В.А.Балаш

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Настоящая книга представляет собой пособие по решению задач повышенной трудности по курсу элементарной физики.

Создавая пособие, автор стремился разработать единые методы решения задач по курсу элементарной физики, показать, как нужно использовать эти методы при решении конкретных задач.

Построение книги не является стандартным для задачника. В начале каждой главы даны краткие теоретические сведения, позволяющие вспомнить основные понятия и законы курса физики, приведены формулы, которые используются при решении задач. Далее следуют методические указания по решению задач и примеры их решения. Каждая глава заканчивается задачам;: для самостоятельного решения.

Большинство задач, приведенных в пособии, предлагалось на физических олимпиадах и вступительных экзаменах по физике в ведущих вузах страны. Многие задачи составлены автором.

В конце книги помещены ответы к задачам, а также решения некоторых задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРА

Настоящая книга представляет собой пособие по решению задач повышенной трудности по курсу элементарной физики.

Создавая пособие, автор стремился разработать единые методы решения задач по курсу элементарной физики, показать, как нужно использовать эти методы при решении конкретных задач.

Построение книги не является стандартным для задачника. В начале каждой главы даны краткие теоретические сведения, позволяющие вспомнить основные понятия и законы курса физики, приведены формулы, которые используются при решении задач. Далее следуют методические указания по решению задач и примеры их решения. Каждая глава заканчивается задачами для самостоятельного решения.

Большинство задач, приведенных в пособии, предлагалось на физических олимпиадах и вступительных экзаменах по физике в ведущих вузах страны. Многие задачи составлены автором.

В конце книги помещены ответы к задачам, а также решения некоторых задач.

Четвертое издание пособия было переработано с учетом усовершенствованной программы по физике для средней школы и переработанных изданий учебников. Автор выражает глубокую благодарность всем читателям, приславшим замечания и пожелания по улучшению пособия; в новом издании задачника они учтены.

ВВЕДЕНИЕ

ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. В изучении курса физики решение задач имеет исключительно большое значение, и им отводится значительная часть курса.

Решение и анализ задач позволяют понять и запомнить основные законы и формулы физики, создают представление об их характерных особенностях и границах применения. Задачи развивают навык в использовании общих законов материального мира для решения конкретных вопросов, имеющих практическое и познавательное значение. Умение решать задачи является лучшим критерием оценки глубины изучения программного материала и его усвоения.

В основу каждой физической задачи положено то или иное частное проявление одного или нескольких фундаментальных законов природы и их следствий. Поэтому, прежде чем приступать к решению задач какого-либо раздела курса, следует тщательно проработать теорию вопроса и внимательно разобрать иллюстрирующие ее примеры. Без твердого знания теории нельзя рассчитывать на успешное решение и анализ даже сравнительно простых задач, не говоря уже о более сложных.

2. Решение большинства физических задач расчетного характера можно разделить на четыре этапа: а) анализ условия задачи и его наглядная интерпретация схемой или чертежом; б) составление уравнений, связывающих физические величины, которые характеризуют рассматриваемое явление с количественной стороны; в) совместное решение полученных уравнений относительно той или иной величины, считающейся в данной задаче неизвестной; г) анализ полученного результата и числовой расчет.

Первый этап решения является в какой-то мере вспомогательным, и нередко он опускается, если данный физический процесс и условие задачи оказываются достаточно ясными и понятными. Второй — применение известных законов и формул физики для математической записи условий задачи (составление системы уравнений, полностью отражающей данный физический процесс) — представляет основную трудность решения почти всех задач по физике. Сделав такую запись, мы получаем одно или несколько уравнений, в которых неизвестным служит искомая величина, и физическая задача почти полностью приводится к математической. Дальнейшее решение состоит в том, чтобы из системы уравнений путем алгебраических выкладок найти эту величину, выразив ее через исходные данные задачи.

Получив расчетную формулу, необходимо проанализировать ее: выяснить, как меняется искомая величина при изменении других величин, функцией которых она является. Такой анализ стимулирует физическое мышление, расширяет представление о рассматриваемом явлении, выявляет характерные особенности установленной зависимости. После этого можно подставлять в расчетную формулу числа и делать окончательный расчет.

3. а) При анализе задач и составлении уравнений, описывающих физические процессы и явления, нужно хорошо знать, какие из величин, входящих в формулы физики, являются скалярными, какие — векторными.

Скалярная величина определяется только числовым значением, векторная характеризуется числовым значением и направлением.

Для полного определения векторных величин необходимо учитывать не только их числовое значение, но и направление. При этом всегда нужно помнить, что число и направление — это две неотъемлемые характеристики любого вектора. Если происходит изменение векторной величины, то это значит, что меняется или ее числовое значение, или направление, или и то и другое вместе. Векторные величины равны только в том случае, если их модули и направления одинаковы.

Действия с векторами существенно отличаются от действий с обычными числами. Для изучения механики в элементарном курсе физики достаточно знать: умножение вектора на скаляр, сложение (разложение), вычитание и скалярное умножение векторов. При умножении векторной величины $\vec{a}$ на скаляр k ее модуль изменяется в k раз, а направление остается неизменным при $k > 0$ и меняется на противоположное при $k < 0$.

Под суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, направленных под углом α друг к другу, подразумевают третий вектор $\vec{c}$, построенный как диагональ параллелограмма, сторонами которого являются слагаемые векторы. Символически эта операция записывается так:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}.$$

Векторные равенства во многих случаях не позволяют определить значения входящих в них физических величин. Чтобы найти модуль и направление одной из этих величин как функцию других, нужно установить связь между модулями векторов, составляющих векторное равенство. В случае сложения двух векторов она обычно дается теоремой косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha, \text{ где } 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi.$$

Для нахождения разности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, направленных под углом друг к другу, необходимо найти такой вектор $\vec{d}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дал бы вектор $\vec{a}$. Геометрически вычитание векторов сводится к построению параллелограмма, в котором уменьшаемый вектор служил бы диагональю, а вычитаемый — одной из его сторон. Вектор разности $\vec{d}$ будет второй стороной параллелограмма. Иначе, чтобы найти разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $-\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{d}.$$

б) Для упрощения анализа физических процессов и математических выкладок нередко приходится прибегать к разложению векторов скорости, ускорения, силы и т. д. на составляющие по каким-либо двум направлениям, чаще всего взаимно перпендикулярным. Разложение векторов на составляющие есть действие, обратное сложению векторов, поэтому, чтобы разложить вектор $\vec{a}$ по двум заданным направлениям, нужно построить стороны параллелограмма $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, зная его диагональ и направление сторон ($\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$).

Разложение вектора на составляющие — это чисто математический прием, и тот факт, что любой вектор можно разложить на составляющие по осям, не означает, что каждой из них можно дать такое же физическое толкование, как исходному вектору. Рациональный выбор направлений для составляющих вектора при его разложении обычно не явно диктуется условием задачи, однако в общем случае он может быть произвольным.

Если какая-нибудь физическая величина представляет собой вектор (т. е. определяется числом и направлением), то эту же величину можно полностью охарактеризовать тремя (на плоскости двумя) числами — проекциями данного вектора на оси прямоугольной системы координат. Проекцией вектора на координатную ось называют произведение модуля вектора на косинус угла между вектором и положительным направлением этой оси. Проекция вектора может быть как положительной, так и отрицательной. При нахождении проекций вектора можно сначала найти его составляющие по осям, а затем проекции. Если составляющая совпадает с положительным направлением оси, проекцию берут со знаком «плюс», если же нет, то со знаком «минус».

Пусть $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные векторы координатных осей Ox и Oy и вектор $\vec{a}$ лежит в плоскости Oxy, тогда для его составляющих $\vec{a}_x$ и $\vec{a}_y$ и проекций a_x и a_y по этим осям имеем:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y,$$

$$a_x = a\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}});\; a_y = a\cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}}),\; a^2 = a_x^2 + a_y^2,$$

причем

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}.$$

4. а) Все задачи, независимо от способа задания исходных величин, следует решать в общем виде в буквенных обозначениях. При такой форме решения остаются ясными следы законов, используемых в процессе решения, а сами выкладки позволяют при необходимости проверить любую часть решения и исключить возможные ошибки. Получив ответ в виде алгебраической формулы или уравнения, его можно проанализировать, установить характер и пределы изменения искомой величины в функции величин, через которые она выражена. Кроме того, и это, пожалуй, главное, указанный способ решения позволяет отработать методику и приемы решения задач по каждому разделу курса.

б) Ознакомившись с условием задачи, никогда не следует заострять внимание на искомой величине и тем более пытаться сразу ее найти. Необходимо помнить, что ближайшая цель решения состоит в том, чтобы свести задачу от физической к математической, записав ее условие при помощи формул.

в) Чтобы хорошо понять условие задачи, необходимо сделать схематический чертеж, поясняющий ее сущность, и на чертеже, хотя бы условно, указать все величины, характеризующие данное явление. Если при этом окажется, что для полного описания процесса надо использовать величины, не фигурирующие в условии задачи, их нужно ввести в решение самим, так как в большинстве случаев без них невозможно найти связь между искомыми и заданными величинами. Следует твердо помнить, что почти во всех случаях чертеж резко упрощает и поиск, и само решение.

г) Сделав чертеж, следует еще раз прочитать условие задачи и отметить, какие из величин, указанных на чертеже, даны и какие требуется найти. Все известные величины — их числовые значения и наименования — выписываются обычно в колонку. (Эту запись можно делать и после составления уравнений.)

д) Далее, с помощью физических законов и формул необходимо установить математическую связь между всеми величинами, введенными в решение при символическом описании рассматриваемого явления. В результате получится одно или несколько уравнений, включающих в себя как заданные, так и неизвестные величины,— физическая задача сведется к математической.

е) Прежде чем решать составленную систему уравнений, полезно убедиться в том, что число неизвестных равно числу уравнений. Решение системы уравнений желательно начинать с исключения тех неизвестных величин, которые не требуется находить по условию задачи, и следить за тем, чтобы при каждом алгебраическом действии число неизвестных уменьшалось.

5. Получив ответ в общем виде и проанализировав его, можно приступать к числовым расчетам. Прежде всего для этого необходимо выбрать систему единиц, в которой решено проводить вычисления, предпочтение отдается Международной системе единиц (СИ).

Если заданные величины выражены в одной системе единиц, вычисления проводят в этой системе и, получив окончательный результат, переводят его при необходимости в другую систему. Если величины, входящие в расчетную формулу, даны в разных системах единиц, их следует выразить в единицах системы, принятой для решения.

В тех случаях, когда в числитель и знаменатель расчетной формулы входят однородные величины одной степени, их можно подставлять в любых единицах, лишь бы они были одинаковыми. Единицы измерения этих величин сокращаются и на размерность искомой величины не влияют.

Подставив числовые значения всех величин (вместе с их наименованием) в расчетную формулу, проводят действия с наименованиями, с тем чтобы убедиться, что результат получается в единицах измерения искомой величины в принятой системе. Несоблюдение этого условия (оно необходимо, но недостаточно) свидетельствует об ошибке, допущенной в ходе решения. Установив наименование искомой величины, можно приступать к действиям с числами. (Если есть полная уверенность в правильности решения, единицы измерения в расчетную формулу можно не подставлять.)

Проводя арифметические расчеты, следует помнить, что числовые значения физических величин являются приближенными, поэтому, делая подсчеты, нужно пользоваться правилами приближенных вычислений, позволяющими во многих случаях сэкономить время, не нанося никакого ущерба точности.

Получив числовой ответ, желательно, если это возможно, оценить, насколько он реален. Иногда такая оценка позволяет установить ошибочность полученного результата.

ЧАСТЬ I

МЕХАНИКА

Глава 1

КИНЕМАТИКА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Механическим движением называют изменение взаимного расположения отдельных тел или различных частей одного тела, происходящее в пространстве с течением времени. В любом механическом движении всегда участвует не менее двух тел. Одно из них условно принимают за неподвижное тело отсчета и по отношению к нему определяют механическое состояние всех остальных тел. Чтобы установить законы механического движения тел относительно выбранного тела отсчета, с ним связывают ту или иную систему координат — чаще всего прямоугольную и часы. Наиболее простой вид эти законы имеют в системах отсчета, связанных с поверхностью Земли, когда по условию задачи суточным и годовым вращением Земли можно пренебречь.

Простейшим механическим движением является движение материальной точки — тела, размеры и форму которого можно не учитывать при описании его движения и массу которого можно считать сосредоточенной в точке.

2. Движение материальной точки характеризуют траекторией, длиной пути, перемещением, скоростью и ускорением.

Траекторией называют линию в пространстве, описываемую точкой при своем движении.

Длину дуги, отсчитываемую вдоль траектории от некоторой точки, принятой за начало отсчета, называют длиной пути (дуговой координатой).

Перемещение — это вектор, соединяющий начальное положение движущейся точки и ее положение в рассматриваемый момент времени.

3. Положение материальной точки M на плоскости в прямоугольной — декартовой системе координат Oxy определяют или заданием радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из начала координат в точку M, или двумя числами — координатами x, y точки M, представляющими собой проекции вектора $\vec{r}$ на соответствующие оси.

Если известна траектория точки M, ее положение в пространстве можно также определить заданием дуговой координаты s (длиной пути), отсчитываемой вдоль траектории от начала отсчета.

При движении точки ее радиус-вектор и координаты изменяются и являются функциями времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t); \quad x = x(t); \quad y = y(t); \quad s = s(t). \tag{1.1}$$

Уравнения (1.1) называют кинематическими уравнениями движения точки, заданными соответственно в векторной, координатной и так называемой естественной формах.

Поскольку задание радиус-вектора точки полностью определяется заданием его проекций (координат точки), уравнения $x(t)$ и $y(t)$ в сущности те же, что и уравнение $\vec{r}(t)$,— всякому векторному уравнению соответствуют на плоскости два скалярных.

4. Физическую величину, характеризующую изменение положения точки в пространстве за единицу времени, называют средней скоростью перемещения. Если за время Δt точка переместилась на $\Delta\vec{r}$, то средняя скорость перемещения точки за это время будет равна:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{1.2}$$

Средняя скорость перемещения — величина векторная, ее направление всегда совпадает с направлением вектора перемещения.

Чтобы получить скорость в данный момент времени — мгновенную скорость, нужно рассмотреть перемещение точки за бесконечно малый промежуток времени и найти предел отношения (1.2) при условии, что $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{1.3}$$

Скорость есть производная от радиус-вектора движущейся точки по времени. Направление вектора мгновенной скорости в каждой точке траектории совпадает с направлением касательной, проведенной к траектории в данной точке.

Аналогично выражениям (1.2) и (1.3) определяют среднюю и мгновенную скорости при координатном и естественном способе задания движения.

5. Величину, характеризующую изменение скорости за единицу времени, называют средним ускорением. Если за время Δt мгновенная скорость точки изменилась от $\vec{v}_0$ до $\vec{v}$, то среднее ускорение точки за это время равно:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

Ускорение — величина векторная; направление вектора ускорения всегда совпадает с направлением вектора изменения скорости.

Чтобы получить значение ускорения в данный момент времени — мгновенное ускорение, нужно найти предел отношения (1.4) при условии, что $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{1.5}$$

Ускорение точки есть производная от скорости или вторая производная от радиус-вектора движущейся точки по времени.

В общем случае криволинейного движения точки вектор ее ускорения $\vec{a}$ в каждой точке траектории направлен под некоторым углом α к касательной, проведенной к кривой в этой точке.

При изучении криволинейного движения точки вектор $\vec{a}$ удобно раскладывать по касательной и нормали к траектории на составляющие $\vec{a}_к$ и $\vec{a}_н$, называемые соответственно касательным (тангенциальным) и нормальным (центростремительным) ускорениями:

$$\vec{a} = \vec{a}_к + \vec{a}_н, \quad a_к = a\cos\alpha, \quad a_н = a\sin\alpha.$$

Проекция полного ускорения на касательную к траектории называется касательной проекцией ускорения, проекция на нормаль — нормальной проекцией. Касательное ускорение направлено по скорости или противоположно ей: оно характеризует изменение модуля скорости. Нормальное ускорение перпендикулярно скорости, оно характеризует изменение скорости по направлению.

В зависимости от того, направлено ли касательное ускорение в сторону движения ($a_к > 0$) или в противоположную сторону ($a_к < 0$), модуль скорости в криволинейном движении возрастает или уменьшается. Если $a_к = 0$ и $a_н \neq 0$, то изменяется только направление скорости; модуль же ее остается неизменным. Такое криволинейное движение будет равномерным. Если $a_н = 0$, то направление вектора скорости с течением времени не меняется — движение точки является прямолинейным.

6. Простейший вид механического движения — прямолинейное движение точки с постоянным ускорением.

Если ось координат направить в сторону начального смещения точки и за начало координат принять ее начальное положение ($\vec{r} = 0$ при $t = 0$), то для такого движения $r = x = s$; $\vec{a} = \text{const}$; $a = a_к = a_x = \text{const}$; $a_н = 0$; (1.6)

$$v_x = v_{0x} + at; \tag{1.7}$$

$$v_{ср} = \frac{v_{0x} + v_x}{2}; \tag{1.8}$$

$$s_x = v_{ср}t = \frac{v_{0x} + v_x}{2}\,t; \tag{1.9}$$

$$s_x = v_{ox}t + \frac{a_x t^2}{2}; \tag{1.10}$$

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}. \tag{1.11}$$

Соотношения (1.6), (1.7) и (1.10), выражающие законы изменения ускорения, скорости и перемещения с течением времени, называют соответственно уравнением ускорения, скорости и законом движения точки.

Движение точки с постоянным ускорением включает в себя равномерное и равноускоренное.

При равномерном движении скорость точки с течением времени не меняется ($\vec{v} = \vec{v}_0 = \text{const}$), и в уравнениях (1.7) и (1.10) нужно положить $a_x = 0$.

7. К равноускоренному движению можно отнести движение тел под действием силы тяжести, если их расстояние h по вертикали, отсчитанное от поверхности Земли, мало по сравнению со средним расстоянием тела до центра Земли. Так как сила тяжести сообщает всем телам, находящимся на одинаковом расстоянии от центра Земли, одинаковое ускорение $\vec{g}$ (ускорение свободного падения) и при $h \ll R_З$ с достаточной степенью точности можно считать, что $g = 9{,}8$ м/с^2, то законы этого движения в принятых обозначениях получаются автоматической заменой в формулах (1.7)—(1.11) a_x на g_y и s_x на h.

