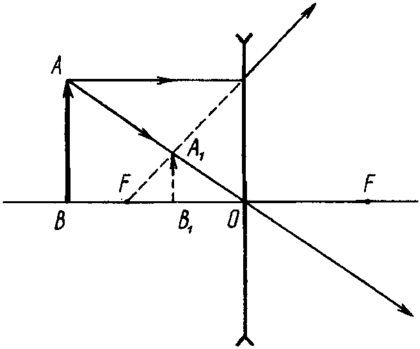
5. Если $d > 2F$, т. е. предмет находится от линзы на расстоянии, превышающем двойное фокусное расстояние, то изображение действительное, уменьшенное и перевернутое (рис. 264).

Полезно обратить внимание на то, что 1-й случай соответствует построению изображения в лупе, 3-й – в проекционном аппарате (кинопроекторе), 5-й – в фотоаппарате.

II. Если линза рассеивающая, то независимо от расстояния от предмета AB до линзы изображение A_1B_1 всегда получается мнимое, уменьшенное и прямое (рис. 265). При построении изображения в рассеивающей линзе использовались два луча: луч, идущий параллельно главной оптической оси, и луч, проходящий через оптический центр. Первый луч после преломления линзой идет так, что его



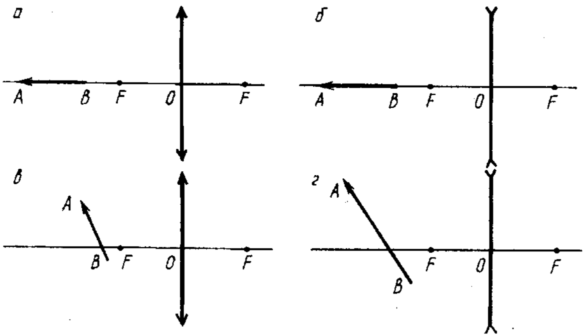
Р и с. 264



Р и с. 265

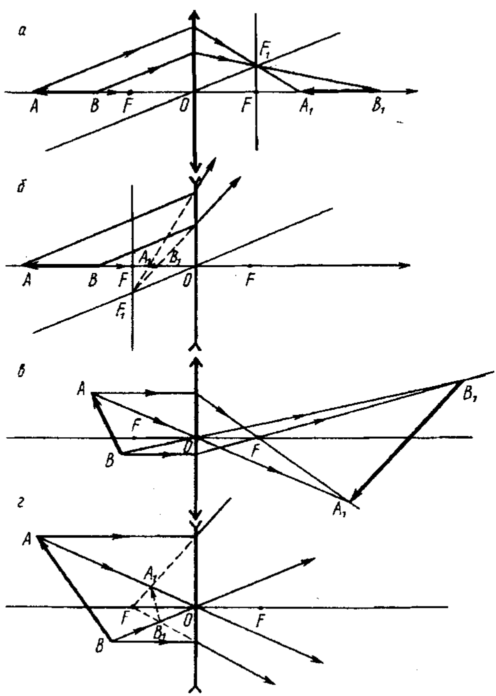
продолжение проходит через главный фокус, а второй луч, как и в случае собирающей линзы, не изменяет своего первоначального направления.

850. На рис. 266 показаны положения предмета AB. Построить изображения предмета.



Р и с. 266

Р е ш е н и е. Построение изображений показано на рис. 267. Поясним построение. Чтобы построить изображение предмета AB, лежащего на главной оптической оси (рис. 266, *а*), нужно найти изображения A_1 и B_1 точек A и B. Возьмем исходящие из точки A два луча: один – идущий вдоль главной оптической оси, другой – падающий на линзу под произвольным углом (рис. 267, *а*). Направление первого луча после прохождения через линзу не изменяется. Для определения хода второго луча проведем побочную оптическую ось, параллельную этому лучу, и фокальную плоскость, проходящую через задний фокус линзы. Точка пересечения побочной оптической оси с фокальной плоскостью является побочным фокусом F_1. Через него и должен пройти второй луч после преломления в линзе. Точка A_1 пересечения первого и второго лучей, прошедших через линзу, является изображением точки A. Таким же способом строится изображение B_1 точки B.



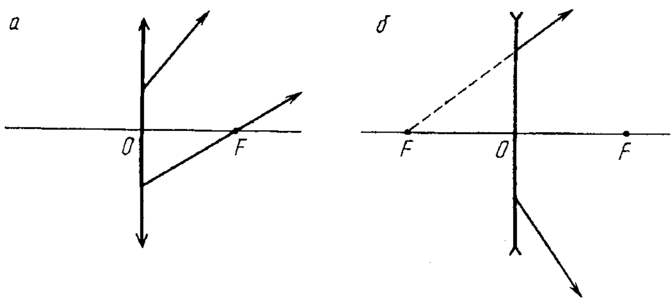
Р и с. 267

В случае рассеивающей линзы (рис. 266, *б*) построение выполняется аналогично (рис. 267, *б*). Отличие состоит в том, что луч, идущий параллельно побочной оптической оси, после преломления в линзе идет так, что его продолжение проходит через побочный фокус, являющийся точкой пересечения этой побочной оси с фокальной плоскостью, проведенной через передний фокус.

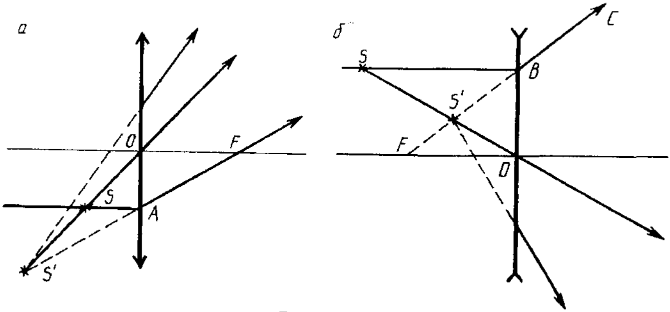
Для построения изображения предмета AB, расположенного под некоторым углом к главной оптической оси (рис. 266, *в*, *г*), строим изображения A_1 и B_1 точек A и B. Для этого берем по два луча, исходящих из каждой точки: луч, идущий параллельно главной оптической оси, и луч, идущий через оптический центр линзы (рис. 267, *в*, *г*). Первый луч, преломляясь в собирающей линзе, проходит через ее фокус; если же линза рассеивающая, то луч после преломления в линзе идет так, что его продолжение проходит через передний фокус линзы. Дальнейшие построения ясны из рисунков.

851. Найти построением положение светящейся точки, если известен ход лучей после их преломления в линзе. Один из этих лучей пересекается с главной оптической осью собирающей линзы в ее фокусе (рис. 268, *а*). В случае с рассеивающей линзой (рис. 268, *б*) один из лучей после преломления в линзе идет так, что его продолжение пересекается с главной оптической осью линзы в ее фокусе.

Р е ш е н и е. Рассмотрим сначала случай с собирающей линзой. Продолжив заданные лучи до их пересечения, получим изображение S' светящейся точки (рис. 269, *а*). Соединим точку S' с оптическим центром линзы O. Луч AF после преломления в линзе проходит через фокус, значит, до преломления он шел параллельно главной оптической



Р и с. 268



Р и с. 269

оси. Проведем $AS \parallel FO$. На пересечении AS и OS' лежит искомая светящаяся точка S.

В случае рассеивающей линзы (рис. 269, *б*) изображение S' светящейся точки получим так же, продолжив заданные лучи до их пересечения. Соединим точку S' с центром линзы O. Луч BC после преломления идет так, что его продолжение проходит через фокус линзы. Следовательно, до преломления он шел параллельно главной оптической оси линзы. Проведем $BS \parallel FO$. Искомая точка S лежит на пересечении OS' и BS.

852. Собирающая линза дает изображение некоторого предмета на экране. Высота изображения равна H_1. Оставляя неподвижными экран и предмет, начинают двигать линзу к экрану и находят, что при втором четком изображении предмета высота изображения равна H_2. Найти действительную высоту предмета.

Р е ш е н и е. Обозначим расстояние между предметом и экраном через l. Тогда при первом положении линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}, \; f_1 + d_1 = l,$$

или

$$f_1 d_1 = Fl, \; f_1 + d_1 = l, \qquad (1)$$

где f_1, d_1 – расстояния от линзы соответственно до экрана и до предмета; F – фокусное расстояние линзы.

При втором положении линзы аналогично получим:

$$f_2 d_2 = Fl, \; f_2 + d_2 = l. \qquad (2)$$

На основании выражений (1) и (2) можно сделать вывод, что d_1 и f_1, так же как d_2 и f_2, являются корнями квадратного уравнения вида $x^2 - lx + Fl = 0$, т. е.

$$d_1 = x_1 = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - Fl}, \; f_1 = x_2 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - Fl},$$

а также

$$d_2 = x_2 = \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - Fl}, \; f_2 = x_1 = \frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - Fl}.$$

Таким образом, получаем:

$$d_1 = f_2, \; f_1 = d_2. \qquad (3)$$

Этот результат является следствием обратимости световых лучей.

Пусть h – действительная высота предмета. Тогда увеличение в первом случае

$$H_1/h = f_1/d_1, \qquad (4)$$

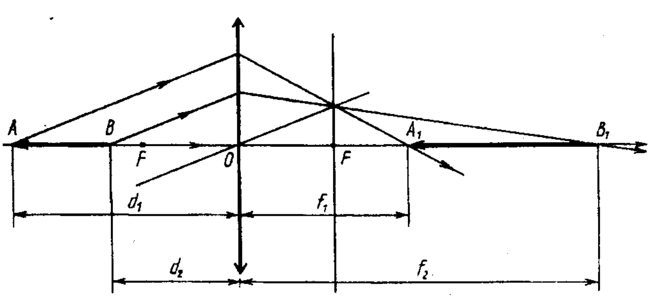
а во втором

$$H_2/h = f_2/d_2. \qquad (5)$$

Перемножив почленно равенства (4) и (5), с учетом выражения (3) получим $H_1H_2/h^2 = 1$, откуда $h = \sqrt{H_1H_2}$.

853. Стержень расположен вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы так, что его концы удалены от линзы на расстояния $d_1 = \frac{3}{2}F$ и $d_2 = \frac{5}{4}F$, где F – неизвестное фокусное расстояние линзы. Во сколько раз длина изображения больше длины самого предмета?

Р е ш е н и е. На рис. 270 построено изображение A_1B_1 предмета AB (пояснения к построению смотрите в решении задачи 850). Из рисунка видно, что длина предмета $l = d_1 - d_2$, а длина изображения $L = f_2 - f_1$, где f_1, f_2 – расстояния от линзы до точек B_1 и A_1 соответственно,



Р и с. 270

являющихся изображениями точек B и A (концов стержня). Отношение этих длин, т. е. линейное увеличение,

$$\Gamma = \frac{L}{l} = \frac{f_2 - f_1}{d_1 - d_2}. \qquad (1)$$

Так как изображение действительное, формулу линзы запишем в виде $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, откуда $f = Fd/(d - F)$.

На основании последней формулы выразим расстояния f_1 и f_2:

$$f_1 = Fd_1/(d_1 - F),\ f_2 = Fd_2/(d_2 - F).$$

Подставив эти значения в выражение (1), после преобразования получим:

$$\Gamma = \frac{F^2}{(d_2 - F)(d_1 - F)},\ \Gamma = 8.$$

854. С помощью тонкой линзы получают увеличенное в $\Gamma = 2$ раза действительное изображение предмета. Затем линзу передвигают на $l = 8$ см и получают мнимое изображение такого же размера. Определить фокусное расстояние линзы.

Решение. Если в первом случае предмет находится на расстоянии d от линзы, а изображение – на расстоянии f_1 от нее, то увеличение $\Gamma = f_1/d$, следовательно,

$$f_1 = \Gamma d. \qquad (1)$$

Во втором случае расстояние от предмета до линзы равно $d - l$, а от изображения до линзы

$$f_2 = \Gamma(d - l). \qquad (2)$$

Применив формулу тонкой линзы в первом и втором случаях, будем иметь:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_1},\quad \frac{1}{F} = \frac{1}{d - l} - \frac{1}{f_2},$$

или с учетом выражений (1) и (2)

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\Gamma d}, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d - l} - \frac{1}{\Gamma(d - l)}. \qquad (4)$$

Из уравнения (3) найдем $d = F(1 + 1/\Gamma)$. Подставив это значение в уравнение (4), получим

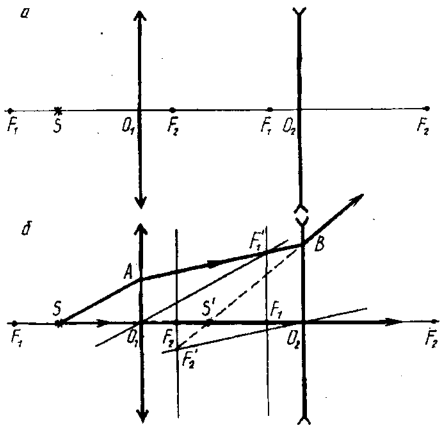
$$\frac{1}{F} = \frac{1 - 1/\Gamma}{F(1 + 1/\Gamma) - l}.$$

Решив это уравнение относительно F, найдем: $F = l\Gamma/2$, $F = 8$ см.

855. Собирающая и рассеивающая линзы расположены так, что имеют общую главную оптическую ось. На этой оси находится светящаяся точка S (рис. 271, *а*). Построением найти изображение этой точки.

Р е ш е н и е. Чтобы найти изображение точки S, рассмотрим ход исходящих из нее двух лучей: луча SF_2, идущего вдоль главной оптической оси, и произвольного луча SA (рис. 271, *б*). Первый луч, проходя через оптические центры обеих линз, не изменяет своего первоначального направления. Чтобы найти ход луча SA после преломления в собирающей линзе, проведем параллельно этому лучу побочную оптическую ось O_1F_1'. Точка F_1' пересечения побочной оптической оси с фокальной плоскостью линзы является побочным фокусом, через который пройдет луч SA после собирающей линзы.

Для нахождения хода луча AF_1' после преломления в рассеивающей линзе найдем побочный фокус F_2', т. е. точку пересечения побочной оптической оси $F_2'O_2$, проведенной параллельно лучу AF_1', с фокальной плоскостью рас-

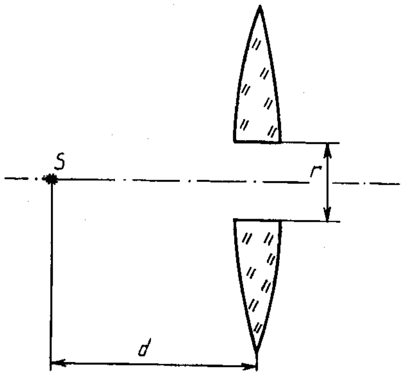


Р и с. 271

сеивающей линзы. После линзы луч пойдет так, что его продолжение пройдет через точку F_2'.

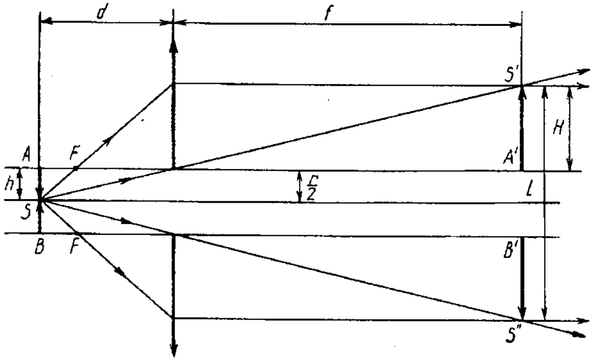
Таким образом, выбранные нами два луча, пройдя через обе линзы, расходятся. Поэтому изображение S' точки S мнимое и находится в точке пересечения луча SF_2 и продолжения луча $S'B$.

856. Точечный источник света находится на главной оптической оси тонкой собирающей линзы. Линзу разрезали на две половины, которые раздвинули на расстояние $r = 2$ мм (рис. 272). Найти расстояние от точечного источника света до линзы, если расстояние между действительными изображениями источника $l = 6$ мм. Фокусное расстояние линзы $F = 40$ см.



Р и с. 272

Р е ш е н и е. Каждая из раздвинутых половин линзы действует как целая линза, главная оптическая ось которой находится на расстоянии $h = r/2$ от источника S (рис. 273). Для наглядности представим, что плоские предметы SA и SB установлены перпендикулярно главным оптическим осям этих линз, и построим их изображения $S'A'$ и $S''B'$. Ясно, что точки S' и S''



Р и с. 273

являются изображениями источника S. Как видно из рис. 273, высота h предмета SA равна $r/2$, а высота H изображения $S'A'$ равна $(l-r)/2$. Следовательно, увеличение одной из половин линзы

$$\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{l-r}{r}. \tag{1}$$

Но, с другой стороны,

$$\Gamma = f/d, \tag{2}$$

где f — расстояние от изображения до линзы; d — расстояние от предмета до линзы.

Из формул (1) и (2) следует $(l-r)/r = f/d$, откуда $f = d(l-r)/r$. Подставив это значение в формулу тонкой линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, получим $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{r}{d(l-r)}$. Отсюда $d = Fl/(l-r)$, $d = 0{,}6$ м.

857. Небольшому шарику, который находится на поверхности горизонтально расположенной тонкой собирающей линзы с оптической силой $D = 0{,}5$ дптр, сообщили вертикальную начальную скорость $v_0 = 10$ м/с. Сколько времени будет существовать действительное изображение шарика в этой линзе?

Решение. Изображение шарика будет действительным тогда, когда расстояние от шарика до линзы больше фокусного расстояния F этой линзы (см. решение задачи 849).

Выберем систему координат так, чтобы ось OX была расположена в фокальной плоскости линзы, а начало координат O совпадало с ее главным фокусом (рис. 274). Время будем отсчитывать с того момента, когда шарик был в точке O. Тогда зависимость координаты y шарика от времени t выразится уравнением

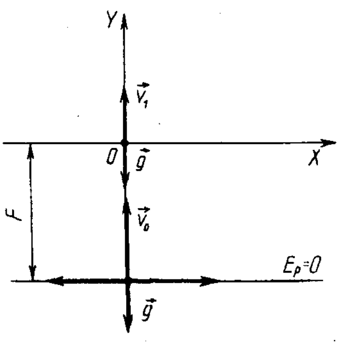


Рис. 274

$$y = v_1 t - gt^2/2, \tag{1}$$

где v_1 — скорость шарика в точке O; g — ускорение свободного падения.

Найдем время τ, за которое шарик, вылетев из точки O, вернется в нее обратно. В момент падения на фокальную плоскость $t = \tau$, $y = 0$. Согласно уравнению (1),

$$0 = v_1\tau - g\tau^2/2.$$

Решив это уравнение относительно τ, получим

$$\tau = 2v_1/g. \qquad (2)$$

(Второй корень $\tau = 0$ соответствует начальному моменту времени.) Скорость v_1 найдем на основании закона сохранения энергии. Будем считать, что на уровне линзы потенциальная энергия шарика $E_p = 0$. Тогда в точке O $E_{p1} = mgF$, где F – фокусное расстояние линзы. Кинетическая энергия шарика в этой точке $E_{k1} = mv_1^2/2$. В момент бросания кинетическая энергия $E_k = mv_0^2/2$.

По закону сохранения энергии

$$E_k + E_p = E_{k1} + E_{p1},$$

или

$$mv_0^2/2 = mv_1^2/2 + mgF.$$

Отсюда $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gF}$.

Так как $F = 1/D$, то $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2g/D}$. Подставив это значение в формулу (2), найдем время τ, в течение которого изображение шарика будет действительным:

$$\tau = \frac{2}{g}\sqrt{v_0^2 - \frac{2g}{D}}, \ \tau = 2 \text{ с}.$$

858. Фокусное расстояние объектива проекционного аппарата $F = 0{,}25$ м. Какое увеличение диапозитива дает этот аппарат, если экран удален от объектива на расстояние $f = 4$ м?

Решение. Диапозитив помещают вблизи фокальной плоскости объектива на расстоянии, большем его фокусного расстояния. Изображение получается действительное, увеличенное и обратное (см. рис. 262). Увеличение

$$\Gamma = \frac{f}{d} = f\frac{1}{d}, \qquad (1)$$

где f – расстояние от экрана (изображения) до объектива; d – расстояние от диапозитива до объектива.

Из формулы линзы $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$ находим

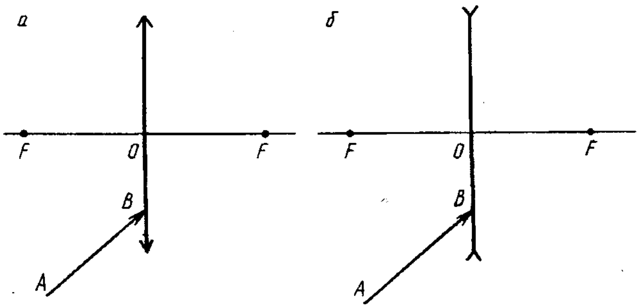
$$\frac{1}{d} = \frac{f - F}{Ff}.$$

Подставив это значение в формулу (1), получим:

$$\Gamma = \frac{f - F}{F}, \ \Gamma = 15.$$

Задачи для самостоятельного решения

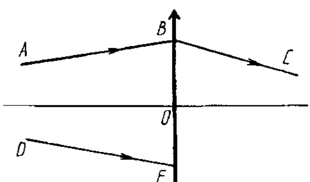
859. Построить ход луча AB, падающего под некоторым углом к главной оптической оси на собирающую (рис. 275, *а*) и рассеивающую (рис 275, *б*) линзы. Положения главных оптических осей линз и их фокусы заданы.



Р и с. 275

860. На рис. 276 показан ход луча ABC через линзу. Построить ход луча DE после прохождения его через линзу.

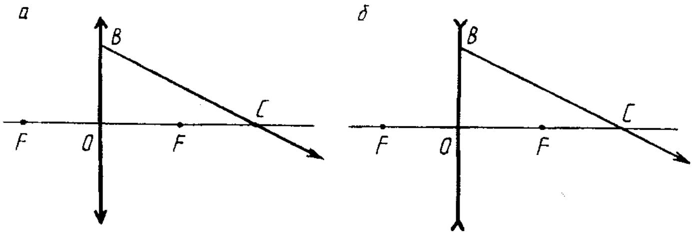
861. Задан ход луча BC после преломления его в собирающей (рис. 277, *а*) и рассеивающей (рис. 277, *б*) линзах, а также положения главных оптических осей и фокусы линз. Найти построением ход луча до линзы в обоих случаях.



Р и с. 276

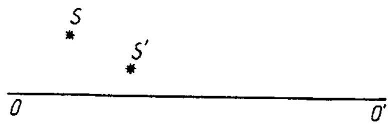
862. Заданы главная оптическая ось линзы OO', светящаяся точка S и ее изображение в линзе S' (рис. 278). Найти построением положение фокуса линзы.

863. Построить изображение светящейся точки, лежащей на главной оптической оси линзы



Р и с. 277

на расстоянии, меньшем фокусного. Положение фокусов линзы задано. Рассмотреть два случая: а) линза собирающая; б) линза рассеивающая.



Р и с. 278

864. Предмет и его прямое изображение, создаваемое тонкой линзой, расположены симметрично относительно фокуса линзы. Расстояние от предмета до фокуса линзы l = 4,0 см. Найти фокусное расстояние линзы.

865. Фокусное расстояние собирающей линзы F = 10 см, расстояние от предмета до переднего фокуса l = 5 см, а линейный размер предмета h = 2 см. Определить размер изображения. На каком расстоянии от линзы нужно расположить предмет, чтобы получить изображение с увеличением Γ = 10?

866. Найти фокусное расстояние и оптическую силу двояковогнутой линзы, если расстояние от линзы до предмета d = 36 см, а до изображения f = 9,0 см.

867. Расстояние от предмета до экрана L = 105 см. Тонкая линза, помещенная между ними, дает на экране увеличенное изображение предмета. Если линзу переместить на l = 32 см, то на экране получится уменьшенное изображение. Найти фокусное расстояние линзы.

868. С помощью собирающей линзы на экране получено уменьшенное действительное изображение плоского предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси. Высота предмета h = 6 см, высота изображения H_1 = 4 см. Оставляя экран и предмет неподвижными, линзу перемещают в сторону предмета до тех пор, пока не получат второе резкое изображение предмета. Определить высоту второго изображения.

869. Линза с фокусным расстоянием $F = 3$ см создает перевернутое изображение предмета. Расстояния от предмета до линзы и от линзы до изображения различаются на $l = 8$ см. С каким увеличением изображается предмет?

870. Изображение предмета, удаленного от собирающей линзы на расстояние $d = 0{,}4$ м, больше предмета в $\Gamma = 5$ раз. Найти возможные значения оптической силы линзы.

871. Расстояние от освещенного предмета до экрана $L = 100$ см. Линза, помещенная между ними, дает четкое изображение предмета при двух положениях, расстояние между которыми $l = 20$ см. Найти фокусное расстояние линзы.

872. На каком расстоянии перед рассеивающей линзой с оптической силой $D = -2$ дптр надо поставить предмет, чтобы его мнимое изображение получилось на середине расстояния между линзой и ее мнимым фокусом?

873. Тонкая линза создает изображение небольшого предмета, находящегося в ее фокальной плоскости и установленного перпендикулярно главной оптической оси линзы. Определить высоту предмета, если высота изображения $H = 0{,}70$ см.

874. На каком расстоянии от рассеивающей линзы с оптической силой $D = -5$ дптр надо поместить предмет, чтобы его мнимое изображение получилось в $k = 4$ раза меньше самого предмета?

875. В осколок тонкостенной стеклянной сферической колбы, радиус кривизны которой $R = 10$ см, налили прозрачную жидкость. С помощью полученной линзы действительное изображение предмета, помещенного над ней на расстоянии $d = 1{,}0$ м, получилось уменьшенным в $k = 5{,}0$ раз. Определить показатель преломления жидкости.

876. Мнимое изображение предмета в рассеивающей линзе находится от нее на расстоянии в $k = 3$ раза меньшем, чем предмет. Найти расстояние от линзы до изображения, если фокусное расстояние F линзы известно.

877. Собирающая линза дает действительное изображение с увеличением $\Gamma = 2$ раза. Определить фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением $f = 0{,}3$ м.