8. Простейшим видом криволинейного движения является равномерное движение точки по окружности. При таком движении $R = \text{const}$, $a_к = 0$, $v = \text{const}$, а нормальное (центростремительное) ускорение $a_н = \text{const}$.

Если точка движется по окружности радиусом R с линейной скоростью v, делая n оборотов за время t, то

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi Rn}{t} = 2\pi Rf = \frac{2\pi R}{T}; \tag{1.12}$$

$$a_н = \frac{v^2}{R} = 4\pi^2 f^2 R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \tag{1.13}$$

$$\text{где} \quad f = \frac{n}{t} \quad \text{и} \quad T = \frac{t}{n} = \frac{1}{f} \, — \tag{1.14}$$

соответственно число оборотов в единицу времени (скорость вращения) и продолжительность одного оборота (период обращения).

9. По характеру движения отдельных частиц твердого тела различают поступательное и вращательное движение тел.

При поступательном движении тела всякая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной самой себе.

При вращательном движении все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной неподвижной прямой, называемой осью вращения тела.

Поступательное движение тел описывают теми же величинами и уравнениями, что и движение материальной точки; кинематическими характеристиками вращательного движения тел служат угол поворота φ, угловая скорость ω и угловое ускорение α. Угловую скорость и угловое ускорение тел при вращении вокруг неподвижной оси можно определить аналогично скорости и ускорению прямолинейного движения:

$$\omega_{ср} = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi n}{t} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}; \tag{1.15}$$

$$\alpha_{ср} = \frac{\omega - \omega_0}{t}. \tag{1.16}$$

Для тел, вращающихся с постоянным угловым ускорением, по аналогии с прямолинейным движением имеем:

$$\begin{gathered} \omega = \omega_0 + \alpha t; \\ \varphi = \frac{\omega + \omega_0}{2} t; \\ \varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}; \\ \varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\alpha}. \end{gathered} \tag{1.17}$$

В случае равномерного вращения $\omega = \text{const}$ и в формулах (1.17) необходимо положить $\alpha = 0$.

Из сравнения формул (1.12) и (1.15) видно, что линейная скорость v точек тела, удаленных от его оси вращения на расстояние R, равна:

$$v = \omega R. \tag{1.18}$$

Отсюда следует, что модули касательного и нормального ускорений этих точек связаны с кинематическими характеристиками вращательного движения тела формулами:

$$a_к = \alpha R; \quad a_н = \omega v = \omega^2 R. \tag{1.19}$$

10. Очень часто движение тел рассматривают относительно какого-либо другого тела, которое в свою очередь перемещается по отношению к телу отсчета, принятому условно за неподвижное. Движение тела относительно системы координат, связанной с подвижным телом отсчета, называют относительным, а движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной — переносным. Результирующее движение тел относительно неподвижной системы отсчета называют абсолютным движением. В соответствии с этим различают относительное, переносное и абсолютное перемещение, скорость и ускорение. Если известны векторы относительного $\vec{r}_0$ и переносного $\vec{r}_п$ перемещений, то абсолютное перемещение $\vec{r}_а$ равно их геометрической сумме и находится по правилу сложения векторов:

$$\vec{r}_а = \vec{r}_0 + \vec{r}_п. \tag{1.20}$$

Аналогично находятся абсолютная скорость и абсолютное ускорение:

$$\vec{v}_а = \vec{v}_0 + \vec{v}_п; \tag{1.21}$$

$$\vec{a}_а = \vec{a}_0 + \vec{a}_п. \tag{1.22}$$

(Последнее соотношение имеет место лишь в том случае, если переносное движение является поступательным.)

11. Всякое перемещение плоской фигуры, происходящее в плоскости расположения этой фигуры (такое движение называют плоскопараллельным), можно рассматривать в любой момент времени как результат наложения поступательного движения тела вместе с некоторой произвольной точкой O тела (называемой полюсом) и вращательного движения тела относительно этой точки.

Скорость любой точки тела при его плоскопараллельном движении равна:

$$\vec{v} = \vec{v}_п + \vec{v}_O,$$

где $v_п$ — скорость полюса; $v_O = \omega r$ — линейная скорость рассматриваемой точки, обусловленная поворотом тела около полюса с угловой скоростью ω; r — расстояние от точки до полюса.

Выбирая полюс O в различных точках тела, можно по-разному осуществить разложение плоского движения на поступательное и вращательное. В каждом из этих случаев перемещение (скорость) в поступательном движении может быть различным, угловое перемещение (скорость) будет одинаковым.

В общем случае плоскопараллельного движения твердого тела существует такая точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Эту точку называют мгновенным центром скоростей.

Если за полюс принять мгновенный центр скоростей, плоскопараллельное движение тела можно представить как непрерывный ряд вращений вокруг полюса. Абсолютная скорость v произвольной точки тела, удаленной от мгновенного центра на расстояние R, равна в этом случае $v = \omega R$.

а) При качении без проскальзывания плоской фигуры по неподвижной поверхности мгновенный центр скоростей совпадает с точкой соприкосновения тела с поверхностью.

б) Мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров, восставленных из двух данных точек тела к линиям векторов абсолютной скорости этих точек.

в) В том случае, когда перпендикуляры, проведенные из указанных точек, сливаются в один, мгновенный центр скоростей лежит в точке пересечения перпендикуляра с линией, проведенной через концы векторов скоростей этих точек.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

При решении задач по физике на те или иные разделы курса, кроме общих правил решения, приходится учитывать некоторые дополнения к ним, связанные со спецификой самих разделов.

Задачи по кинематике, разбираемые в курсе элементарной физики, включают в себя задачи о равномерном и равноускоренном прямолинейном движении одной или нескольких точек, задачи о движении точки по окружности и небольшое количество задач, связанных с вращением твердого тела.

Решение всех задач по кинематике точки основано на применении закона движения (1.1) к тому или иному конкретному условию. Движение материальной точки на плоскости полностью известно, если известен радиус-вектор как функция времени $\vec{r}(t)$ или, что все равно, две скалярные функции $x(t)$ и $y(t)$, представляющие собой *проекции векторного уравнения движения* на оси прямоугольной системы координат. Эти функции содержат полную информацию о движении точки и позволяют определить ее положение и скорость в любой интересующий нас момент времени.

а) В случае равномерного прямолинейного движения закон движения точки в инерциальных системах отсчета выражается формулой

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t,$$

где $\vec{r}_0$ — радиус-вектор движущейся точки в начале промежутка наблюдения t. При таком движении модуль вектора перемещения равен пройденному пути $\Delta r = s$ и закон движения точки представляется формулой $s = vt$. С помощью этого уравнения и заданных вспомогательных условий можно всегда представить задачу о *равномерном прямолинейном движении в виде нескольких простых уравнений*. Чтобы правильно их составить, можно рекомендовать следующий порядок действий.

Прочитав условие задачи, следует сделать схематический чертеж, на котором нужно отметить систему отсчета и траекторию движения точки. Затем следует указать заданные и искомые отрезки пути, скорости и время движения тел. После этого, с помощью формулы пути равномерного движения, нужно установить связь между всеми величинами, отмеченными на чертеже, и записать в виде уравнений все дополнительные условия задачи, которые, как правило, выражают одни интервалы времени и отрезки пути через другие.

Большие затруднения у учащихся вызывают задачи о равномерном движении тел относительно других, которые в свою очередь движутся по отношению к Земле. Особое внимание в них нужно *обратить на выбор системы отсчета*. В принципе, конечно, безразлично, какое тело принять за неподвижное, однако удачно выбранная система отсчета значительно упрощает решение и сводит математические выкладки к минимуму. Так, например, если в задаче дано движение нескольких тел и нужно найти их скорость или смещение относительно друг друга, то удобно движения рассматривать в системе отсчета, связанной с одним из этих тел. Тело отсчета считается неподвижным, и первое, что необходимо сделать после выбора системы отсчета,— это определить скорости и смещения тел относительно тела отсчета. Затем, как обычно, составляются уравнения равномерного движения и записываются дополнительные формулы.

И наконец, нужно выделить задачи, где тела одновременно участвуют в двух движениях. Анализируя условие, здесь нужно прежде всего установить, какие из заданных кинематических характеристик следует отнести к абсолютному, какие к переносному и какие к относительному движению. Составляя для них уравнения, необходимо следить за тем, чтобы начало отсчета времени было одинаковым для всех тел, участвующих в движении.

Связь между кинематическими величинами при сложных движениях дается формулами (1.20)—(1.22). Подстановкой в них развернутых выражений для $r_{п}$, $r_{о}$, $v_{п}$ и $v_{о}$ заканчивается первая часть решения — составление системы алгебраических уравнений, описывающих данный процесс.

б) Если движение точки равноускоренное ($\vec{a} = \text{const}$), то закон движения выражается формулой

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

а скорость

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

В тех случаях, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}_0$ лежат на одной прямой, точка движется прямолинейно, если нет — движение происходит по параболе в плоскости, содержащей эти векторы.

Использовать векторные уравнения для нахождения из них модулей неизвестных величин обычно неудобно, поэтому при решении задач уравнения движения записывают в скалярной форме, т. е. уравнения $\vec{r}(t)$ и $\vec{v}(t)$ проецируют на оси прямоугольной системы координат. Не нарушая общности решения, начало координат можно всегда совместить с положением точки в начальный момент времени, и тогда двум кинематическим векторным уравнениям будут соответствовать два скалярных уравнения для координат:

$$x = v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}; \quad y = v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}$$

и два для проекций скорости точки на оси координат:

$$v_x = v_{0x} + a_x t; \quad v_y = v_{0y} + a_y t.$$

В эти уравнения входят все кинематические характеристики равноускоренного движения точки, и из них, в частности, путем простых алгебраических преобразований получаются формулы (1.9) и (1.11). Система четырех уравнений (1.7), (1.9)—(1.11) содержит только два независимых уравнения — из любой пары этих уравнений получаются два других. Однако практически удобнее пользоваться уравнениями скорости и движения, а формулы

$$x = \frac{v_x + v_{0x}}{2} t \quad \text{и} \quad x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

применять лишь тогда, когда из них можно сразу найти неизвестную величину.

Проанализировав условие задачи, нужно сделать чертеж, на котором указать траекторию движения точки, векторы скорости в указанные моменты времени, векторы ускорений и заданные интервалы времени. Затем необходимо установить систему отсчета. Начало координат всегда удобно помещать в начальной точке движения, а оси Ox и Oy (или одну из них, если движение прямолинейное) направлять в сторону начального движения тела. После этого следует отметить все координаты движущегося тела в заданные и интересующие нас моменты времени и спроецировать векторы скоростей и ускорений на оси Ox и Oy.

В общем случае оси координат удобно направлять так, чтобы приходилось делать минимум разложений векторов, т. е. чтобы как можно больше проекций векторов оказались равными нулю и уравнения по осям были предельно простыми. Выполнив чертеж, нужно установить связь между всеми величинами, введенными в решение (отмеченными на чертеже), с помощью кинематических формул для координат и проекций скоростей и записать в виде формул все дополнительные условия задачи.

Решая задачи на движение тел, брошенных вертикально вверх в гравитационном поле Земли, нужно обратить особое внимание на следующее. Уравнения координаты и скорости для тела, брошенного вертикально вверх, дают общую зависимость y и v_y для всего времени движения тела. Они справедливы не только для замедленного подъема вверх, но и для дальнейшего равноускоренного падения тела, поскольку движение тела после остановки на мгновение в верхней точке траектории происходит с прежним ускорение $\vec{g}$. Под y и v_y при этом всегда подразумеваются координата и проекция скорости движущейся точки на вертикальную ось спустя время t после начала движения.

Если тело брошено вертикально вверх со скоростью $\vec{v}_0$, то время $t_{\text{под}}$ и высота $h_{\max}$ его подъема равны:

$$t_{\text{под}} = \frac{v_0}{g}; \quad h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{g t_{\text{под}}^2}{2}.$$

Кроме того, время падения этого тела в исходную точку равно времени подъема на максимальную высоту ($t_{\text{пад}} = t_{\text{под}}$), а скорость падения по модулю равна начальной скорости бросания ($v_{\text{пад}} = v_0$). Эти формулы полезно помнить и использовать как готовые результаты при составлении вспомогательных уравнений.

Движение тел, брошенных под углом к горизонту, можно рассматривать как результат наложения двух одновременных прямолинейных движений по осям Ox и Oy, направленных вдоль поверхности Земли и по нормали к ней. Учитывая это, решение задач такого типа удобно начинать с нахождения проекций вектора начальной скорости по этим осям и затем составлять уравнения для каждого направления. При этом необходимо иметь в виду, что тело, брошенное под углом к горизонту, при отсутствии сопротивления воздуха и небольшой начальной скорости летит по параболе и время движения по оси Ox равно времени движения по оси Oy, поскольку оба эти движения происходят одновременно.

Составив полную систему кинематических уравнений, описывающих движение точки, и проверив число неизвестных — оно должно быть равно числу уравнений, можно приступать к ее решению относительно искомых величин, руководствуясь данными ранее указаниями.

В связи с введением в школьную программу элементов высшей математики, можно предложить ряд задач, требующих применения методов математического анализа к исследованию функции на экстремум. Схема решения задач, в которых требуется определить максимальное или минимальное значение одной из кинематических величин, остается прежней: нужно получить алгебраическое выражение искомой величины в произвольный момент времени, записав ее через заданные характеристики движения. Чтобы найти максимум или минимум этой величины или условие, при котором она будет экстремальной, нужно продифференцировать полученное выражение и приравнять производную к нулю. В результате мы получим уравнение, из которого можно найти значение переменного параметра, определяющее максимальное или минимальное значение искомой величины. Будет ли функция иметь максимум или минимум, можно иногда определить из физических соображений, а в общем случае — по второй производной. Если вторая производная окажется больше нуля, функция имеет минимум, если меньше — максимум. Подставляя найденное значение параметра в исходную формулу, мы получим экстремальное значение искомой величины.

в) Задачи о движении точки по окружности принципиально ничем не отличаются от решения задач о прямолинейном движении. Особенность состоит лишь в том, что здесь наряду с общими формулами кинематики точки приходится использовать формулы (1.12) — (1.14) для линейной скорости и центростремительного ускорения.

г) Решение задач о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси основано на применении формул (1.17) с учетом (1.18) и (1.19). Как и в случае поступательного движения, для составления кинематических уравнений вращательного движения достаточно использовать только основные формулы — уравнения угловой скорости и углового перемещения.

д) В заключение остановимся на задачах, требующих использования графиков. Основное требование, которое предъявляется при решении таких задач,— это твердое знание графиков элементарных функций и умение их исследовать. В частности, нужно хорошо знать уравнение прямой линии и параболы, отображающих геометрически скалярные уравнения ускорения, скорости, пути и координаты при равномерном и равнопеременном движениях.

Первую группу графических задач составляют задачи, в которых дается график зависимости (обычно от времени) одних кинематических величин и по нему нужно построить график зависимости между какими-либо другими величинами. Приступая к решению таких задач, необходимо внимательно проанализировать предложенный график, установить характер заданного движения и представить данную зависимость в виде уравнения. По этому уравнению нужно определить искомую зависимость и, исследовав ее, построить нужный график. При достаточном навыке в решении подобных задач искомый график можно строить сразу, не прибегая к алгебраическим выкладкам.

Вторую группу составляют задачи, решение которых предполагает отображение условий, заданных аналитически, на одном из графиков зависимости кинематических величин от времени. Как только условия такой задачи записаны графически, ее дальнейшее решение состоит в том, чтобы найти ту или иную величину на вычерченном графике, что, как правило, особого труда не представляет. Большое внимание в задачах подобного типа следует обращать на рациональный выбор графика, на котором будет удобнее всего представить условия задачи и легче всего указать искомую величину.

Пример 1. Велосипедист ехал из одного города в другой. Половину пути он проехал со скоростью $v_1 = 12$ км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $v_2 = 6$ км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью $v_3 = 4$ км/ч. Определите среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

Р е ш е н и е. Установив, что задача дана на равномерное прямолинейное движение одного тела, и представив себе весь процесс движения, делаем схематический чертеж (рис. 1.1). При составлении чертежа прежде всего изображаем траекторию движения и выбираем на ней начало отсчета движения (точка O). Весь путь разбиваем на три отрезка s_1, s_2, s_3, на каждом из них указываем скорости $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ и отмечаем время движения t_1, t_2 и t_3. Составляем уравнения движения для каждого отрезка пути:

$$s_1 = v_1 t_1;\ s_2 = v_2 t_2;\ s_3 = v_3 t_3 \ —$$

и записываем дополнительные условия задачи:

$$s_1 = s_2 + s_3;\ t_2 = t_3;\quad v_{\text{ср}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3}.$$

Читаем еще раз условие задачи, выписываем числовые значения известных величин и, определив число неизвестных в полученной системе уравнений (их семь: s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3 и $v_{\text{ср}}$), решаем ее относительно искомой величины $v_{\text{ср}}$.

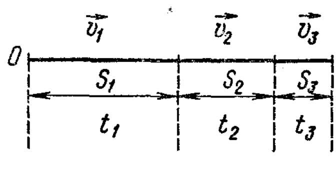

Рис. 1.1

Если при решении задачи полностью

учтены все условия, но в составленных уравнениях число неизвестных получается больше числа уравнений, это означает, что при последующих вычислениях одно из неизвестных сократится, такой случай имеет место и в данной задаче.

Решение системы относительно средней скорости дает:

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3}.$$

Подставив числовые значения в расчетную формулу, получим:

$$v_{\text{ср}} \approx 7 \text{ км/ч}.$$

Пример 2. От буксира, идущего против течения реки, оторвалась лодка. В тот момент, когда на буксире заметили лодку, она находилась от него на достаточно большом расстоянии s_0. С буксира быстро спустили катер, который доплыл до лодки и возвратился с нею назад. Сколько времени заняла поездка катера и какое расстояние он проплыл в одну и другую сторону, если скорости катера и буксира относительно воды равны соответственно v_1 и v_2?

Решение. В задаче рассматривается равномерное движение тел относительно друг друга, причем каждое тело участвует в сложном движении — оно движется относительно воды и вместе с водой, которая сама течет относительно берега. Все тела, участвующие в движении: лодка, буксир и катер, имеют скорости относительно воды и переносную вместе с водой. Изучая движение тел в системах отсчета, движущихся равномерно и прямолинейно относительно неподвижной системы отсчета (как, например, в данной задаче), все расчеты можно производить так, как если бы переносного движения (течения) не было. Это почти очевидное обстоятельство следует из принципа относительности движения.

Изучая относительное движение двух или нескольких тел, систему отсчета удобно связывать с одним из этих тел, принимая его за тело отсчета, и рассматривать перемещения, скорости и ускорения относительно этого тела. В предлагаемой задаче систему отсчета удобно связать с буксиром, так как все происходящие события рассматриваются по отношению к нему. В системе отсчета, связанной с буксиром, сам буксир покоится, лодка удаляется от него со скоростью v_2, катер удаляется от буксира со скоростью $v_1 + v_2$, катер вместе с лодкой приближается к нему со скоростью $v_1 - v_2$.

Допустим, что за время t_1, спустя которое катер догонит лодку, буксир удалился от лодки на расстояние s_1, тогда уравнение движения для катера и лодки за это время дает:

$$s_0 + s_1 = (v_1 + v_2)\, t_1 \qquad (1)$$

и

$$s_1 = v_2 t_1. \qquad (2)$$

Если для возвращения на буксир катеру потребовалось время t_2, то уравнение его движения имеет вид:

$$s_0 + s_1 = (v_1 - v_2)\, t_2. \tag{3}$$

Искомое время движения катера будет равно:

$$t = t_1 + t_2, \tag{4}$$

и за это время катер проплывет расстояние

$$s = 2\,(s_0 + s_1). \tag{5}$$

Итак, получены пять уравнений, содержащих пять неизвестных величин (s_1, t_1, t_2, s и t), из которых требуется определить продолжительность поездки катера t и пройденное им расстояние s. Решая уравнения совместно, находим:

$$t = \frac{2s_0}{v_1 - v_2}; \quad s = 2s_0\left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right).$$

Если выбрать систему отсчета, движущуюся вместе с водой или связанную с Землей, решение задачи получается более сложным.

Пример 3. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 3{,}13$ м/с. Когда оно достигло верхней точки полета, из того же начального пункта с такой же начальной скоростью бросили второе тело. Определите, на каком расстоянии h от точки бросания встретятся тела; сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Делаем чертеж (рис. 1.2). Отмечаем на нем траекторию движения первого и второго тела, ось Oy направляем вертикально вверх. Выбрав начало отсчета в точке O, указываем начальную скорость тел $\vec{v}_0$, высоту h, на которой произошла встреча (координату $y = h$), и время t_1 и t_2 движения каждого тела до момента встречи. (Чтобы не загромождать чертеж, скорости тел в момент встречи не указаны.)

Уравнение движения тела, брошенного вертикально вверх, позволяет найти координату движущегося тела для любого момента времени независимо от того, поднимается ли тело вверх или падает после подъема вниз, поэтому для первого тела

$$y = v_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2},$$

а для второго

$$y = v_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2}.$$

По условию задачи $y = h$.

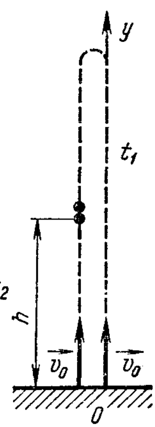

Рис. 1.2

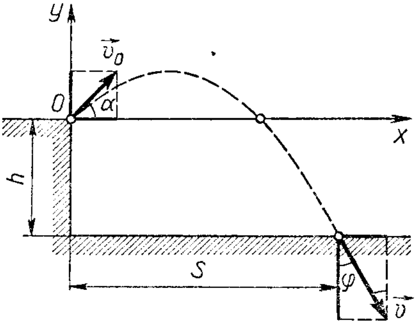

Рис. 1.3

Третье уравнение составляем, исходя из условия, что второе тело бросили позднее первого на время максимального подъема:

$$t_1 - t_2 = \tau, \quad \text{причем } \tau = \frac{v_0}{g}.$$

Решая составленную систему уравнений относительно h, получаем:

$$h = \frac{3}{4} \cdot \frac{v_0^2}{2g}; \quad h \approx 0{,}37 \text{ м}.$$

Пример 4. Артиллерийское орудие расположено на горе высотой h. Снаряд вылетает из ствола со скоростью $\vec{v}_0$, направленной под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: а) дальность полета снаряда по горизонтальному направлению; б) скорость снаряда в момент падения; в) угол падения; г) уравнение траектории и д) начальный угол стрельбы, при котором дальность полета наибольшая.

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 1.3). Прямоугольную систему координат выбираем так, чтобы ее начало совпало с точкой бросания, а оси были направлены вдоль поверхности Земли и по нормали к ней в сторону начального смещения снаряда. Изображаем траекторию снаряда, его начальную скорость $\vec{v}_0$, угол бросания α, высоту $\vec{h}$, горизонтальное перемещение $\vec{s}$, скорость в момент падения $\vec{v}$ (она направлена по касательной к траектории в точке падения) и угол падения φ (углом падения тела называют угол между касательной к траектории, проведенной в точку падения, и нормалью к поверхности Земли).

Для составления кинематических уравнений движения спроецируем векторы скорости $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$ и вектор ускорения $\vec{g}$ на оси координат Ox и Oy. Проекции этих векторов, как видно из чертежа, равны соответственно

$$v_0 \cos\alpha, \quad v_0 \sin\alpha, \quad v_x, \quad v_y, \quad 0 \text{ и } -g.$$

а,б) Составляем уравнения скорости и движения снаряда в проекциях по осям. Так как проекция ускорения на горизонтальную ось равна нулю, то v_x и x в любой момент времени удовлетворяют уравнениям

$$v_x = v_0 \cos\alpha \tag{1}$$

и

$$x = v_0 \cos\alpha\, t. \tag{2}$$

Для вертикальной оси будем иметь:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt; \tag{3}$$

$$y = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}. \tag{4}$$

В момент времени t_1, когда снаряд упадет на землю, его координаты равны:

$$x = s; \quad y = -h. \tag{5}$$

В последнем уравнении h взято со знаком «минус», так как за время движения снаряд сместится относительно уровня отсчета O высоты в сторону, противоположную направлению, принятому за положительное.

Результирующая скорость в момент падения равна:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{6}$$

В составленной системе уравнений пять неизвестных; нам нужно определить s и v.

Из уравнений (4) и (5) находим время полета снаряда:

$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}.$$

Подставляя выражение для t_1 в формулы (2) и (3) с учетом (5), соответственно получаем:

$$s = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha + v_0 \cos\alpha \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}, \tag{7}$$

$$v_y = -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}. \tag{8}$$

После этого из (6) с учетом (1) и (8) находим:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \tag{9}$$

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы.

Если $h = 0$, т. е. снаряды падают на уровне вылета, то согласно формуле (7) дальность их полета равна $s = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}$. Если при этом угол бросания равен 45° ($\sin 2\alpha = 1$), то при заданной начальной скорости v_0 дальность полета наибольшая:

$$s_{\max} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Подставив в выражение (9) значение $h = 0$, получим, что скорость снаряда в момент его подлета к уровню, с которого был произведен выстрел, равна его начальной скорости: $v = v_0$.

При отсутствии сопротивления воздуха скорость падения тел равна по модулю их начальной скорости бросания независимо от того, под каким углом было брошено тело, лишь бы точки бросания и падения находились на одном уровне. Учитывая, что проекция скорости на горизонтальную ось с течением времени не изменяется, легко установить, что в момент падения скорость тела образует с горизонтом такой же угол, как и в момент бросания.

в) Угол падения можно найти, исходя из того, что скорость тела в любой точке траектории направлена по касательной. Из рисунка 1.3 видно, что в точке падения $\operatorname{tg}\varphi=\frac{v_x}{v_y}$, откуда с учетом выражений (1) и (3) получим:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{v_0\cos\alpha}{\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2gh}}.$$

г) Чтобы найти уравнение траектории снаряда, нужно установить связь между его координатами x и y в произвольный момент времени t. Если в уравнениях (2) и (4) под x и y подразумевать смещение снаряда по осям (учитывая, что эти уравнения справедливы для всего движения снаряда), а под t — время, по истечении которого снаряд из точки O попал в данную точку траектории, то, исключая из уравнений t, мы и получим искомое уравнение. Найдем из уравнения (2) время t и, подставив его в уравнение (4), будем иметь:

$$y=\operatorname{tg}\alpha x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2.$$

Это уравнение вида $y=-ax^2+bx$; оно представляет собой уравнение параболы, проходящей через начало координат O и обращенной выпуклостью вверх. Таким образом, тело, брошенное под углом α к горизонту, при отсутствии сопротивления воздуха летит по параболе. Нетрудно заметить, что этот вывод имеет место для любых углов бросания.

д) Решая уравнения (2), (4), (5) относительно начального угла бросания α, получим:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_0^2}{gs}\left(1\pm\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}-\left(\frac{gs}{v_0^2}\right)^2}\right). \tag{10}$$

Поскольку угол бросания не может быть мнимым, то это выражение имеет физический смысл лишь при условии, что

$$1+\frac{2gh}{v_0^2}-\left(\frac{gs}{v_0^2}\right)^2\geqslant 0,$$

т. е. $s\leqslant\frac{v_0\sqrt{v_0^2+2gh}}{g}$, откуда следует, что максимальное перемещение снаряда по горизонтальному направлению равно:

$$s_{\max}=\frac{v_0\sqrt{v_0^2+2gh}}{g}.$$

Подставляя выражение для $s=s_{\max}$ в формулу (10), получим для угла α, при котором дальность полета наибольшая:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_0^2}{gs_{\max}}=\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}.$$

Пример 5. Камень брошен на склоне горы под углом α к ее поверхности (рис. 1.4). *а*) Определите дальность полета камня и его наибольшую высоту подъема над склоном, если начальная скорость камня равна $\vec{v}_0$, угол наклона горы к горизонту β. б) По какому закону изменяется с течением времени нормальная и ка-

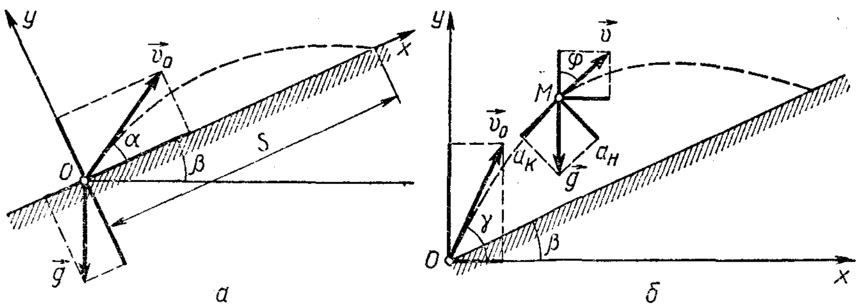

Рис. 1.4

сательная проекции полного ускорения камня, а также радиус кривизны траектории? Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. а) Выберем прямоугольную систему координат с началом отсчета в точке бросания камня так, чтобы ось Ox шла вдоль поверхности Земли, а ось Oy — перпендикулярно к ней.

Изобразим на чертеже (рис. 1.4, *а*) траекторию движения камня, его начальную скорость $\vec{v}_0$ и ускорение $\vec{g}$. Отметим также координаты камня в интересующий нас момент времени (в момент падения): $x = s$, $y = 0$. Для составления кинематических уравнений движения камня спроецируем векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{g}$ на оси координат Ox и Oy. Проекции этих векторов по осям равны соответственно:

$$v_0\cos\alpha;\ v_0\sin\alpha;\ -g\sin\beta;\ -g\cos\beta.$$

Составляем уравнение движения в проекциях на оси с учетом того, что за время t_1 всего движения перемещение камня по нормали к поверхности (по оси Oy) оказалось равным нулю, а вдоль поверхности (по оси Ox) — $\vec{s}$, т. е. что при $t = t_1$ $y = 0$; $x = s$.

$$0 = v_0\sin\alpha t_1 - \frac{g\cos\beta t_1^2}{2};\quad s = v_0\cos\alpha t_1 - \frac{g\sin\beta t_1^2}{2}.$$

По условию задачи v_0, α и β нам заданы, поэтому в составленных уравнениях только две неизвестные величины: s и t_1.

Из первого уравнения определяем время полета камня:

$$t_1 = \frac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\beta}.$$

Подставляя это выражение для t_1 во второе уравнение, находим:

$$s = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)}{g\cos^2\beta}.$$

Если положить здесь $\beta = 0$, что соответствует случаю, когда тело брошено под углом α к горизонтальной поверхности, то

$$s = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Этот результат, как и следовало ожидать, совпадает с результатом предыдущего примера.

Предлагаем самим читателям определить максимальную высоту подъема камня над поверхностью горы и угол падения.

б) Тело, брошенное под углом к горизонту, под действием силы тяжести летит с постоянным ускорением $\vec{g}$. Это ускорение в каждой точке траектории образует с вектором скорости некоторый угол φ. Выберем оси координат так, как указано на рисунке 1.4, *б*, и изобразим на чертеже траекторию движения тела, его начальную скорость $\vec{v}_0$, а также скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{g}$ тела в произвольной точке M траектории. Полагая для простоты $\alpha + \beta = \gamma$, спроецируем векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{v}$ на оси координат. Проекции этих векторов равны соответственно $v_0 \cos\gamma$, $v_0 \sin\gamma$, $v \sin\varphi$ и $v \cos\varphi$.

Вектор полного ускорения — вектор $\vec{g}$ спроецируем на направление касательной к траектории движения тела и нормаль в точке M. Как видно из чертежа, касательная $a_к$ и нормальная $a_н$ проекции вектора $\vec{g}$ равны соответственно:

$$a_к = g \cos\varphi \text{ и } a_н = g \sin\varphi. \tag{1}$$

Для нахождения угла φ составим уравнения для проекций скорости на выбранные оси:

$$v \sin\varphi = v_0 \cos\gamma, \tag{2}$$

$$v \cos\varphi = v_0 \sin\gamma - gt, \tag{3}$$

причем

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \tag{4}$$

Из уравнений (2) — (3) находим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0 \cos\gamma}{v_0 \sin\gamma - gt},$$

и следовательно, согласно (1) $a_к = \dfrac{(v_0 \sin\gamma - gt)\, g}{\sqrt{(v_0 \cos\gamma)^2 + (v_0 \sin\gamma - gt)^2}}$,

$$a_н = \frac{v_0 g \cos\gamma}{\sqrt{(v_0 \cos\gamma)^2 + (v_0 \sin\gamma - gt)^2}}.$$

Радиус кривизны траектории в любой точке траектории равен:

$$R = \frac{v^2}{a_н}.$$

Нам известна проекция нормального ускорения тела в точке M $a_н$, модуль его скорости можно найти из уравнений (2), (3) и (4):

$$v = \sqrt{(v_0 \cos\gamma)^2 + (v_0 \sin\gamma - gt)^2}.$$

Следовательно,

$$R = \frac{[(v_0 \cos\gamma)^2 + (v_0 \sin\gamma - gt)^2]^{\frac{3}{2}}}{v_0 g \cos\gamma}.$$

Анализируя полученные выражения для $a_к$, $a_н$ и R, мы видим, что в точке бросания при $t=0$

$$a_к = g\sin\gamma;\quad a_н = g\cos\gamma;\quad R = \frac{v_0^2}{g\cos\gamma}.$$

В верхней точке траектории

$$t = \frac{v_0\sin\gamma}{g};\quad a_к = 0;\quad a_н = g;\quad R = \frac{v_0^2\cos^2\gamma}{g}.$$

В точке падения, т. е. при $t = \dfrac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\beta}$,

$$a_к = \frac{(\sin\gamma\cos\beta - 2\sin\alpha)\,g}{\sqrt{\cos^2\gamma\cos^2\beta + (\sin\gamma\cos\beta - 2\sin\alpha)^2}},$$

$$a_н = \frac{\cos\gamma\cos\beta g}{\sqrt{\cos^2\gamma\cos^2\beta + (\sin\gamma\cos\beta - 2\sin\alpha)^2}},$$

$$R = \frac{v_0^2\left[\cos^2\gamma\cos^2\beta + (\sin\gamma\cos\beta - 2\sin\alpha)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{g\cos\gamma\cos^3\beta}.$$

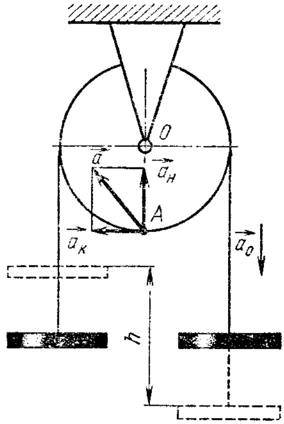

Рис. 1.5

Пример 6. Через блок радиусом R (рис. 1.5) переброшена нить, на концах которой находятся два груза, установленные на одном уровне. Предоставленные самим себе, грузы приходят в равноускоренное движение и спустя время t один из них оказывается над другим на высоте h. Определите угол поворота блока, его угловую скорость и полное ускорение точки A в конце интервала времени t. Проскальзыванием нити по блоку пренебречь.

Решение. Проставляем на чертеже смещение грузов h за время t и, приняв за начало отсчета точку O, расставляем векторы касательного $\vec{a}_к$, нормального $\vec{a}_н$ и полного $\vec{a}$ ускорений точки A.

Так как по условию задачи нить по блоку не проскальзывает, то касательное ускорение всех точек, лежащих на ободе, по модулю равно ускорению грузов: $a_к = a_0$.

Поскольку движение грузов равноускоренное и за время t они смещаются относительно друг друга на расстояние h, уравнение движения для каждого груза имеет вид:

$$\frac{h}{2} = \frac{a_0 t^2}{2}, \tag{1}$$

так как ускорение у них одинаковое и каждый груз проходит расстояние $\dfrac{h}{2}$.