878. На какой максимальный угол может отклониться луч света, падающий параллельно главной оптической оси на линзу с фокусным расстоянием $F = 8$ см и диаметром $a = 10$ см?

879. Линза дает мнимое изображение предмета, увеличенное в $\Gamma = 2{,}0$ раза, если он находится от нее на расстоянии $d = 5{,}0$ см. Какая это линза – собирающая или рассеивающая? Чему равно ее фокусное расстояние?

880. На каком расстоянии от собирающей линзы надо поместить предмет, чтобы расстояние между предметом и его действительным изображением было минимальным? Фокусное расстояние линзы равно F.

881. Проверяя свои очки, человек получил на полу комнаты действительное изображение лампы, висящей на высоте $h = 2{,}5$ м, держа очковое стекло под лампой на расстоянии $f = 1{,}5$ м от пола. Какова оптическая сила очков?

882. Сходящийся пучок лучей падает на рассеивающую линзу (рис. 279). В отсутствие линзы лучи сходились бы в точке A, расположенной на расстоянии $l_1 = 10$ см от линзы. После преломления в линзе лучи сходятся в точке B, удаленной от линзы на расстояние $l_2 = 15$ см. Найти фокусное расстояние линзы.

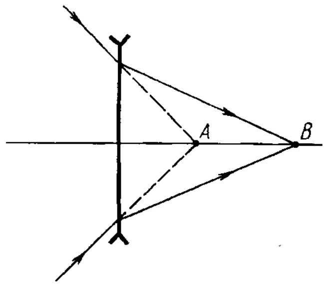


Рис. 279

883. На рассеивающую линзу вдоль главной оптической оси падает цилиндрический пучок параллельных лучей. Диаметр пучка $d_1 = 3$ см. На экране, поставленном за линзой на расстоянии $l = 12$ см, получается светлый круг, диаметр которого $d_2 = 8$ см. Найти фокусное расстояние линзы.

884. На главной оптической оси на расстоянии $d = 60$ см от собирающей линзы, фокусное расстояние которой $F = 40$ см, расположен точечный источник света. Линзу по диаметру разрезали на две половины и симметрично раздвинули их на расстояние $r = 1$ см в направлении, перпендикулярном главной оптической оси. На каком расстоянии друг от друга будут расположены изображения источника, полученные в половинах линзы?

885. С помощью линзы получено изображение Солнца. Диаметр изображения $d = 31$ мм, а расположено оно на расстоянии $f = 32$ см от линзы. Известно, что расстояние от Земли до Солнца $R = 150$ млн км, а продолжительность земного года $T = 365$ сут. Вычислить ускорение свободного падения у поверхности Солнца.

886. Две линзы, из которых одна рассеивающая с фокусным расстоянием F_1, а другая собирающая с фокусным расстоянием $F_2 = 2F_1$, расположены так, что имеют общую главную оптическую ось. Каким должно быть расстояние между линзами, чтобы пучок лучей, параллельных главной оптической оси системы, пройдя обе линзы, не изменил направления?

887. Найти построением изображение светящейся точки S в оптической системе двух тонких линз – рассеивающей и собирающей (рис. 280). Фокусы обеих линз заданы.

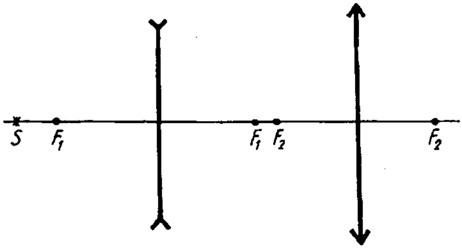


Рис. 280

888. Две собирающие линзы, фокусные расстояния которых $F_1 = 12$ см и $F_2 = 15$ см, расположены так, что их главные оптические оси совпадают. Расстояние между линзами $l = 36$ см. Предмет находится на расстоянии $d_1 = 48$ см от первой линзы. На каком расстоянии от второй линзы получится изображение предмета?

889. Источник света находится на расстоянии $d_1 = 30$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см. По другую сторону линзы на расстоянии $l = 40$ см расположена рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_2 = 12$ см. На каком расстоянии от рассеивающей линзы находится изображение источника?

890. Дальнозоркий человек начинает резко различать очертания предметов с расстояния $d = 1$ м. Найти оптическую силу очков, которые нужны этому человеку, чтобы он мог четко видеть предметы с расстояния наилучшего видения $d_0 = 25$ см.

891. С самолета, летевшего на высоте $h = 2000$ м, производилось фотографирование местности с помощью аэрофотоаппарата, объектив которого имеет фокусное расстояние $F = 0{,}5$ м. Каков масштаб полученных снимков?

892. При фотографировании предмета с расстояния $d_1 = 15$ м высота его изображения на фотопленке $h_1 = 30$ мм, а при фотографировании с расстояния $d_2 = 9$ м – $h_2 = 51$ мм. Найти фокусное расстояние объектива фотоаппарата.

893. Какое увеличение дает лупа, имеющая оптическую силу $D = 16$ дптр? Построить изображение в лупе.

894. Проекционный аппарат дает на экране увеличенное в $\Gamma = 20$ раз изображение диапозитива. Найти расстояние между объективом проекционного аппарата и изображением, если фокусное расстояние объектива $F = 20$ см.

895. Светящаяся точка, находящаяся на расстоянии $d = 15$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см, движется со скоростью $v = 2$ см/с перпендикулярно главной оптической оси. С какой скоростью движется изображение точки?

896. Кинокамерой сняли колебания тяжелого груза, подвешенного на проволоке. Съемка велась с помощью объектива с фокусным расстоянием $F = 5$ см. Изображение маятника на пленке имеет длину $l = 20$ мм. За время съемки $t = 1$ мин маятник совершил $N = 24$ полных колебания. С какого расстояния (от объектива до маятника) велась съемка? Маятник считать математическим.

15. СВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ

Методические указания к решению задач

При решении большинства задач, в которых рассматривается интерференция света, нужно сначала выяснить, почему возникает и чему равна оптическая разность хода интерферирующих волн. Затем, применяя условие максимума или минимума освещенности при интерференции, составить уравнение, из которого можно определить искомую величину.

В ряде задач рассматривается дифракция света на дифракционной решетке. При решении их нужно использовать условие главных максимумов освещенности в дифракционной картине, учитывать симметричность этой картины относительно центрального максимума, а затем из составленной системы уравнений найти неизвестную величину.

Основные законы и формулы

Длина световой волны в среде

$$\lambda_{ср} = \lambda / n,$$

где λ – длина световой волны в вакууме; n – абсолютный показатель преломления среды.

Оптическая длина пути световой волны

$$L = nl,$$

где l – геометрическая длина пути.

Оптическая разность хода двух волн

$$\Delta = L_2 - L_1,$$

где L_2, L_1 – оптические длины путей этих волн.

Условие интерференционных максимумов:

$$\Delta = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где Δ – оптическая разность хода двух световых волн; λ – длина волны.

Условие интерференционных минимумов:

$$\Delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

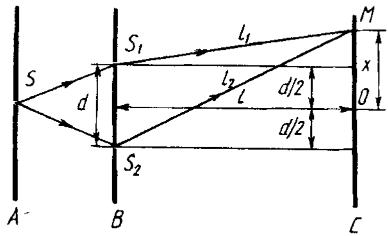
Условие главных максимумов освещенности при дифракции на дифракционной решетке нормально падающего света:

$$d \sin \varphi = k\lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

где d – постоянная (период) дифракционной решетки; φ – угол отклонения лучей, соответствующий этому максимуму; k – порядок главного максимума; λ – длина световой волны.

Примеры решения задач

897. В опыте Юнга источником света служит ярко освещенная узкая щель S в экране A (рис. 281). Свет от нее падает на второй непрозрачный экран B, в котором имеются две одинаковые узкие щели S_1 и S_2, параллельные S. Щели S_1 и S_2 находятся на небольшом расстоянии друг от друга и являются когерентными источниками света. Интерференция наблюдается на экране C, параллельном экрану B и расположенном от



Р и с. 281

него на расстоянии l, причем $l \gg d$. Интерференционная картина представляет собой чередование светлых и темных полос (максимумов и минимумов), параллельных друг другу. Найти расстояние между двумя соседними максимумами, если известно, что $d = 0{,}2$ мм, $l = 2$ м, длина световой волны $\lambda = 500$ нм.

Р е ш е н и е. В некоторой точке M экрана C будет наблюдаться интерференционный максимум при выполнении условия

$$\Delta = k\lambda, \tag{1}$$

где $\Delta = L_2 - L_1$ — оптическая разность хода. В данном случае $\Delta = l_2 - l_1$, так как показатель преломления воздуха $n = 1$. Обозначим через x_k расстояние от точки M до точки O, симметричной относительно щелей. Из рисунка видно, что

$$l_1^2 = l^2 + (x_k - d/2)^2, \quad l_2^2 = l^2 + (x_k + d/2)^2.$$

Отсюда получим:

$$l_2^2 - l_1^2 = 2x_k d, \quad (l_2 + l_1)(l_2 - l_1) = 2x_k d,$$

$$l_2 - l_1 = 2x_k d/(l_2 + l_1).$$

Из условия $l \gg d$ следует, что $l_2 + l_1 \approx 2l$, поэтому

$$\Delta = x_k d/l. \tag{2}$$

Подставив значение Δ из равенства (1) в (2), найдем

$$x_k = kl\lambda/d.$$

Расстояние Δx между двумя соседними интерференционными максимумами

$$\Delta x = x_{k+1} - x_k = \frac{(k+1)l\lambda}{d} - \frac{kl\lambda}{d} = \frac{l\lambda}{d}, \quad \Delta x = 5 \text{ мм}.$$

Отметим, что величина Δx называется также *шириной интерференционной полосы.*

898. Чтобы уменьшить потери света из-за отражения от поверхностей стекла, осуществляют так называемое *просветление оптики:* на свободные поверхности линз наносят тонкие пленки вещества с показателем преломления n меньшим, чем у стекла. Определить минимальную толщину пленки, при которой возникает интерференционный минимум отражения для света с длиной волны $\lambda = 550$ нм, падающего в направлении нормали. Показатель преломления пленки $n = 1{,}2$.

Решение. При отражении света от границ раздела воздух–пленка и воздух–стекло (рис. 282) происходит потеря полуволны (сдвиг по фазе на 180°), так как и в первом, и во втором случае свет отражается от оптически более плотной среды. Поэтому оптическая разность хода когерентных волн $1'$ и $2'$ зависит только от толщины пленки d и ее показателя преломления n:

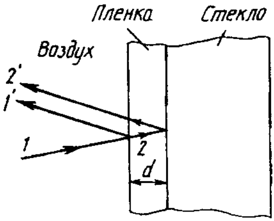


Рис. 282

$$\Delta = 2dn.$$

Здесь учтено, что волна $2'$ проходит дополнительный путь, равный удвоенной толщине пленки. Интерференционный минимум в отраженном свете будет наблюдаться при выполнении условия

$$\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \text{ или } 2dn = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0,\ 1,\ 2\ldots).$$

При $k = 0$ получим минимальную толщину пленки:

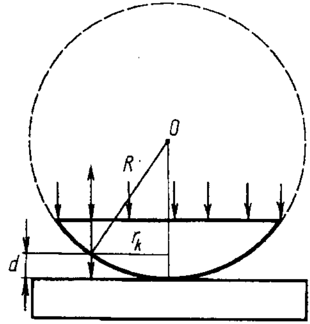
$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4n},\ d_{\min} = 1{,}2 \cdot 10^2 \text{ нм}.$$

899. Кольца Ньютона образуются в прослойке воздуха между плоскопараллельной стеклянной пластинкой и положенной на нее плосковыпуклой линзой с радиусом кривизны $R = 5{,}0$ м. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиус третьего темного кольца $r_3 = 3{,}1$ мм. Найти длину волны света, падающего нормально на плоскую поверхность линзы.

Р е ш е н и е. В отраженном свете темные кольца образуются при выполнении условия интерференционных минимумов

$$\Delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2} \quad (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots), \tag{1}$$

где Δ – оптическая разность хода волн, отраженных от выпуклой поверхности на границе раздела стекло–воздух и от пластинки на границе воздух–стекло (рис. 283). Во втором случае отражение происходит от оптически более плотной среды, поэтому теряется половина волны. С учетом этого находим, что разность хода



Р и с. 283

$$\Delta = 2dn + \lambda/2, \tag{2}$$

где d – толщина воздушного зазора; n – показатель преломления воздуха (n = 1).

Из рисунка видно, что $R^2 = r_k^2 + (R-d)^2$, или $R^2 = r_k^2 + R^2 - 2Rd + d^2$. Отсюда, учитывая, что $d \ll R$, получим $d = r_k^2/(2R)$. Подставив это значение d и n = 1 в формулу (2), получим

$$\Delta = \frac{r_k^2}{R} + \frac{\lambda}{2}. \tag{3}$$

Приравняв правые части выражений (1) и (3), будем иметь формулу для радиуса k-го темного кольца Ньютона в отраженном свете:

$$r_k = \sqrt{k\lambda R} \ (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Отсюда найдем длину световой волны:

$$\lambda = \frac{r_k^2}{kR}.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{r_3^2}{3R},\ \lambda = 6{,}4 \cdot 10^{-7}\ \text{м}.$$

900. На дифракционную решетку длиной l = 20 мм, содержащую $n = 1{,}0 \cdot 10^4$ штрихов, падает нормально монохроматический свет. Зрительная трубка спектрометра наведена на главный максимум первого порядка. Чтобы навести трубку на другой максимум того же порядке, ее необходимо повернуть на угол $\alpha = 40°$. Определить: 1) длину световой волны; 2) число максимумов, наблюдаемых в спектре дифракционной решетки; 3) угол отклонения лучей, соответствующий последнему максимуму.

Р е ш е н и е. Из условия главных максимумов освещенности для дифракционной решетки $d\sin\varphi = k\lambda$ следует, что длина световой волны

$$\lambda = \frac{d\sin\varphi}{k},$$

где d – постоянная решетки; φ – угол отклонения лучей, соответствующий максимуму k-го порядка. Максимумы расположены симметрично относительно центрального максимума, поэтому максимуму первого порядка ($k = 1$) соответствует угол $\varphi_1 = \alpha/2$. Следовательно, длина волны

$$\lambda = d\sin\varphi_1 = d\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Постоянная решетки $d = l/n$, поэтому

$$\lambda = \frac{l}{n}\sin\frac{\alpha}{2}, \ \lambda = 6{,}8\cdot10^{-7} \ \text{м}.$$

Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала наибольшее значение порядка максимума k_{max}. Максимальный угол φ_{max} отклонения лучей не может превышать 90°. При $\sin\varphi_{max} = 1$ имеем

$$k_{max} \leqslant \frac{d\sin\varphi_{max}}{\lambda} \leqslant \frac{d}{\lambda}.$$

Вычислив, получим $k_{max} \leqslant 2{,}9$. Число k_{max} должно быть целым, поэтому берем максимальное целое число, не превосходящее 2,9, т. е. $k_{max} = 2$. Влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу максимумов, равному k_{max}. С учетом центрального максимума общее число максимумов

$$N = 2k_{max} + 1, \ N = 5.$$

Найдем максимальный угол отклонения лучей:

$$\sin\varphi_{max} = \frac{k_{max}\lambda}{d}, \ \varphi_{max} = \arcsin\left(\frac{k_{max}\lambda_n}{l}\right), \ \varphi_{max} = 43°.$$

Задачи для самостоятельного решения

901. Определить длину l_1 отрезка, на котором укладывается столько же длин волн монохроматического света в вакууме, сколько их укладывается на отрезке длиной $l_2 = 12$ мм в воде. Показатель преломления воды $n = 1{,}3$.

902. Между двумя параллельными стеклянными пластинками имеется небольшой воздушный зазор. Сквозь пластинки проходит луч монохроматического света, падающий перпендикулярно поверхности пластинок. При этом в воздушном зазоре укладывается $N = 30$ длин волн света. Сколько длин волн того же света уложится в этом зазоре, если его заполнить жидкостью с показателем преломления $n = 1{,}3$?

903. Вода освещена зеленым светом, длина волны которого в воздухе $\lambda_1 = 540$ нм. Определить длину волны и частоту этого света в воде. Какой цвет видит человек, открывший глаза под водой? Показатель преломления воды $n = 4/3$. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

904. В воздухе длина волны монохроматического света $\lambda_1 = 600$ нм, а в стекле – $\lambda_2 = 420$ нм. Под каким углом падает свет на плоскую границу раздела воздух–стекло, если отраженный и преломленный лучи образуют прямой угол?

905. Объектив фотоаппарата покрыт слоем прозрачной пленки толщиной $d = 0{,}525$ мкм. Обеспечит ли этот слой просветление для зеленого света с длиной волны $\lambda = 546$ нм, если показатель преломления пленки $n = 1{,}31$?

906. В опыте Юнга щели освещаются монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм. На сколько нужно изменить длину волны источника, освещающего щели, чтобы при заполнении пространства между экранами B и C (см. рис. 281) водой расстояние между соседними интерференционными максимумами осталось неизменным? Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

907. В опыте Юнга расстояние между щелями $d = 1$ мм, а расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Щели освещаются монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 600$ нм. На каком расстоянии от центральной светлой полосы находится третья темная полоса?

908. Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}66$ мкм, падающим нормально. Определить толщину воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой в том месте, где в отраженном свете наблюдается четвертое темное кольцо.

909. Радиус третьего светлого кольца Ньютона в отраженном свете равен 0,80 мм. Установка для наблюдения колец освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 400$ нм. Найти радиус кривизны линзы.

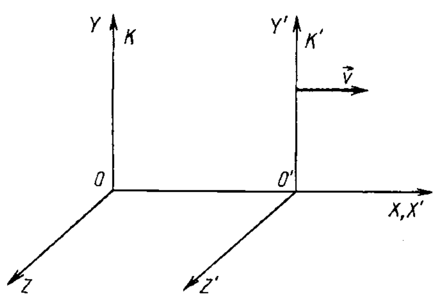
910. Монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм падает нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 3$ мкм. Сколько главных максимумов можно наблюдать в дифракционной картине?

911. Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. Главный максимум второго порядка наблюдается под углом $\varphi_1 = 10°$. Под каким углом наблюдается максимум третьего порядка?

16. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Методические указания к решению задач

Необходимо иметь в виду, что в специальной теории относительности рассматриваются только инерциальные системы отсчета. В задачах обычно предполагается, что система K' движется со скоростью $\vec{v}$ относительно системы K, причем оси OX и $O'X'$ совпадают, ось OY сонаправлена с осью $O'Y'$, а ось OZ – с осью $O'Z'$ (рис. 284).



Р и с. 284

Основные законы и формулы

Первый постулат специальной теории относительности (принцип относительности Эйнштейна): в любых инерциальных системах отсчета все физические явления при одних и тех же уровнях протекают одинаково.

Второй постулат специальной теории относительности (принцип постоянства скорости света): скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета и не зависит от движения источников и приемников света.

Релятивистское сокращение длины: если l_0 – длина стержня в системе K', относительно которой он покоится и расположен вдоль оси $O'X'$, а l – длина этого стержня в системе K, относительно которой он движется со скоростью $\vec{v}$, то

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

где c – скорость света в вакууме: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Поперечные размеры стержня не меняются.

Релятивистское замедление времени: если τ_0 – промежуток времени между двумя событиями, происходящими в одной и той же точке, неподвижной относительно системы K', а τ – промежуток времени между этими же событиями в системе K, то

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Релятивистский закон сложения скоростей:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v/c^2},$$

где u_x – проекция скорости $\vec{u}$ частицы в системе K на ось OX; u'_x – проекция скорости $\vec{u}'$ частицы в системе K' на ось OX; v – модуль скорости системы K' относительно системы K (см. рис. 284).

Зависимость импульса частицы от скорости:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m – масса (масса покоя) частицы; $\vec{v}$ – ее скорость.

Полная энергия (сумма кинетической энергии и энергии покоя) частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Энергия покоя частицы

$$E_0 = mc^2.$$

Закон взаимосвязи массы и энергии: всякое изменение массы тела Δm сопровождается изменением энергии покоя:

$$\Delta E_0 = c^2 \Delta m.$$

Примеры решения задач

912. Тело движется с постоянной скоростью v относительно инерциальной системы отсчета K. При каком значении v продольные размеры тела уменьшатся в n раз для наблюдателя в этой системе? Вычислить v при $n = 1{,}5$. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Так как в системе K длина тела

$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

и дано, что $l_0/l = n$, то $l_0 = nl$, следовательно,

$$l = nl\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \quad v = c\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}.$$

При $n = 1{,}5$ получим $v = 2{,}3 \cdot 10^8$ м/с.

913. Вычислить модуль импульса электрона, движущегося со скоростью $v = 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с. Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Электрон имеет импульс, модуль которого

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Подставив в эту формулу значения заданных величин и произведя вычисления, получим $p = 2{,}4 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с.

914. Вычислить изменение энергии покоя, соответствующее изменению массы на величину, равную массе покоящегося протона.

Решение. Согласно закону взаимосвязи массы и энергии,

$$\Delta E_0 = c^2 \Delta m,$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; Δm равно массе протона $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. В результате вычислений найдем $\Delta E_0 = 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ Дж.

Задачи для самостоятельного решения

915. Линейка длиной $l_0 = 1$ м движется вдоль оси OX в инерциальной системе отсчета K (см. рис. 284) со скоростью $v = 0{,}8c$, где с – скорость света в вакууме. Какова длина этой линейки в системе K?

916. Космический корабль движется мимо неподвижного наблюдателя со скоростью $v = 0{,}6c$, где c – скорость света в вакууме. Сколько времени пройдет по часам наблюдателя, если по часам, находящимся в корабле, прошло $\tau_0 = 100$ ч?

917. Найти полную энергию и кинетическую энергию релятивистской (движущейся со скоростью, близкой к скорости света) частицы, модуль импульса которой $p = 5{,}68 \cdot 10^{-19}$ кг · м/с, а масса $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

918. Вычислить энергию покоя тела массой $m = 1$ кг. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

919. Космический корабль удаляется от Земли со скоростью $v_1 = 0{,}80c$, а затем с него стартует ракета в направлении от Земли со скоростью $v_2 = 0{,}80c$ относительно корабля (c – скорость света в вакууме). Определить скорость ракеты относительно Земли.

920. Две релятивистские частицы движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой, параллельной оси OX, в системе K (см. рис. 284) со скоростями $v_1 = 0{,}70c$ и $v_2 = 0{,}80c$, где c – скорость света в вакууме. Определить относительную скорость этих частиц в системе K', движущейся с первой частицей.

VI. КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

17. СВЕТОВЫЕ КВАНТЫ

Методические указания к решению задач

Задачи этой главы связаны в основном с нахождением энергии и импульса фотонов, а также с фотоэффектом и эффектом Комптона.

В задачах на фотоэффект применяется уравнение Эйнштейна, которое выражает закон сохранения энергии при фотоэффекте. Если фотоэлектроны задерживаются тормозящим электрическим полем, то, согласно теореме об изменении кинетической энергии, максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона равна работе сил поля: $m_e v^2/2 = eU$. Поэтому в соответствии с уравнением Эйнштейна получим

$$h\nu = A + eU.$$

При решении задач на эффект Комптона следует иметь в виду, что, согласно квантовой теории, этот эффект рассматривается как упругое столкновение фотона с покоящимся электроном, которое подчиняется законам сохранения энергии и импульса. Фотон передает электрону часть своей энергии и часть импульса и изменяет направление своего движения, т. е. рассеивается. Уменьшение энергии фотона означает в соответствии с формулой $E = h\nu$ уменьшение частоты, т. е. увеличение длины волны.

В фотоэффекте и эффекте Комптона проявляются квантовые свойства электромагнитного излучения.

Основные законы и формулы

Энергия фотона

$$E = h\nu = \hbar\omega,$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка; ν – частота света; $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с; ω – циклическая частота.

Импульс фотона

$$p = h\nu/c = h/\lambda,$$

где c – скорость света в вакууме: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; λ – длина световой волны.

Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$h\nu = A + m_e v_{max}^2/2,$$

где $h\nu$ – энергия фотона; A – работа выхода электрона; $m_e v_{max}^2/2$ – максимальная кинетическая энергия вылетающего электрона; v_{max} – его максимальная скорость.

Красная граница фотоэффекта

$$\nu_{min} = A/h, \text{ или } \lambda_{max} = hc/A.$$

Эффект Комптона: при рассеянии коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и гамма-излучения) на свободных или слабо связанных электронах длина волны его увеличивается на величину

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{m_e c}\sin^2\frac{\theta}{2}, \text{ или } \Delta\lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta),$$

где $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$; λ, λ' – длина волны соответственно падающего и рассеянного излучения; m_e – масса покоя электрона; c – скорость света в вакууме; θ – угол рассеяния.

Величина $\lambda_C = h/(m_0 c)$ называется *комптоновской длиной волны электрона:* $\lambda_C = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$ м. Поэтому $\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta)$.

Примеры решения задач

921. Лазер, работающий в непрерывном режиме, излучает красный свет с длиной волны $\lambda = 630$ нм, развивая мощность $P = 40$ мВт. Сколько фотонов излучает лазер за время $t = 10$ с? Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Р е ш е н и е. Количество фотонов, излучаемых за время t,

$$N = W/E,$$

где W – суммарная энергия фотонов: $W = Pt$; E – энергия фотона: $E = h\nu = hc/\lambda$. Следовательно,

$$N = \frac{Pt\lambda}{hc}, \ N = 1{,}3 \cdot 10^{18}.$$

922. Максимальная кинетическая энергия электронов, вылетающих из рубидия при облучении его ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 3{,}17 \cdot 10^{-7}$ м, $E_{k\,max} = 2{,}84 \cdot 10^{-19}$ Дж. Определить работу выхода электрона и красную границу фотоэффекта для рубидия. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Решение. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта имеет вид

$$E = A + E_{k\,max},$$

где E – энергия падающего на вещество фотона; A – работа выхода электрона; $E_{k\,max}$ – максимальная кинетическая энергия вылетающего электрона. Отсюда $A = E - E_{k\,max}$. Так как энергия фотона $E = h\nu = hc/\lambda$, то работа выхода

$$A = hc/\lambda - E_{k\,max}, \quad A = 3{,}43 \cdot 10^{-19} \text{ Дж.}$$

Красной границе фотоэффекта соответствует длина волны $\lambda_{max} = hc/A$. Следовательно,

$$\lambda_{max} = \frac{\lambda hc}{hc - \lambda E_{k\,max}}, \quad \lambda_{max} = 5{,}8 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

923. На платиновую пластинку падает ультрафиолетовое излучение. Для прекращения фотоэффекта нужно приложить задерживающее напряжение $U_1 = 3{,}7$ В. Если платиновую пластинку заменить пластинкой из другого металла, то задерживающее напряжение нужно увеличить до $U_2 = 6{,}0$ В. Определить работу выхода электрона из этого металла. Работа выхода электрона из платины $A_1 = 6{,}3$ эВ (1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Решение. Пусть ν – частота падающего излучения. Тогда для платиновой пластинки, согласно уравнению Эйнштейна, имеем

$$h\nu = A_1 + m_e v_{max\,1}^2/2,$$

где $v_{max\,1}$ – максимальная скорость вылетающих электронов.

Чтобы задержать вылетающие электроны, необходимо приложить задерживающее напряжение U_1. Тогда

$$eU_1 = m_e v_{max\,1}^2/2,$$

где e – заряд электрона. Таким образом,

$$h\nu = A_1 + eU_1. \tag{1}$$

Аналогичное выражение запишем для пластинки из другого металла:

$$h\nu = A_2 + eU_2. \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) находим:

$$A_2 = A_1 - e(U_2 - U_1),\ A_2 = 6{,}4 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

924. Энергия фотона рентгеновского излучения $E = 0{,}3$ МэВ. Фотон был рассеян при соударении со свободным покоящимся электроном, в результате чего его длина волны увеличилась на $\Delta\lambda = 0{,}0025$ нм. Определить: энергию рассеянного фотона; угол, под которым вылетел электрон отдачи; кинетическую энергию электрона отдачи. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. Энергия покоя электрона $E_0 = m_e c^2 = 0{,}511$ МэВ (1 МэВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ Дж).

Решение. Увеличение длины волны рентгеновского излучения при его рассеянии на электронах (эффект Комптона) объясняется тем, что фотон, как и любая частица, обладает определенным импульсом и что акт рассеяния представляет собой упругое столкновение фотона с электроном, аналогичное соударению упругих шариков. При этом выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения энергии. Упруго соударяясь с электроном, фотон передает ему часть импульса и энергии. Энергия фотона определяется по формуле

$$E = h\nu = hc/\lambda, \quad (1)$$

где ν – частота; h – постоянная Планка; λ – длина волны. Отсюда видно, что уменьшение энергии фотона означает уменьшение частоты рентгеновского излучения и увеличение его длины волны.

Найдем энергию E' рассеянного фотона. Согласно формуле (1),

$$E' = h\nu' = hc/\lambda',$$

где $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ – длина волны рассеянного рентгеновского излучения; λ – длина волны падающего излучения: $\lambda = c/\nu = hc/E$. Следовательно,

$$E' = \frac{hc}{\lambda + \Delta\lambda} = \frac{hc}{hc/E + \Delta\lambda} = \frac{Ehc}{hc + E\Delta\lambda} = \frac{E}{1 + E\Delta\lambda/(hc)}. \quad (2)$$

Пусть $\vec{p}$ – импульс падающего фотона, $\vec{p}'$ – импульс рассеянного фотона, $\vec{p}_e$ – импульс электрона отдачи. На рис. 285, *а* изображена ситуация до столкновения, на рис. 285, *б* – после столкновения. Положительное направление оси OX совпадает с направлением вектора $\vec{p}$, начало координат – с точкой, где находился электрон в момент соударения с фотоном.

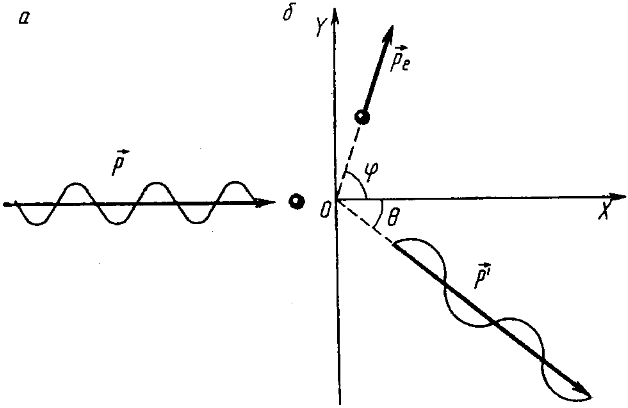


Рис. 285

Из закона сохранения импульса следует, что сумма проекций импульсов фотона и электрона на оси OX и OY до столкновения равна сумме проекций их импульсов на эти оси после столкновения:

$$p + 0 = p' \cos\theta + p_e \cos\varphi, \; p_e \sin\varphi - p' \sin\theta = 0,$$

или

$$p_e \cos\varphi = p - p' \cos\theta, \; p_e \sin\varphi = p' \sin\theta, \tag{3}$$

где φ – угол, под которым вылетел электрон отдачи; θ – угол рассеяния фотона.

Разделив почленно второе из уравнений (3) на первое, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{p/p' - \cos\theta}. \tag{4}$$

Модуль импульса падающего фотона

$$p = E/c, \tag{5}$$

где E – энергия фотона.

Аналогичным соотношением связаны также импульс p' и энергия E' рассеянного фотона:

$$p' = E'/c. \tag{6}$$

Разделив равенство (5) почленно на равенство (6), получим $p/p' = E/E'$, или, учитывая значение (2),

$$p/p' = (hc + E\Delta\lambda)/(hc). \tag{7}$$

На основании выражений (4) и (7) будем иметь

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\theta}{(hc + E\Delta\lambda)/(hc) - \cos\theta}. \tag{8}$$

Косинус угла рассеяния θ определим, воспользовавшись формулой Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta),$$

где λ_C комптоновская длина волны электрона. Отсюда

$$\cos\theta = 1 - \Delta\lambda/\lambda_C. \tag{9}$$

Тогда

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_C}\right)^2} = \frac{\sqrt{(2\lambda_C - \Delta\lambda)\Delta\lambda}}{\lambda_C}. \tag{10}$$

Подставив в выражение (8) вместо $\cos\theta$ и $\sin\theta$ их значения (9) и (10), после преобразований получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2\lambda_C/(\Delta\lambda) - 1}}{E\lambda_C/(hc) + 1}. \tag{11}$$

Так как $\lambda_C = h/(m_e c)$, то

$$\frac{E\lambda_C}{hc} = \frac{E}{m_e c^2} = \frac{E}{E_0}, \tag{12}$$

где $E_0 = m_e c^2$ – энергия покоя электрона.

Подставив значение отношения (12) в формулу (11), получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{2\lambda_C/(\Delta\lambda) - 1}}{E/E_0 + 1}. \tag{13}$$

На основании закона сохранения энергии кинетическая энергия электрона отдачи равна разности между энергией E падающего фотона и энергией E' рассеянного фотона:

$$E_k = E - E' = E - \frac{Ehc}{hc + E\Delta\lambda}.$$

После преобразований получим

$$E_k = \frac{E}{hc/(\Delta\lambda) + 1}. \qquad (14)$$

Теперь, подставив числовые значения величин в формулы (2), (13), (14), получим: $E = 0{,}2$ МэВ, $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}6$, $\varphi = 31°$, $E_k = 0{,}1$ МэВ.

Задачи для самостоятельного решения

925. Определить энергию и импульс фотона видимого света, длина волны которого $\lambda = 0{,}6$ мкм. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

926. В среде распространяется свет, имеющий длину волны $\lambda = 300$ нм и энергию фотона $E = 4{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж. Определить абсолютный показатель преломления среды. Скорость света в вакууме $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

927. Человеческий глаз может воспринимать световой поток мощностью $P = 2 \cdot 10^{-17}$ Вт. Найти число фотонов света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм, попадающих в глаз за время $t = 1$ с при указанной мощности. Скорость света в вакууме $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

928. Источник света излучает $N = 1 \cdot 10^{19}$ фотонов за время $t = 1$ с. Длина волны излучения $\lambda = 4{,}95 \cdot 10^{-5}$ см. Какую мощность потребляет этот источник, если в энергию света переходит $\eta = 0{,}1$ потребляемой энергии? Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

929. Некоторый металл освещается светом, длина волны которого $\lambda = 0{,}25$ мкм. Пренебрегая импульсом фотона, найти максимальный импульс, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона, если красная граница фотоэффекта для этого металла $\lambda_{max} = 0{,}28$ мкм. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

930. Фотоэлемент облучается монохроматическим желтым светом, длина волны которого $\lambda = 600$ нм. За некоторое время фотоэлемент поглотил энергию $W = 1 \cdot 10^{-5}$ Дж. Найти число поглощенных фотонов. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

931. Найти частоту света, вырывающего с поверхности металла электроны, которые полностью задерживаются напряжением $U_з = 3$ В. Фотоэффект у этого металла начинается при частоте падающего света $\nu_{min} = 6 \cdot 10^{14}$ Гц. Найти работу выхода электрона. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

932. Цезиевый катод фотоэлемента освещается монохроматическим светом, длина волны которого $\lambda = 600$ нм. Определить скорость вылетающих из катода фотоэлектронов, если красная граница фотоэффекта для цезия $\lambda_{max} = 650$ нм. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

933. Красная граница фотоэффекта для материала фотокатода $\lambda_{max} = 700$ нм. Фотокатод освещают монохроматическим светом с длиной волны λ_1, а затем – с длиной волны λ_2. При этом отношение максимальных скоростей вылетающих электронов $k = 3/4$. Определить λ_2, если $\lambda_1 = 600$ нм.

934. На рис. 286 приведен график зависимости максимальной кинетической энергии E_{km} электронов, вылетающих с поверхности бария при фотоэффекте, от частоты ν облучающего света. Используя график, рассчитать постоянную Планка и работу выхода электрона из бария.

935. Пучок ультрафиолетовых лучей с длиной волны $\lambda = 1 \cdot 10^{-7}$ м, падающий на металлическую поверхность, передает ей мощность $P = 1 \cdot 10^{-6}$ Вт. Определить силу возникшего фототока, если фотоэффект вызывает $\eta = 0{,}01$ падающих фотонов. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

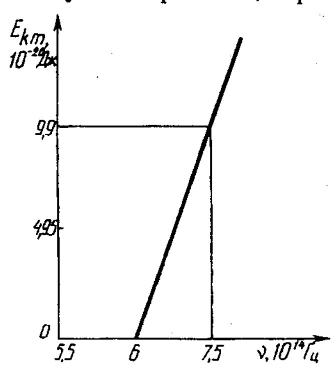


Рис. 286

936. На металлическую пластинку падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda_1 = 4{,}13 \cdot 10^{-7}$ м. Поток фотоэлектронов, вырываемых этим светом с поверхности металла, полностью задерживается разностью потенциалов $U = 1$ В. Определить работу выхода электрона из металла и длину волны света, соответствующую красной границе фотоэффекта. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с, масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Будет ли наблюдаться фотоэффект, если длина волны падающего света $\lambda_2 = 7 \cdot 10^{-7}$ м?

937. Пластинку, изготовленную из некоторого металла, освещают сначала одним светом, вызывающим фотоэффект, а затем другим, энергия фотона которого на $\Delta E = 3$ эВ больше энергии фотона первого света. На сколько изменилась при этом максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов?

938. При увеличении частоты падающего на металл света в $n_1 = 2$ раза задерживающее напряжение для фотоэлектронов увеличивается в $n_2 = 3$ раза. Частота первоначально падающего света $\nu = 1{,}2 \cdot 10^{15}$ Гц. Определить длину волны света, соответствующую красной границе фотоэффекта для этого металла. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с.

939. Металлический шарик, удаленный от других тел, облучается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 200$ нм. Шарик, теряя фотоэлектроны, заряжается до максимального потенциала $\varphi_{max} = 3$ В. Определить работу выхода электрона из металла. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

940. Фотон с длиной волны λ вырывает с поверхности металла фотоэлектрон, который попадает в однородное магнитное поле с индукцией B и описывает в нем окружность радиуса R. Найти работу выхода электрона из металла. Масса электрона m_e, его заряд e, постоянная Планка h, скорость света в вакууме c.

941. Фотон рентгеновского излучения с энергией $E = 0{,}45$ МэВ рассеялся на свободном электроне. Энергия рассеянного фотона $E' = 0{,}40$ МэВ. Определить угол рассеяния фотона и кинетическую энергию электрона отдачи. Энергия покоя электрона $E_0 = 0{,}511$ МэВ.

942. Рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 5$ пм рассеивается на свободных электронах под углом $\theta = 20°$. Найти импульс электрона отдачи. Комптоновская длина волны электрона $\lambda_C = 2{,}4$ пм, постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с.

943. В результате соударения со свободным электроном фотон отдает ему треть своей энергии. Угол рассеяния $\theta = 60°$. Определить энергию и импульс рассеянного фотона. Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с, комптоновская длина волны электрона $\lambda_C = 2{,}4$ пм.

18. АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

Методические указания к решению задач

При решении задач расчетного характера, связанных со строением атома и атомного ядра, используются в основном приведенные ниже формулы. Кроме того, применяются законы сохранения импульса, энергии, электрического заряда, а также закон взаимосвязи массы и энергии.

Основные законы и формулы

Первый постулат Бора: атомная система может находиться только в особых стационарных, или квантовых, состояниях, каждому из которых соответствует определенная энергия E_n; в стационарном состоянии атом не излучает.

Электроны в атоме могут двигаться вокруг ядра только по определенным круговым орбитам, радиусы которых устанавливаются следующим правилом квантования:

$$m_e v_n r_n = n\hbar,$$

где m_e – масса электрона; v_n – скорость электрона на n-й орбите; r_n – радиус n-й орбиты; $n = 1, 2, 3, \ldots$ – порядковый номер орбиты; $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с; h – постоянная Планка.

Второй постулат Бора: при переходе атома из одного стационарного состояния в другое испускается или поглощается квант электромагнитной энергии.

Энергия фотона равна разности энергий атома в двух его стационарных состояниях:

$$h\nu_{mn} = E_m - E_n,$$

где h – постоянная Планка; ν_{mn} – частота колебаний, соответствующая испускаемому (или поглощаемому) кванту излучения; m, n – номера стационарных состояний (или соответствующих этим состояниям электронных орбит); E_m, E_n – энергия атома в стационарных состояниях.

Энергия связи атомного ядра

$$E_{\text{св}} = c^2 \Delta m,$$

где c – скорость света в вакууме; Δm – дефект массы, т. е. разность между суммой масс протонов и нейтронов, образующих ядро, и массой ядра.

Дефект массы

$$\Delta m = Zm_{\text{p}} + Nm_{\text{n}} - m_{\text{я}}, \tag{1}$$

где Z – число протонов в ядре; N – число нейтронов: $N = A - Z$; m_{p}, m_{n} – массы свободных протона и нейтрона; $m_{\text{я}}$ – масса ядра.

Следовательно, энергия связи

$$E_{\text{св}} = (Zm_{\text{p}} + (A - Z)m_{\text{n}} - m_{\text{я}})c^2.$$

Обычно в таблицах масс изотопов даются массы нейтральных атомов, но не ядер. Поэтому формулу (1) целесообразно преобразовать так, чтобы в нее входила не масса ядра $m_{\text{я}}$, а масса m_{a} соответствующего нейтрального атома. Так как $m_{\text{я}} = m_{\text{a}} - Zm_{\text{e}}$, где m_{e} – масса электрона, то формулу (1) можно заменить следующей:

$$\Delta m = Zm_{\text{p}} + Nm_{\text{n}} - (m_{\text{a}} - Zm_{\text{e}}),$$

или

$$\Delta m = Z(m_{\text{p}} + m_{\text{e}}) + Nm_{\text{n}} - m_{\text{a}}.$$

Учитывая, что $m_{\text{p}} + m_{\text{e}} = m_{{}^1_1\text{H}}$, где $m_{{}^1_1\text{H}}$ – масса атома водорода, получаем

$$\Delta m = Zm_{{}^1_1\text{H}} + (A - Z)m_{\text{n}} - m_{\text{a}}.$$

Атомная единица массы (а.е.м) – масса, равная $1/12$ массы атома изотопа углерода ^{12}C:

$$1 \text{ а.е.м.} = 1{,}66053 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Электронвольт (эВ) – единица энергии, равная энергии, которую приобретает частица, обладающая элементарным электрическим зарядом (зарядом, равным заряду электрона), проходя разность потенциалов 1 В:

$$1 \text{ эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Энергетический эквивалент атомной единицы массы

$$(1\ \text{а.е.м.})c^2 = 931{,}5\ \text{МэВ}.$$

Энергия связи атомного ядра в мегаэлектронвольтах вычисляется по формуле

$$E_{\text{св}} = 931{,}5(Zm_{\text{р}} + (A - Z)m_{\text{п}} - m_{\text{я}}),$$

где массы протона $m_{\text{р}}$, нейтрона $m_{\text{п}}$ и ядра $m_{\text{я}}$ выражены в атомных единицах массы.

Закон радиоактивного распада:

$$N = N_0\, 2^{-t/T},$$

где N – число нераспавшихся радиоактивных ядер в момент времени t; N_0 – число нераспавшихся ядер в начальный момент времени (при $t_0 = 0$); T – период полураспада. Этот закон можно также записать в виде

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

где e – основание натуральных логарифмов; λ – постоянная радиоактивного распада для данного вида ядер. Постоянная распада связана с периодом полураспада соотношением $T = \ln 2/\lambda$.

Правила смещения при радиоактивных распадах:

при α-распаде ${}^{A}_{Z}X \to {}^{A-4}_{Z-2}Y + {}^{4}_{2}\text{He}$,

при β-распаде ${}^{A}_{Z}X \to {}_{Z+1}^{A}Y + {}^{0}_{-1}e$,

где X – символ материнского ядра; Y – символ дочернего ядра; ${}^{4}_{2}\text{He}$ – ядро гелия (α-частица); ${}^{0}_{-1}e$ – обозначение электрона (заряд его равен -1, а массовое число – нулю).

Энергия (энергетический выход) ядерной реакции

$$Q = c^2((m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)),$$

где m_1, m_2 – массы ядра-мишени и бомбардирующей частицы; $m_3 + m_4$ – сумма масс продуктов реакции (ядер и частиц); если $m_1 + m_2 > m_3 + m_4$, то энергия Q выделяется; если $m_1 + m_2 < m_3 + m_4$, – поглощается.

Примеры решения задач

944. Во время перехода электрона в атоме водорода с третьей стационарной орбиты на вторую атом излучает фотон, энергия которого соответствует длине волны $\lambda = 652$ нм (красная линия спектра). На сколько уменьшается при этом энергия атома водорода?

Р е ш е н и е. Согласно второму постулату Бора, энергия фотона равна разности энергий E_3 и E_2 стационарных состояний:

$$h\nu = \Delta E,$$

где h – постоянная Планка; ν – частота: $\nu = c/\lambda$; c – скорость света в вакууме; λ – длина волны; $\Delta E = E_3 - E_2$.

Таким образом, $\Delta E = hc/\lambda$. Подставив в эту формулу числовые значения длины волны λ, постоянной Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с и скорости $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, найдем $\Delta E = 3 \cdot 10^{-19}$ Дж.

945. Пользуясь теорией Бора, найти радиус n-й электронной орбиты в атоме водорода, скорость и ускорение электрона на этой орбите.

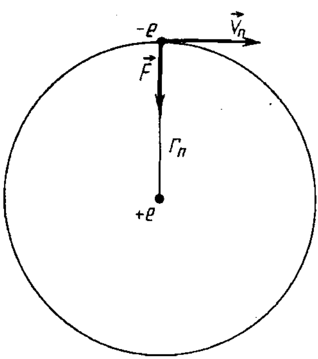
Р е ш е н и е. Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода вращается вокруг ядра, совершая равномерное движение по круговой орбите в соответствии с законами Ньютона. При этом сила $\vec{F}$ взаимодействия электрических зарядов ядра и электрона (рис. 287) сообщает электрону центростремительное ускорение

$$a_n = v_n^2 / r_n, \tag{1}$$

где v_n – скорость электрона на n-й орбите; r_n – радиус этой орбиты.

По закону Кулона сила взаимодействия электрона с ядром

$$F = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}. \tag{2}$$



Р и с. 287

Согласно второму закону Ньютона, $F = m_e a_n$, или с учетом формул (1) и (2)

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = \frac{m_e v_n^2}{r_n}, \tag{3}$$

где m_e – масса электрона.

Согласно теории Бора, из всех возможных орбит разрешенными являются только те, для которых выполняется правило квантования

$$m_e v_n r_n = n\hbar, \qquad (4)$$

где $n = 1, 2, 3, ...$; $\hbar = h/(2\pi)$; h – постоянная Планка.

Решив совместно уравнения (3) и (4) относительно r_n и v_n, найдем радиус n-й электронной орбиты и скорость электрона на ней:

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2}, \qquad (5)$$

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}. \qquad (6)$$

Подставив в выражение (1) значения (5) и (6), получим

$$a_n = \frac{m_e e^6}{64\pi^3 \varepsilon_0^3 n^3 \hbar^4}.$$

946. Найти напряженность электрического поля на четвертой электронной орбите в атоме водорода.

Решение. Согласно теории Бора, радиус n-й орбиты в атоме водорода, как показано в решении предыдущей задачи,

$$r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2 \hbar^2}{m_e e^2}, \qquad (1)$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная; $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг – масса электрона; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд электрона.

Напряженность электрического поля на n-й орбите

$$E_n = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2}.$$

Подставив это значение в формулу (1), получим

$$E_n = \frac{m_e^2 e^5}{64\pi^3 \varepsilon_0^3 n^4 \hbar^4}. \qquad (2)$$

Подставив в формулу (2) числовые значения величин и произведя вычисления, найдем напряженность электрического поля на четвертой ($n = 4$) орбите: $E_4 = 2 \cdot 10^9$ В/м.

947. Найти число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов магния: ${}^{24}_{12}\mathrm{Mg}$, ${}^{25}_{12}\mathrm{Mg}$, ${}^{26}_{12}\mathrm{Mg}$.

Р е ш е н и е. Обычно нейтральный атом и его ядро обозначают одним и тем же символом

$$ {}_{Z}^{A}X, \tag{1} $$

где X – обозначение элемента: Z – число протонов в ядре (порядковый номер элемента в периодической системе Д. И. Менделеева); A – массовое число (сумма числа протонов и нейтронов в ядре, равная округленной до ближайшего целого числа массе атома, выраженной в а.е.м.).

Число нейтронов в ядре

$$ N = A - Z. \tag{2} $$

На основании формул (1) и (2) находим, что ядро ${}_{12}^{24}\mathrm{Mg}$ содержит 12 протонов и 24 – 12 = 12 нейтронов, ядро ${}_{12}^{25}\mathrm{Mg}$ – 12 протонов и 25 – 12 = 13 нейтронов и ядро ${}_{12}^{26}\mathrm{Mg}$ – 12 протонов и 26 – 12 = 14 нейтронов.

948. Найти энергию связи ядра лития ${}_{3}^{7}\mathrm{Li}$. Масса атома ${}_{3}^{7}\mathrm{Li}$ m_a = 7,01601 а.е.м., массы атома водорода ${}_{1}^{1}\mathrm{H}$ и нейтрона – соответственно $m_{{}_{1}^{1}\mathrm{H}}$ = 1,00783 а.е.м. и m_n = = 1,00867 а.е.м.

Р е ш е н и е. Энергия связи атомного ядра определяется по формуле

$$ E_{св} = c^2 \Delta m, $$

где Δm – дефект массы: $\Delta m = Zm_{{}_{1}^{1}\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m_a$.

Так как энергетический эквивалент атомной единицы массы равен 931,5 МэВ, то выраженная в мегаэлектронвольтах энергия связи ядра

$$ E_{св} = 931{,}5\Delta m = 931{,}5\left(Zm_{{}_{1}^{1}\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m_a\right), \tag{1} $$

где $m_{{}_{1}^{1}\mathrm{H}}$, m_n выражены в а.е.м.

Для ядра ${}_{3}^{7}\mathrm{Li}$ имеем: $A = 7$, $Z = 3$. Подставив числовые значения величин в формулу (1), получим $E_{св}$ = 39,26 МэВ.

949. Какое количество α- и β-распадов содержится в цепочке превращений урана ${}_{92}^{235}\mathrm{U}$ в свинец ${}_{82}^{207}\mathrm{Pb}$?

Р е ш е н и е. При α-распаде зарядовое число Z уменьшается на 2, а массовое число A – на 4. Символически это можно записать так:

$$ {}_{Z}^{A}X \to {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_{2}^{4}\mathrm{He}, $$

где ${}_{2}^{4}\mathrm{He}$ – обозначение α-частицы.

При β-распаде зарядовое число увеличивается на единицу, а массовое число не изменяется:

$$ {}_{Z}^{A}X \to {}_{Z+1}^{A}Y + {}_{-1}^{0}e, $$

где ${}_{-1}^{0}e$ – обозначение электрона.

Так как массовое число изменяется только при α-распаде, то при превращении ${}_{92}^{235}\mathrm{U}$ в ${}_{82}^{207}\mathrm{Pb}$ количество α-распадов

$$ N_{\alpha} = \frac{235 - 207}{4} = 7. $$

В результате семи α-распадов зарядовое число уменьшается на $2 \cdot 7 = 14$, а после N_{β} распадов оно увеличивается на N_{β}. Следовательно,

$$ 92 - 14 + N_{\beta} = 82, $$

откуда находим количество β-распадов: $N_{\beta} = 4$.

950. Определить, сколько атомов распадается в $m = 1$ мг радиоактивного изотопа цезия ${}_{55}^{137}\mathrm{Cs}$ в течение промежутка времени $t = 20$ дней. Период полураспада цезия $T = 30$ дней.