Записываем кинематические уравнения движения для блока, учитывая, что он вращается равноускоренно:

$$\omega = \alpha t \text{ и } \varphi = \frac{\alpha t^2}{2}. \tag{2}$$

Угловая скорость ω и угловое ускорение α блока связаны с нормальным и касательным ускорениями точки A формулами

$$a_н = \omega^2 R \text{ и } \alpha = \frac{a_к}{R}. \qquad (3)$$

Полное ускорение точки A равно:

$$a = \sqrt{a_к^2 + a_н^2}. \qquad (4)$$

По условию задачи нам даны R, t и h, поэтому в составленной системе уравнений неизвестными являются a_0, ω, α, φ, $a_н$ и a. Решая уравнения совместно относительно искомых неизвестных φ, ω и a, получим:

$$\varphi = \frac{h}{2R}; \quad \omega = \frac{h}{Rt}; \quad a = \frac{h\sqrt{h^2+R^2}}{Rt^2}.$$

Пример 7. Катушка с намотанной на нее нитью лежит на горизонтальной поверхности стола (рис. 1.6, *а*) и может катиться по ней без скольжения. С какой скоростью будет перемещаться ось катушки, если конец нити тянуть в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{u}$? Радиус внутренней части катушки r, внешней —R. Каковы будут скорость и ускорение точки A?

Решение I. Качение катушки по столу можно представить как результат наложения двух одновременных независимых движений: переносного поступательного движения всех точек катушки с одинаковыми скоростями $\vec{v}_0$, равными по модулю скорости оси катушки, и относительного — вращения вокруг ее оси с некоторой угловой скоростью $\vec{\omega}_0$. Учитывая это, абсолютную (результирующую) скорость $\vec{u}$ произвольной точки катушки (в том числе и точки B), удаленной от ее оси на расстояние ϱ, можно представить как векторную сумму скоростей этой точки в переносном и относительном движении, т. е.

$$\vec{u} = \vec{v}_0 + \vec{v}, \qquad (1)$$

где $v = \omega_0 \varrho$ — линейная скорость точки, обусловленная круговым относительным движением.

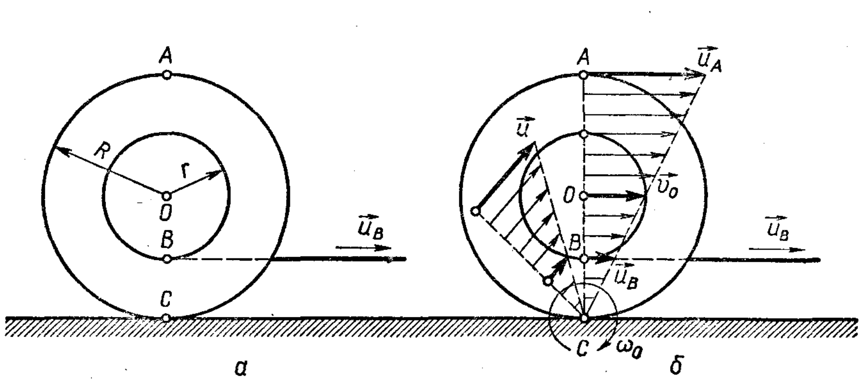

Рис. 1.6

Угловая скорость ω_0 определяется из условия, что катушка катится по поверхности стола без скольжения. Точка C катушки в момент соприкосновения с поверхностью стола не движется относительно стола, ее абсолютная скорость $u_c = 0$. Для этой точки $\varrho = R$ и, следовательно, относительная скорость движения, направленная влево, равна по модулю переносной скорости, направленной вправо, т. е.

$$\omega_0 R = v_0, \text{ откуда}$$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R}. \tag{2}$$

В задаче дана абсолютная скорость точки B, $\vec{u}_B$, равная по модулю скорости $\vec{u}$ конца нити, и надо найти переносную скорость $\vec{v}_0$ (абсолютную скорость оси катушки) и скорость $\vec{u}_A$ точки A.

Согласно выражениям (1) и (2) с учетом направления относительных скоростей точек B и A и того, что $\varrho_B = r$ и $\varrho_A = R$, получим для u и u_A соответственно:

$$u = v_0 - \frac{v_0}{R} r, \quad u_A = v_0 + \frac{v_0}{R} r,$$

откуда $v_0 = \frac{R}{R-r} u$ и $u_A = 2v_0 = \frac{2Ru}{R-r}$.

Переносное движение всех точек катушки является поступательным, поэтому для нахождения ускорения какой-либо точки катушки можно воспользоваться формулой (1.22).

Поскольку переносное движение катушки равномерное, то для всех точек $a_п = 0$ и их полное ускорение равно относительному ускорению: $\vec{a} = \vec{a}_0$. Относительное ускорение представляет собой нормальное ускорение, вызванное равномерным вращением катушки вокруг ее оси, поэтому

$$a_A = \omega_0^2 R = \frac{v_0^2}{R} = \frac{u^2 R}{(R-r)^2}.$$

Р е ш е н и е II. Движение катушки по столу есть плоскопараллельное движение твердого тела без проскальзывания, так как скорость точки C в данный момент времени равна нулю. Если принять ось, проходящую через точку C перпендикулярно плоскости чертежа, за мгновенную ось вращения, то качение катушки можно представить как непрерывный ряд мгновенных поворотов вокруг линии опоры с некоторой угловой скоростью ω_O (рис. 1.6,*б*). Связь между абсолютной скоростью u произвольной точки катушки, удаленной от мгновенной оси вращения на расстояние x, и ω_O дается формулой $u = \omega_O x$.

Учитывая, что для точек B, O и A $x_B = R - r$, $x_0 = R$, $x_A = 2R$ и что абсолютная скорость точки B равна скорости конца нити ($u_B = u$), получим для этих точек:

$$u = \omega_O (R - r); \; v_0 = \omega_O R; \; u_A = \omega_O R.$$

По условию задачи нам известны u, R и r, поэтому в составленных уравнениях неизвестными являются ω_O, v_0 и u_A. Решая систему относительно искомых неизвестных — скорости перемещения оси катушки v_0 и абсолютной скорости u_A точки A, получим:

$$v_0 = \frac{R}{R-r}u; \quad u_A = \frac{2Ru}{R-r}.$$

Несмотря на то что мы нашли скорость точки A, ее ускорение нельзя сразу определить по формуле нормального ускорения, так как нам неизвестен радиус кривизны траектории точки. Следует обратить внимание, что он равен не $2R$, как это может показаться, а $4R$ (рекомендуем доказать это читателю), поэтому для нахождения a_A нужно поступить точно так же, как это было сделано в первом случае.

При отклонении нити от горизонтального положения вверх — увеличении угла между нитью и плоскостью стола — угловая скорость вращения катушки вокруг мгновенной оси будет уменьшаться (поскольку уменьшается расстояние x при неизменной скорости u). В том случае, когда нить составит с горизонтом такой угол α_0, при котором продолжение нити пройдет через точку C (радиус $x=0$), катушка будет вращаться на месте. При углах $\alpha > \alpha_0$ катушка начнет двигаться влево.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 1

1.1. Самолет летит горизонтально над землей. Тень его движется по земле со скоростью 525 км/ч. Чему равна скорость самолета?

1.2. С автобусной станции отправляются рейсовые автобусы в пункты A, B и C, расположенные на одной трассе к югу от станции. Автобусы первого маршрута выходят со станции в среднем через 10 мин, второго — через 8 мин, третьего — через 5 мин. На каком расстоянии в среднем идет один автобус от другого на трассе, если их скорость равна 30 км/ч?

1.3. Всадник проехал за первые 40 мин 5 км. Следующий час он передвигался со скоростью 10 км/ч, а оставшиеся 6 км пути — со скоростью 12 км/ч. Определите среднюю скорость всадника за все время движения, за первый час движения и на первой половине пути.

1.4. Из пункта A выехал автомобиль с постоянной скоростью v_0. Через промежуток времени, равный t, из того же пункта в том же направлении выходит другой автомобиль и нагоняет первый в пункте B, находящемся от A на расстоянии s_1. Постройте график движения автомобиля и по графику определите скорость второго автомобиля. Решите задачу аналитически.

1.5. Первую половину пути машина шла со скоростью 40 км/ч. Затем она стала двигаться под углом 180° (30°) к своему начальному направлению движения со скоростью 60 км/ч. Чему равна средняя скорость движения и средняя скорость перемещения машины?

1.6. Колонна войск, растянувшись в длину на 2 км, движется по шоссе со скоростью 5 км/ч. Командир, находясь в арьергарде, посылает мотоциклиста с распоряжением головному отряду. Через 10 мин мотоциклист возвратился. Определите скорость движения мотоциклиста, считая, что в обе стороны он двигался с одной и той же скоростью.

1.7. Определите скорость звука в воздухе при отсутствии ветра и скорость теплохода, движущегося равномерно в море, если известно, что звуковой сигнал, посланный от середины корабля, достигает его носа через 0,103 с, а кормы через 0,097 с. Длина теплохода 68 м.

1.8. Когда две лодки равномерно движутся навстречу друг другу — одна по течению, а другая против течения реки, то расстояние между ними сокращается на 20 м за каждые 10 с. Если же лодки с прежними по модулю скоростями будут двигаться по течению реки, то расстояние между ними за то же время будет увеличиваться на 10 м. Каковы скорости лодок относительно воды?

1.9. Вертолет летит из пункта A в пункт B, расположенный южнее пункта A на 150 км, и возвращается обратно. Определите продолжительность полета, если известно, что во время рейса дул ветер с запада на восток. Скорость вертолета относительно ветра 180 км/ч, скорость ветра 20 м/с.

1.10. Пункты A и B расположены на одном берегу реки, пункт C — на другом, напротив A. Расстояния между пунктами A и B, A и C одинаковые. Рыбак плывет на лодке один раз из пункта A в B и обратно, второй — из пункта A в C и обратно. Чему равна скорость лодки относительно воды, если известно, что скорость течения воды $v = 2$ км/ч и что первая поездка требует времени в $n = 1{,}1$ раза больше, чем вторая?

1.11. Корабль плывет на юг со скоростью 42,3 км/ч. Заметив в море катер, наблюдатель, находящийся на палубе корабля, определил, что катер движется на северо-восток со скоростью 30 км/ч. Какова абсолютная скорость катера и в каком направлении он идет?

1.12. Три лодки стоят в спокойной воде на одинаковом расстоянии l друг от друга. В некоторый момент времени лодки начинают плыть с постоянной по модулю скоростью v так, что в каждый момент времени одна лодка находится на курсе другой. Через сколько времени встретятся лодки и какое расстояние пройдет каждая лодка до места встречи?

1.13. Два автомобиля идут равномерно с одинаковыми по модулю скоростями по двум прямым дорогам, пересекающимся под углом α . На какое минимальное расстояние сближаются автомобили при движении, если вначале они находились от перекрестка

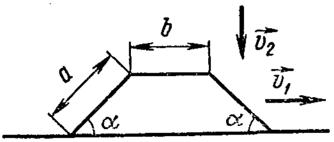

Рис. 1.7

дорог на расстояниях l_1 и l_2?

1.14. Мотоциклист находится в поле на расстоянии l от прямого шоссе. Около шоссе на расстоянии s от мотоциклиста расположена деревня, в которую ему нужно попасть как можно быстрее. Скорость мотоциклиста на шоссе v, по полю u. За какое минимальное время мотоциклист может доехать до деревни?

1.15. Вниз по течению реки на расстоянии l от берега плывет катер со скоростью $\vec{v}_0$ относительно берега. По какому направлению должна двигаться от берега лодка, чтобы доплыть до катера за минимальное время, если ее скорость относительно воды $\vec{v}_1$ и в начальный момент она находится от катера на расстоянии s? Скорость течения $\vec{u}$. Какой должна быть минимальная скорость лодки, чтобы она могла встретить катер?

1.16. Верхняя часть кабины самолета имеет в сечении форму равнобочной трапеции, размеры которой указаны на рисунке 1.7. Самолет летит горизонтально со скоростью $\vec{v}_1$ под вертикальным дождем. Скорость падения капель $\vec{v}_2$. Во сколько раз число капель, падающих на переднее и заднее стекло кабины, отличается от числа капель, падающих на крышу?

1.17. Сверхзвуковой самолет летит горизонтально на высоте 4 км. Наблюдатель, находящийся на земле, услышал звук от двигателя спустя 10 с после того, как самолет пролетел прямо над ним. Определите скорость самолета, если скорость звука равна 330 м/с.

1.18. Наблюдатель стоит на платформе около передней площадки вагона электропоезда и замечает, что первый вагон проходит мимо него после начала равноускоренного движения за 5 с. Определите время, за которое пройдет мимо наблюдателя шестой вагон, если длина каждого вагона равна 15 м, а расстояние между вагонами 1,5 м.

1.19. При равноускоренном движении точка проходит в первые два равных последовательных промежутка времени $t = 4$ с отрезки пути $s_1 = 24$ м и $s_2 = 64$ м. Чему равна средняя скорость движения точки на первой и второй половине пути?

1.20. За пятую секунду равнозамедленного движения точка проходит 5 см и останавливается. Какой путь проходит точка за третью секунду этого движения?

1.21. Длина перегона трамвайного пути равна 400 м. Зная, что в начале и в конце перегона трамвайный вагон движется с постоянным ускорением 0,5 м/с^2 и что вагон должен проходить перегон за 1 мин 20 с, определите наибольшую скорость, с которой должен двигаться вагон.

1.22. Концы нити, огибающей два неподвижных и один подвижный блок (рис. 1.8), перемещаются вниз с ускорениями $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. На какое расстояние s сместится груз A за время t, если в

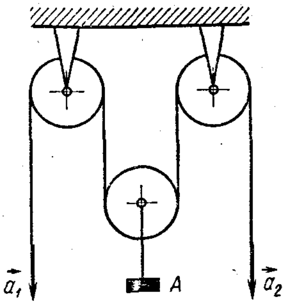

Рис. 1.8

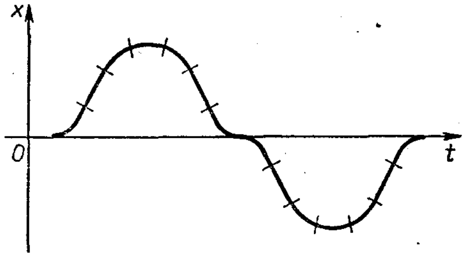

Рис. 1.9

начальный момент времени он находился в покое? Решите задачу при условии, что ускорение $\vec{a}_2$ направлено вверх и $a_1 > a_2$.

1.23. Уравнения скорости имеют вид: $v = 2$; $v = 0{,}3 + 4t$; $v = 20 - 6t$; $v = -2 + 3t$ (величины измерены в единицах СИ). Запишите уравнения движения и постройте графики скорости и движения.

1.24. Уравнения прямолинейного движения имеют вид: $s = 3$; $s = t$; $s = 5 + 0{,}2t^2$; $s = 2t - 3t^2$; $s = 16 - 4t^2$; $s = 8 - 2t + 0{,}5t^2$; $s = -t \pm t^2$ (величины измерены в единицах СИ). Запишите уравнения скорости и постройте графики движения и скорости.

1.25. На рисунке 1.9 показан график прямолинейного движения некоторого тела, причем отрезки кривых являются участками парабол. Постройте графики зависимости $v = f(t)$, $a = f(t)$, $x = f(v)$ и $a = f(v)$.

1.26. На рисунке 1.10 изображен график скорости некоторого тела. Постройте графики координат и ускорения тела в зависимости от времени и скорости.

1.27. На рисунке 1.11 показано, как меняется с течением времени скорость точки на прямолинейном участке пути. Определите максимальное и минимальное смещение точки от начального положения за время такого движения. Чему равна средняя скорость точки за время t_2? Участки кривых на графике являются полуокружностями.

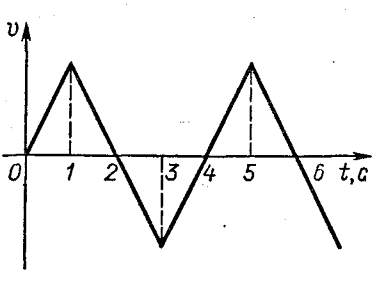

Рис. 1.10

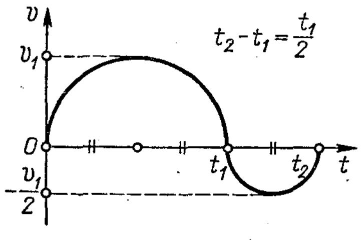

Рис. 1.11

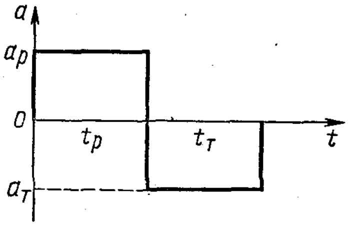

Рис. 1.12

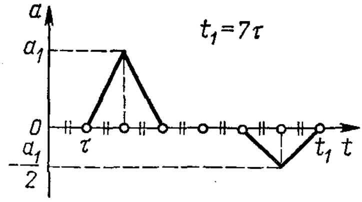

Рис. 1.13

1.28. На рисунке 1.12 представлен график ускорения автомобиля, трогающегося с места. Постройте график координат в зависимости от скорости. Рассмотрите случай, когда: а) изменение скорости при разгоне и торможении одинаковое и $a_р = a_т$, $t_р = t_т$; б) изменение скорости при торможении вдвое меньше, чем при разгоне.

1.29. График ускорения точки имеет вид, показанный на рисунке 1.13. Начертите график зависимости $v = f(t)$. Чему равна средняя скорость движения точки за время t_1, если ее начальная скорость была равна нулю?

1.30. В последнюю секунду свободного падения тело прошло путь вдвое больший, чем в предыдущую секунду. С какой высоты падало тело?

1.31. С крыши дома через каждые четверть секунды падают капли воды. На каком расстоянии друг от друга будут находиться первые две капли воды в момент отрыва десятой? С какой скоростью будет двигаться первая капля относительно второй?

1.32. Камень, брошенный вертикально вверх, упал на землю через 2 с. Определите путь и перемещение камня за 1, 1,5 и 2 с. Какую скорость приобретет камень за эти промежутки времени? Чему равна средняя скорость перемещения камня за все время движения?