Р е ш е н и е. За время t распадается количество атомов

$$ \Delta N = N_0 - N, \tag{1} $$

где N_0 – число нераспавшихся атомов в начальный момент времени $t_0 = 0$; N – число нераспавшихся атомов через промежуток времени t. Согласно закону радиоактивного распада,

$$ N = N_0 \cdot 2^{-t/T}. \tag{2} $$

Первоначальное число атомов

$$ N_0 = \frac{m}{M} N_{\mathrm{A}}, \tag{3} $$

где m — масса изотопа; M — его молярная масса: $M = 137 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; N_A — постоянная Авогадро.

Подставив выражения (2) и (3) в (1), получим:

$$\Delta N = N_0(1 - 2^{-t/T}) = \frac{m}{M} N_A (1 - 2^{-t/T}), \ \Delta N = 2 \cdot 10^{19}.$$

951. Найти энергию ядерной реакции

$${}^9_4\text{Be} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^{10}_5\text{B} + {}^1_0 n.$$

Массы ядер ${}^9_4\text{Be}$, ${}^2_1\text{H}$, ${}^{10}_5\text{B}$ равны соответственно 9,01219 а.е.м., 2,01410 и 10,01294 а.е.м, масса нейтрона $m_n = 1{,}00867$ а.е.м.

Решение. Энергия ядерной реакции, выраженная в мегаэлектронвольтах,

$$Q = 931{,}5((m_{Be} + m_H) - (m_B + m_n)),$$

т. е. из суммы масс частиц до реакции вычитается сумма масс частиц после реакции и результат умножается на энергетический эквивалент атомной единицы массы. Подставив в это соотношение числовые значения, найдем $Q = 4{,}359$ МэВ. Получили $Q > 0$. Следовательно, энергия выделяется.

952. Вычислить КПД двигателей атомного ледокола, если мощность их $P = 3{,}2 \cdot 10^4$ кВт, а атомный реактор расходует $m = 200$ г урана-235 в сутки. Вследствие деления одного ядра атома урана выделяется энергия $E_0 = 200$ МэВ.

Решение. КПД двигателя

$$\eta = \frac{P}{P_п} \cdot 100\%, \tag{1}$$

где $P_п$ — полная мощность:

$$P_п = E/t; \tag{2}$$

E — энергия, выделяющаяся при делении урана, масса которого m, за время t. Число атомов, содержащихся в этом уране,

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

где M — молярная масса урана; N_A — постоянная Авогадро. Тогда

$$E = E_0 \frac{m}{M} N_A. \tag{3}$$

Из формул (1)–(3) следует, что

$$\eta = \frac{PMt}{E_0 m N_A} \cdot 100\,\%.$$

Подставим в последнюю формулу числовые значения, выраженные в СИ: $P_1 = 3{,}2 \cdot 10^4 \cdot 10^3$ Вт; $M = 235 \cdot 10^{-3}$ кг/моль; $t = 1$ сут $= 24$ ч $= 24 \cdot 3600$ с $= 86\,400$ с; $E_0 = 200 \cdot 10^6 \times \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж; $m = 200 \cdot 10^{-3}$ кг; $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. После вычислений получим $\eta = 17\%$.

953. Протон, летящий горизонтально со скоростью $v = 4{,}6 \cdot 10^6$ м/с, сталкивается с неподвижным свободным атомом гелия. После удара протон отскакивает назад со скоростью $v_1 = v/2$, а атом переходит в возбужденное состояние. Вычислить длину волны света, который излучает атом гелия, возвращаясь в первоначальное состояние.

Решение. Возвращаясь в первоначальное состояние, атом излучает фотон, энергия которого $E = W$, где W – энергия возбуждения, т. е. энергия, которую получил атом при переходе в возбужденное состояние.

Энергия фотона $E = h\nu = hc/\lambda$, где h – постоянная Планка; ν – частота света; c – скорость света в вакууме; λ – длина волны. Следовательно, $hc/\lambda = W$, откуда длина волны излучаемого света

$$\lambda = hc/W. \tag{1}$$

Чтобы найти энергию возбуждения W, составим уравнения на основании законов сохранения импульса и сохранения энергии:

$$m_1 v = -m_1 v/2 + m_2 v_2, \tag{2}$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1}{2}\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{m_2 v_2^2}{2} + W, \tag{3}$$

где m_1 – масса протона; m_2 – масса атома гелия; v_2 – скорость атома гелия после соударения.

Решив совместно уравнения (2) и (3) относительно W, найдем

$$W = \frac{3}{8} m_1 v^2 \left(1 - \frac{3m_1}{m_2}\right). \tag{4}$$

Подставив в выражение (1) значение W, полученное по формуле (4), найдем

$$\lambda = \frac{8hc}{3m_1 v^2 (1 - 3m_1/m_2)}. \qquad (5)$$

Масса протона m_1 = 1 а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг, масса атома гелия m_2 = 4 а.е.м. = $6{,}64 \cdot 10^{-27}$, постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Подставив эти значения и значение скорости v в формулу (5), найдем $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м.

954. В ядро кислорода $^{16}_{8}\mathrm{O}$ ударяет α-частица $\left(^{4}_{2}\mathrm{He}\right)$ и застревает в нем, выбивая нейтрон $\left(^{1}_{0}n\right)$. Написать реакцию.

Р е ш е н и е. Пусть $^{A}_{Z}X$ — ядро, образовавшееся в результате реакции. Тогда ядерную реакцию запишем так:

$$^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{1}_{0}n + {}^{A}_{Z}X.$$

Учитывая, что в ядерной реакции сохраняется электрический заряд, т. е. сумма зарядов частиц и ядер, вступающих в реакцию, равна сумме зарядов образующихся частиц и ядер, составим равенство $8 + 2 = 0 + Z$, откуда $Z = 10$.

В ядерной реакции сохраняется полное число нуклонов, т. е. суммы массовых чисел частиц и ядер до и после реакции должны равняться друг другу. Поэтому $16 + 4 = 1 + A$, откуда $A = 19$.

По таблице Менделеева находим, что элемент, у которого ядро атома содержит 10 протонов, — это неон. Таким образом, ядерную реакцию можно окончательно записать так:

$$^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{1}_{0}n + {}^{19}_{10}\mathrm{Ne}.$$

Задачи для самостоятельного решения

955. Определить плотность ядерного вещества, считая радиус ядра атома $R = R_0\sqrt[3]{A}$, где $R_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-15}$ м, A — массовое число. Масса нуклона $m_0 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. Какова была бы масса тела объемом $V = 1{,}0$ см^3, если бы оно состояло из одних ядер?

956. В опытах Резерфорда α-частицы в момент попадания на тонкую золотую фольгу имели скорость $v = 2 \cdot 10^7$ м/с. Полагая вектор скорости α-частицы совпадающим с прямой, соединяющей частицу и ядро атома золота (лобовое соударение), найти расстояние максимального приближения α-частицы к ядру атома золота. Молярная масса гелия $M = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, элементарный заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, заряд ядра золота $q = 79e$, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

957. Резерфорд наблюдал, что при лобовом соударении с неподвижными ядрами атомов меди α-частиц с энергией $E_0 = 5{,}0$ МэВ последние отлетают назад с энергией $E = 3{,}9$ МэВ. Вычислить по этим данным отношение масс ядра атома меди и α-частицы. Взаимным отталкиванием зарядов пренебречь.

958. Какова скорость α-частицы с кинетической энергией $E_k = 7{,}68$ МэВ? Масса α-частицы $m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг.

959. Пучок однократно ионизированных изотопов магния ^{24}Mg и ^{25}Mg влетает в однородное магнитное поле. Определить радиус R_1 окружности, по которой движутся легкие изотопы, если для тяжелых изотопов он равен R_2. Скорость всех ионов в пучке считать одинаковой.

960. Атом водорода состоит из ядра, вокруг которого вращается единственный электрон. С какой частотой вращается электрон вокруг ядра, если его орбита — окружность радиуса $r = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ м? Масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

961. Атом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое испускает последовательно два кванта, длины волн которых $\lambda_1 = 4051$ нм и $\lambda_2 = 97{,}25$ нм. Определить изменение энергии атома водорода. Постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с.

962. На каком расстоянии от центра ядра находится электрон в атоме водорода, если скорость его движения по орбите $v = 2{,}2 \cdot 10^6$ м/с? Какова напряженность поля, создаваемого ядром в точках орбиты? Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, масса электрона $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

963. Радиус первой орбиты электрона в атоме водорода $r_1 = 5{,}3 \cdot 10^{-11}$ м. Найти напряженность электрического поля ядра на этом расстоянии и кинетическую энергию электрона на первой орбите. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

964. Во сколько раз линейная скорость электрона на первой орбите в атоме водорода больше скорости v пассажирского самолета Ту-134, равной 850 км/ч? Постоянная Планка $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

965. Цинковую пластину освещают монохроматическим светом, длина волны которого соответствует переходу электрона в атоме водорода с уровня с энергией $W_1 = -0{,}38$ эВ на уровень с энергией $W_2 = -13{,}6$ эВ. Определить, на какое максимальное расстояние от пластинки может удалиться фотоэлектрон, если вне ее имеется задерживающее однородное электрическое поле напряженностью $E = 10$ В/см. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, работа выхода электрона из цинка $A = 6{,}4 \cdot 10^{-19}$ Дж.

966. На основании теории Бора найти отношение потенциальной энергии E_p электрона к его кинетической энергии E_k в атоме водорода.

967. Найти число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер: а) $^{27}_{13}\mathrm{Al}$; б) $^{207}_{82}\mathrm{Pb}$; в) $^{235}_{92}\mathrm{U}$.

968. Определить энергию связи ядра урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$. Масса ядра $^{235}_{92}\mathrm{U}$ $m_я = 234{,}99331$ а.е.м., масса протона $m_p = 1{,}00728$ а.е.м., масса нейтрона $m_n = 1{,}00867$ а.е.м., 1 а.е.м. $= 1{,}66053 \cdot 10^{-27}$ кг. Скорость света в вакууме $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с.

969. Масса m_1 ядра $^{16}_{8}\mathrm{O}$ равна 16,00 а.е.м. Определить его дефект массы и энергию связи, если известно, что масса m_2 ядра $^{4}_{2}\mathrm{He}$ равна 4,00 а.е.м., а его дефект массы $\Delta m_2 = 0{,}03$ а.е.м. Скорость света в вакууме $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ м/с.

970. Найти энергию связи, приходящуюся на один нуклон в ядре атома кислорода $^{16}_{8}\mathrm{O}$. Масса атома кислорода $m_a = 15{,}99491$ а.е.м., масса атома водорода $m_{^1_1\mathrm{H}} = 1{,}00783$ а.е.м., масса нейтрона $m_n = 1{,}00867$ а.е.м.

971. Определить энергию, которая выделяется при делении одного ядра урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$, если при делении всех ядер, содержащихся в уране массой $m = 1{,}0$ г, выделяется энергия $E = 8{,}2 \cdot 10^{10}$ Дж. Постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

972. Определить электрическую мощность атомной электростанции, расходующей в сутки ($t = 24$ ч) $m = 220$ г урана

$^{235}_{92}U$ и имеющей КПД $\eta = 25\%$, если известно, что при делении одного ядра урана выделяется энергия $E_0 = 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж. Постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

973. При делении одного ядра урана $^{235}_{92}U$ выделяется энергия $E_0 = 200$ МэВ. За какой промежуток времени масса урана в реакторе уменьшится на $\alpha = 0{,}02$ первоначальной массы $m = 10$ кг? Мощность P реактора постоянна и равна 1,0 МВт, постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

974. В периодической системе элементов Менделеева рядом расположены три элемента. Условно назовем их a, b и c. Радиоактивный изотоп элемента a превращается в элемент b, а тот в свою очередь – в элемент c. Последний превращается в изотоп исходного элемента. Какими процессами обусловлены переходы $a \to b$, $b \to c$, $c \to a$?

975. Период полураспада одного из радиоактивных изотопов йода $T = 8{,}1$ сут. Через какое время число атомов этого вещества окажется в $n = 100$ раз меньшим по сравнению с их начальным числом?

976. Определить период полураспада радона, если за время $t = 1$ сут из $N_0 = 1 \cdot 10^6$ атомов распадается $N = 175 \cdot 10^3$ атомов.

977. Азот облучается в течение $\tau = 1{,}0$ ч пучком α-частиц $\left(^4_2He\right)$, ускоренных в циклотроне. Найти количество атомов образовавшегося изотопа $^{17}_{8}O$, если сила тока в пучке $I = 200$ мкА и ядерную реакцию $^{14}_{7}N + ^4_2He = ^{17}_{8}O + ^1_1H$ вызывает одна α-частица из каждых $n = 1{,}0 \cdot 10^5$ частиц в пучке. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

978. В реакции взаимодействия алюминия $^{27}_{13}Al$ с углеродом $^{12}_{6}C$ образуются α-частица, нейтрон и ядро некоторого изотопа. Определить количество нейтронов в этом ядре.

979. При взаимодействии ядра изотопа лития ^7_3Li и протона образуются две одинаковые частицы и выделяется энергия $E_0 = 17{,}3$ МэВ. Определить частицу и энергию, которая выделится, если с протонами прореагируют ядра, содержащиеся в $m = 1{,}0$ г изотопа лития. Постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

980. При взаимодействии ядер алюминия $^{27}_{13}Al$ с X-частицами образуются ядра изотопа магния $^{27}_{12}Mg$ и $_1Y$-частица. При взаимодействии же ${}_1Y$-частиц с ядрами алюминия ${}^{27}_{13}Al$ образуются ядра изотопа магния ${}^{24}_{12}Mg$ и Z-частицы. Какие широко известные частицы X, Y и Z участвуют в этих ядерных реакциях?

981. Записать следующие ядерные реакции: а) захват нейтрона протоном с испусканием γ-кванта; б) расщепление γ-квантом ядра ${}^{9}_{4}Be$ с образованием двух α-частиц.

982. Вычислить энергию ядерных реакций:

$${}^{6}_{3}Li + {}^{2}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{4}_{2}He, \quad {}^{14}_{7}N + {}^{4}_{2}He \rightarrow {}^{1}_{1}H + {}^{17}_{8}O.$$

Массы ядер ${}^{6}_{3}Li$, ${}^{2}_{1}H$, ${}^{4}_{2}He$, ${}^{14}_{7}N$, ${}^{1}_{1}H$, ${}^{17}_{8}O$ равны соответственно 6,01513; 2,01410; 4,00260; 14,00324; 1,00782 и 16,99913 а.е.м.

ОТВЕТЫ

1. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ

27. $d = vt\sin\alpha = 35$ м. **28.** $v = 5$ м/с, $y = -0{,}5 + 0{,}8x$.

29. $v_2 = v_1 + 2v = 19$ км/ч, $v_2' = v_1 + v = 17$ км/ч.

30. $v_1 = \frac{L}{t} + \sqrt{\left(\frac{L}{t}\right)^2 + v^2} = 14$ м/с.

31. $v_1 = \frac{s}{\sqrt{t_1 t_2}} = 5{,}0$ м/с, $v_2 = \frac{s}{t_2} = 2{,}5$ м/с.

32. $t = \frac{L + l}{v} = 1{,}2 \cdot 10^2$ с.

33. На расстоянии 200 м от местонахождения автомобиля в начальный момент времени (см. рис. 288); $t = \frac{l}{v_1 + v_2} = 20$ с; не изменится.

34. $t_3 = \frac{2t_1 t_2}{t_2 - t_1} = 30$ мин.

35. $\tau = \frac{s}{v_1 - v_2} = 4$ ч, $s_1 = \frac{sv_1}{v_1 - v_2} = 2{,}0 \cdot 10^2$ км.

36. $v_1 = \frac{v}{\operatorname{tg}\alpha} = 8{,}7$ м/с. **37.** $l = l_0 - \frac{v_0^2}{2a} = 1 \cdot 10^2$ м. **38.** $t = \frac{t_1^2 + t_2^2}{2t_2}$.

39. $t_2 = \left(2 + \sqrt{2}\right)t_1 = 102$ мин.

40. $a = \frac{l_2 - l_1}{\tau^2} = 0{,}63$ м/с^2, $v_0 = \frac{3l_1 - l_2}{2\tau} = 3{,}8$ м/с.

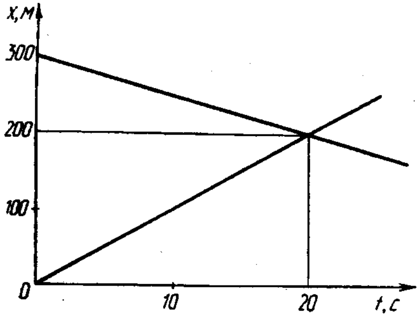
41. $H = \frac{g}{2}\left(\frac{l}{g\tau} + \frac{\tau}{2}\right)^2 = 2{,}3 \cdot 10^2$ м. **42.** $h = 6gt^2 = 2{,}1 \cdot 10^2$ км.

43. $v_0 = \frac{l_1 t_2^2 - l_2 t_1^2}{t_1 t_2^2 - t_2 t_1^2} = 10$ м/с. **44.** $v_1 = \frac{v}{\sqrt{2}} = 10$ м/с.

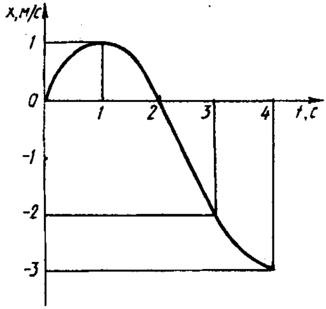
45. $v_0 = \frac{4s - 18s_5}{t} = 0{,}6$ м/с. **46.** $\frac{l_2}{l_3} = 3$.

47. $l = \frac{8v_1^2 v_2^2}{a(v_1 + v_2)^2} = 3{,}8$ км. **48.** $t_2 = \frac{at_1}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{g}{a}}\right) = 4$ с.

49. $v_{ср} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3} = 40$ км/ч.



Р и с. 288



Р и с. 289

50. $v_{\max} = \dfrac{2s}{2s/v_{\text{ср}} - t_1 - t_2} = 58$ км/ч. **51.** $v = \sqrt{2al} = 89$ м/с.

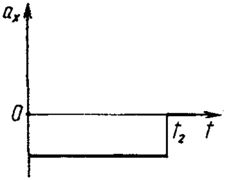
52. $\Delta t = \tau - \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 0{,}37$ с.

53. Решив уравнение $\tau = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} + \dfrac{h}{v}$, получим $h = 150$ м.

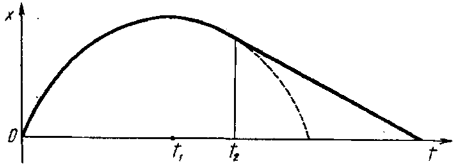
54. $t = \sqrt{\dfrac{l}{a\cos\alpha}} = 2$ с. **55.** $\tau = \sqrt{t^2 + \dfrac{2l}{g}} - t = 1$ с.

56. $h_1 = \dfrac{h}{9} = 30$ м, $h_2 = \dfrac{3h}{9} = 90$ м, $h_3 = \dfrac{5h}{9} = 150$ м.

57. См. рис. 289. **58.** См. рис. 290 и 291.



Р и с. 290



Р и с. 291

59. $l = \dfrac{v_0^2}{g} - v_0 t_1 + \dfrac{g t_1^2}{2} = 41$ м. **60.** См. рис. 292.

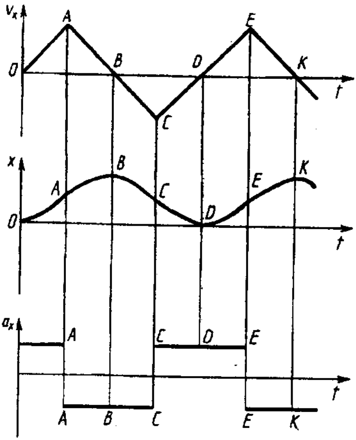
61. $t_1 = \dfrac{v_0}{g} + \dfrac{\tau}{2} = 6$ с, $h = \dfrac{v_0^2}{2g} - \dfrac{g\tau^2}{2} = 1{,}2 \cdot 10^2$ м. **62.** $l = \sqrt{2}\, v_0 \tau$.

63. $v_h = \sqrt{v_0^2 + 2g(H-h)} = 17$ м/с, $v = \sqrt{v_0^2 + 2gH} = 22$ м/с.

64. $n_2 = 1 + (n_1 - 1)\dfrac{t_2}{t_1} = 11$. **65.** $l = \dfrac{1}{2} g(t_2^2 - t_1^2) = 15$ м.

66. $v_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{g(8h + g\tau^2)} = 40$ м/с.

67. $v_0 = \dfrac{g\tau}{2} = 50$ м/с, $H = g\tau^2/8 = 1{,}3 \cdot 10^2$ м.



Р и с. 292

68. $t = \dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}{g}$, $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$.

69. $\alpha = \dfrac{(v_1 - v_2)t}{l} = 1$ рад. **70.** $v_0 = h\sqrt{\dfrac{g}{2H}} = 7$ м/с.

71. $v_1 = v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 25$ м/с. **72.** $v = \sqrt{v_0^2 + 2g(H - h)} = 25$ м/с.

73. $v_0 = s\sqrt{\dfrac{g}{2H}} = 10$ м/с, $v_к = \sqrt{v_0^2 + 2gH} = 14$ м/с.

74. $\dfrac{H_1}{H_2} = \operatorname{tg}^2 \alpha$. **75.** $H = \dfrac{g\tau^2}{8} = 5$ м.

76. $t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha - \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh}}{g} = 0{,}3$ с,

$t_2 = \dfrac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gh}}{g} = 0{,}8$ с.

77. $h = \dfrac{v_0^2}{2g}(\operatorname{tg}^2\alpha_0 - \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha_0 = 6{,}7$ м.

78. $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. **79.** $h_{\min} = l\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gl^2}{2v^2\cos^2\alpha} = 0{,}3$ м.

80. $s = 8h\sin\alpha = 8$ м. **81.** $s = t\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)} = 46$ м.
82. Уравнение траектории $x^2 + y^2 = R^2$. Это уравнение окружности радиуса R. Модуль ускорения $a = \omega^2 R$, направлено оно по радиусу к центру окружности; ω – угловая скорость.

83. В 2 раза. **84.** $v_1 = 2v = 40$ км/ч. **85.** $R = \dfrac{lv_1}{v_1 - v_2} = 1{,}8$ м.

86. $n = \dfrac{v}{\pi d} = 1 \cdot 10^2\ \text{с}^{-1}$. **87.** $v = 2\pi n l - \dfrac{a}{2\pi n} = 6\ \text{м/с}$.

2. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ

116. $F = \dfrac{m(v_1 - v_2)}{\tau} = 2{,}8 \cdot 10^4\ \text{Н}$.

117. $v = \dfrac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu m g}{m} t = 39\ \text{м/с}$, $s = \dfrac{vt}{2} = 2{,}0 \cdot 10^2\ \text{м}$.

118. $a = \dfrac{F}{m_1 + m_2} - \mu g = 4\ \text{м/с}^2$, $T = \dfrac{m_1 F}{m_1 + m_2} = 3\ \text{Н}$.

119. $a = \dfrac{F}{m}\left(\cos\alpha_2 - \dfrac{mg - F\sin\alpha_2}{mg - F\sin\alpha_1}\cos\alpha_1\right) = 0{,}82\ \text{м/с}^2$.

120. $s = \dfrac{F(F - \mu m g)t^2}{2\mu m^2 g}$, $F > \mu m g$. **121.** $F = m\sqrt{a^2 - g^2} = 7\ \text{Н}$.

122. $a_1 = 2g\dfrac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2} = 2{,}8\ \text{м/с}^2$, $a_2 = g\dfrac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2} = 1{,}4\ \text{м/с}^2$,

$T_1 = \dfrac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2} = 1{,}3\ \text{Н}$, $T_2 = \dfrac{6m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2} = 2{,}6\ \text{Н}$.

123. $t = \sqrt{\dfrac{h(m_1 + m_2)}{g(m_1 - m_2)}} = 1{,}4\ \text{с}$.

124. $a = \dfrac{g m_2}{m_1 + m_2} = 2{,}5\ \text{м/с}^2$, $T = \dfrac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 7{,}5\ \text{Н}$.

125. $T_1 = F - T = 70\ \text{Н}$.

126. $F = \dfrac{ES\Delta l}{l} = 2{,}16 \cdot 10^4\ \text{Н}$, $F_{\min} = \sigma_{\text{пр}} S = 7{,}85 \cdot 10^4\ \text{Н}$.

127. $t = \dfrac{F\tau}{mg}\left(1 + \sqrt{\dfrac{F}{F - mg}}\right)$.

128. $F = m\left(\dfrac{v^2 - v_0^2}{2s} + g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\right)$.

129. $m = 2\left(M - \dfrac{F_A}{g}\right) = 2 \cdot 10^2\ \text{кг}$.

130. $a = \dfrac{g(m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m_2)}{m_1 + m_2} = 1\ \text{м/с}^2$.

131. $m_1 = 3m_2$. **132.** $\mu = \dfrac{m_2}{m_1} - \dfrac{2s(m_1 + m_2)}{m_1 g t^2} = 0{,}2$.

133. $g = \dfrac{a(m_1 + m_2)}{m_2 - m_1} = 9{,}8\ \text{м/с}^2$. **134.** $m_1 = \dfrac{4ms}{gt^2 - 2s} = 10\ \text{г}$.

135. $F = \dfrac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 1 \cdot 10^1\ \text{Н}$. **136.** $\dfrac{F_1}{F_2} = \dfrac{1 + \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mu\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 1{,}1$.

137. $T = \dfrac{m(g+a)}{2\cos(\alpha/2)}$. **138.** $F = \rho S v^2 = 3 \cdot 10^1$ Н.

139. $F = m\left(g + \dfrac{2\sqrt{2gh}}{t}\right) = 2{,}2$ Н. **140.** $F_с = F - \dfrac{mv^2}{2l} = 2 \cdot 10^3$ Н.

141. $l = \dfrac{v^2}{2\mu g} = 51$ м. **142.** $v_2 = \dfrac{a_0 v_1}{a_0 - a_1} = 90$ км/ч.

143. $F_{\min} = \dfrac{\mu m g}{\sqrt{\mu^2 + 1}} = 1{,}5 \cdot 10^2$ Н. **144.** $F_{тр} = kt\cos\alpha = 6$ Н.

145. $T = \dfrac{F_1 + 2F_2}{3} = 80$ Н.