1.33. Мячик брошен вертикально вверх из точки, находящейся на высоте h. Определите начальную скорость мячика, время движения и скорость падения, если известно, что за время движения он пролетел путь $3h$.

1.34. Тело, брошенное вертикально вверх, проходит в первую секунду половину высоты подъема. Какой путь пройдет тело в последнюю секунду падения?

1.35. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $\vec{v}_0$. Сколько времени оно будет находиться выше уровня, соответствующего высоте h?

1.36. Аэростат поднимается с постоянной скоростью $\vec{v}_0$. К гондоле аэростата привязан на веревке груз. Как будет двигаться груз относительно земли, если веревку, на которой он подвешен, перерезать в тот момент, когда аэростат находится на высоте h_0? Сколько времени груз будет падать на землю? Какая скорость будет у него при соприкосновении с землей?

1.37. Из гондолы аэростата, опускающегося со скоростью $\vec{v}_0$ вертикально вниз, бросают предмет со скоростью $\vec{v}_1$ относительно гондолы. По какому закону будет изменяться расстояние между этим предметом и аэростатом с течением времени? По какому закону будет изменяться это расстояние при условии, что в момент бросания аэростат поднимался вверх со скоростью $\vec{v}_0$?

1.38. Тело брошено горизонтально со скоростью $\vec{v}_0$. Выбрав начало координат в точке бросания, запишите, как меняются с течением времени: а) координаты тела; б) радиус-вектор тела и модуль этого вектора; в) векторы и модули векторов скорости и ускорения; г) угол α между векторами скорости и ускорения. Найдите вектор и модуль вектора средней скорости тела за время t от начала движения.

1.39. Дальность полета тела, брошенного в горизонтальном направлении со скоростью 9,8 м/с, равна высоте, с которой брошено тело. Чему равна эта высота и под каким углом к горизонту тело упало на землю?

1.40. С самолета, летящего на высоте h_0 со скоростью $\vec{v}_0$, сброшен груз. На какой высоте его скорость будет направлена под углом α к горизонту?

1.41. С высоты 900 м летчик заметил корабль, шедший встречным курсом с постоянной скоростью. Пикируя точно на цель под углом 60° к горизонту, летчик сбрасывает бомбу и поражает цель. Какова была скорость корабля, если в момент освобождения бомбы самолет пикировал со скоростью 700 км/ч?

1.42. Камень, брошенный под углом к горизонту, упал на землю со скоростью 9,8 м/с. Чему равны дальность и высота полета камня, если известно, что во время движения его максимальная скорость была вдвое больше минимальной?

1.43. При каком значении угла бросания дальность полета тела равна его высоте подъема?

1.44. Тело, брошенное под углом α к горизонту, упало на землю по прошествии времени t. Определите высоту подъема и дальность полета тела.

1.45. Тело, брошенное под углом к горизонту, имеет дальность полета l и максимальную высоту подъема h. Чему равны угол бросания и начальная скорость тела?

1.46. Мяч, брошенный под некоторым углом к горизонту с начальной скоростью 10 м/с, через 0,5 с имел скорость 7 м/с. Определите максимальную высоту подъема мяча и время всего движения.

1.47. Какую минимальную скорость под углом $\alpha = 30°$ к горизонту нужно сообщить гранате, чтобы перебросить ее через стену высотой $H = 6$ м, если точка бросания находится на высоте $h = 2$ м от поверхности Земли и стена удалена от нее на расстояние $s = 10$ м? Под каким углом φ нужно бросить гранату, сообщив ей наименьшую возможную скорость, чтобы перебросить ее через стену? Чему равна эта скорость?

1.48. Пожарный направляет струю воды на крышу здания высотой $h = 20$ м. На каком расстоянии s по горизонтали от пожарного и с какой скоростью v падает струя на крышу дома, если высота подъема струи $H = 30$ м и из ствола брандспойта она вырывается со скоростью $v_0 = 25$ м/с?

1.49. Орудие установлено на расстоянии 8100 м от вертикального обрыва высотой 105 м. Под каким углом нужно установить ствол, чтобы снаряды падали как можно ближе к основанию обрыва? На каком расстоянии от обрыва будут при этом падать снаряды? Начальная скорость снарядов равна 300 м/с.

1.50. На идеально гладкую наклонную плоскость, составляющую с горизонтом угол α, падает абсолютно упругий шарик. Скорость шарика в момент удара $\vec{v}$. Определите расстояние между точками первого и второго удара при условии, что: а) плоскость покоится; б) поднимается вверх со скоростью $\vec{v}$; в) движется в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{v}$ (для этого случая проанализируйте результат в функции угла α).

1.51. На вершину идеально упругой наклонной плоскости падает упругий шарик с высоты $h = 0{,}5$ м. Сколько раз шарик ударится о наклонную плоскость, если длина ее $L = 32$ м, а угол наклона к горизонту $\alpha = 30°$?

1.52. С вышки бросают одновременно в противоположные стороны два тела с одинаковыми начальными скоростями $\vec{v}_0$. Первое тело брошено под углом α, второе — под углом β к горизонту. По какому закону будет изменяться с течением времени расстояние между телами и их относительная скорость? Через сколько времени тела будут лететь под углом 90° друг к другу? Траектории движения тел лежат в одной плоскости.

1.53. Лодка переплывает реку шириной s_0, держась перпендикулярно течению. Скорость лодки относительно воды $\vec{v}$. На какое расстояние течение снесет лодку за время переправы с одного берега на другой, если известно, что при удалении от берега до середины реки скорость течения возрастает по закону $u = u_0 + ks$? Какова будет траектория движения лодки? Под каким углом к течению нужно плыть, чтобы переправиться в противоположную точку на другом берегу?

1.54. Лента перематывается с одной катушки на другую. Угловая скорость вращения мотка постоянна и равна ω, начальный радиус мотка R, толщина ленты h. Какова будет скорость подачи ленты спустя время t после начала вращения?

1.55. Вращающееся колесо с n спицами освещается неоновой лампой, работающей на частоте f. С какой минимальной скоростью должно вращаться колесо, чтобы оно казалось неподвижным? Какова будет скорость кажущегося вращения, если скорость вращения колеса будет вдвое меньше найденной?

1.56. Киноаппарат дает 8 кадров в секунду. На экране видно, что колесо автомобиля радиусом 1 м делает 2 об/с. Какова была скорость колеса при съемке?

1.57. В каком направлении и с какой минимальной скоростью должен лететь самолет на широте Ленинграда (60° северной широты), чтобы его экипаж не замечал, как ночь сменяет день? Радиус Земли принять равным 6400 км.

1.58. Гирька описывает круги радиусом 5 см с постоянным касательным ускорением 5 см/с^2. Чему равна линейная скорость гирьки к концу пятого оборота? Каковы будут ее угловая скорость и угловое ускорение в этот момент?

1.59. Точка движется по окружности радиусом 20 см с постоянным касательным ускорением 5 см/с^2. Через сколько времени после начала такого движения нормальная проекция полного ускорения будет равна касательной проекции? будет вдвое больше касательной?

1.60. На барабан намотана нить, к концу которой привязан груз. Предоставленный самому себе, груз начинает опускаться с ускорением 5,6 м/с^2. Определите ускорение точек, лежащих на ободе барабана, в тот момент, когда барабан сделает поворот на угол в 1 рад.

1.61. Камень брошен под углом 60° к горизонту со скоростью 19,6 м/с. Каковы будут нормальная и касательная проекции полного ускорения камня через 0,5 с после начала движения? В каких пределах изменяется радиус кривизны траектории камня? Принимая за начало координат точку бросания, изобразите примерные графики зависимости от времени нормальной и касательной проекций полного ускорения камня.

1.62. Через блок радиусом R переброшена нерастяжимая нить с двумя грузиками на концах. Ось блока поднимается вертикально вверх со скоростью v и один из грузов опускается при этом тоже со скоростью v. С какой скоростью поднимается второй груз? С какой угловой скоростью вращается блок вокруг своей оси? Каково ускорение точек обода блока? Нить движется по блоку без проскальзывания.

1.63. Между зубчатыми колесами радиусами R и r находится в зацеплении ролик (рис. 1.14). Колеса начинают вращаться в противоположные стороны с угловыми скоростями ω_1 и ω_2. Какова будет угловая скорость вращения ролика вокруг собственной оси? Куда и с какой скоростью будет двигаться ось ролика? Решите задачу при условии, что колеса вращаются в одну сторону.

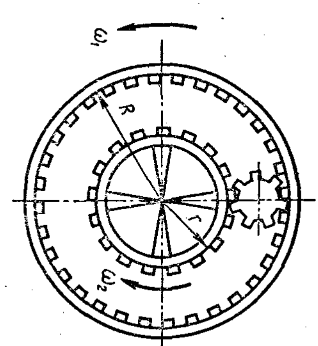

Рис. 1.14

1.64. Стержень длиной $2l$ прислонен к стене. В некоторый момент времени стержень начинает скользить, и, когда он оказывается расположенным под углом α к полу, верхний конец стержня имеет скорость v. Какова угловая скорость вращения стержня вокруг его центра?

1.65. Стержень длиной $2l$ скользит по гладкой горизонтальной плоскости. В некоторый момент скорость одного конца стержня оказалась равной v_1 и направленной под углом α к стержню, скорость второго конца v_2. Определите: а) скорость середины стержня; б) угловую скорость вращения стержня вокруг его центра; в) ускорение концов стержня.

1.66. Автомобиль идет по прямому шоссе так, что его скорость изменяется по закону $v = 1 + 2t$ (величины измерены в единицах СИ). Определите скорость и ускорение точек колеса, лежащих на концах вертикального и горизонтального диаметров, спустя 0,5 с после начала ускоренного движения, если радиус колеса равен 1 м.

Глава 2

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1 В динамике изучают законы движения тел с учетом причин, обусловливающих характер данного движения. Динамика делится на две части: динамику материальной точки и динамику твердого тела. Первую из этих частей, как более простую, изучают в курсе элементарной физики.

2. Механическое движение тел изменяется в процессе их взаимодействия друг с другом.

Меру взаимодействия тел, в результате которого тела деформируются или приобретают ускорение, называют силой. Сила — величина векторная; она характеризуется числовым значением, направлением действия и точкой приложения к телу.

Если к материальной точке (частице) приложено несколько сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, их действие можно заменить действием одной силы $\vec{F}$, которая является равнодействующей данных сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i. \tag{2.1}$$

Если реально действующие силы заменены равнодействующей, то в дальнейшем нужно считать, что к частице приложено не несколько сил, а только одна — их равнодействующая.

3. При отсутствии внешних воздействий тела сохраняют состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Это свойство, присущее всем телам, называют инерцией, а тела, им обладающие,— инертными. Меру инертности тел при поступательном движении называют массой тел.

4. Основой динамики и всей классической механики служат три закона Ньютона, сформулированные для материальной точки и тел, движущихся поступательно в инерциальных системах отсчета.

а) I закон Ньютона. Если равнодействующая всех сил, приложенных к материальной точке, равна нулю, то точка находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения:

$$\text{при } \vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad \vec{v} = \text{const}. \tag{2.2}$$

Из первого закона динамики следует, что свободное движение частиц с постоянной скоростью — движение по инерции есть такое же естественное состояние частиц, как и покой. Каждая частица может двигаться с какой угодно постоянной скоростью без каких бы то ни было внешних воздействий со стороны, но изменить свое движение — сообщить себе ускорение не может. Состояния покоя и равномерного прямолинейного движения с точки зрения динамики неразличимы.

б) II закон Ньютона. Изменение импульса частицы за единицу времени равно силе, приложенной к частице, и происходит по направлению прямой, вдоль которой действует эта сила:

$$\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}. \tag{2.3}$$

Здесь $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ и $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$ — импульсы (количества движения) частицы в начале и конце промежутка наблюдения Δt; $\vec{F}$ — сила, действующая на частицу в течение этого времени.

Если за время действия силы масса частицы не меняется ($m_1 = m_2 = m$), то согласно (2.3)

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \text{ откуда } \vec{F} = m\vec{a}. \tag{2.4}$$

Это уравнение является основным уравнением динамики материальной точки. При его использовании нужно иметь в виду следующее.

Действие сил на материальную точку не зависит друг от друга. Каждая из сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, приложенных к частице, сообщает ей такое ускорение, как если бы других сил не было (принцип независимости действия сил):

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}; \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}; \ \ldots; \quad \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}.$$

Результирующее ускорение $\vec{a}$ частицы, находящейся под действием нескольких сил, равно геометрической сумме ускорений $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ..., $\vec{a}_n$, сообщаемых каждой силой в отдельности. Модуль и направление ускорения $\vec{a}$ таковы, как если бы на частицу действовала одна сила, равная векторной сумме приложенных сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = m\sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = m\vec{a}, \tag{2.5}$$

т. е. основное уравнение динамики точки справедливо как для отдельных сил, так и для их равнодействующей.

Если равнодействующая сила $\vec{F}$ и скорость $\vec{v}$ направлены по одной прямой (под действием сил изменяется только модуль скорости), то движение материальной точки будет прямолинейным и ускоренным. Если же равнодействующая направлена под углом к вектору скорости, то движение материальной точки будет криволинейным. Если в течение всего времени движения равнодействующая перпендикулярна скорости, последняя меняется лишь по направлению. В общем же случае такого движения под действием сил изменяются и модуль, и направление скорости.

В тех случаях, когда на материальную точку действуют силы, равнодействующая которых с течением времени не меняется, движение точки будет равноускоренным: при $\vec{F}=\text{const}$ $\vec{a}=\text{const}$. В частном случае, когда $\vec{F}=0$, то $\vec{a}=0$ и $\vec{v}=\text{const}$.

Как и всякому векторному равенству, каждому из уравнений (2.2) — (2.5) на плоскости в декартовой системе координат Oxy соответствуют два скалярных уравнения, связывающие проекции сил и ускорений по соответствующим осям. Так, для уравнения (2.5) будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix}=ma_x; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy}=ma_y. \tag{2.6}$$

Именно в таком виде основное уравнение динамики точки чаще всего и используют при решении задач.

При изучении криволинейного движения, заданного в естественной форме, и в частности движения по окружности, все силы $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$, действующие на частицу в рассматриваемой точке, удобно разложить по направлению касательной и нормали к траектории движения (вектору скорости).

Равнодействующую $\vec{F}_\text{к}$ составляющих сил $\vec{F}_{i\text{к}}$ по касательной называют касательной или иначе тангенциальной силой. Эта сила сообщает частице касательное ускорение $\vec{a}_\text{к}$, и по второму закону динамики

$$\vec{F}_\text{к}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i\text{к}}=m\vec{a}_\text{к}. \tag{2.7}$$

Равнодействующую $\vec{F}_\text{н}$ составляющих сил $\vec{F}_{i\text{н}}$ по нормали называют нормальной силой. Эта сила сообщает частице нормальное ускорение $\vec{a}_\text{н}$, причем

$$\vec{F}_\text{н}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_{i\text{н}}=m\vec{a}_\text{н}; \quad \left|\sum\vec{F}_{i\text{н}}\right|=ma_\text{н}=m\frac{v^2}{R}=m\omega^2R. \tag{2.8}$$

Здесь R — радиус кривизны траектории частицы в данной точке пространства (в общем случае); при круговом движении R — радиус описываемой окружности.

Если на материальную точку действуют силы, равнодействующая которых $\vec{F}$ все время оказывается направленной перпендикулярно вектору скорости ($\vec{F}\equiv\vec{F}_\text{н}$) и с течением времени не меняется по модулю ($\vec{F}\perp\vec{v}$ и $F=\text{const}$), то модуль вектора скорости остается постоянным, а ее направление за любые равные промежутки времени меняется на одинаковый угол ($a_к = 0$, $a_н = \text{const}$). Нетрудно заметить, что в этом случае точка равномерно движется по окружности.

Материальная точка может описывать окружность (или дугу окружности) и в том случае, если равнодействующая приложенных сил образует с вектором скорости острый или тупой угол. Для этого необходимо, чтобы составляющие равнодействующей $\vec{F}$ по направлению вектора скорости и направлению, ему перпендикулярному, вызывающие касательное и нормальное ускорение точки (силы $\vec{F}_к$ и $\vec{F}_н$), изменялись так, чтобы в каждый момент времени имело место равенство (2.8) при постоянном R.

в) III закон Ньютона. Два тела действуют друг на друга с силами, равными по модулю и противоположными по направлению; приложены эти силы к разным телам.

Равенство модулей сил при взаимодействии имеет место всегда, независимо от того, находятся ли взаимодействующие тела в относительном покое или они движутся.

5. Механическое взаимодействие тел обусловлено их упругостью и свойством притягиваться друг к другу. Причина упругости кроется в электрическом взаимодействии атомов и молекул, составляющих тела.

а) Силу, вызванную деформацией тел и препятствующую изменению их формы и объема, называют упругой. Простейший случай упругого взаимодействия тел — взаимодействие груза с нитью, на которой он подвешен. Со стороны нити на груз вдоль нити в месте его закрепления действует сила упругости $\vec{T}$, называемая силой натяжения; с такой же по модулю силой груз действует на нить в противоположном направлении.

Второй, наиболее распространенный случай взаимодействия тел — это взаимодействие материальной точки с поверхностью. Силы $\vec{F}$, действующие со стороны груза (материальной точки) на опору и со стороны опоры на груз, называют соответственно силой давления и силой реакции опоры. В большинстве задач механики каждую из этих сил принято рассматривать не целиком, а по частям. Для этого силу давления и силу реакции опоры раскладывают по двум взаимно перпендикулярным направлениям: по нормали к поверхности соприкосновения и касательной. Составляющие $\vec{N}$ силы давления и реакции опоры по нормали называются силами нормального давления; составляющие силы взаимодействия тел вдоль касательной получили название сил трения $\vec{F}_{тр}$.

Различают три вида сухого трения: трение покоя, скольжения и качения. Сила трения покоя может меняться в пределах от $-\vec{F}_{тр.\max}$ до $+\vec{F}_{тр.\max}$. Модуль максимальной силы трения покоя определяют из соотношения

$$F_{тр.\max} = \mu N, \tag{2.9}$$

где μ — постоянный для данной пары соприкасающихся поверхностей коэффициент, называемый коэффициентом трения покоя. При малых скоростях скольжения по этой же формуле рассчитывают и силу трения скольжения, так как в этом случае коэффициент трения скольжения мало отличается от коэффициента трения покоя.

б) Две материальные точки (два однородных шара) притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними (между их центрами) (закон всемирного тяготения):

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{2.10}$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2 · кг$^{-2}$ — гравитационная постоянная. Если тело массой m находится над поверхностью Земли на высоте h, то на него действует сила земного притяжения, равная по модулю

$$F = G\frac{mM_з}{(R_з + h)^2}. \tag{2.10$'$}$$

Предоставленное действию одной этой силы, всякое тело падает ускоренно по направлению отвесной линии и одновременно с этим участвует в суточном вращении земного шара, обладая центростремительным ускорением. Эти ускорения создаются составляющими силы притяжения по направлению отвесной линии и радиусу окружности, описываемой телом вокруг земной оси.

Составляющую силы земного притяжения по отвесному направлению в данной точке земного шара, равную $m\vec{g}$, называют силой тяжести, а ускорение $\vec{g}$, создаваемое этой силой,— ускорением свободного падения. Ускорение свободного падения не зависит от массы тела; если не учитывать вращение Земли и считать ее шаром, то $m\vec{g} = \vec{F}$ и, стало быть,

$$g = G\frac{M_з}{(R_з + h)^2}. \tag{2.11}$$

Если тело находится на поверхности Земли или на близком от нее расстоянии ($R_з \gg h$), то

$$g = g_0 = G\frac{M_з}{R_з^2} \tag{2.11$'$}$$

и можно считать, что ускорение свободного падения имеет для всех тел не только одинаковое, но и постоянное значение.

Из соотношений (2.11) и (2.11′) следует, что

$$g = \left(\frac{R_з}{R_з + h}\right)^2 g_0.$$

в) Весом тела называют силу, с которой тело действует на горизонтальную опору или нить, удерживающую его от свободного падения. Следует иметь в виду, что по модулю вес и сила тяжести могут сильно различаться друг от друга, как, например, при невесомости (или перегрузке), и отождествление их приводит к абсурду.

6. а) При изучении движения системы материальных точек силы, действующие на отдельные частицы системы, делят на внешние и внутренние.

Внешними называют силы, которые действуют на тело данной системы со стороны тел, не принадлежащих к ней. Внутренними называют силы, действующие между телами, входящими в данную систему. На основании третьего закона динамики во всякой механической системе векторная сумма внутренних сил всегда равна нулю. Систему называют замкнутой (изолированной), если геометрическая сумма внешних сил, действующих на материальные точки системы, равняется нулю.

б) При движении системы частиц существует такая точка, движение которой наиболее полно представляет механическое состояние системы в целом. Это центр масс (центр инерции) системы.

Центром масс системы, состоящей из n частиц, называется точка, радиус-вектор которой $\vec{r}_C$ относительно выбранной системы отсчета равен:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}, \tag{2.12}$$

где m_i и $\vec{r}_i$ — соответственно масса и радиус-вектор i-й частицы; M — масса всей системы.

Векторному уравнению (2.12) на плоскости соответствуют два скалярных уравнения для координат центра масс

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \tag{2.12$'$}$$

где x_i и y_i — координаты точки с номером i. В общем случае центр масс ни с одной из частиц системы не совпадает.

Если частицы, составляющие систему, движутся, то $\vec{r}_i$ меняются с течением времени. Дифференцируя обе части равенства (2.12) по t, получим:

$$\vec{v}_C \sum m_i = M\vec{v}_C = \sum m_i \vec{v}_i, \tag{2.13}$$

где $\vec{v}_C$ — скорость центра масс, $\vec{v}_i$ — скорость i-й частицы.

Центр масс системы материальных точек имеет смысл точки, масса и импульс которой равны массе и полному импульсу системы.

в) Из второго и третьего законов динамики вытекает, что для системы, состоящей из n материальных точек с массами m_1, m_2, ...

..., m_n, находящихся под действием внешних сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, справедливо уравнение

$$\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} = \sum \vec{F}, \qquad (2.14)$$

где $\vec{p}_1 = \sum m_i \vec{v}_i$ и $\vec{p}_2 = \sum m_i' \vec{v}_i'$ — векторные суммы импульсов всех частиц в начале и конце промежутка наблюдения Δt. При неизменной массе частиц

$$\sum \vec{F} = \sum m_i \vec{a}_i = M \vec{a}_C, \qquad (2.15)$$

где $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_C$ — соответственно ускорения i-й частицы и центра масс.

Если частицы обладают при этом одинаковым ускорением $\vec{a}$, то

$$\sum \vec{F} = \vec{a} \sum m_i = \vec{a} M. \qquad (2.16)$$

7. Законы Ньютона сформулированы для инерциальных систем отсчета — систем, связанных с телами, на которые не действуют внешние силы. В системах, движущихся ускоренно, эти законы не выполняются. Чтобы можно было пользоваться законами Ньютона в неинерциальных системах отсчета, нужно учесть, что все тела ведут себя в этих системах так, как если бы произошло изменение гравитационного поля и вектор ускорения свободного падения $\vec{g}$ получил приращение $-\vec{a}$, равное ускорению системы (относительно инерциальной системы), взятому с противоположным знаком. Иными словами, в неинерциальных системах отсчета, расположенных вблизи Земли, можно использовать те же законы, формулы и уравнения, что и в инерциальных, но всюду, где стоит вектор $\vec{g}$, заменить его вектором $\vec{g}'$, равным

$$\vec{g}' = \vec{g} + (-\vec{a}). \qquad (2.17)$$

Рекомендуем читателю проверить это сначала на элементарных примерах, когда ускоренное движение системы происходит вверх или вниз, затем рассмотреть ускоренное движение по горизонтали и после этого перейти к общему случаю.

Указанный способ расчета, несмотря на известный формализм и трудности его физического обоснования, позволяет быстро получить результат там, где обычные пути оказываются длинными и трудными. Само собой разумеется, что этот метод расчета не является единственным — систему отсчета можно связать не с телом, имеющим ускорение, а, например, с Землей, считая ее неподвижной, и использовать законы механики в их обычном виде.

8. Следствием второго и третьего законов Ньютона является один из фундаментальных законов природы — закон сохранения импульса.

В замкнутой системе тел векторная сумма импульсов всех тел с течением времени не изменяется, или, иначе, полный импульс замкнутой системы при любых изменениях, происходящих в этой системе, остается одним и тем же.

Если $\sum \vec{F} = 0$, то согласно (2.14) $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 0$, т. е. в замкнутой системе

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_C = \text{const}. \tag{2.18}$$

Для практически наиболее распространенного случая — взаимодействия двух изолированных частиц закон сохранения импульса дает:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1'\vec{v}_1' + m_2'\vec{v}_2'. \tag{2.18'}$$

Из закона сохранения импульса системы следует:

а) Импульсы отдельных частиц, входящих в изолированную систему, могут изменяться под действием внутренних сил, но в сумме эти изменения равны нулю.

б) Поскольку векторному уравнению (2.18) соответствуют два скалярных уравнения для проекций векторов импульсов частиц (если векторы расположены в одной плоскости), то закон сохранения импульса может выполняться по отдельным осям, вдоль которых сумма проекций сил равна нулю. Иными словами, закон сохранения импульса может выполняться по оси Ox и при этом не выполняться по оси Oy, и наоборот.

в) Скорость центра масс в замкнутой системе с течением времени не изменяется.

г) В системе отсчета, связанной с центром масс замкнутой системы частиц, их суммарный импульс равен нулю:

$$\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = 0,$$

где $\vec{v}_i$ — скорость частиц относительно центра масс.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Основная задача динамики материальной точки состоит в том, чтобы найти законы движения точки, зная приложенные к ней силы, или, наоборот, по известным законам движения определить силы, действующие на эту точку.

Задачи механики о движении материальной точки, требующие применения законов Ньютона, решают в следующей последовательности:

а) Представив по условию задачи физический процесс, следует сделать схематический чертеж и указать на нем все кинематические характеристики движения, о которых говорится в задаче. При этом, если возможно, обязательно изобразить вектор ускорения.

б) Расставить все силы, приложенные к движущейся материальной точке, в текущий (произвольный) момент времени. Материальную точку нужно при этом изображать отдельно от связей, заменив их действие силами. (Связями в механике называют тела, нити, опоры, подставки и т. д, ограничивающие свободу движения рассматриваемого тела.)

в) Следует помнить, что, говоря о движении какого-либо тела, например поезда, самолета, автомобиля и т. д., мы подразумеваем под этим движение материальной точки. Расставляя силы, приложенные к телу, необходимо все время руководствоваться третьим законом Ньютона, помня, что силы могут действовать на это тело только со стороны каких-то других тел: со стороны Земли это будет сила тяжести, равная $m\vec{g}$, со стороны нити — сила натяжения $\vec{T}$, со стороны поверхности — силы нормальной реакции $\vec{N}$ и трения $\vec{F}_{тр}$. К данному телу всегда приложено столько сил, сколько имеется других взаимодействующих с ним тел.

Полезно также иметь в виду и то обстоятельство, что для тел, расположенных вблизи поверхности Земли, надо учитывать только силу тяжести и силы, возникающие в местах непосредственного соприкосновения тел.

Силы притяжения, действующие между отдельными телами, настолько малы по сравнению с силой земного притяжения, что во всех задачах, где нет специальных оговорок, ими пренебрегают.

г) Расставив силы, приложенные к материальной точке, необходимо составить основное уравнение динамики:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = m\vec{a} -$$

основную расчетную формулу.

Чтобы найти связь между модулями векторных величин, входящих в это уравнение, можно поступить двояко. Пользуясь правилом параллелограмма и теоремой косинусов, находят равнодействующую заданных сил (ее модуль и направление) и, спроецировав ее на направление ускорения тела (оно всегда совпадает с направлением равнодействующей $\vec{F}$), записывают уравнение второго закона Ньютона для модулей векторов $\vec{F}$ и $\vec{a}$:

$$|\sum \vec{F}_i| = F = ma.$$

Такой метод расчета в задачах динамики точки удобно использовать, когда на тело действуют силы по одной прямой или когда для нахождения равнодействующей достаточно использовать теорему косинусов только один раз. Если же эти условия не выполняются, выгоднее поступать так: движение частиц на плоскости описывать двумя скалярными уравнениями — уравнениями второго закона Ньютона в проекциях по осям. Для этого все силы, приложенные к частице, и ее ускорение нужно спроецировать на касательную к траектории движения (ось Ox) и нормаль к траектории (ось Oy), найти проекции F_x, F_y, a_x и a_y и затем составить основное уравнение динамики точки для проекций:

$$\sum F_x = ma_x; \quad \sum F_y = ma_y.$$

Положительное направление осей удобно выбирать так, чтобы оно совпадало с направлением ускорения частицы. При указанном выборе осей легко устанавливать, какие из приложенных сил (или их составляющие) влияют на модуль вектора скорости, какие — на направление.

Само собой разумеется, что, если все силы действуют по одной прямой, уравнение динамики в проекциях записывается только для одной оси.

При наличии трения силу трения, входящую в уравнение динамики, нужно сразу же представить через коэффициент трения и силу нормального давления, если известно, что тело скользит по поверхности или находится на грани скольжения. В противном случае пользоваться формулой (2.9) нельзя.

д) Составив основное уравнение динамики и, если можно, упростив его (проведя возможные сокращения), необходимо еще раз прочитать задачу и определить число неизвестных в уравнении. Если число неизвестных оказывается больше числа уравнений динамики, то недостающие соотношения между величинами, фигурирующими в задаче, составляют на основании формул кинематики, законов сохранения импульса и энергии. После того как получена полная система уравнений, можно приступать к ее решению относительно искомого неизвестного.

2. Выписав числовые значения заданных величин в единицах СИ и подставив их в окончательную формулу, прежде чем делать арифметический подсчет, нужно проверить правильность решения методом сокращения наименований. В задачах динамики, особенно там, где ответ получается в виде сложной формулы, этого правила в начальной стадии обучения желательно придерживаться всегда.

3. Задачи на динамику движения материальной точки по окружности можно разделить на две группы.

Первая группа включает задачи о равномерном движении точки по окружности. Задачи такого типа решают только на основании законов Ньютона и формул кинематики с тем же порядком действий, о котором говорилось в п. 1, но только уравнение второго закона динамики здесь нужно записывать в форме

$$|\sum \vec{F}_i| = m\frac{v^2}{R} \quad \text{или} \quad |\sum \vec{F}_i| = m\omega^2 R.$$

Следует при этом помнить, что вектор суммы всех сил, приложенных к частице, направлен по радиусу к центру окружности. Для нахождения этой суммы можно или воспользоваться правилом параллелограмма и, складывая силы попарно, выразить ее через заданные величины, или спроецировать предварительно все силы по линии радиуса и линии, ей перпендикулярной, а затем найти сумму проекций по R, которая и будет равна модулю искомой суммы действующих сил.

Вторую группу составляют задачи о неравномерном движении, когда по условию задачи точка переходит по дуге окружности с одного уровня на другой. Решение этих задач требует применения не только законов Ньютона, но и закона сохранения энергии. На нескольких примерах мы покажем, как нужно решать такие задачи.

4. Задачи на применение второго закона Ньютона в общем виде:

$$\vec{F}\Delta t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1,$$

где $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$; $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$, встречаются сравнительно редко. Как правило, это задачи на соударение тел. При решении таких задач и составлении исходного уравнения особое внимание следует обращать на векторный характер величин, входящих во второй закон динамики.

Общая схема решения задач этого типа такова:

а) Проанализировав условие задачи, нужно сделать чертеж с указанием векторов начального $\vec{p}_1$ и конечного $\vec{p}_2$ импульсов частицы, а также вектора импульса силы $\vec{F}\Delta t$.

б) Записать уравнение второго закона Ньютона, обращая внимание на то, что вектор импульса силы всегда равен геометрической разности векторов импульсов частиц и, стало быть, вектор $\vec{p}_2$ должен являться диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{F}\Delta t$ и $\vec{p}_1$. Это обстоятельство полезно иметь в виду и при выполнении чертежа.

Далее можно перейти от векторной записи основного уравнения к скалярной. Пользуясь теоремой косинусов, легко установить, что в общем случае связь между модулями векторов импульсов частицы и модулем вектора импульса силы дается соотношением

$$(F\Delta t)^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$.

в) Затем, как обычно, следует записать математически все дополнительные условия задачи и решить полученную систему уравнений относительно искомого неизвестного.

5. Курс элементарной механики включает задачи динамики системы материальных точек, к которым прежде всего относятся задачи о поступательном движении связанных друг с другом тел и задачи на закон сохранения импульса.

Задачи о движении системы связанных материальных точек (например, движение грузов на блоке) можно свести к задаче динамики отдельной материальной точки. Для этого нужно изобразить силы, действующие на каждую материальную точку системы, и составить для нее уравнение второго закона динамики в проекциях. Сами тела, как обычно, следует рассматривать при этом отдельно, свободными от всяких связей, заменяя действие связей силами.

Составив уравнение динамики для каждой материальной точки, мы получим систему уравнений, в которую искомая величина входит одним из неизвестных. Если число неизвестных больше числа уравнений динамики, к ним добавляют формулы кинематики. После этого дальнейшее решение задачи сводится к математическим выкладкам и числовым расчетам. Указанный способ решения следует применять в тех случаях, когда по условию задачи необходимо определить силы, действующие между отдельными телами заданной системы, или когда тела имеют разные ускорения.

В задачах на систему материальных точек возможны случаи, когда движущиеся тела взаимодействуют друг с другом трением и силы трения увеличивают скорость тел. Перед тем как расшифровать силы трения с помощью формулы (2.9), здесь нужно проанализировать условие задачи и установить, находятся ли соприкасающиеся тела на грани скольжения или нет.

Если по смыслу задачи все тела, принадлежащие к данной системе, имеют одинаковые ускорения и о внутренних силах в условии не спрашивается и они не заданы, основное уравнение динамики можно составлять сразу для всей системы материальных точек, участвующих в движении, не рассматривая тела в отдельности. При составлении уравнения в этом случае необходимо:

а) Расставить внешние силы, действующие на систему. Ими, как правило, являются сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и различного рода силы тяги. Силы, действующие между отдельными телами движущейся системы ($\vec{T}$ и $\vec{N}$), к внешним не относятся и в решении не используются.

б) Составить основное уравнение динамики для системы материальных точек или в форме $\sum\vec{F}=\vec{a}\sum m$, или в проекциях $\sum F_x=a_x\sum m$ и $\sum F_y=a_y\sum m$, выбрав предварительно оси координат и спроецировав на них все внешние силы.

в) Добавить при необходимости к составленному уравнению (уравнениям) формулы кинематики и решить уравнения совместно относительно искомой величины.

В общем случае, если тела, входящие в данную систему, обладают одинаковым ускорением, для составления уравнений динамики систему следует «разрезать» только в тех местах, где по условию задачи требуется определить внутренние силы.

После этого нужно расставлять силы, действующие на каждую из полученных частей системы, и рассматривать их движение по отдельности.

6. Закон сохранения импульса связывает начальные и конечные значения импульсов, изменяющихся под действием внутренних сил системы тел. В формулу этого закона не входят силы взаимодействия, мы можем их полностью игнорировать, и поэтому закон сохранения импульса удобно использовать в таких задачах динамики, в которых силы меняются с течением времени по сложным законам или эти законы вообще неизвестны.

Задачи, требующие применения закона сохранения импульса, включают задачи о разрыве одного тела на части (или, наоборот, о соединении нескольких тел в одно), задачи на удар и задачи о движении одних тел по поверхности других в полностью или частично изолированной системе. Решая такие задачи, удобно придерживаться следующих правил:

а) Прежде всего нужно установить, является ли рассматриваемая система тел изолированной полностью или же эта система изолирована по какому-либо одному направлению. Следует при этом иметь в виду, что если в системе происходит быстрое изменение импульсов, вызванное взаимодействием тел (удар, взрыв и т. д.), продолжительность взаимодействия считается бесконечно малой. Это упрощающее предположение, хотя оно часто и не оговаривается, позволяет применять закон сохранения импульсов даже в тех случаях, когда на систему действуют внешние силы. Импульс этих сил за ничтожно малое время взаимодействия тел будет тоже ничтожно мал и практически не повлияет на скорость тел. Именно по этой причине не учитывается действие силы тяжести и силы сопротивления на тела, находящиеся у поверхности Земли, при их столкновениях или разрывах.