146. $F_{тр} = mg\sin\alpha$ при $\operatorname{tg}\alpha < \mu$, $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$ при $\operatorname{tg}\alpha > \mu$.

147. $\alpha = \arcsin\dfrac{a_1 + a_2}{2g} = 11°$; здесь $a_1 = 3$ м/с^2, $a_2 = 0{,}8$ м/с^2 находим из графика.

148. $\mu = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}2$. **149.** $h = \dfrac{v_0^2 \operatorname{tg}\alpha}{2g(\operatorname{tg}\alpha - \mu)}$.

150. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{v^2}{gR} = 45°$. **151.** $v = \sqrt{\dfrac{(n-1)gR}{n}} = 20$ м/с.

152. $v > \sqrt{(n-1)gR}$. **153.** $T = \sqrt{\dfrac{3\pi}{\rho G}} = 1 \cdot 10^2$ мин.

154. $R = \dfrac{v^2}{\mu g} = 51$ м. **155.** $F_в = 3mg = 1{,}2 \cdot 10^2$ Н.

156. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{l\cos\alpha}} = 5$ рад/с, $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} = 2$ Н.

157. $g_Л = \dfrac{4\pi^2 l\cos\alpha}{T^2} = 9{,}8$ м/с^2. **158.** $R = \dfrac{mv^2}{\sqrt{P^2 - m^2g^2}} = 4 \cdot 10^2$ м.

159. $v = \sqrt{R\left(\dfrac{F}{m} - g\right)} = 1{,}4 \cdot 10^2$ м/с.

160. $g = g_З \dfrac{n_1^2}{n_2} = 1{,}7$ м/с^2, $\dfrac{v_{0З}}{v_{0Л}} = \dfrac{\sqrt{n_2}}{n_1} = 2{,}4$.

161. $|\Delta\vec{p}| = \sqrt{2}mv = 14$ кг·м/с. **162.** $\alpha = \arccos 0{,}5 = 60°$.

163. $T = mg\left(1 + \dfrac{L^2}{2l(H-l)}\right) = 9$ Н. **164.** $T = 3mg$.

165. $T = 3mg\sin\alpha = 1{,}5$ Н, $T_{\max} = 3mg = 2{,}9$ Н.

166. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{v^2}{gR}$. **167.** $\mu = \dfrac{4\pi^2 n^2 r}{g} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$.

168. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R\cos\alpha}} = 5$ рад/с (здесь $\alpha = 60°$).

169. $T = \sqrt{\dfrac{6\pi}{\rho G}} = 9{,}7 \cdot 10^3$ с. **170.** $M = \dfrac{Rv^2}{G} = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ кг.

171. $\rho = \dfrac{3rv^2}{4\pi G R^3} = 5 \cdot 10^2$ кг/м^3. **172.** $r = g_0 R^2 \left(\dfrac{1}{v_1^2} - \dfrac{1}{v_2^2} \right)$.

173. $F = \dfrac{(n^2 - 1)GmM}{R^2}$. **174.** $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{R}{g}} = 84$ мин.

175. $v_2 = v_1 \sqrt{\dfrac{n_1}{n_2}} = 1 \cdot 10^1$ км/с.

3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В МЕХАНИКЕ

205. $F_c = \dfrac{m}{2d}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = 6{,}3 \cdot 10^4$ Н. **206.** $A = 1{,}5mgl = 1{,}5 \cdot 10^2$ Дж.

207. $A = \left(\dfrac{m_1}{2} + m_2\right) gl = 1{,}3 \cdot 10^4$ Дж. **208.** $A = m(g + a)h = 3 \cdot 10^3$ Дж.

209. $A = \mu mgv\tau = 1{,}8 \cdot 10^9$ Дж. **210.** $A = 2mgh$.

211. $E = \mu m_2 gs \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right) = 88$ Дж. **212.** $E_k = \dfrac{m}{2}(20 - 8t)^2 = 8$ Дж.

213. $A = \dfrac{(\mu mg)^2}{2k} = 0{,}1$ Дж. **214.** $\mu = \dfrac{A}{mgs - A \operatorname{tg} \alpha} = 0{,}2$.

215. $s = \dfrac{lm_1}{m_1 + m_2} = 1$ м. **216.** $u = \dfrac{mv_0 \cos\alpha}{M} = 8 \cdot 10^{-2}$ м/с.

217. $v = \dfrac{v_0}{M}\sqrt{M(m + M)} = 5{,}6$ м/с.

218. $v_2 = \dfrac{m_1 v_1 - mv}{m_2} = 3 \cdot 10^2$ м/с, $\vec{v}_2 \uparrow\downarrow \vec{v}_1$.

219. а) $v = \dfrac{2mu}{M + 2m} = 2$ м/с; б) $v = 0$;

в) $v = u\left(\dfrac{m}{M + m} + \dfrac{m}{M + 2m}\right) = 2$ м/с;

г) $v = \dfrac{2m^2 u}{M(M + 2m)} = 0{,}5$ м/с.

220. $v = \dfrac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2}$. **221.** $\alpha = 120°$.

222. $v_1 = v\sqrt{1 - \dfrac{m}{M}}$, $v_2 = \dfrac{mv}{M}$. **223.** $l_1 = 4l = 40$ см.

224. $x = \dfrac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2hk}{mg}}\right) = 0{,}1$ м.

225. $E_k = \dfrac{m}{2}(v_0^2 - 2v_0 g\tau \sin\alpha + g^2\tau^2) = 2 \cdot 10^2$ Дж.

226. $v = 2\sqrt{0{,}6gl} = 4{,}2$ м/с. **227.** $v = \sqrt{4gl}$.

228. $Q = \dfrac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = 2 \cdot 10^1$ Дж. **229.** $Q = \dfrac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2)}{2(m_1 + m_2)}$.

230. а) $F = m_1 g\left(1 + \dfrac{4Hm_2^2}{h(m_1 + m_2)^2}\right) = 8{,}9 \cdot 10^4$ Н,

б) $F = (m_1 + m_2)g\left(1 + \dfrac{Hm_2^2}{h(m_1 + m_2)^2}\right) = 9{,}2 \cdot 10^4$ Н.

231. $u_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$, $u_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$.

232. $F = m\left(\dfrac{v_1^2 - v_2^2}{2(h_1 - h_2)} + g\right) = 7{,}5 \cdot 10^3$ Н.

233. $v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$. **234.** В третьей.

235. $\alpha = \arccos\left(1 - \dfrac{1}{2gl}\left(\dfrac{mv}{m + M}\right)^2\right)$ при $\dfrac{m^2v^2}{gl(m + M)^2} \leqslant 4$.

236. $Q = m\left(gl\sin\alpha - \dfrac{v^2}{2}\right) = 1{,}4 \cdot 10^2$ Дж.

237. $k = \dfrac{2mgh}{(\Delta l)^2} = 4 \cdot 10^2$ Н/м. **238.** $E_\text{k} = \dfrac{1}{2}m(v_0^2 + g^2t^2) = 6 \cdot 10^2$ Дж.

239. $l = \dfrac{m^2v^2}{2\mu g M^2} = 0{,}5$ м. **240.** $N = \mu F \pi d n = 5 \cdot 10^2$ Вт.

241. $A_\text{тр} = mg\left(\dfrac{5}{2}R - H\right) = -2 \cdot 10^{-2}$ Дж. **242.** $h_\text{min} = \dfrac{5}{2}R = 10$ м.

243. $F = \dfrac{mg(h + l)}{l} = 2 \cdot 10^3$ Н. **244.** $h = \dfrac{k(L - l)^2}{2g(M + m)}$.

245. $v_0 = \sqrt{\dfrac{2E_\text{k}}{m}} - gt = 40$ м/с. **246.** $v = \sqrt{\dfrac{2(n-1)gh}{n}} = 14$ м/с.

247. $Q = \dfrac{m_1 m_2 v^2}{2(m_1 + m_2)} + m_2 gh = 1{,}5 \cdot 10^2$ Дж.

248. $Q = \dfrac{m_1 v_1^2}{2}\left(1 - \dfrac{m_1}{m_2}\right) = 25$ Дж.

249. $\dfrac{Q}{E_0} = 1 - \dfrac{v^2}{v_0^2} - \dfrac{m(v_0 - v)^2}{Mv_0^2} = 0{,}6$. **250.** $h = \dfrac{v_0^2(n - 1)}{2ng} = 7{,}7$ м.

251. $s = \dfrac{(M - m)^3 v^3}{2NM^2} = 30$ м.

252. $\Delta E_\text{p} = m_1 gl(1 - \cos\alpha) = 98$ Дж, $h = \dfrac{lm_1^2(1 - \cos\alpha)}{(m_1 + m_2)^2} = 0{,}16$ м.

253. $v = v_0\sqrt{\dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} = 0{,}8$ м/с.

254. $N = pg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 2 \cdot 10^4$ Вт.

255. $N = \dfrac{\eta\rho g V h}{t} = 2{,}3 \cdot 10^8$ Вт (здесь $\eta = 0{,}9$). **256.** $N = \dfrac{mgv}{2}$.

257. $v_1 = v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 25$ м/с. **258.** $Q = mg\left(h - \frac{g\tau^2}{8}\right) = 0{,}2$ Дж.

259. $v = \sqrt{\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2 + 2gH}$. **260.** $l = 2\sqrt{h(n-1)(H-h)} = 1{,}6$ м.

261. $\alpha = \arccos\left(1 - \frac{2m^2v^2}{(M+m)^2 gl}\right) = 30°$.

262. $E_{k1} = \frac{1}{4}E_0$, $E_{k2} = \frac{3}{4}E_0$. **263.** $m_2 = \frac{13}{5}m_1$.

4. ОСНОВЫ СТАТИКИ

284. $l = \frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 + m_2} = 6$ см.

285. $F = \left(m_2 + \frac{ml/2 - (m + m_1)l_1}{l - l_1}\right)g = 4$ Н.

286. $m = \frac{2m_1 - 8m_2}{3} = 1$ кг.

287. $x = \frac{l(m_1 + m/2)}{m_1 + m_2 + m} = 0{,}3$ м. **288.** $r = \frac{lk_2}{k_1 + k_2} = 0{,}8$ м.

289. $m = \sqrt{m_1 m_2} = 4$ кг. **290.** $F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 20$ Н.

291. $F = \frac{mg\left(\mu\sqrt{l^2 - h^2} + h\right)}{l} = 2{,}2 \cdot 10^3$ Н.

292. $h_{max} = \frac{l}{\sqrt{n^2 + 1}} = 20$ см. **293.** $F = \frac{mg}{\mu l}\left(h - \mu\sqrt{l^2 - h^2}\right) = 14$ Н.

294. $F = mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 16$ Н.

295. $F = \frac{g}{2h}(ML + m(2L - l))\cos\alpha$. **296.** $l_1 = \frac{\mu l}{\mu + 1}$.

297. $F_{min} = \frac{mg}{\mu} = 6 \cdot 10^2$ Н.

298. $F_1 = \frac{mgl}{2(l - l_1)} = 3 \cdot 10^2$ Н, $F_2 = mg - F_1 = 2 \cdot 10^2$ Н.

299. $m \geqslant \frac{M}{2}$, $m \geqslant 0{,}5$ кг. **300.** $F = \frac{mgl}{2(H - 2a)} = 1 \cdot 10^2$ Н.

301. $F_{тр} = \frac{mg}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 49$ Н. **302.** $\mu = \frac{\sin 2\alpha}{1 + 2\sin^2\alpha} = 0{,}5$.

303. $\alpha \geqslant \mathrm{arctg}\,\frac{3}{\mu}$, $\alpha \geqslant 84°$.

304. $T = \frac{mgl\sin\alpha\cos^2\alpha}{2h} = 1{,}5 \cdot 10^2$ Н,

$$F_c = mg\left(1 - \frac{l\sin^2\alpha\cos\alpha}{2h}\right) = 5{,}1\cdot10^2\ \text{Н},$$

$$F_в = \frac{mgl\sin\alpha\cos\alpha}{2h} = 1{,}7\cdot10^2\ \text{Н}.$$

305. $h = \dfrac{R}{\sqrt{1+\mu^2}} = 1{,}5$ м. **306.** $T = \dfrac{mgl_1}{\sqrt{l_2^2 - l_1^2}} = 3\cdot10^3$ Н.

307. $T = \dfrac{mg}{2\operatorname{tg}\alpha}$, $N = \dfrac{mg}{2\operatorname{tg}\alpha}\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}$, $\vec{N}$ составляет с горизонтом угол $\beta = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\alpha)$.

308. $h = \dfrac{F_{тр}l}{mg}\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha = 3$ м. **309.** $F = mg\dfrac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}$.

310. $r = \dfrac{2\rho_1 R}{\rho_1+\rho_2} = 5{,}5$ см.

311. На расстоянии 0,3 м от шара массой m_4.

312. На расстоянии $r = R/6 = 5{,}0$ см от центра пластинки.

313. $x = \dfrac{R_1^4 - R_2^4}{R_1^3 + R_2^3} = 2$ см.

314. На биссектрисе угла, в вершине которого находится шарик массой $2m$, на расстоянии $a\sqrt{3}/4$ от этого шарика.

315. $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}\left(3 - \dfrac{m_1l_1}{m_2l_2}\right) = 0{,}5$, $\alpha = 60°$.

316. $F = mg(\cos\alpha - \sin\alpha\operatorname{tg}\beta) = 36$ Н. **317.** $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} = 18°$.

5. ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ

340. $\Delta h = \dfrac{4m}{\pi\rho d^2} = 1{,}8$ см. **341.** $F_{min} = \rho ghS = 15$ Н.

342. $h = \dfrac{(n-1)p_0}{\rho g} = 20$ м. **343.** $p = \dfrac{2gh\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2} = 5{,}33\cdot10^3$ Па.

344. $p_{атм} = \dfrac{2\rho gh(l-h)}{l-2h} = 9{,}4\cdot10^4$ Па. **345.** $l = h + \dfrac{\rho gh^2}{p_{атм}}$.

346. $F_{ср} = \dfrac{\rho glh^2}{2} = 2{,}2\cdot10^2$ Н.

347. $p = \dfrac{4(mv^2/2 + F_cl)}{\pi d^2} = 4{,}3\cdot10^5$ кПа. **348.** $F = P\left(1 - \dfrac{\rho_2}{2\rho_1}\right) = 2$ Н.

349. $P_0 = \dfrac{P}{1-\rho_2/\rho_1} = 1521$ Н. **350.** $V = m\left(\dfrac{2}{\rho_2} - \dfrac{1}{\rho_1}\right) = 9\cdot10^{-3}$ м^3.

351. $\rho_1 = \dfrac{P_1\rho_2\rho_3}{(P_1+P_2-P_3)\rho_2 - P_2\rho_3} = 0{,}2\cdot10^3$ кг/м^3.

352. $H = \dfrac{\rho_2 h}{\rho_2 - \rho_1} = 16$ м. **353.** $m = Sd(\rho_2 - \rho_1) = 20$ кг.

354. $V_\text{п} = \left(1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)V$. **355.** $x = \dfrac{l\rho_3(\rho_1 - \rho_2)}{2\rho_2(\rho_1 - \rho_3)} = 3$ см.

356. $m_\text{г} = m\dfrac{\rho_2}{\rho_1}$, на другую чашку.

357. $m_\text{м} = \dfrac{m(1/\rho_1 - 1/\rho_2)}{1/\rho_4 - 1/\rho_3} = 0{,}3m$. **358.** $\alpha = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{5}{4}$.

359. $\rho_3 = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 = 4 \cdot 10^3$ кг/м^3.

360. $n_2 = \dfrac{n_1\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2} = 0{,}19$.

361. $\Delta h_1 = \dfrac{\rho_1 h}{\rho_2(1 + n^2)} = 6$ см, $\Delta h_2 = n^2\Delta h_1 = 0{,}4$ см.

362. $h = \dfrac{\rho_1\Delta h}{\rho_2} = 27$ см. **363.** $h = \dfrac{m_1 + m_2}{2\rho S} = 0{,}1$ м.

364. $\Delta h = \dfrac{m}{2\rho S} = 1 \cdot 10^{-2}$ м. **365.** $h = \dfrac{S_1h_1 + S_2h_2}{S_1 + S_2} = 25$ см.

366. $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\rho_2 - \rho_3P_1/(P_1 - P_2)}{\rho_2 - \rho_1} = 0{,}35$, т. е. 35%;

$\dfrac{V_2}{V} = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$, т. е. 65%, $V = \dfrac{P_1 - P_2}{\rho g} = 400$ см^3.

367. $m = \dfrac{\rho_1(M - \rho_2Sh)}{\rho_1 - \rho_2} = 60$ г.

368. $m = \dfrac{\rho_1(P_1\rho_3 - (P_1 - P_2)\rho_2)}{\rho_3(\rho_1 - \rho_2)g} = 965$ г.

369. $\Delta h = \dfrac{m}{\rho S} = 8 \cdot 10^{-3}$ м. **370.** $m = \rho Sh = 3 \cdot 10^6$ кг.

371. $S_{\min} = \dfrac{m}{d(\rho_2 - \rho_1)} = 2$ м^2. **372.** $\rho_2 = \rho_1 - \dfrac{m}{nV} = 7 \cdot 10^2$ кг/м^3.

373. $h = \dfrac{\sigma_\text{пр}}{g(\rho_1 - \rho_2)} = 7{,}2 \cdot 10^3$ м.

374. $T_1 = g(\rho V - m) = 9{,}1 \cdot 10^2$ Н, $T_2 = \dfrac{T_1}{\cos\alpha} = 1{,}0 \cdot 10^3$ Н.

375. $\rho_2 = \dfrac{3}{4}\rho_1 = 7{,}5 \cdot 10^2$ кг/м^3.

376. $A = mg(H + h) - \rho Vgh = 1{,}5 \cdot 10^2$ Дж.

377. $A = mg\left(1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)\left(h - \sqrt[3]{\dfrac{m}{\rho_1}}\right) = 1{,}2 \cdot 10^5$ Дж.

378. $A_{\min} = \dfrac{\rho gSh^2}{8} = 2 \cdot 10^2$ Дж.

379. $h = \dfrac{\rho_1 H}{\rho_1 - \rho_2}$, $t = \dfrac{\rho_2}{\rho_1 - \rho_2}\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$. **380.** $H = \dfrac{h(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1} = 0{,}2$ м.

381. $Q = (\rho_1 - \rho_2)Vgh = 4 \cdot 10^{-2}$ Дж.

382. $P = \dfrac{m\rho_2 gV}{M + m + \rho_1 V} = 21$ Н. **383.** $H = h\left(\dfrac{4\pi R^3\rho}{3m} - 1\right)$.

6. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

401. Одинаковое число $N = \dfrac{mN_A}{M} = 3 \cdot 10^{25}$.

402. $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\dfrac{3pV}{m}} = 2 \cdot 10^3$ м/с, $\langle E \rangle = \dfrac{3pVM}{2mN_A} = 7 \cdot 10^{-21}$ Дж.

403. $n = \dfrac{p_0}{kT_0} = 2{,}7 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. **404.** $p = \dfrac{2E}{3V} = 8 \cdot 10^5$ Па.

405. $m = \dfrac{pVM}{RT} = 4 \cdot 10^{-3}$ кг, $N = \dfrac{pVN_A}{RT} = 1{,}2 \cdot 10^{24}$.

406. $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\dfrac{3pV}{m}} = 1{,}2 \cdot 10^3$ м/с. **407.** $T = \dfrac{pVM}{mR} = 4{,}8 \cdot 10^2$ К.

408. $M_2 = \dfrac{hM_1}{l - h} = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. **409.** $h_2 = \dfrac{7p_0}{\rho g} + 8h_1 = 8 \cdot 10^1$ м.

410. $m = m_0 \Big/ \left(\dfrac{\rho RT}{M(p_0 + \rho gh)} - 1\right) = 6 \cdot 10^{-4}$ кг.

411. $\delta = \left(\dfrac{T_2}{T_1} - 1\right)100\,\% = 4\,\%$. **412.** $m_2 = \dfrac{m_1}{2}$. **413.** $\alpha = 1 - \dfrac{n}{k}$.

414. $T_2 = \dfrac{p_2 V_1 T_0 T_1}{p_1 V_1 T_0 - p_0 V_2 T_1} = 255$ К $(p_0 = 1 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К$)$.

415. $\rho = \dfrac{pM}{RT} = 1$ кг/м^3, $m_0 = \dfrac{M}{N_A} = 5{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг.

416. $\rho = \dfrac{p(m_1 + m_2)}{(m_1/M_1 + m_2/M_2)RT} = 0{,}5$ кг/м^3.

417. $p = \dfrac{Np_0V_0}{V} = 2 \cdot 10^5$ Па. **418.** $\dfrac{V_с}{V_ц} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{p_0/p} - 1} = 0{,}4$.

419. $m = \rho V\left(1 - \dfrac{p}{p_{атм} + \rho gh}\right) = 6$ кг.

420. $F_{max} = \dfrac{\pi p_{атм} d^2 (T_1 - T_2)}{4T_1} = 21$ Н.

421. $T_1 = \dfrac{T_2}{\left(1 - \dfrac{mg}{p_{атм}S}\right)\left(1 - \dfrac{m}{\rho Sh}\right)}$. **422.** $p = \dfrac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}$.

423. $T_2 = \dfrac{T_1(p_{атм} + \rho gh(1 + S_2/S_1))(V_1 + S_2 h)}{p_{атм} V_1}$.

424. $p_{атм} = \dfrac{m}{S}\left(\dfrac{\alpha}{1-\alpha} a - g\right) = 1{,}0 \cdot 10^5$ Па.

425. $v = \dfrac{mRT}{pMS\tau} = 20$ м/с. **426.** $t_2 = 10{,}5$ °C.

427. $\varphi_2 = \varphi_1 \dfrac{\rho_{01} T_2}{\rho_{02} T_1} = 62\,\%$.

428. $m = (\varphi\rho_{01} - \rho_{02})Sh = 1{,}6 \cdot 10^7$ кг $(\varphi = 0{,}73)$.

429. $m = \dfrac{(\varphi_1\rho_{01} - \varphi_2\rho_{02})V}{100\%} = 86$ кг.

430. $p_0 = \dfrac{mRT \cdot 100\%}{MV\varphi} = 1{,}9 \cdot 10^3$ Па. **431.** $\varphi = \dfrac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V_1 + V_2} = 27\%$.

432. $A = 2\sigma l_1 l_2 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ Дж. **433.** $N = \dfrac{mg}{\sigma\pi d} = 1{,}1 \cdot 10^3$.

434. $m = \dfrac{\pi d\sigma t}{g\tau} = 20$ кг. **435.** $\sigma = \dfrac{\rho g d_1 d_2 \Delta h}{4(d_2 - d_1)} = 5 \cdot 10^2$ мН/м.

436. $m = \sigma\pi d/g = 2{,}3 \cdot 10^{-5}$ кг.

7. ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

451. $m = \dfrac{\rho Vc(T_1 - T_2)}{\lambda + c(T_2 - T_3)} = 1$ кг. **452.** $m_2 = \dfrac{m_1 c_1 \Delta T}{c_2(T_2 - T_1 - \Delta T)} = 3{,}0$ кг.

453. $t_2 = t_1 + \dfrac{m_1\lambda}{cm_2} = 100$ °C. **454.** $n = 1 + \dfrac{c(t_1 - t_2)}{r} = 1{,}15$.

455. $m_1' = m_1 - \dfrac{c_2 m_2(t_{пл} - t_2) - c_1 m_1(t_1 - t_{пл})}{\lambda} = 1{,}9$ кг, $m_2' = 2{,}1$ кг, где $t_{пл} = 0$ °C.

456. $t = 0$ °C, $m_4 = \dfrac{m_3(r + c(t_2 - t_1))}{\lambda} = 4$ кг.

457. $m_3 = \dfrac{m_2(\lambda + c_2(T_{пл} - T_2)) - c_1 m_1(T_2 - T_1)}{c_1(T_к - T_1) + r - c_1(T_2 - T_1)}$.

458. $v = \sqrt{\dfrac{2(c(T_{пл} - T) + \lambda)}{\eta}} = 4{,}5 \cdot 10^2$ м/с.

459. $l = \sqrt{\dfrac{2h(v_0^2 - 2c\Delta T)}{g}} = 284$ м. **460.** $Q = \dfrac{ma\tau^2}{2} = 2 \cdot 10^8$ Дж.

461. $\Delta T = \dfrac{np^2}{2cmM} = 8$ K. **462.** $V = \left(\dfrac{1}{\eta} - 1\right)\dfrac{W\nu\tau}{\rho c\Delta T} = 9$ л.

463. $m = \dfrac{\eta UI\tau}{c(t_{пл} - t) + \lambda} = 1$ кг, где $t_{пл} = 0$ °C, $\eta = 0{,}8$.

464. $\tau_2 = \dfrac{\tau_1 r}{c(t_к - t_1)} = 30$ мин, где $t_к = 100\ ^\circ C$.

465. $\eta = \dfrac{c m_2 \Delta T}{q m_1} \cdot 100\% = 34\%$. **466.** $\tau = \dfrac{m(c\Delta T + \lambda)}{P} = 2$ ч 50 мин.

467. $m_2 = \dfrac{1}{g}\left(\dfrac{m_1 R \Delta T}{Mh} - p_0 S\right) = 2{,}8 \cdot 10^3$ кг.

468. $\Delta U = Q - \nu R(T_2 - T_1) = 2 \cdot 10^2$ Дж.

469. $U = \dfrac{3}{2} pV = 6 \cdot 10^5$ Дж. **470.** $\dfrac{V_2}{V_1} = 1 + \dfrac{Q}{\nu RT} = 3$.

471. $A = \left(p_0 + \dfrac{mg}{S}\right)\left(\dfrac{T_2}{T_1} - 1\right)V = 2 \cdot 10^2$ Дж.

472. $\Delta U = \left(C - \dfrac{(p_0 + mg/S)V}{T}\right)\Delta T = 4 \cdot 10^2$ Дж.

473. $m = \dfrac{M(Q_1 - Q_2)}{R\Delta T} = 4{,}8 \cdot 10^{-4}$ кг.

474. $A = (n-1)\nu RT = 8 \cdot 10^3$ Дж. **475.** $c_p = \dfrac{5}{2}\dfrac{R}{M}$, $c_V = \dfrac{3}{2}\dfrac{R}{M}$.

476. $Q = A = 25$ Дж. **477.** $\nu = \dfrac{2A}{3R\Delta T}$.

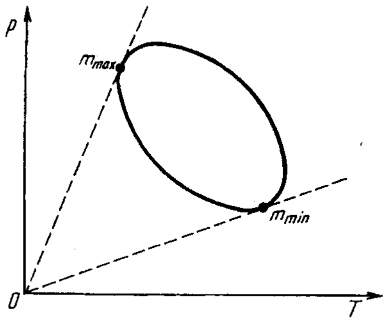
478. $Q = \dfrac{5}{2}(n-1)\nu RT = 1{,}9 \cdot 10^4$ Дж. **479.** $\dfrac{V_2}{V_1} = 1 + \dfrac{A}{\nu RT} = 2$.

480. $\Delta U = \dfrac{3}{2}\dfrac{m}{M} R\Delta T = 3 \cdot 10^3$ Дж, $A = \dfrac{m}{M} R\Delta T = 2 \cdot 10^3$ Дж,
$Q = \Delta U + A = 5 \cdot 10^3$ Дж.

481. $m = \dfrac{(n-1)pV + \Delta U}{\eta q} = 6 \cdot 10^{-3}$ кг.

482. $T_1 - T_3 = \dfrac{T_2 T_4 - T_3^2}{T_3} = -117$ К. **483.** См. рис. 293.

484. $h_{max} = \dfrac{Q(1 - T_0/T)}{mg} = 8{,}6$ м, где $T_0 = 273$ К.



Р и с. 293

485. $c=\dfrac{mgHT_2}{\rho V(T_2-T_1)^2}=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг · К).

486. $s=\dfrac{q\rho V(T_1-T_2)}{FT_1}=5\cdot10^2$ км.

487. $\Delta U=Q_1-\dfrac{(p_1+p_2)(V_2-V_1)}{2}=5\cdot10^2$ Дж, $\eta=\dfrac{Q_1-Q_2}{Q_1}\cdot100\%=20\%$.

8. ЭЛЕКРОСТАТИКА

521. $T=mg-\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=1{,}1\cdot10^{-2}$ Н. **522.** $F=\dfrac{\sqrt{3}q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=8\cdot10^{-6}$ Н.

523. $q_1=\dfrac{Q+\sqrt{Q^2+16\pi\varepsilon_0 r^2F}}{2}=6\cdot10^{-6}$ Кл, $q_2=Q-q_1=-2\cdot10^{-6}$ Кл.

524. $|Q|=\dfrac{1+2\sqrt{2}}{4}q,\ Q<0$.

525. $Q=-\dfrac{q}{4d^3}\sqrt{(4h^2+d^2)^3}=-3{,}8\cdot10^{-6}$ Кл.

526. $E=\dfrac{\sqrt{2}q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=3\cdot10^4$ В/м. **527.** $q=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 Ed^3}{l}=1\cdot10^{-10}$ Кл.

528. $E=\dfrac{\sqrt{2}\sigma}{2\varepsilon_0}=80$ В/м, под углом $\alpha=45°$ к горизонту.

529. $E=\dfrac{|\sigma|}{9\varepsilon_0}$. **530.** $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{qE}{mg}=45°$.

531. $q_3=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}q=-5$ мкКл. **532.** $E=\dfrac{|q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon a^2}=41$ В/м, $\varphi=0$.

533. $E=0$, если на концах диагонали находятся одноименные заряды, и $E=\dfrac{q\sqrt{2}}{a^2\pi\varepsilon_0}$, если разноименные.

534. $A=\dfrac{q\sigma R^2}{\varepsilon_0(R+r)}=1\cdot10^{-4}$ Дж.

535. $E_1=\dfrac{R_1\varphi}{(R_1+r)^2}=3{,}3\cdot10^2$ В/м, $E_2=\dfrac{R_1^2\varphi}{(R_1+R_2)(R_1+r)^2}=1{,}1\cdot10^2$ В/м.

536. $A=\dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right)=9\cdot10^{-2}$ Дж.

537. $q=\left(\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}+C_3\right)U=1{,}3\cdot10^{-3}$ Кл. **538.** $C=\dfrac{2\varepsilon_0\varepsilon(\varepsilon+1)S}{d(4\varepsilon+(\varepsilon+1)^2)}$.

539. $\Delta q=\dfrac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)S\mathcal{E}}{d}=2{,}5\cdot10^{-10}$ Кл.

540. $C_2=\dfrac{C_1(U_1-U_2)}{U_2}=3$ мкФ. **541.** $U_2=\dfrac{d_2U_1}{d_1}=2\cdot10^2$ В.

542. $I = \dfrac{C_1C_2(U_1+U_2)}{\tau(C_1+C_2)} = 6\cdot10^{-4}$ А. **543.** $h = H\dfrac{\rho_2}{\rho_1} + \dfrac{q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S^2\rho_1 g}$.

544. $U_2 = \dfrac{2U_1}{\varepsilon+1}$. **545.** $\Delta q = \dfrac{CU}{2} = 50$ мкКл, $q_1 = 0$.

546. $q = \dfrac{\varepsilon_0 Smg}{q_0}\operatorname{tg}\alpha = 3{,}6\cdot10^{-6}$ Кл. **547.** $r = \sqrt[3]{\dfrac{3eU}{4\pi d\rho g}} = 4\cdot10^{-6}$ м.

548. $T = mg\dfrac{\cos2\alpha}{\cos\alpha} = 8{,}7\cdot10^{-3}$ Н.

549. $T = \dfrac{mg\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\varepsilon} = 3{,}5\cdot10^{-4}$ Н, равновесие безразличное.

550. $E = \dfrac{\pi d^3 g(\rho_2-\rho_1)}{6q} = 4\cdot10^4$ В/м.

551. Увеличится на $\Delta g = \dfrac{qE}{m} = 9{,}6\cdot10^{-4}$ м/с^2.

552. $t = \sqrt{\dfrac{2lU_1}{g(U_1-U_2)}} = 9\cdot10^{-2}$ с. **553.** $a = \dfrac{g}{11} = 0{,}89$ м/с^2.

554. $l = \dfrac{d}{2}\left(1+\dfrac{W_k}{qU}\right) = 1{,}6$ см. **555.** $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}} = 8{,}0\cdot10^6$ м/с.

556. $U_{min} = \dfrac{md^2v^2}{el^2} = 6\cdot10^2$ В.

557. $q = \pm\dfrac{r}{\sin\alpha}\sqrt{2\pi\varepsilon_0 m\left(\dfrac{g}{\cos\alpha}-\dfrac{\omega^2 r}{\sin\alpha}\right)} = \pm1{,}3\cdot10^{-7}$ Кл.

558. $v = \sqrt{v_0^2+\left(\dfrac{eEt}{m_e}\right)^2} = 9\cdot10^6$ м/с, $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{eEt}{m_e v_0} = 24°$

(α – угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$).

559. $T = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} - \dfrac{2mg}{\operatorname{tg}60°} = 0{,}1$ Н. **560.** $v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m}} = 1{,}2\cdot10^7$ м/с.

561. $s = \dfrac{mv^2}{2qE} = 2\cdot10^3$ м. **562.** $v = \sqrt{\dfrac{b(mg+qE)}{m(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cos^2\alpha}} = 3$ м/с.

563. $h = \dfrac{Ul^2}{2dv^2}\,\dfrac{e}{m_e} = 6\cdot10^{-3}$ м.

564. $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha + eE\Delta t/m_e} = 45°$.

565. $W_B = W_A + 0{,}5R(3mg-F) = -4\cdot10^{-3}$ Дж.

566. $A = (\varepsilon^2-1)\dfrac{CU^2}{4}$. **567.** $U \geqslant \dfrac{Wd}{el} = 2\cdot10^2$ В.

568. $A_{мех} = \dfrac{C_0U^2(\varepsilon-1)}{2}$, $A_{ист} = -C_0U^2(\varepsilon-1)$.

569. $W = \dfrac{CE^2d^2}{2} = 2\cdot10^{-6}$ Дж, $w = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2} = 4\cdot10^{-6}$ Дж/м^3.

570. $Q = \dfrac{C_1C_2(U_1 - U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} = 5 \cdot 10^{-4}$ Дж.

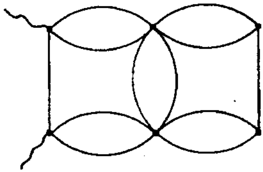
571. $A = \dfrac{\varepsilon_0 SU^2}{2d_1}\left(\dfrac{d_2}{d_1} - 1\right) = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ Дж. 572. $\Delta W = -\dfrac{CU^2}{4}$.

573. $t = 2RC = 20{,}0$ с.

9. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

608. $v = \dfrac{IM}{e\rho SN_A} = 1{,}8 \cdot 10^{-5}$ м/с. 609. $\delta = \dfrac{U_в}{I_a R_в} \cdot 100\% = 0{,}3\%$.

610. $R_2 = \dfrac{9}{8}R_1 = 90$ Ом. 611. $n = \sqrt{R_1/R_2} = 4$.



Р и с. 294

612. Соединив точки с одинаковыми потенциалами, получим эквивалентную схему (рис. 294). По ней найдем сопротивление: $R_x = 7R/12 = 3{,}5$ Ом.

613. $U = 22$ В.

614. $R_д = R_в\left(\dfrac{U}{U_в} - 1\right) = 3{,}6 \cdot 10^3$ Ом.

615. $I = I_a\left(1 + \dfrac{\pi d^2 R_a}{4\rho l}\right) = 13$ А.

616. $l = \dfrac{I_a R_a S}{\rho(I - I_a)} = 2$ м.

617. $U_1 = \dfrac{UR_1}{R_1 + R_2} = 140$ В, $U_2 = \dfrac{UR_2}{R_1 + R_2} = 160$ В.

618. $t = \dfrac{q^2 R}{A} = 2$ с. 619. $R = \dfrac{U_1(U_2 - U_1)}{P} = 24{,}2$ Ом.

620. $P_1' = \dfrac{P_1 P_2^2}{(P_1 + P_2)^2} = 96{,}0$ Вт, $P_2' = \dfrac{P_1^2 P_2}{(P_1 + P_2)^2} = 144$ Вт.

621. $R = \dfrac{kU^2}{(1 + k)^2 P} = 0{,}2$ Ом.

622. $P_1 = \dfrac{I_1^2(I_1R_1 - I_2R_2)}{I_2 - I_1} = 8$ Вт, $P_2 = \dfrac{I_2^2(I_1R_1 - I_2R_2)}{I_2 - I_1} = 12$ Вт,

$\eta_1 = \dfrac{R_1(I_2 - I_1)}{I_2(R_1 - R_2)} = 0{,}4$, $\eta_2 = \dfrac{R_2(I_2 - I_1)}{I_1(R_1 - R_2)} = 0{,}3$.

623. Если $R > r$, то бóльшая мощность выделяется при параллельном соединении резисторов, если $R < r$, – при последовательном.

624. $U = U_1 + \dfrac{4\rho l P}{\pi d^2 U_1} = 2{,}2 \cdot 10^2$ В. 625. $m = \dfrac{4D\rho l^2(1 + k)^2 P}{kU^2} = 78$ кг.

626. $\mathcal{E} = (\sqrt{2} + 1)\sqrt{\dfrac{PR}{2}}$, $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$. 627. $P_2' = \dfrac{P_1^2}{P_2} = 10$ Вт.

628. $\eta = 1 - \dfrac{IR}{\mathscr{E} - Ir} = 0{,}9$. **629.** $\eta = \dfrac{mgh}{IUt} \cdot 100\% = 49\%$.

630. $P_{\max} = \dfrac{\mathscr{E} I_{\max}}{4} = 3$ Вт. **631.** $P_{\max} = \dfrac{k\mathscr{E}^2}{4R(1-k)} = 5$ Вт.

632. $P_1' = \dfrac{U_2^2 P_1 (P_2 + P_3)^2}{U_1^2 (P_1 + P_2 + P_3)^2} = 72$ Вт, $P_2' = \dfrac{U_2^2 P_1^2 P_2}{U_1^2 (P_1 + P_2 + P_3)^2} = 16$ Вт,

$P_3' = \dfrac{U_2^2 P_1^2 P_3}{U_1^2 (P_1 + P_2 + P_3)^2} = 32$ Вт.

633. $\dfrac{Q_1}{Q_2} = \dfrac{4(r + R/2)^2}{(r+R)^2} = 1{,}4$. **634.** $\dfrac{P_2}{P_1} = 1{,}1$.

635. $l = \dfrac{\eta U^2 S\tau}{\rho m(c(t_2 - t_1) + r)} = 1{,}2$ м ($t_2 = 100$ °C).

636. $\Delta T = \dfrac{j^2 \rho t}{cD} = 0{,}2$ K.

637. $\mathscr{E} = \dfrac{P_2 I_1^2 - P_1 I_2^2}{I_1 I_2 (I_1 - I_2)} = 12$ В, $r = \dfrac{\mathscr{E} I_1 - P_1}{I_1^2} = 2{,}0$ Ом.

638. $\Delta Q = IU\tau - cm(t_2 - t_1) = 1{,}9 \cdot 10^5$ Дж, $\eta = \dfrac{cm(t_2 - t_1)}{IU\tau} = 0{,}7$.

639. $\tau_3 = \dfrac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 5{,}7$ мин, $\tau_4 = \tau_1 + \tau_2 = 28$ мин.

640. $t_2 = 4t_1 = 12$ мин. **641.** $r = \sqrt{R_1 R_2} = 6$ Ом. **642.** $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{1}{9}$.

643. $\alpha = 1 - \dfrac{\rho V c \Delta T}{P\tau} = 0{,}4$. **644.** $I_3 = \dfrac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} = 2$ А.

645. $q_1 = \dfrac{(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)(R_1 + R_3)C_1}{R_1 + R_3 + R_4}$, $q_2 = \dfrac{(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2) R_3 C_2}{R_1 + R_3 + R_4}$.

646. $U_1' = \dfrac{\mathscr{E}}{1 + U_2/U_1} = 7$ В, $U_2' = \mathscr{E} - U_1' = 5$ В.

647. $R = \dfrac{Edr}{\mathscr{E} - Ed} = 5$ Ом. **648.** $U_1 = U_2 = \dfrac{4}{9}\mathscr{E}$.

649. $q = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)\mathscr{E}C$. **650.** $\mathscr{E} = \dfrac{q(R_1 + 2R_2)}{CR_1} = 110$ В.

651. $\mathscr{E} = \dfrac{U_2 I_1 - U_1 I_2}{I_1 - I_2} = 1 \cdot 10^1$ В, $r = \dfrac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = 3$ Ом.

652. $\mathscr{E} = \dfrac{U_1 U_2}{3U_1 - 2U_2} = 40$ В. **653.** $q = \dfrac{\mathscr{E}CR}{2R + 3r} = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ Кл.

654. $\mathscr{E} = U - Ir = 23$ В. **655.** $I_{\text{к.з}} = \dfrac{U_1 I_2 + U_2 I_1}{U_1 - U_2} = 80$ А.

656. $R = \dfrac{\mathscr{E}_1 r_2 - \mathscr{E}_2 r_1}{\mathscr{E}_2} = 0{,}2$ Ом.

657. $R = \dfrac{r(2\sqrt{k}-1)}{2-\sqrt{k}} = 0{,}8$ Ом. **658.** $r = R$.

659. $r = \dfrac{R(nI_2 - I_1)}{nI_1 - I_2} = 0{,}3$ Ом, $\mathscr{E} = I_2\left(R + \dfrac{r}{n}\right) = 2$ В, где $n = 3$.

660. $R = \dfrac{2\mathscr{E}_2 r}{\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2} = 1$ Ом.

661. $P_1 = \dfrac{\mathscr{E}^2 U^2}{P(U^2/P + r)^2} = 42$ Вт. Не будет.

662. $P = \dfrac{m^2 R}{k^2 \tau^2} = 40$ Вт. **663.** $\Delta I = I - \dfrac{m}{kt} = 0{,}1$ А.

664. $q = \dfrac{It}{2} = 20$ Кл, $m = \dfrac{kIt}{2} = 6{,}6 \cdot 10^{-6}$ кг.

665. $m = kjStN = 3{,}6 \cdot 10^4$ кг, $W = UjStN = 1{,}1 \cdot 10^{13}$ Дж.

666. $t = \dfrac{\rho h}{kj} = 29$ ч. **667.** $W = \dfrac{UFmn}{\eta M} = 1{,}3 \cdot 10^8$ Дж.

668. $q = 2ewdSC_2R = 6 \cdot 10^{-13}$ Кл.

669. $F = I\sqrt{\dfrac{2Um_e}{e}} = 2{,}0 \cdot 10^{-7}$ Н.

10. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

692. $M = \dfrac{USBa}{4\rho} = 0{,}5$ Н · м.

693. Прямая, проходящая параллельно проводнику на расстоянии $r = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi B} = 5 \cdot 10^{-2}$ м от него, $F = IBl = 5 \cdot 10^{-3}$ Н.

694. $\alpha = \arcsin \dfrac{F}{IBl} = 30°$. **695.** $l = \dfrac{m(g + v/t)}{IB\sin\alpha} = 6$ м.

696. $I = \dfrac{mg}{2aB} = 5$ А. **697.** $A_{max} = IBls = 1{,}5 \cdot 10^{-1}$ Дж.

698. $E_k = \dfrac{e^2 B^2 R^2}{2m_e} = 5{,}6 \cdot 10^{-16}$ Дж. **699.** $R = \dfrac{El}{v_0 B} = 5 \cdot 10^{-3}$ м.

700. $\dfrac{q}{m} = \dfrac{8U}{B^2 l^2} = 1 \cdot 10^8$ Кл/кг. **701.** $v \leqslant \dfrac{eBd}{m_e}$.

702. $p = \dfrac{hqB}{2\pi\cos\alpha} = 7{,}3 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с.

703. $B = \dfrac{2\pi v\cos\alpha}{(e/m_e)L} = 2 \cdot 10^{-4}$ Тл.

704. $W_k = \dfrac{q^2 B^2 R^2}{2m\sin^2\alpha} = 1{,}2 \cdot 10^{-16}$ Дж. **705.** $N = \dfrac{rB(e/m_e)}{2\pi v\cos\alpha} = 3 \cdot 10^2$.

706. $\frac{e}{m_e} = \frac{2U}{B^2R^2} = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.

707. $B = E\sqrt{\frac{m_e}{2W}}$, $\vec{B} \perp \vec{E}$ и $\vec{B} \perp \vec{v}$. **708.** $t = \frac{RB}{E}\sqrt{n-1} = 2 \cdot 10^{-3}$ с.

709. $v_{\min} = \left(5gl + \frac{q^2B^2l^2}{2m^2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4m^2g}{q^2B^2l}}\right)\right)^{1/2}$.

710. $v = \frac{1}{2m}\left(qB + \sqrt{(qB)^2 + \frac{4m^2}{l\cos\alpha}}\right)l\sin\alpha$.

711. $\Delta t = \frac{N\Phi}{\mathscr{E}_i} = 4{,}8 \cdot 10^{-1}$ с. **712.** $a = 2\sqrt{\frac{\mathscr{E}_i\tau}{B\sin 2\alpha}} = 3 \cdot 10^{-2}$ м.

713. $q = \frac{BdS}{2\rho}$. **714.** $\mathscr{E} = Blv = 4 \cdot 10^{-4}$ В.

715. $Q = \frac{B^2l^2v^2t}{R} = 2 \cdot 10^{-2}$ Дж. **716.** $\omega = \frac{2\mathscr{E}}{Bl^2} = 75$ рад/с.

717. $F = \frac{B^2l^2v}{R}$. **718.** $q = CS\frac{\Delta B}{\Delta t} = 5 \cdot 10^{-10}$ Кл.

719. $I = \frac{l^2}{12\pi R}\frac{\Delta B}{\Delta t} = 4 \cdot 10^{-4}$ А. **720.** $U = \frac{\omega Bl^2}{2} = 1{,}5$ В.

721. $I_m = \frac{\omega Bl^2}{R} = 6{,}0 \cdot 10^{-3}$ А. **722.** $I = \frac{B(S_1 - S_2)}{\tau R} = 4 \cdot 10^{-6}$ А.

723. $B = \frac{\mathscr{E}\tau}{a^2} = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ Тл. **724.** $q = \frac{2\pi r^2 B}{R} = 3 \cdot 10^{-6}$ Кл.

725. $\alpha = \arccos\left(1 - \frac{qR}{BSN}\right) = 60°$.

726. $Q = \frac{NSa^3(\Delta B)^2}{4\rho\Delta t} = 1 \cdot 10^{-2}$ Дж. **727.** $Q = \frac{2B^2l_1^2l_2v}{R} = 1 \cdot 10^{-3}$ Дж.

728. $\langle\mathscr{E}_s\rangle = \frac{LI}{\Delta t} = 0{,}6$ В, $Q = \frac{LI^2}{2} = 4{,}3 \cdot 10^{-5}$ Дж.

729. $W = \frac{LU^2}{2R_1^2} = 1{,}3$ Дж, $\langle\mathscr{E}_s\rangle = \frac{LU}{R\Delta t} = 25$ В.

730. $|\mathscr{E}_i| = \frac{\Delta I/\Delta t}{4\pi^2\nu^2C} = 0{,}25$ В.

11. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

742. $x_m = 50$ м, $v_m = 52$ м/с, $a_m = 54$ м/с^2, $F_m = 108$ Н, $E = 2{,}7 \cdot 10^3$ Дж.

743. $T = 6$ с, $x_m = 2$ м, $\varphi_0 = \pi/4$. **744.** $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = 1{,}8$.

745. $\frac{E_k}{E_p} = \mathrm{tg}^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$. **746.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}} = 4{,}5 \cdot 10^{-2}$ с.

747. $l = 4t\nu a = 0{,}4$ м. **748.** $v_m = x_m\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 3{,}8$ м/с.

749. $h_{\max} = \dfrac{2mg}{k}$. **750.** $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$, $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$.

751. $\dfrac{l_2}{l_1} = \left(\dfrac{N_1}{N_2}\right)^2 = 4$. **752.** $T_1 = T\sqrt{\dfrac{mg - F}{mg + F}} = 1{,}6$ с.

753. $l = \dfrac{n^2 \Delta l}{n^2 - 1} = 9 \cdot 10^{-2}$ м. **754.** $\Delta l = l\left(1 - \dfrac{t^2}{(t + \Delta t)^2}\right) = 8 \cdot 10^{-2}$ м.

755. $\Delta t = \dfrac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} = 0{,}3 \cdot 10^2$ с. **756.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g(1 - \rho_2/\rho_1)}}$.

757. $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g + qU/(md)}} = 7 \cdot 10^{-1}$ с, если вектор напряженности поля направлен вниз; $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g - qU/(md)}} = 2$ с, если вектор напряженности поля направлен вверх.

758. $F = mg\left(1 - \dfrac{v^2}{2gl}\right) = 4 \cdot 10^{-1}$ Н. **759.** $v = \dfrac{L}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l}} = 19$ м/с.

760. $l = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} = 2 \cdot 10^{-1}$ м ($T = 1$ с следует из данного уравнения).

761. $a = g\left(\dfrac{T_0^2}{T^2} - 1\right) = 2$ м/с^2, ускорение направлено вверх.

762. $\Delta T = T_0 \dfrac{h}{R} = 3 \cdot 10^{-3}$ с. **763.** $N = \dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{h}{2l}\left(1 + \dfrac{g}{a}\right)} = 10$.

764. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g - a}} = 2$ с, лифт движется либо вниз с возрастающей скоростью, либо вверх с убывающей скоростью.

765. $E_{km} = E_{pm} = E = 2\pi^2 \nu^2 m x_m^2 = 2 \cdot 10^{-4}$ Дж.

766. $v_m = x_m\sqrt{\dfrac{g}{l}} = 2 \cdot 10^{-1}$ м/с, $F_m = \dfrac{\pi\rho d^3 g x_m}{6l} = 0{,}1$ Н.

767. $l_1 = \dfrac{\Delta l}{(N_1/N_2)^2 - 1} = 24{,}9$ см, $l_2 = l_1 + \Delta l = 99{,}6$ см,

$$g = \frac{4\pi^2 N_1^2 \Delta l}{t^2((N_1/N_2)^2 - 1)} = 9{,}82 \text{ м/с}^2.$$

768. а) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 1{,}42$ с; б) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}} = 1{,}38$ с;

в) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\cos\alpha}} = 1{,}44$ с.

769. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g + a}} = 2$ с. **770.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\rho g S}}$.

771. $x_m = \dfrac{2mv_0}{m + M}\sqrt{\dfrac{M}{k}} = 0{,}40$ м. **772.** $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2\rho S g}{m}} = 2$ Гц.

773. $h = \dfrac{\rho_1 g T^2}{4\pi^2 \rho_2} = 0{,}3$ м. **774.** $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi l \nu}{v} = \pi$.

775. $l_1 = \dfrac{\lambda}{2} = 30$ см, $l_2 = \dfrac{\lambda \Delta\varphi}{2\pi} = 7{,}5$ см. **776.** $\lambda = \dfrac{l}{N} = 8{,}00 \cdot 10^{-1}$ м.

777. $\lambda_2 = \dfrac{\lambda_1 v_2}{v_1} = 4$ м. **778.** $v = 2\nu(l_2 - l_1) = 3{,}6 \cdot 10^2$ м/с.

779. $l = \dfrac{v_1 v_2 t}{v_2 - v_1} = 7 \cdot 10^2$ м. **780.** $l = \dfrac{2 v_1 v_2}{\nu(v_2 - v_1)} = 4{,}5 \cdot 10^2$ м.

12. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

790. $\varepsilon = \dfrac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 L S} = 6$. **791.** $\lambda = 2\pi\sqrt{LC} = 3 \cdot 10^5$ м

792. Увеличить в $(\lambda\nu/c)^2 = 2$ раза. **793.** $I_{m2} = I_{m1}\sqrt{\dfrac{L_1}{L_2}} = \dfrac{I_{m1}}{\sqrt{2}}$.