Такое предположение эквивалентно тому, что при разрывах и соударениях тел в неизолированных системах мы обычно считаем, что внутренние силы системы намного превосходят внешние и поэтому изменение импульса тел в этих процессах практически обусловлено лишь действием внутренних сил. Изменение импульса тел под действием внешних сил за время быстрых процессов не учитывается. Как в первом, так и во втором случаях при решении задач на закон сохранения импульсов предполагается, что в процессе быстрого взаимодействия тела не успевают заметно сместиться и, следовательно, их скорости изменяются в данной точке пространства мгновенно.

б) Сделать чертеж, на котором для каждого тела системы изобразить векторы импульса в начале и в конце рассматриваемого процесса.

в) Выбрать прямоугольную систему координат и спроецировать на оси Ox и Oy каждый вектор импульса $\vec{p}$.

Оси координат удобно выбирать так, чтобы большинство проекций импульсов было равно нулю и чтобы по крайней мере вдоль одной из осей система была изолированной. В тех случаях, когда векторы $\vec{p}$ направлены по одной прямой и внешние силы вдоль нее не действуют или в сумме равны нулю, следует выбирать только одну ось Ox и, установив на ней положительное направление, находить проекции только на эту ось.

г) Составить уравнение закона сохранения импульса частиц в проекциях на оси Ox и Oy или в форме уравнений

$$\sum p_{ix} - \sum p'_{ix} = 0 \quad \text{и} \quad \sum p_{iy} - \sum p'_{iy} = 0,$$

или, что делают чаще, в форме равенств

$$\sum p_{ix} = \sum p'_{ix} \quad \text{и} \quad \sum p_{iy} = \sum p'_{iy},$$

где p_{ix}, p'_{ix}, ...— проекции векторов импульсов тел соответственно до и после изменения.

Составляя эти уравнения, нужно внимательно следить за знаками проекций векторов. Если направление вектора $\vec{p}_i$ совпадает с положительным направлением координатной оси или образует с ней острый угол, то проекция импульса имеет знак «плюс», если нет, то знак «минус».

д) Затем, как обычно, необходимо выписать численные значения заданных величин, определить число неизвестных в уравнениях закона сохранения импульсов, добавить к ним, если неизвестных больше числа уравнений, формулы кинематики и решить полученную систему относительно искомой величины.

В заключение отметим, что при составлении уравнения закона сохранения импульса скорости тел и их изменения рассматриваются относительно неподвижной системы отсчета, связанной с Землей.

Если в задаче дана скорость тел относительно друг друга, то абсолютную скорость движения нужно представить как векторную сумму относительной и переносной скоростей.

Пример 1. На концах нити, переброшенной через блок, висят на одинаковой высоте две гирьки массой по $m_1 = 96$ г каждая. Если на одну из гирек положить перегрузок, вся система придет в движение и через $t = 3$ с расстояние между гирьками станет равным $h = 1{,}8$ м. Определите ускорение тел, массу m_2 перегрузка, силу натяжения нити $\vec{T}$, силу давления $\vec{N}$ перегрузка на гирьку при движении и силу давления $\vec{N}_1$ на ось блока. Нить можно считать невесомой и нерастяжимой, массой блока пренебречь, трение в блоке не учитывать.

Решение. В задаче надо определить все внутренние силы, действующие между отдельными телами системы. Согласно сказанному в п. 5 систему следует мысленно «разрезать» на части в тех местах, где нужно найти эти силы, заменить действие связей силами и рассмотреть движение каждого тела отдельно. В результате задача сведется к задаче динамики материальной точки.

Почти во всех задачах о движении грузов на блоках делается ряд упрощающих предположений, которые намного облегчают решение. В них, если нет специальных оговорок, предполагается, что нить, связывающая грузы, невесома, нерастяжима и трение на блоке отсутствует.

Пренебрегая массой нити по сравнению с массой грузов, можно принять (с большой степенью точности) их движение за равноускоренное. Если не учитывать растяжение нити, можно считать, что в каждый момент времени грузы на ее концах имеют одинаковые по модулю ускорения.

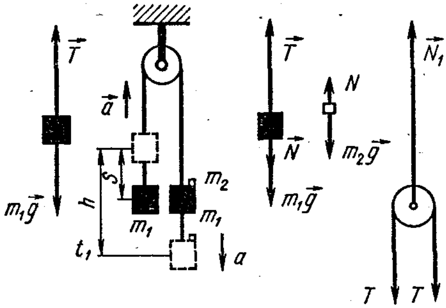

Рис. 2.1

Условие об отсутствии трения на блоке позволяет считать равными силы натяжения нити в любом ее сечении (конечно, при условии, что ее масса ничтожно мала).

Делаем схематический чертеж (рис. 2.1). Изображаем каждое тело отдельно и расставляем приложенные к нему силы. На левую гирьку со стороны Земли действует сила тяжести, равная $m_1\vec{g}$, со стороны нити — сила натяжения нити $\vec{T}$. По условию задачи под действием приложенных сил эта гирька поднимается вверх с ускорением $\vec{a}$, поэтому $T > m_1 g$. Проецируя силы и ускорение на ось, направленную так же, как ускорение гирьки, составляем уравнение второго закона Ньютона в проекциях:

$$T - m_1 g = m_1 a. \qquad (1)$$

На перегрузок действует со стороны Земли сила тяжести, равная $m_2\vec{g}$, и со стороны нижней гирьки нормальная реакция опоры $\vec{N}$. Под действием приложенных сил перегрузок движется вниз с ускорением $\vec{a}$, поэтому $m_2 g > N$. Проецируя силы и ускорение на ось, направленную так же, как ускорение перегрузка, составляем уравнение второго закона Ньютона в проекциях:

$$m_2 g - N = m_2 a. \qquad (2)$$

(Обратите внимание: положительное направление оси каждого из рассматриваемых тел системы разное. Его удобно выбирать в направлении вектора ускорения тел.)

На правую гирьку действуют: сила тяжести, равная $m_1\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила нормального давления $\vec{N}$ перегрузка, численно равная силе, действующей со стороны гири на перегрузок. (Здесь часто допускают ошибку, считая, что сверху на гирю действует не сила нормального давления $\vec{N}$, а сила тяжести перегрузка, равная $m_2 g$.) Под действием приложенных сил правая гирька опускается вниз с ускорением $\vec{a}$, поэтому $(m_1 g + N) > T$.

Проецируя силы и ускорение на ось, направленную так же, как ускорение этой гирьки, составляем уравнение второго закона Ньютона в проекциях:

$$m_1 g + N - T = m_1 a. \qquad (3)$$

На блок действуют силы натяжения нити $\vec{T}$ (вниз) и нормальная реакция опоры $\vec{N}_1$ со стороны оси (вверх). Под действием этих сил блок находится в равновесии, его ускорение равно нулю ($a = 0$); следовательно,

$$2T - N_1 = 0. \qquad (4)$$

Наконец, используя заданные характеристики движения, составляем кинематическое уравнение для одной из гирек, учитывая, что за указанное время каждая из них проходит расстояние, вдвое меньшее h:

$$\frac{h}{2}=\frac{at^2}{2}. \qquad (5)$$

Система уравнений (1) — (5) содержит пять неизвестных: a, m_2, T, N и N_1, которые нам требуется найти.

Решая уравнения (1) — (5) совместно относительно этих величин и подставляя числовые значения, получим:

$$a=\frac{h}{t^2}=0{,}2\ \text{м/с}^2;\quad m_2=\frac{2m_1a}{g-a}=4\cdot10^{-3}\ \text{кг};$$
$$T=m_1(g+a)=0{,}96\ \text{Н};\quad N=2m_1a=3{,}8\cdot10^{-3}\ \text{Н};$$
$$N_1=2T\approx1{,}9\ \text{Н}.$$

Пример 2. На столе лежит кубик массой m. К кубику прикреплена идеально гладкая цепочка, свешивающаяся со стола. К свободному концу цепочки подвешен грузик массой $4m$. Предоставленная самой себе, система приходит в ускоренное движение. Определите натяжение в середине цепочки в тот момент, когда со стола свисает 2/3 цепочки. Коэффициент трения между кубиком и поверхностью стола равен μ, масса цепочки M.

Решение. По условию задачи нужно определить внутреннюю силу, действующую во время движения между половинками цепочки, поэтому систему нужно «разрезать» в середине цепочки и рассмотреть движение каждой из образовавшихся частей системы отдельно.

Делаем схематический чертеж (рис. 2.2, *а*), указываем на нем вектор ускорения $\vec{a}$ в тот момент, когда со стола свешивается 2/3 цепочки. Движение системы будет неравномерно ускоренным с возрастающим ускорением, поскольку за счет перемещения цепочки сила тяги в направлении движения возрастает.

Рисуем обе части системы отдельно и расставляем приложенные к ним внешние силы (рис. 2.2,*б*). На кубик и верхнюю половину цепочки действуют сила тяжести кубика, равная $m\vec{g}$, сила тяжести горизонтальной части цепочки, равная $\frac{\vec{Q}}{3}$ (здесь $\vec{Q}=M\vec{g}$), сила тяжести свисающей части цепочки, равная $\frac{\vec{Q}}{6}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, реакции стола $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, сила натяжения $\vec{T}$ (со стороны нижней половины цепочки). Под действием этих сил кубик и половина цепочки имеют в рассматриваемый момент времени ускорение $\vec{a}$, направленное в сторону движения. Согласно второму закону динамики для этой части системы будем иметь:

$$T+\frac{Mg}{6}-F_{\text{тр}}=\left(m+\frac{M}{2}\right)a.$$

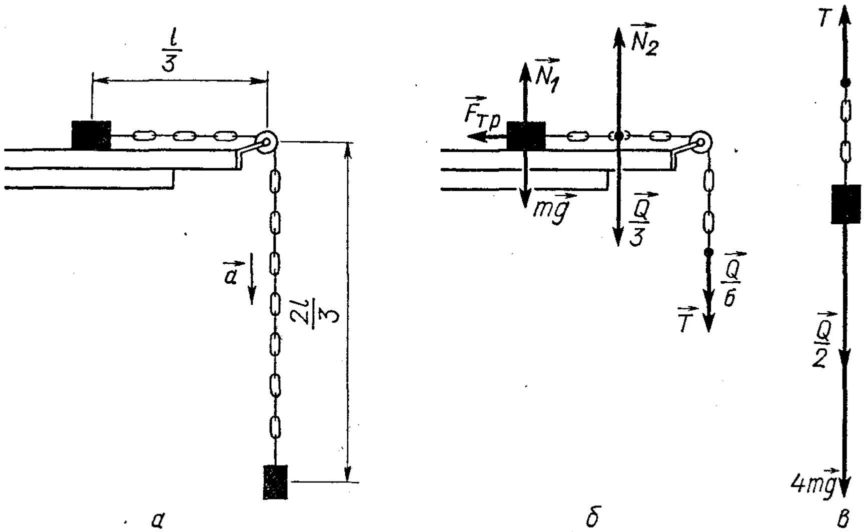

Рис. 2.2

Если задан коэффициент трения (или его надо найти), то силу трения необходимо представить в развернутом виде: $F_{тр} = \mu N_1 = \mu mg$ (поскольку в данном случае $N_1 = mg$) — и переписать основное уравнение более подробно:

$$T + \frac{Mg}{6} - \mu mg = \left(m + \frac{M}{2}\right)a. \qquad (1)$$

К грузу и второй половине цепочки приложены силы тяжести, равные соответственно $4m\vec{g}$ и $\frac{\vec{Q}}{2}$, и сила натяжения $\vec{T}$, действующая со стороны верхней половины цепочки. По условию задачи эта часть рассматриваемой системы опускается вниз с ускорением $\vec{a}$, поэтому, проецируя силы и ускорение на ось, направленную так же, как ускорение, уравнение второго закона Ньютона в проекциях запишем так:

$$4mg + \frac{Mg}{2} - T = \left(4m + \frac{M}{2}\right)a. \qquad (2)$$

Система уравнений (1) — (2) содержит две неизвестные величины a и T. Решая их совместно относительно искомого неизвестного — силы натяжения, действующей в середине цепочки, получаем:

$$T = \frac{(8m + M)(3m + M + 3\mu m)}{30m + 6M}.$$

Пример 3. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, находится груз массой $m_2 = 2$ кг (рис. 2.3,*а*). К грузу привязан легкий шнур, перекинутый через блок, укрепленный на вершине наклонной плоскости. К другому концу шнура подвешена гиря массой $m_1 = 20$ кг. Предоставленная самой себе, система приходит в равноускоренное движение. Определите ускорение грузов и силу давления на ось блока при условии, что коэффициент трения между грузом и плоскостью равен $\mu = 0{,}1$. Массу блока не учитывать.

Решение. В задачах о движении тел по наклонной плоскости рекомендуется прежде всего установить направление движения. Для этого необходимо расставить все внешние силы, действующие на систему грузов в целом, и, спроецировав их на линию скорости и перпендикуляр к ней, определить направление ускорения. Можно легко доказать, что в данном примере гиря будет опускаться, а груз подниматься по наклонной плоскости.

а) Рассмотрим движение каждого тела отдельно. На гирю действуют сила тяжести, равная $m_1\vec{g}$, и сила натяжения шнура $\vec{T}$. Поскольку гиря опускается ускоренно, то

$$m_1 g - T = m_1 a. \qquad (1)$$

б) На груз действуют сила тяжести, равная $m_2\vec{g}$, сила натяжения шнура $\vec{T}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и нормальная реакция опоры $\vec{N}$ (рис. 2.3, *б*).

Чтобы составить основное уравнение динамики для груза и выявить причины изменения модуля и направления вектора скорости, выбираем систему отсчета — наклонную плоскость и связанную с ней прямоугольную систему координат. Ось Ox направим вдоль наклонной плоскости в сторону движения груза, ось Oy — перпендикулярно наклонной плоскости.

Находим проекции сил на оси Ox и Oy. Они равны соответственно $-m_2 g \sin\alpha$, T, $-F_{тр}$, 0, $-m_2 g \cos\alpha$, 0, 0, N.

Под действием приложенных сил груз массой m_2 ускоренно поднимается по наклонной плоскости, поэтому основное уравне-

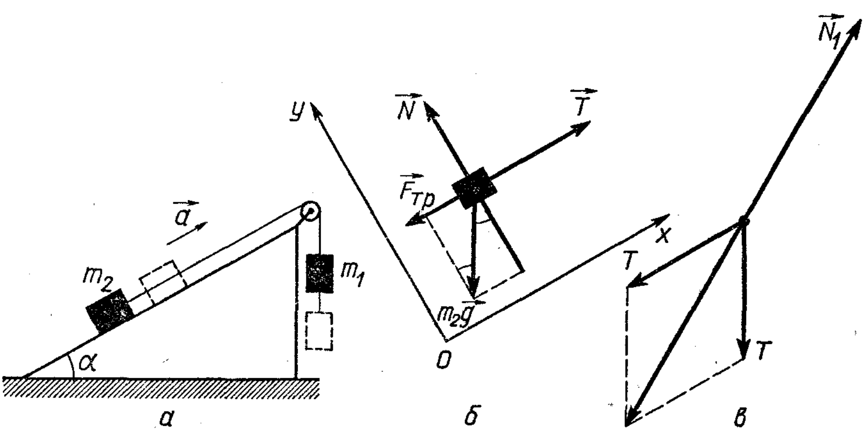

Рис. 2.3

ние динамики в проекциях на ось Ox имеет вид:

$$T - m_2 g \sin \alpha - F_{\text{тр}} = m_2 a, \qquad (2)$$

или

$$T - m_2 g \sin \alpha - \mu N = m_2 a.$$

В направлении, перпендикулярном наклонной плоскости, скорость груза не изменяется, поэтому на основании второго закона Ньютона можно записать:

$$N - m_2 g \cos \alpha = 0. \qquad (3)$$

При составлении основного уравнения динамики для груза, находящегося на наклонной плоскости, можно поступить так. Зная, что ускорение $\vec{a}$ груза, а стало быть, и равнодействующая приложенных сил направлены вверх по наклонной плоскости, можно было бы найти модуль суммы сил $m_2\vec{g}$, $\vec{T}$, $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ их попарным сложением и приравнять его произведению $m_2 a$. Иными словами, мы могли бы представить основное уравнение динамики в векторном виде:

$$m_2\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m_2\vec{a},$$

и искать попарным сложением выражение для модуля суммы, стоящей в левой части равенства. Получился бы точно такой же результат, что и при проецировании сил. Однако этот прием требует большего времени, поскольку в данном случае на груз действует сравнительно много сил.

Так как по условию задачи масса блока не учитывается, то можно считать, что на него действуют только две силы натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ со стороны шнура ($T_1 = T_2 = T$) и нормальная реакция опоры $\vec{N}_1$ со стороны оси (рис. 2.3, *в*). Согласно третьему закону Ньютона блок действует на ось с такой же по модулю силой, но направленной в противоположную сторону. Эту силу нам нужно определить.