794. От $\nu_1 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}} = 5 \cdot 10^7$ Гц до $\nu_2 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC_2}} = 2 \cdot 10^7$ Гц, от $\lambda_1 = c/\nu_1 = 6$ м до $\lambda_2 = c/\nu_2 = 15$ м.

795. $\dfrac{T_2}{T_1} = 2$. **796.** $I_m = U_m\sqrt{\dfrac{C}{L}}$. **797.** $T = \pi D\sqrt{\dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 \pi L}{d}} = 2 \cdot 10^{-6}$ с.

798. $\lambda = \dfrac{2\pi c q_m}{I_m} = 2 \cdot 10^2$ м. **799.** $I_m = 2\pi\nu q = 6 \cdot 10^{-2}$ А.

800. $L = \dfrac{2W_m}{I_m} = 1$ Гн. **801.** $Q = \dfrac{PL}{2R} = 1{,}6$ Дж.

802. $P = \dfrac{C U_m R}{2L} = 5 \cdot 10^{-3}$ Вт. **803.** $Q = \dfrac{\pi\omega N B^2 S^2}{R} = 7 \cdot 10^{-1}$ Дж.

804. Будет гореть.

805. $X_L = 2\pi\nu L = 13$ Ом, $X_C = \dfrac{1}{2\pi\nu C} = 40$ Ом,

$Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2} = 2{,}0 \cdot 10^2$ Ом, $I = \dfrac{U}{Z} = 1{,}1$ А,

$I_m = I\sqrt{2} = 1{,}5$ А.

806. $C = \dfrac{I_m}{2\pi\nu\sqrt{2U^2 - I_m^2 R^2}} = 2 \cdot 10^{-5}$ Ф.

807. $I = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \dfrac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}} = 0{,}99$ А, $U_R = IR = 20$ В,

$U_L = 2\pi\nu L I = 1{,}3 \cdot 10^2$ В, $U_C = \dfrac{I}{2\pi\nu C} = 27$ В.

808. $U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = 13$ В.

809. $C = \frac{I}{2\pi\nu}\sqrt{\frac{1}{U_2^2 - U_1^2}} = 4\cdot10^{-6}$ Ф. **810.** $Q = \frac{I_m^2}{2}Rt = 7\cdot10^6$ Дж.

811. $L = \frac{1}{2\pi\nu}\sqrt{nR_1^2 - (R_1 + R_2)^2} = 0{,}3$ Гн. **812.** $\cos\varphi = \frac{P\sqrt{2}}{180I} = 0{,}8$.

813. $U = \sqrt{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2} = 8$ В. **814.** $n_2 = \frac{n_1(Ir + U_2)}{U_1} = 40$.

815. $U_2 = U_1/k - Ir = 2\cdot10^1$ В. **816.** $R_2 = \frac{\eta(R_1 + r)}{1-\eta} = 9{,}5\cdot10^3$ Ом.

817. $\frac{U_1}{U} = \sqrt{\frac{\Delta W}{tP\eta/100\%}} = 3$.

13. ЗАКОНЫ ОТРАЖЕНИЯ И ПРЕЛОМЛЕНИЯ СВЕТА

822. $l_2 = \frac{l_1 d_2}{d_1} = 1\cdot10^2$ м, $\omega = \frac{\pi d_1^2}{4l_1^2} = 8\cdot10^{-9}$ ср, $\varphi = \frac{d_1}{l_1} = 1\cdot10^{-4}$ рад.

823. $v = 4\pi nR = 6\cdot10^1$ м/с. **824.** $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} = 60°$. **825.** $\gamma = \alpha$.

826. Вертикально вверх со скоростью $v = 3$ м/с.

827. $n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg}\alpha} = 1{,}4$. **828.** $H = nh = 8$ см. **829.** $n = \frac{d}{h} = 1{,}5$.

830. $H = nh$ 4 м. **831.** $\beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)$. **832.** $l = \frac{2h\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} = 0{,}97$ м.

833. $H = nh = 4$ км. **834.** $b' = b\frac{\sqrt{1 - n^2\sin^2\alpha}}{\cos\alpha} = 10$ см.

835. $s = d\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right)\sin\alpha$. **836.** $v = c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 2\cdot10^8$ м/с.

837. $s = d\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right) = 0{,}9$ см. **838.** $l = \frac{2h}{n} = 0{,}9$ м.

839. $\gamma = \alpha,\ l = \frac{2dn}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$.

840. $\theta = \alpha - \varphi + \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}(\sin\varphi)\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\alpha} - \cos\varphi\sin\alpha\right) = 47°$.

841. $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\alpha}{n - \cos\alpha}\right)$.

842. $\beta = \arcsin\left(\sin\alpha\cos\varphi - (\sin\varphi)\sqrt{\left(\frac{n_в}{n_с}\right)^2 - \sin^2\alpha}\right) = 17°$.

843. $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\varphi} = 1{,}4$. **844.** $\varphi = 60°$. **845.** $h = \frac{a}{2}\sqrt{n^2 - 1} = 1{,}8$ м.

846. $\varphi = \arcsin(n \sin\alpha) - \alpha = 22^\circ$; не выйдет при углах падения $\alpha \geqslant \arcsin(1/n) = 40^\circ$.

847. $s = \dfrac{d}{n}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}\right)$.

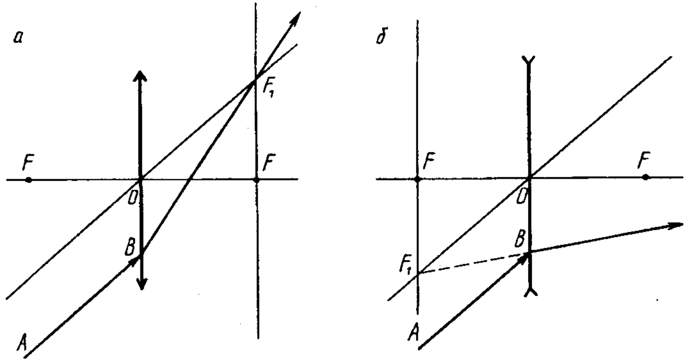
14. СОБИРАЮЩИЕ И РАССЕИВАЮЩИЕ ЛИНЗЫ

859. См. рис. 295. **860.** См. рис. 296. **861.** См. рис. 297.
862. См. рис. 298. **863.** а) См. рис. 299; б) см. рис. 300.

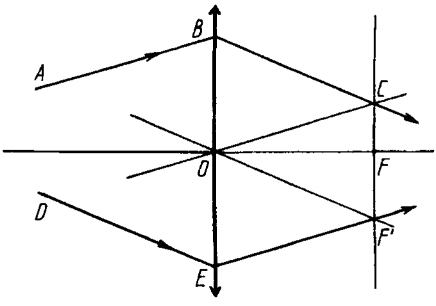
864. $F = \pm(1+\sqrt{2})l = \pm 9{,}6$ см.

865. $H = \dfrac{hF}{l} = 4$ см, $d_1 = F\left(1+\dfrac{1}{\Gamma}\right) = 11$ см, $d_2 = F\left(1-\dfrac{1}{\Gamma}\right) = 9$ см.

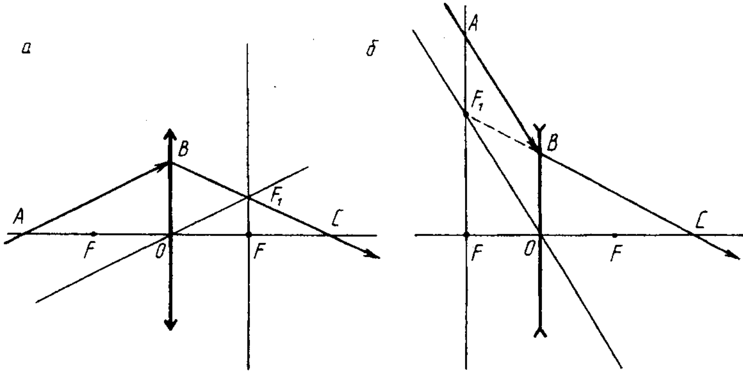
866. $F = \dfrac{fd}{d-f} = 12$ см, $D = -\dfrac{1}{F} = -8{,}3$ дптр.



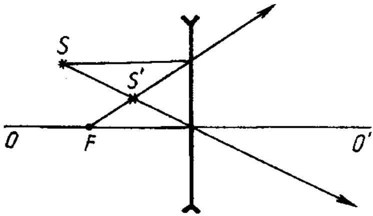
Р и с. 295



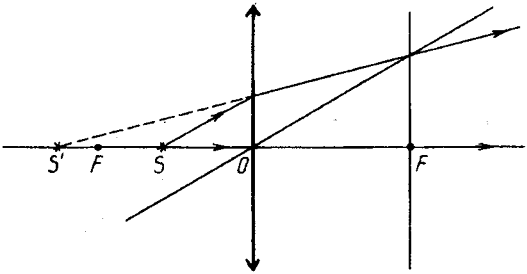
Р и с. 296



Р и с. 297



Р и с. 298

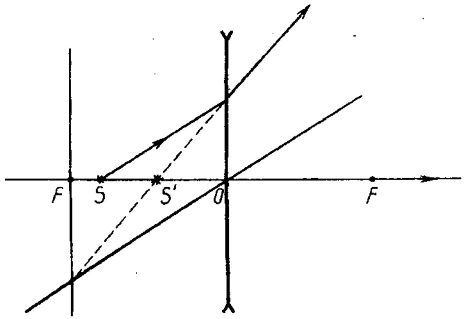


Р и с. 299

867. $F = \dfrac{L^2 - l^2}{4L} = 24$ см. **868.** $H_2 = \dfrac{h^2}{H_1} = 9$ см.

869. Если $d > f$, то $\Gamma = \dfrac{2F - l + \sqrt{l^2 + 4F^2}}{2F + l + \sqrt{l^2 + 4F^2}} = \dfrac{1}{3}$,

если $d < f$, то $\Gamma = \dfrac{2F + l + \sqrt{l^2 + 4F^2}}{2F - l + \sqrt{l^2 + 4F^2}} = 3$ (d − расстояние от предмета до линзы; f − расстояние от линзы до изображения).



Р и с. 300

870. $D_1 = \dfrac{\Gamma + 1}{\Gamma d} = 3$ дптр, $D_2 = \dfrac{\Gamma - 1}{\Gamma d} = 2$ дптр.

871. $F = \dfrac{L^2 - l^2}{4L} = 24$ см. **872.** $d = \dfrac{1}{|D|} = 0{,}5$ м.

873. $h = 2H = 1{,}4$ см. **874.** $d = \dfrac{1 - k}{-|D|} = 0{,}6$ м.

875. $n = 1 + \dfrac{R(k+1)}{d} = 1{,}6$. **876.** $f = \left(1 + \dfrac{1}{k}\right)F = \dfrac{2}{3}F$.

877. $F = \dfrac{f}{\Gamma + 1} = 0{,}1$ м. **878.** $\varphi_{\max} = \operatorname{arctg}\dfrac{a}{2F} = 32°$.

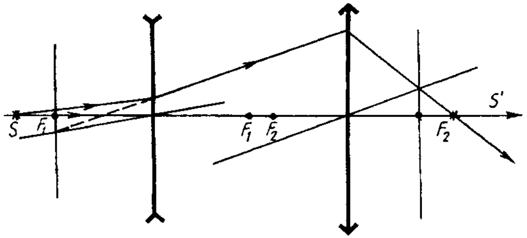
879. Линза собирающая, $F = \dfrac{\Gamma d}{\Gamma - 1} = 10$ см.

880. $d = 2F$. **881.** $D = \dfrac{h}{f(h - f)} = 1{,}7$ дптр.

882. $F = \dfrac{l_1 l_2}{l_2 - l_1} = 30$ см. **883.** $F = \dfrac{l d_1}{d_2 - d_1} = 7$ см.

884. $l = \dfrac{dr}{d - F} = 3$ см. **885.** $g_C = \dfrac{16\pi^2 R f^2}{T^2 d^2} = 2{,}7 \cdot 10^2$ м/с^2.

886. $l = F_1$. **887.** См. рис. 301.



Р и с. 301

888. $f_2 = \dfrac{F_2(ld_1 - lF_1 - d_1F_1)}{(d_1 - F_1)(l - F_2) - d_1F_1} = 60$ см.

889. $f_2 = \dfrac{F_2(ld_1 - lF_1 - d_1F_1)}{(d_1 - F_1)(l + F_2) - d_1F_1} = 30$ см. **890.** $D = \dfrac{d - d_0}{dd_0} = 3$ дптр.

891. $\Gamma = \dfrac{F}{h - F} = 1:4000$. **892.** $F = \dfrac{d_2h_2 - d_1h_1}{h_2 - h_1} = 0{,}4$ м.

893. $\Gamma = d_0D = 4$, $d_0 = 25$ см, см. рис. 260.

894. $f = (1 + \Gamma)F = 4{,}2$ м. **895.** $v' = \dfrac{vF}{d - F} = 4$ см/с.

896. $d = F\left(1 + \dfrac{gt^2}{4\pi^2N^2l}\right) = 4$ м.

15. СВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ

901. $l_1 = nl_2 = 16$ мм. **902.** $N' = nN = 39$.

903. $\lambda_2 = \dfrac{\lambda_1}{n} = 405$ нм, $\nu_2 = \nu_1 = \dfrac{c}{\lambda_1} = 5{,}6 \cdot 10^{14}$ Гц, зеленый.

904. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = 55°$. **905.** Обеспечит.

906. $\Delta\lambda = (n - 1)\lambda = 198$ нм. **907.** $x_3 = \dfrac{(2k + 1)\lambda l}{2d} = 6$ мм ($k = 3$).

908. $d = \dfrac{k\lambda}{2} = 1{,}3$ мкм ($k = 4$). **909.** $R = \dfrac{2r_k^2}{(2k - 1)\lambda} = 0{,}64$ м ($k = 3$).

910. $N = 9$. **911.** $\varphi_2 = \arcsin\left(\dfrac{k_2 \sin\varphi_1}{k_1}\right) = 15°$ ($k_1 = 2$, $k_2 = 3$).

16. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

915. $l = l_0\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} = 0{,}6$ м. **916.** $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 125$ ч.

917. $E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = 2 \cdot 10^{-10}$ Дж,

$E_k = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} - mc^2 = 5 \cdot 10^{-11}$ Дж.

918. $E_0 = mc^2 = 9 \cdot 10^{16}$ Дж.

919. $u = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + v_1v_2/c^2} = 0{,}98c$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

920. $v_2' = \dfrac{|-v_2 - v_1|}{1 + v_1v_2/c^2} = 0{,}96c$, где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

17. СВЕТОВЫЕ КВАНТЫ

925. $E = \dfrac{hc}{\lambda} = 3 \cdot 10^{-19}$ Дж, $p = \dfrac{h}{\lambda} = 1 \cdot 10^{-27}$ кг · м/с.

926. $n = \dfrac{hc}{\lambda E} = 1{,}5$. **927.** $N = \dfrac{Pt\lambda}{hc} = 5 \cdot 10^{1}$. **928.** $P = \dfrac{Nhc}{\eta\lambda t} = 4 \cdot 10^{1}$ Вт.

929. $p_{\max} = \sqrt{\dfrac{2m_e hc(\lambda_{\max} - \lambda)}{\lambda_{\max}\lambda}} = 4 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с.

930. $N = \dfrac{W\lambda}{hc} = 3 \cdot 10^{13}$.

931. $\nu = \nu_{\min} + \dfrac{eU_з}{h} = 1 \cdot 10^{15}$ Гц, $A = h\nu_{\min} = 4 \cdot 10^{-19}$ Дж.

932. $v = \sqrt{\dfrac{2hc(\lambda_{\max} - \lambda)}{m\lambda_{\max}\lambda}} = 2 \cdot 10^{5}$ м/с.

933. $\lambda_2 = \dfrac{k^2\lambda_1\lambda_{\max}}{\lambda_{\max} - (1 - k^2)\lambda_1} = 540$ нм.

934. $h = \dfrac{E_{km}}{\nu - \nu_{\min}} = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, $A = h\nu_{\min} = 4 \cdot 10^{-19}$ Дж.

935. $I = \dfrac{\eta P\lambda e}{hc} = 8 \cdot 10^{-10}$ А.

936. $A = \dfrac{hc}{\lambda_1} - eU = 3 \cdot 10^{-19}$ Дж, $\lambda_{\max} = \dfrac{hc}{A} = 6 \cdot 10^{-7}$ м, не будет.

937. $\Delta E_{\mathrm{k}\max} = \Delta E = 3$ эВ. **938.** $\lambda_{\max} = \dfrac{(n_2 - 1)c}{(n_2 - n_1)\nu} = 5 \cdot 10^{-7}$ м.

939. $A = \dfrac{hc}{\lambda} - e\varphi_{\max} = 4$ эВ. **940.** $A = \dfrac{hc}{\lambda} - \dfrac{(RBe)^2}{2m_e}$.

941. $\theta = \arccos\left(1 - \dfrac{E_0(E - E')}{EE'}\right) = 31°$, $E_\mathrm{k} = E - E' = 0{,}05$ МэВ.

942. $p_e = \sqrt{p^2 + (p')^2 - 2pp'\cos\theta} = 5 \cdot 10^{-23}$ кг · м/с, где $p = \dfrac{h}{\lambda}$,

$$p' = \frac{h}{\lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta)}.$$

943. $E' = \dfrac{2hc}{3\lambda_C(1 - \cos\theta)} = 1 \cdot 10^{-13}$ Дж,

$$p' = \frac{2h}{3\lambda_C(1 - \cos\theta)} = 4 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

18. АТОМ И АТОМНОЕ ЯДРО

955. $\rho = \dfrac{3m_0}{4\pi R_0^3} = 1{,}8 \cdot 10^{17}$ кг/м^3, $m = \rho V = 1{,}8 \cdot 10^{11}$ кг.

956. $r = \dfrac{qeN_A}{\pi\varepsilon_0 Mv^2} = 3 \cdot 10^{-14}$ м. **957.** $\dfrac{m_м}{m_\alpha} = \dfrac{\sqrt{E_0} + \sqrt{E}}{\sqrt{E_0} - \sqrt{E}} = 16$.

958. $v=\sqrt{\dfrac{2E_k}{m}}=1{,}92\cdot10^7$ м/с. **959.** $R_1=0{,}96R_2$.

960. $n=\dfrac{e}{4\pi r\sqrt{\pi\varepsilon_0 m_e r}}=6{,}6\cdot10^{15}$ с$^{-1}$. **961.** $\Delta E=hc\left(\dfrac{1}{\lambda_1}+\dfrac{1}{\lambda_2}\right)=13$ эВ.

962. $r=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e v^2}=5{,}2\cdot10^{-11}$ м, $E=\dfrac{4\pi\varepsilon_0 m_e^2 v^4}{e^3}=5{,}3\cdot10^{11}$ В/м.

963. $E=\dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}=5{,}1\cdot10^{11}$ В/м, $E_k=\dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1}=2{,}2\cdot10^{-18}$ Дж.

964. $\dfrac{v_э}{v}=\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar v}=9{,}3\cdot10^3$. **965.** $d=\dfrac{W_1-W_2-A}{eE}=9{,}2\cdot10^{-3}$ м.

966. $E_p/E_k=-2$.

967. а) $Z=13$, $N=14$; б) $Z=82$, $N=125$; в) $Z=92$, $N=143$.

968. $E_{св}=c^2(92m_p+(235-92)m_n-m_я)=1784$ МэВ.

969. $\Delta m_1=4(\Delta m_2+m_2)-m_1=0{,}12$ а.е.м., $E_{св}=c^2\Delta m_1=1{,}1\cdot10^2$ МэВ.

970. $\dfrac{E_{св}}{A}=\dfrac{\left(Z_{^1_1\mathrm{H}}+(A-Z)m_n-m_а\right)931{,}5}{A}=7{,}98$ МэВ.

971. $E_0=\dfrac{EM}{mN_A}=3{,}2\cdot10^{-11}$ Дж ($M=235\cdot10^{-3}$ кг/моль).

972. $P=\dfrac{\eta E_0 m N_A}{Mt\cdot100\%}=5{,}2\cdot10^7$ Вт.

973. $t=\dfrac{\alpha m N_A E_0}{PM}=1{,}9\cdot10^2$ сут ($M=235\cdot10^{-3}$ кг/моль).

974. Первый и второй переходы обусловлены β-распадом, а третий – α-распадом.

975. $t=\dfrac{T\lg n}{\lg 2}=54$ сут. **976.** $T=\dfrac{t\lg 2}{\lg(N_0/(N_0-\Delta N))}=4$ сут.

977. $N=\dfrac{I\tau}{2en}=2{,}3\cdot10^{13}$. **978.** $N=17$.

979. α-Частица $\left({}^4_2\mathrm{He}\right)$, $E=\dfrac{E_0 m N_A}{M}=2{,}4\cdot10^{11}$ Дж

($M=7\cdot10^{-3}$ кг/моль).

980. Нейтрон, протон и α-частица.

981. а) ${}^1_1\mathrm{H}+{}^1_0n\to{}^2_1\mathrm{H}+\gamma$; б) ${}^9_4\mathrm{Be}+\gamma\to{}^4_2\mathrm{He}+{}^4_2\mathrm{He}+{}^1_0n$.

982. $Q_1=2{,}4$ МэВ, $Q_2=-1{,}03$ МэВ.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. О приближенных вычислениях

При решении задач по физике надо помнить, что числовые значения физических величин являются *приближенными числами*. К приближенным числам относятся также табличные значения физических и математических величин, округленные значения точных чисел и др. Например, приближенными являются значения ускорения свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2, постоянной Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, числа $\pi = 3{,}14$, скорости света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с и т. п.

Точными числами являются: числовые коэффициенты и показатели степени в формулах; коэффициенты, отражающие кратность и дольность единиц физических величин; числа, заданные определениями, и др. Например, в формуле объема шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ точными являются коэффициент $\frac{4}{3}$ и показатель степени 3; в равенстве 5 км = 5 · 1000 м число 1000 – точное.

Значащими цифрами приближенного числа (в десятичной записи) называются все его цифры, кроме нулей, стоящих в начале числа. Так, числа 0,0307; $2{,}019 \cdot 10^6$; 4,1228 имеют соответственно три, четыре и пять значащих цифр. Значащей цифра называется потому, что она означает соответствующий десятичный разряд этого числа. Например, в приближенном числе 2,03 цифра 2 означает разряд единиц, цифра 0 – разряд десятых долей, цифра 3 – разряд сотых долей. Тысячные и другие доли неизвестны, поэтому соответствующие разряды не означены никакими цифрами. В приближенном числе 0,0516 первые два нуля не являются значащими. Они служат только для указания соответствующих десятичных разрядов остальных цифр (цифр 5, 1 и 6). Приближенные числа 2,5 и 2,50 отличаются друг от друга тем, что в первом числе верными являются целые и десятые доли (сотые, тысячные и т. д. неизвестны), а во втором верными являются и сотые доли (т. е. известно, что их количество равно нулю). Этот пример показывает, что приписывание или отбрасывание нулей в последних разрядах приближенных чисел изменяет их точность. В случае точных чисел записи 2,5 и 2,50 не различаются.

Приближенные числа можно записывать в нормальной форме: первая значащая цифра ставится в разряд единиц, а остальные – в десятичные разряды после запятой и полученное число умножается на 10^n, где n – целое положительное или отрицательное число. Например, число 0,0516 в нормальной форме имеет вид $5{,}16 \cdot 10^{-2}$; число 2170 – $2{,}170 \cdot 10^3$.

Округление приближенного или точного числа – это уменьшение количества его значащих цифр. Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все его цифры, стоящие после n-го разряда. Если при этом первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя из сохраняемых не изменяется; если же первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя из сохраняемых увеличивается на единицу. Например, округлив число 25,84 до трех значащих цифр, получим 25,8, до двух – 26. Округление чисел 1782 и 0,0503 до двух значащих цифр дает соответственно $1{,}8 \cdot 10^3$ и $5{,}0 \cdot 10^{-2}$.

При решении задач следует соблюдать следующие *правила приближенных вычислений*.

1. *При сложении и вычитании* приближенных чисел в результате нужно сохранять столько десятичных знаков, сколько таких знаков в слагаемом с наименьшим их количеством. Например, $7{,}53 + 13{,}8 + 0{,}064 \approx \approx 21{,}394 \approx 21{,}4$. Сумма округлена так, что она содержит один десятичный знак, как и второе слагаемое.

2. *При умножении и делении* в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько таковых в сомножителе с их наименьшим количеством. Например, $38{,}6 \cdot 0{,}52 \approx 20{,}072 \approx 20$. В промежуточных результатах нужно сохранять на одну значащую цифру больше. Например, $38{,}6 \cdot 0{,}52 \cdot 0{,}721 \approx 20{,}1 \cdot 0{,}721 \approx 14{,}4921 \approx 14$.

Если исходные сомножители различаются количеством значащих цифр на две и более, то сначала нужно все сомножители округлить так, чтобы каждый содержал значащих цифр на одну (запасную) больше, чем их имеет сомножитель с наименьшим числом таких цифр, а затем перемножить. Например, $1{,}5 \cdot 4{,}825 \cdot 1{,}1936 \approx 1{,}5 \cdot 4{,}83 \cdot 1{,}19 \approx \approx 8{,}62155 \approx 8{,}6$.

3. *При возведении в степень* в результате сохраняется столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное число, возводимое в степень. Например, $0{,}25^3 \approx 1{,}5625 \cdot 10^{-2} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-2}$.

4. *При извлечении корня* любой степени из приближенного числа в результате следует сохранять столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении. Например, $\sqrt{2{,}12 \cdot 10^{-6}} \approx 1{,}45602 \approx 1{,}46 \cdot 10^{-3}$.

5. *При вычислении сложных выражений* нужно применять перечисленные выше правила в соответствии с видом математических действий. Например,

$$\frac{(12{,}438 + 5{,}7)\sqrt{7{,}39}}{8{,}32 \cdot 6{,}072 \cdot 4{,}3 \cdot 10^4}.$$

Сомножитель $4{,}3 \cdot 10^4$ имеет наименьшее число значащих цифр – две, поэтому результаты всех промежуточных вычислений нужно округлять до трех значащих цифр:

$$\frac{(12{,}438 + 5{,}7)\sqrt{7{,}39}}{8{,}32 \cdot 6{,}072 \cdot 4{,}3 \cdot 10^4} \approx \frac{18{,}1 \cdot 2{,}72}{50{,}5 \cdot 4{,}3 \cdot 10^4} \approx \frac{49{,}2}{2{,}17 \cdot 10^6} \approx 2{,}27 \cdot 10^{-5}.$$

Округлив до двух значащих цифр, получим $2{,}3 \cdot 10^{-5}$.

6. *Правило запасной цифры:* в промежуточных результатах, т. е. в тех приближенных числах, которые используются в последующих расчетах, следует сохранять на одну значащую цифру больше, чем это требуется правилами 1–5. В окончательном результате запасная цифра отбрасывается (см. предыдущий пример).

2. Основные единицы СИ

Физическая величина	Единица		
	Наименование	Обозначение	Определение
Длина	метр	м	Метр равен расстоянию, проходимому в вакууме плоской электромагнитной волной за 1/299 792 458 долю секунды
Масса	килограмм	кг	Килограмм равен массе международного прототипа килограмма
Время	секунда	с	Секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133
Сила электрического тока	ампер	А	Ампер равен силе неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызывал бы на каждом участке длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н
Термодинамическая температура	кельвин	К	Кельвин равен 1/273,16 части термодинамической температуры тройной точки воды
Количество вещества	моль	моль	Моль равен количеству вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг. При применении моля структурные элементы должны быть специфицированы и могут быть атомами, молекулами, ионами, электронами или другими частицами или специфицированными группами частиц
Сила света	кандела	кд	Кандела равна силе света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, сила излучения которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср

3. Дополнительные единицы СИ

Физическая величина	Единица			
	Определяющее уравнение	Наименование	Обозначение	Определение
Плоский угол	$\alpha = \frac{l}{r}$	радиан	рад	Радиан равен углу между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу
Телесный угол	$\omega = \frac{S}{r^2}$	стерадиан	ср	Стерадиан равен телесному углу с вершиной в центре сферы, вырезающему на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы

4. Некоторые производные единицы СИ

Физическая величина	Единица			
	Определяющее уравнение	Наименование	Обозначение	Определение
Площадь	$S = l^2$	квадратный метр	$м^2$	Квадратный метр равен площади квадрата, длины сторон которого равны 1 м
Объем, вместимость	$V = l^3$	кубический метр	$м^3$	Кубический метр равен объему куба с ребрами, длины которых равны 1 м
Скорость	$v = \frac{s}{t}$	метр в секунду	м/с	Метр в секунду равен скорости прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой эта точка за время 1 с перемещается на расстояние 1 м
Ускорение	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	метр на секунду в квадрате	$м/с^2$	Метр на секунду в квадрате равен ускорению прямолинейно и равноускоренно движущейся точки, при котором за время 1 с скорость точки изменяется на 1 м/с

Физическая величина	Единица			
	Определяющее уравнение	Наименование	Обозначение	Определение
Угловая скорость	$\omega = \frac{\varphi}{t}$	радиан в секунду	рад/с	Радиан в секунду равен угловой скорости равномерно движущейся по окружности точки, при которой за время 1 с совершается поворот радиуса, проведенного к точке, на угол 1 рад
Частота вращения	$n = \frac{N}{t}$	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$	Секунда в минус первой степени равна частоте равномерного вращения, при которой за время 1 с тело совершает один полный оборот
Частота периодического процесса	$\nu = \frac{1}{T}$	герц	Гц	Герц равен частоте периодического процесса, при которой за время 1 с совершается один цикл этого процесса
Угловая (круговая, циклическая) частота	$\omega = 2\pi\nu$	секунда в минус первой степени	$с^{-1}$	Секунда в минус первой степени равна угловой частоте, при которой за время 1 с совершается 2π циклов вращения (полных оборотов)
Плотность	$\rho = \frac{m}{V}$	килограмм на кубический метр	$кг/м^3$	Килограмм на кубический метр равен плотности однородного вещества, масса которого при объеме 1 $м^3$ равна 1 кг
Импульс (количество движения) тела	$p = mv$	килограмм-метр в секунду	кг · м/с	Килограмм-метр в секунду равен импульсу (количеству движения) тела массой 1 кг, движущегося со скоростью 1 м/с
Сила	$F = ma$	ньютон	Н	Ньютон равен силе, сообщающей телу массой 1 кг ускорение 1 $м/с^2$ в направлении действия силы
Импульс силы	$J = Ft$	ньютон-секунда	Н · с	Ньютон-секунда равна импульсу силы, создаваемому силой 1 Н, действующей в течение времени 1 с

Физическая величина	Единица			
	Определяющее уравнение	Наименование	Обозначение	Определение
Момент силы	$M = Fl$	ньютон-метр	Н · м	Ньютон-метр равен моменту силы, создаваемому силой 1 Н относительно оси, расположенной на расстоянии 1 м от линии действия силы
Давление	$p = \frac{F}{S}$	паскаль	Па	Паскаль равен давлению, вызываемому силой 1 Н, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 м^2, расположенной перпендикулярно силе
Жесткость	$k = \frac{F}{\Delta l}$	ньютон на метр	Н/м	Ньютон на метр равен жесткости тела, в котором возникает сила упругости 1 Н при абсолютном удлинении этого тела на 1 м
Нормальное механическое напряжение	$\sigma = \frac{F}{S}$	паскаль	Па	Паскаль равен нормальному механическому напряжению, вызываемому силой упругости 1 Н при равномерном распределении ее по сечению площадью 1 м^2, расположенному перпендикулярно силе
Модуль продольной упругости (модуль Юнга)	$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$	паскаль	Па	Паскаль равен модулю продольной упругости тела, в котором при относительном удлинении, равном единице, возникает механическое напряжение 1 Па
Поверхностное натяжение	$\sigma = \frac{F}{l}$	ньютон на метр	Н/м	Ньютон на метр равен поверхностному натяжению, создаваемому силой 1 Н, приложенной к участку контура свободной поверхности длиной 1 м и действующей нормально к контуру и по касательной к поверхности

Физическая величина	Единица			
	Определяющее уравнение	Наименование	Обозначение	Определение
Работа, энергия	$A = Fs$	джоуль	Дж	Джоуль равен работе, совершаемой силой 1 Н при перемещении точки приложения силы на расстояние 1 м в направлении действия силы
Мощность	$P = \frac{A}{t}$	ватт	Вт	Ватт равен мощности, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж
Количество теплоты	$Q = A$	джоуль	Дж	Джоуль равен количеству теплоты, эквивалентному работе 1 Дж
Теплоемкость тела (системы тел)	$C = \frac{Q}{\Delta T}$	джоуль на кельвин	Дж/К	Джоуль на кельвин равен теплоемкости тела, повышающего температуру на 1 К при сообщении ему количества теплоты 1 Дж
Удельная теплоемкость	$c = \frac{C}{m}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)	Джоуль на килограмм-кельвин равен удельной теплоемкости вещества, имеющего при массе 1 кг теплоемкость 1 Дж/кг
Удельное количество теплоты (удельная теплота плавления, парообразования, сгорания и др.)	$q = \frac{Q}{m}$	джоуль на килограмм	Дж/кг	Джоуль на килограмм равен удельному количеству теплоты процесса, в котором к веществу массой 1 кг подводится (или отводится от него) количество теплоты 1 Дж
Молярная масса	$M = \frac{m}{\nu}$	килограмм на моль	кг/моль	Килограмм на моль равен молярной массе вещества, имеющего при количестве вещества 1 моль массу 1 кг
Концентрация молекул	$n = \frac{N}{V}$	метр в минус третьей степени	$м^{-3}$	Метр в минус третьей степени равен концентрации молекул, при которой в объеме 1 $м^3$ находится одна молекула

Физическая величина	Единица			
	Определяющее уравнение	Наименование	Обозначение	Определение
Электрический заряд (количество электричества)	$q = It$	кулон	Кл	Кулон равен электрическому заряду, проходящему через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с
Поверхностная плотность электрического заряда	$\sigma = \frac{q}{S}$	кулон на квадратный метр	Кл/м^2	Кулон на квадратный метр равен поверхностной плотности электрического заряда, при которой заряд, равномерно распределенный по поверхности площадью 1 м^2, равен 1 Кл
Напряженность электрического поля	$E = \frac{U}{d}$	вольт на метр	В/м	Вольт на метр равен напряженности однородного электрического поля, при которой между двумя точками, находящимися одна от другой на расстоянии 1 м вдоль линии напряженности поля, создается разность потенциалов 1 В
Разность потенциалов	$U = \frac{A}{q}$	вольт	В	Вольт равен разности потенциалов между двумя точками, если при перемещении заряда 1 Кл из одной точки в другую поле совершает работу 1 Дж
Электродвижущая сила (ЭДС)	$\mathcal{E} = \frac{A}{q}$	вольт	В	Вольт равен электродвижущей силе источника тока, при которой сторонние силы совершают работу 1 Дж при перемещении положительного заряда 1 Кл от отрицательного полюса к положительному полюсу источника вдоль всей электрической цепи
Электрическое напряжение	$U = \frac{P}{I}$	вольт	В	Вольт равен электрическому напряжению на участке электрической цепи, при котором в участке проходит постоянный ток силой 1 А и затрачивается мощность 1 Вт

Физическая величина	Единица			
	Определяющее уравнение	Наименование	Обозначение	Определение
Электрическая емкость	$C = \frac{q}{U}$	фарад	Ф	Фарад равен электрической емкости конденсатора, при которой заряд 1 Кл создает между обкладками конденсатора напряжение 1 В
Электрическое сопротивление	$R = \frac{U}{I}$	ом	Ом	Ом равен электрическому сопротивлению проводника, в котором при напряжении между концами 1 В сила тока равна 1 А
Удельное электрическое сопротивление	$\rho = \frac{RS}{l}$	ом-метр	Ом · м	Ом-метр равен удельному электрическому сопротивлению вещества, при котором изготовленный из этого вещества проводник длиной 1 м и площадью поперечного сечения 1 $м^2$ имеет сопротивление 1 Ом
Температурный коэффициент сопротивления	$\alpha = \frac{\Delta R}{R_0 t}$	кельвин в минус первой степени	$К^{-1}$	Кельвин в минус первой степени равен температурному коэффициенту сопротивления, при котором изменение температуры на 1 К вызывает относительное изменение сопротивления, равное единице
Электрохимический эквивалент	$k = \frac{m}{q}$	килограмм на кулон	кг/Кл	Килограмм на кулон равен электрохимическому эквиваленту такого вещества, 1 кг которого выделяется на электроде при прохождении через электролит заряда 1 Кл
Магнитная индукция	$B = \frac{F_{max}}{Il}$	тесла	Тл	Тесла равен магнитной индукции однородного магнитного поля, которое на проводник длиной 1 м при силе тока в нем 1 А действует с максимальной силой 1 Н

Физическая величина	Единица			
	Определяющее уравнение	Наименование	Обозначение	Определение
Магнитный поток	$\lvert\Delta\Phi\rvert = \lvert\mathscr{E}_i\rvert\Delta t$	вебер	Вб	Вебер равен магнитному потоку, который создается однородным магнитным полем с индукцией 1 Тл через поверхность площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно вектору магнитной индукции
Индуктивность	$L = \frac{\Phi}{I}$	генри	Гн	Генри равен индуктивности электрической цепи, с которой при силе постоянного тока в ней 1 А сцепляется магнитный поток 1 Вб
Световой поток	$\Phi = I\omega$	люмен	лм	Люмен равен световому потоку, испускаемому точечным источником силой света 1 кд в телесном угле 1 ср
Освещенность	$E = \frac{\Phi}{S}$	люкс	лк	Люкс равен освещенности поверхности площадью 1 м^2 при падающем на нее световом потоке 1 лм
Активность радиоактивного вещества	$A = \frac{N}{t}$	беккерель	Бк	Беккерель равен активности радионуклида, при которой за 1 с происходит один акт распада
Экспозиционная доза излучения	$X = \frac{Q}{m}$	кулон на килограмм	Кл/кг	Кулон на килограмм равен экспозиционной дозе гамма- и рентгеновского излучений, при которой в 1 кг сухого атмосферного воздуха образуются ионы, несущие заряд каждого знака, равный 1 Кл
Мощность экспозиционной дозы излучения	$\dot{X} = \frac{X}{t}$	ампер на килограмм	А/кг	Ампер на килограмм равен мощности экспозиционной дозы, при которой за 1 с сухому атмосферному воздуху передается экспозиционная доза излучения 1 Кл/кг

Физическая величина	Единица			
	Определяющее уравнение	Наименование	Обозначение	Определение
Поглощенная доза излучения	$D = \frac{E}{m}$	грэй	Гр	Грэй равен поглощенной дозе излучения, при которой облученному веществу массой 1 кг передается энергия ионизирующего излучения 1 Дж
Мощность поглощенной дозы излучения	$\dot{D} = \frac{D}{t}$	грэй в секунду	Гр/с	Грэй в секунду равен мощности поглощенной дозы излучения, при которой за время 1 с облученным веществом поглощается доза излучения 1 Гр
Эквивалентная доза излучения	$H = Dk$	зиверт	Зв	Зиверт равен эквивалентной дозе излучения, при которой поглощенная доза равна 1 Гр и коэффициент качества равен единице
Мощность эквивалентной дозы излучения	$\dot{H} = \frac{H}{t}$	зиверт в секунду	Зв/с	Зиверт в секунду равен мощности эквивалентной дозы излучения, при которой за время 1 с облучаемым веществом поглощается эквивалентная доза излучения 1 Зв

Примечание. На практике использовались внесистемные единицы ионизирующих излучений: $[A] = 1$ Ки (кюри) $= 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк, $[X] = 1$ Р (рентген) $= 2{,}58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг, $[D] = 1$ рад (рад) $= 10^{-2}$ Гр, $[H] = 1$ бэр (бэр) $= 10^{-2}$ Зв. В настоящее время, согласно действующим стандартам, эти внесистемные единицы, а также величины "экспозиционная доза" и "мощность экспозиционной дозы" применять не следует.

5. Внесистемные единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ

Физическая величина	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Масса	тонна	т	10^3 кг
	атомная единица массы	а.е.м.	$1{,}66057 \cdot 10^{-27}$ кг (приблизительно)
Время	минута	мин	60 с
	час	ч	3600 с
	сутки	сут	86 400 с
Плоский угол	градус	...°	$(\pi/180)$ рад = $= 1{,}745329... \cdot 10^{-2}$ рад
	минута	...′	$(\pi/10\,800)$ рад = $= 2{,}90888... \cdot 10^{-4}$ рад
	секунда	...″	$(\pi/648\,000)$ рад = $= 4{,}848137... \cdot 10^{-6}$ рад
	град (гон)	град	$(\pi/200)$ рад
Длина	астрономическая единица	а.е.	$1{,}49598 \cdot 10^{11}$ м (приблизительно)
	световой год	св. год	$9{,}4605 \cdot 10^{15}$ м (приблизительно)
	парсек	пк	$3{,}0857 \cdot 10^{16}$ м (приблизительно)
Площадь	гектар	га	10^4 м^2
Объем, вместимость	литр	л	10^{-3} м^3
Оптическая сила	диоптрия	дптр	1 м$^{-1}$

Физическая величина	Единица		
	Наименование	Обозначение	Соотношение с единицей СИ
Энергия	электрон-вольт	эВ	$1{,}60219 \cdot 10^{-19}$ Дж (приблизительно)
Полная мощность	вольт-ампер	$В \cdot А$	
Реактивная мощность	вар	вар	

Примечания: 1. Допускается применять другие единицы времени, получившие широкое распространение (неделя, месяц, год, век, тысячелетие и др.).

2. Единицу "литр" не рекомендуется использовать при точных измерениях.

3. Единицы времени (минута, час, сутки), плоского угла (градус, минута, секунда), астрономическую единицу, световой год, диоптрию и атомную единицу массы не допускается применять с приставками.

6. Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц

Обозначение приставки	Приставка	Множитель
Э	экса	10^{18}
П	пета	10^{15}
Т	тера	10^{12}
Г	гига	10^{9}
М	мега	10^{6}
к	кило	10^{3}
г	гекто	10^{2}
да	дека	10^{1}
д	деци	10^{-1}
с	санти	10^{-2}
м	милли	10^{-3}
мк	микро	10^{-6}
н	нано	10^{-9}
п	пико	10^{-12}
ф	фемто	10^{-15}
а	атто	10^{-18}

7. Письменное оформление решения задач

Общепринятый способ письменного оформления решения задачи по физике заключается в следующем.

Сначала записывают условие (текст) задачи полностью, без сокращений, а затем кратко. Краткая запись отражает, что дано в условии и что нужно определить, при этом все значения данных величин записывают слева в столбик в том порядке, в котором они встречаются в условии. Напомним, что значение физической величины состоит из числового значения и наименования единицы этой величины. Например, в записи $v = 5$ м/с v – обозначение скорости, 5 м/с – значение скорости, 5 –числовое значение, м/с – единица скорости (точнее, обозначение единицы скорости – метр в секунду).

Снизу столбик данных значений подчеркивают горизонтальной чертой и под ней пишут искомую величину. Справа столбик отделяют вертикальной чертой и пишут заголовок “Решение”.

Решают задачу и записывают решение в общем виде, в буквенных обозначениях, при этом промежуточные вычисления не производят. В результате получается расчетная формула, в которой искомая величина выражена в обозначениях величин, заданных в условии задачи.

Решение должно сопровождаться краткими, но исчерпывающими пояснениями, в которых дается обоснование используемых формул и объяснение обозначений. Необходимо делать схематический чертеж (рисунок), если это возможно в данной задаче. Рисунок помогает нагляднее представить рассматриваемую в задаче ситуацию и более четко описать ход решения.

После получения расчетной формулы ее проверяют следующим образом: в правую часть формулы вместо обозначений физических величин подставляют обозначения единиц СИ этих величин, производят с ними необходимые действия и убеждаются в том, что полученная при этом единица соответствует искомой величине. Затем числовые значения величин выражают в единицах СИ, подставляют их в расчетную формулу и производят вычисления, соблюдая при этом правила приближенных вычислений (см. прил. 1). В конце решения записывают ответ.

Рассмотрим пример оформления решения задачи на письменном экзамене.

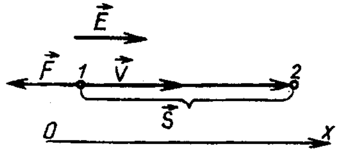
Задача. Электрон влетает со скоростью $v = 5 \cdot 10^6$ м/с в однородное электростатическое поле, напряженность которого $E = 1 \cdot 10^3$ В/м и направлена так же, как и скорость электрона. Сколько времени будет двигаться электрон до момента остановки и какой путь он при этом пройдет? Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

$v = 5 \cdot 10^6$ м/с
$E = 1 \cdot 10^3$ В/м
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

t – ? s – ?

Решение

В электростатическом поле на электрон действует сила $\vec{F}$, модуль которой $F = eE$, а направление противоположно направлению напряженности $\vec{E}$ (рис. 302). Электрон движется прямолинейно (силой тяжести пренебрегаем) в течение некоторого промежутка времени t до остановки, при этом под действием силы $\vec{F}$ импульс электрона изменяется. Согласно второму закону Ньютона,



Р и с. 302

$$\vec{F}t = m_e\vec{v}_2 - m_e\vec{v}_1,$$

где $\vec{v}_2$, $\vec{v}_1$ – скорость электрона в точках 2 и 1 соответственно.

Для проекций на ось OX уравнение имеет вид $F_x t = m_e v_{2x} - m_e v_{1x}$. В данном случае $F_x = -F$, $v_{2x} = 0$, $v_{1x} = v$, поэтому $Ft = mv$, откуда $t = m_e v/F$, или

$$t = \frac{m_e v}{eE}. \tag{1}$$

Изменение кинетической энергии электрона равно работе силы $\vec{F}$:

$$\frac{m_e v_2^2}{2} - \frac{m_e v_1^2}{2} = A.$$

Учитывая, что $v_2 = 0$, $v_1 = v$, $A = Fs\cos 180° = -Fs$, получаем $mv^2/2 = Fs$, где s – модуль перемещения, который в данном случае равен пройденному пути. Следовательно,

$$s = \frac{m_e v^2}{2F}, \text{ или } s = \frac{m_e v^2}{2eE}. \tag{2}$$

Расчетные формулы (1) и (2) проверим с помощью действий над единицами физических величин:

$$\left[\frac{m_e v}{eE}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}}{\text{Кл}\cdot\frac{\text{В}}{\text{м}}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{Кл}\cdot\text{В}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{Дж}\cdot\text{с}} = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}^2}\cdot\text{с}} = \text{с} = [t],$$

$$\left[\frac{m_e v^2}{2eE}\right] = \frac{\text{кг}\cdot\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right)^2}{\text{Кл}\cdot\frac{\text{В}}{\text{м}}} = \frac{\text{кг}\cdot\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}}{\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{м}\cdot\text{с}^2}} = \text{м} = [s].$$

Подставим числовые значения величин в формулы (1) и (2) и произведем вычисления:

$$t = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 5\cdot 10^6}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1\cdot 10^3}\ \text{с} = 3\cdot 10^{-8}\ \text{с},$$

$$s = \frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot (5\cdot 10^6)^2}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1\cdot 10^3}\ \text{м} = 7\cdot 10^{-2}\ \text{м}.$$

О т в е т: $t = 3\cdot 10^{-8}$ с, $s = 7\cdot 10^{-2}$ м.

8. Некоторые сведения по математике

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$.
Корни квадратного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Квадрат суммы двух чисел

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Квадрат разности двух чисел

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Разность квадратов двух чисел

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Пропорция – равенство двух отношений:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},\ b \neq 0,\ d \neq 0.$$

Основное свойство пропорции: $ad = bc$.

Площадь треугольника $S = \frac{1}{2}ah$, где a – основание треугольника; h – его высота.
Площадь трапеции

$$S = \frac{1}{2}(a + b)h,$$

где a, b – основания трапеции; h – высота.
Длина окружности $L = 2\pi R$, где R – радиус окружности.
Площадь круга $S = \pi R^2$, где R – радиус круга.
Площадь сферической поверхности $S = 4\pi R^2$, где R – радиус сферы.

Объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, где R – радиус шара.

Объем цилиндра $V = \pi R^2 h$, где R – радиус основания цилиндра; h – его высота.
Теорема синусов:

$$\frac{\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma},$$

где a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – углы, лежащие против сторон a, b и c соответственно.
Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

где a, b, c – стороны треугольника; α – угол, лежащий против стороны a.

Некоторые тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Некоторые значения тригонометрических функций

Функция	Угол, град (рад)					
	0	30 ($\pi/6$)	45 ($\pi/4$)	60 ($\pi/3$)	90 ($\pi/2$)	180 (π)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–

Производные основных элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C $(C = \text{const})$	0	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
x	1	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
x^n	nx^{n-1}	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$
a^x	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
x^2	$2x$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Простейшие интегралы

$$\int 0 \cdot dx = C, \ C = \text{const},$$

$$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C,$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

9. Латинский алфавит

Печатные буквы	Рукописные буквы	Название	Печатные буквы	Рукописные буквы	Название
A a	*A a*	а	***N n***	*N n*	эн
B b	*B b*	бэ	***O o***	*O o*	о
C c	*C c*	цэ	***P p***	*P p*	пэ
D d	*D d*	дэ	***Q q***	*Q q*	ку
E e	*E e*	е	***R r***	*R r*	эр
F f	*F f*	эф	***S s***	*S s*	эс
G g	*G G g*	жэ	***T t***	*T t*	тэ
H h	*H h*	аш	***U u***	*U u*	у
I i	*I i*	и	***V v***	*V v*	вэ
J j	*J j*	жи	***W w***	*W w*	дубль-вэ
K k	*K k*	ка	***X x***	*X x*	икс
L l	*L l*	эль	***Y y***	*Y y*	игрек
M m	*M m*	эм	***Z z***	*Z z*	зэт

Примечание. Для букв *g*, *h*, *j*, *y* даны французские названия, которые общеприняты в школьной практике, и добавлена буква *w*, употребляемая в математике и физике.

10. Греческий алфавит

Печатные буквы	Рукописные буквы	Название
Α α	*Α α*	а́льфа
Β β	*Β β*	бе́та
Γ γ	*Γ γ*	га́мма
Δ δ	*Δ δ*	де́льта
Ε ε	*Ε ε*	э́псилон
Ζ ζ	*Ζ ζ*	дзэ́та
Η η	*Η η*	э́та
Θ ϑ	*Θ ϑ*	тэ́та
Ι ι	*Ι ι*	йо́та
Κ ϰ	*Κ ϰ*	ка́ппа
Λ λ	*Λ λ*	ла́мбда
Μ μ	*Μ μ*	мю
Ν ν	*Ν ν*	ню
Ξ ξ	*Ξ ξ*	кси
Ο ο	*Ο ο*	о́микрон
Π π	*Π π*	пи
Ρ ρ	*Ρ ϱ*	ро
Σ σ ς	*Σ σ ς*	си́гма
Τ τ	*Τ τ*	та́у
Υ υ	*Υ υ*	и́псилон
Φ φ	*Φ φ*	фи
Χ χ	*Χ χ*	хи
Ψ ψ	*Ψ ψ*	пси
Ω ω	*Ω ω*	оме́га

Оглавление

Предисловие 3

I. Механика 5

1. Основы кинематики 5
2. Основы динамики 43
3. Законы сохранения в механике 84
4. Основы статики 120
5. Жидкости и газы 146

II. Молекулярная физика 176

6. Основы молекулярно-кинетической теории. Идеальный газ 176
7. Тепловые явления. Основы термодинамики 197

III. Основы электродинамики 218

8. Электростатика 218
9. Законы постоянного тока 265
10. Магнитное поле. Электромагнитная индукция 305

IV. Колебания и волны 338

11. Механические колебания и волны 338
12. Электромагнитные колебания и волны 354

V. Оптика 367

13. Законы отражения и преломления света 367
14. Собирающие и рассеивающие линзы 376
15. Световые волны 397
16. Элементы теории относительности 404

VI. Квантовая физика 408

17. Световые кванты 408
18. Атом и атомное ядро 417

Ответы 431
Приложения 459