Под действием приложенных сил блок находится в равновесии: его ускорение равно нулю. Согласно второму закону динамики должно быть:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{N}_1 = 0.$$

Здесь, как и раньше, мы могли бы спроецировать силы на какие-либо две оси и записать уравнение динамики в проекциях с учетом того, что $a = 0$. Однако в данном случае условие равновесия проще представить в векторном виде и сразу перейти от него к скалярной записи, сложив предварительно силы натяжения по правилу параллелограмма. Как видно из чертежа, диагональ параллелограмма равна:

$$|\vec{T}_1 + \vec{T}_2| = 2T\cos\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)$$

и, стало быть, уравнение равновесия блока в скалярной форме с учетом направления векторов можно записать так:

$$2T\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - N_1 = 0. \qquad (4)$$

Система уравнений (1) — (4) содержит четыре неизвестные величины: T, a, N и N_1. Решая систему относительно a и N_1, найдем:

$$a = \frac{m_1 - m_2 \sin\alpha - \mu m_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2} g; \quad a \approx 4 \text{ м/с}^2;$$

$$N_1 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g(1 + \sin\alpha + \mu\cos\alpha)\cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$N_1 = 202 \text{ Н}.$$

Пример 4. К концам легкой нити, перекинутой через блок, укрепленный на динамометре, подвешены два груза массами $m_1 = 0{,}1$ кг и $m_2 = 0{,}2$ кг. Определите ускорение грузов, натяжение нити и показание динамометра при условии, что блок вместе с грузами поднимается на динамометре вверх с ускорением $a_п = 1{,}2$ м/с^2. Массой блока и динамометра пренебречь.

Решение. Решение задач динамики, в которых тела одновременно участвуют в двух ускоренных движениях — относительном и переносном, принципиально ничем не отличается от только что рассмотренных. Особое внимание здесь нужно обратить на то, что в основном уравнении динамики точки под $\vec{a}$ всегда подразумевается полное (абсолютное) ускорение относительно неподвижного тела отсчета — Земли и его приходится представлять как сумму относительного и переносного ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_о + \vec{a}_п.$$

Если в сложном движении участвуют не одно, а несколько тел (как, например, в данной задаче), то независимо от того, требуется или нет определять внутренние силы системы, движение каждого тела необходимо рассматривать отдельно, поскольку они имеют разные абсолютные ускорения.

В данной задаче грузы перемещаются относительно блока (относительное движение) и одновременно с этим поднимаются вверх вместе с блоком (переносное движение). Делаем схематический чертеж (рис. 2.4), где прежде всего проставляем векторы относительного ускорения $\vec{a}_о$ и переносного $\vec{a}_п$.

На левый груз действуют сила тяжести, равная $m_1\vec{g}$, и сила натяжения нити $\vec{T}$. Под действием этих сил груз движется вертикально вверх с некоторым ускорением $\vec{a}_1$ относительно неподвижного тела отсчета — Земли, поэтому

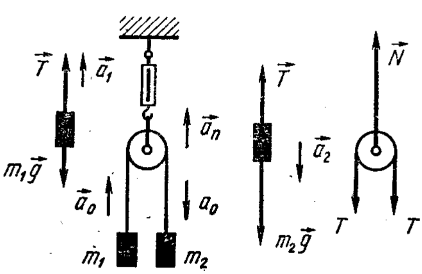

Рис. 2.4

$$T - m_1 g = m_1 a_1. \qquad (1)$$

Модуль ускорения $\vec{a}_1$ связан с модулем относительного $\vec{a}_о$ и переносного $\vec{a}_п$ ускорений соотношением

$$a_1 = a_о + a_п, \qquad (2)$$

поскольку оба эти ускорения направлены вверх.

На правый груз также действуют две силы: $m_2\vec{g}$ и $\vec{T}$, однако сразу установить, какая из них больше, какая меньше, и определить тем самым направление полного ускорения $\vec{a}_2$ этого груза нельзя. В зависимости от значений величин $m_1 g$ и $m_2 g$ при заданном a бóльший груз может им ть относительно Земли ускорение, направленное или вверх (при $T > m_2 g$), или вниз (если $T < m_2 g$), или даже находиться в состоянии покоя (при $T = m_2 g$).

Предположим, что направление полного ускорения $\vec{a}_2$ совпадает с направлением относительного движения, т. е. $m_2 g > T$ и вектор $\vec{a}_2$ направлен вниз (груз опускается, приближаясь к земле). Тогда основное уравнение динамики в проекциях на ось, направленную в сторону предполагаемого движения этого груза, будет иметь вид:

$$m_2 g - T = m_2 a_2. \qquad (3)$$

При нашей договоренности о направлении $\vec{a}_2$ относительное ускорение должно быть больше переносного ($a_о > a_п$), и, следовательно,

$$a_2 = a_о - a_п. \qquad (4)$$

Блок взаимодействует с тремя телами: Землей, динамометром и нитью. Основное уравнение динамики (при условии, что масса блока ничтожно мала) дает:

$$N - 2T = 0. \qquad (5)$$

Решая уравнения (1) — (5) совместно относительно искомых неизвестных (a_1, a_2, T и N), находим:

$$a_1 = \frac{(m_2 - m_1) g - 2m_2 a_п}{m_1 - m_2}; \quad a_1 = 4{,}87\ м/с^2;$$

$$a_2 = \frac{(m_2 - m_1) g - 2m_1 a_п}{m_1 + m_2}; \quad a_2 = 2{,}47\ м/с^2;$$

$$T = \frac{2m_1 m_2 (g + a_п)}{m_1 + m_2}; \quad T = 1{,}47\ Н;$$

$$N = 2T = 2{,}94\ Н.$$

При подстановке числовых значений в формулу, полученную для ускорения a_2, оно получилось положительным. Это значит, что мы выбрали правильное направление ускорения — груз массой m_2 движется вниз.

Пример 5. Грузы массами $m=9{,}8$ кг и $2\,m$ связаны легкой нитью, переброшенной через блок, укрепленный на краю горизонтальной плоскости (рис. 2.5). Система находится в равновесии на грани скольжения. Каково будет ускорение большего груза и натяжение нити, если плоскость начнет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением $a=3$ м/с^2?

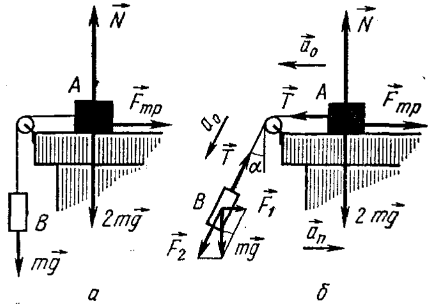

Рис. 2.5

Решение. Прежде чем приступить к непосредственному решению задачи, необходимо выяснить, как будут двигаться грузы при ускоренном движении плоскости.

Так как взаимодействие груза с плоскостью в горизонтальном направлении осуществляется только за счет трения, самая большая сила, с которой плоскость может действовать на груз вдоль поверхности соприкосновения, равна максимальной силе трения покоя μN. Именно с этой силой плоскость и действует на груз A в сторону, противоположную направлению его возможного движения, т. е. вправо, когда груз находится на грани скольжения. Если к плоскости приложить некоторую силу и сообщить плоскости вправо ускорение $\vec{a}$, то она не сможет увлечь за собой груз A с ускорением $\vec{a}$, поскольку сила взаимодействия между ними уже имела максимальное значение, равное μN, и при неизменных μ и N увеличиться не может. В результате груз A начнет перемещаться относительно плоскости с некоторым ускорением $\vec{a}_0$, направленным противоположно $\vec{a}$. Как только груз A придет в движение относительно плоскости, груз B станет опускаться.

Относительно неподвижной системы отсчета (например, поверхности Земли) каждый груз будет участвовать в сложном движении, которое можно представить как результат двух равноускоренных перемещений — движения вместе с плоскостью относительно Земли с ускорением $\vec{a}\equiv\vec{a}_п$ (переносное движение) и движения относительно самой плоскости с ускорением $\vec{a}_0$ (относительное движение). Полное ускорение каждого груза по отношению к Земле равно векторной сумме ускорений $\vec{a}_п$ и $\vec{a}_0$.

Делаем схематический чертеж для двух состояний системы: когда она находится на грани скольжения (рис. 2.5, *а*) и когда ей сообщено переносное ускорение (рис. 2.5, *б*). Изображаем векторы переносного $\vec{a}_п$ и относительного $\vec{a}_0$ ускорений и действующие силы. В первом случае систему рассматриваем целиком, во втором — «разрезаем» на части, поскольку требуется определить внутреннюю силу (силу натяжения) и, кроме того, полные ускорения грузов неодинаковы.

В первом случае ускорение системы равно нулю, и основное уравнение динамики в скалярной форме дает для нее:

$$mg - F_{\text{тр}} = 0,$$

или, учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N$, а $N = 2mg$, будем иметь $mg - \mu 2mg = 0$, откуда $\mu = 0{,}5$.

Условие о нахождении груза на грани скольжения является вспомогательным; оно позволяет определить коэффициент трения скольжения, который понадобится в дальнейшем.

Рассмотрим второй случай. На груз A действует сила тяжести, равная $2m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и нормальная реакция $\vec{N}$. Предположим, что $T > F_{\text{тр}}$ и вектор полного ускорения этого груза $\vec{a}_1$ направлен к блоку. Выберем систему отсчета, жестко связанную с Землей, и направим ось Ox вдоль поверхности стола, ось Oy по нормали к ней. Проецируя силы на выбранные оси, составляем основное уравнение динамики для груза A в проекциях. По оси Ox будем иметь: $T - F_{\text{тр}} = 2ma_1$ или $T - \mu N = 2ma_1$. По оси Oy: $N - 2mg = 0$. Таким образом,

$$T - \mu 2mg = 2ma_1. \qquad (1)$$

Так как мы считаем, что вектор $\vec{a}_1$ направлен к блоку, то относительное ускорение должно быть больше переносного, т. е.

$$a_1 = a_0 - a. \qquad (2)$$

На груз B действуют сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и сила натяжения нити $\vec{T}$, направленная под некоторым углом α к вертикали. Под действием приложенных сил груз одновременно участвует в двух равноускоренных движениях: переносном (вместе со всей системой) и относительном (вдоль направления нити). Ускорения в этих движениях равны соответственно $\vec{a}$ и $\vec{a}_0$. Чтобы выявить причины появления ускорений, необходимо разложить действующие силы по горизонтальному направлению и вдоль нити. В данном случае нужно разложить только силу тяжести на составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Как видно из чертежа, модули составляющих равны:

$$F_1 = mg \operatorname{tg} \alpha, \quad F_2 = mg/\cos \alpha.$$

Согласно второму закону Ньютона уравнения движения в скалярной форме для этих направлений будут иметь вид:

$$mg \operatorname{tg} \alpha = ma \qquad (3)$$

и

$$mg/\cos \alpha - T = ma_0. \qquad (4)$$

Из уравнения (3) следует, что $\operatorname{tg} \alpha = a/g$, т. е. угол наклона нити к вертикали при ускоренном движении точки подвеса определяется лишь горизонтальным ускорением a системы (у нас $a = a_{\text{п}}$). Этот результат имеет общий характер, и его полезно помнить.

Исключая из уравнений (1) — (4) $\operatorname{tg}\alpha$, $\cos\alpha$ и a_0 и решая их относительно искомых неизвестных a_1 и T, получаем:

$$a_1 = \frac{\sqrt{g^2+a^2} - 2\mu g - a}{3}; \quad a_1 \approx 2{,}16 \text{ м/с}^2;$$

$$T = \frac{2m\left(\sqrt{g^2+a^2} + \mu g - a\right)}{3}; \quad T \approx 10{,}1 \text{ Н}.$$

При подстановке числовых значений в формулу, полученную для ускорения a_1, оно получилось положительным. Это значит, что мы выбрали правильное направление полного ускорения большего груза — влево.

Пример 6. Брусок массой M находится на гладкой горизонтальной поверхности, по которой он может двигаться без трения. На бруске лежит маленький кубик массой m (рис. 2.6). Коэффициент трения между кубиком и бруском равен μ. При каком минимальном значении силы $\vec{F}$, приложенной к кубику, он начнет скользить по бруску? Какую скорость будет иметь брусок в тот момент, когда кубик упадет с бруска, если сила тяги будет равной $2F$? Длина бруска L.

Решение. Двигаясь в горизонтальном направлении, кубик будет увлекать за собой брусок вследствие того, что между ними есть трение. Максимальная сила, с которой кубик может действовать на брусок в направлении движения, равна максимальной силе трения покоя μN. Эта сила будет сообщать бруску некоторое предельное ускорение $\vec{a}_2$, которое при заданных μ и N увеличиваться не может. Если при этом потянуть за кубик так, чтобы сам он двигался с ускорением $a_1 > a_2$, кубик начнет обгонять брусок, скользя по его поверхности, пока не упадет с него.

1. Рассмотрим первый случай, когда тела находятся на грани проскальзывания и движутся с одинаковым ускорением. На кубик действуют сила тяжести, равная $m\vec{g}$, сила тяги $\vec{F}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_1$ и максимальная сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$. Поскольку кубик перемещается вправо с ускорением $\vec{a}_1$, то, проецируя силы и ускорение на ось, направленную так же, как ускорение кубика, основное уравнение динамики в проекциях можно записать так:

$$F - F_{\text{тр}} = ma_1.$$

Или, учитывая, что $F_{\text{тр}} = \mu N_1$ и $N_1 = mg$, будем иметь:

$$F - \mu mg = ma_1. \qquad (1)$$

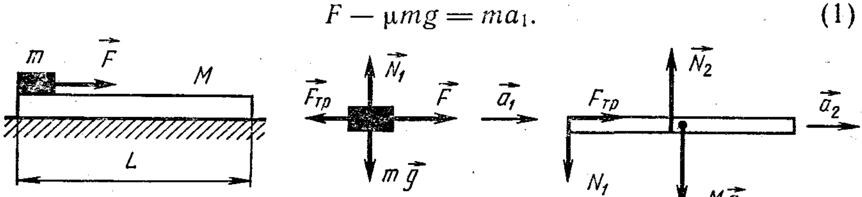

Рис. 2.6

К бруску приложена сила тяжести, равная $M\vec{g}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}_2$, сила нормального давления $\vec{N}_1$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, действующая со стороны кубика в направлении движения и сообщающая бруску ускорение $\vec{a}_2$. Основное уравнение динамики для бруска дает:

$$F_{тр} = Ma_2 \quad \text{или} \quad \mu mg = Ma_2. \tag{2}$$

Если кубик не скользит по бруску, то независимо от того, находятся ли тела на грани скольжения или нет, их ускорения одинаковы и к составленным уравнениям нужно добавить условие:

$$a_1 = a_2. \tag{3}$$

Уравнения (1) — (3) содержат три неизвестные величины: искомую силу тяги F и ускорения a_1 и a_2. Решая уравнения относительно F, мы получим ответ на первый вопрос задачи:

$$F = \mu mg\left(1 + \frac{m}{M}\right). \tag{4}$$

2. Если сила тяги окажется больше силы F, которую мы нашли, ускорение кубика увеличится. Так как ускорение бруска при этом возрасти не может и останется равным a_2, кубик станет скользить по бруску в направлении движения бруска. За время t, в течение которого кубик находится на бруске и увлекает его за собой, брусок приобретет скорость

$$v = a_2 t. \tag{5}$$

За это же время кубик сместится относительно бруска на расстояние

$$L = \frac{(a_1 - a_2)\,t^2}{2}, \tag{6}$$

где L — длина бруска; $(a_1 - a_2)$ — ускорение кубика относительно бруска.

Чтобы найти скорость бруска в момент падения кубика, нужно совместно решить уравнения (1), (2), (4) — (6) относительно v, подставив в них вместо F силу $2F$, считая ее известной. Проведя вычисления, получим:

$$v = m\sqrt{\frac{2\mu gL}{(m+M)M}}.$$

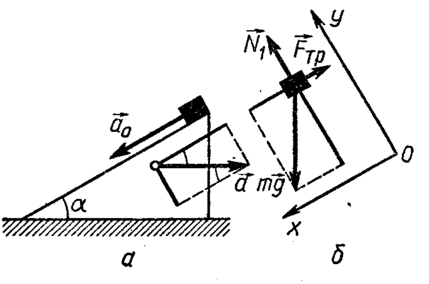

Рис. 2.7

Пример 7. Тяжелое тело находится на вершине наклонной плоскости на грани скольжения (рис. 2.7, a). За какое время тело спустится с наклонной плоскости, если она станет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением $a = 0{,}5$ м/с^2? Длина наклонной плоскости $l=1$ м, угол наклона ее к горизонту равен $\alpha=30°$.

Решение. В задаче рассматриваются два состояния тела: первое, когда оно находится на грани скольжения, второе — в равноускоренном движении.

Условие о нахождении тела на грани скольжения имеет вспомогательное значение. Оно позволяет определить коэффициент трения скольжения μ между телом и плоскостью.

1. Для определения μ (это самостоятельная задача) нужно составить основное уравнение динамики с учетом того, что ускорение тела равно нулю.

На тело, находящееся на наклонной плоскости, действуют сила тяжести, равная $m\vec{g}$, реакция опоры $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Выберем систему отсчета — Землю и свяжем с ней прямоугольную систему координат. Ось Ox направим вдоль наклонной плоскости вниз, ось Oy — перпендикулярно наклонной плоскости вверх. Находим проекции сил на оси Ox и Oy. Они равны соответственно:

$$mg\sin\alpha, \quad -F_{тр}, \quad -mg\cos\alpha \text{ и } N.$$

Под действием приложенных сил тело находится на наклонной плоскости в равновесии на грани скольжения, следовательно, основное уравнение динамики в проекциях на оси координат будет иметь вид:

$$mg\sin\alpha - F_{тр}=0 \text{ и } N-mg\cos\alpha=0, \text{ причем } F_{тр}=\mu N.$$

Решая уравнения совместно относительно коэффициента трения, находим:

$$\mu=\operatorname{tg}\alpha.$$

Полученная формула для коэффициента трения скольжения имеет место лишь для случая, когда тело равномерно скользит по наклонной плоскости или находится на грани скольжения. Если угол наклона плоскости больше или меньше предельного, пользоваться этой формулой для определения μ (или α) нельзя.

2. Сообщая горизонтальное ускорение наклонной плоскости, мы тем самым как бы вынимаем ее из-под груза и уменьшаем силу давления плоскости на груз в направлении нормали. В результате сила нормального давления $\vec{N}$, а стало быть, и сила трения, препятствующая скольжению груза по плоскости, уменьшаются: $mg\sin\alpha$ станет больше $F_{тр}$ и груз начнет перемещаться относительно плоскости с некоторым ускорением $\vec{a}_0$.

Движение груза относительно неподвижного тела отсчета (Земли) будет сложным, оно складывается из двух прямолинейных движений — переносного с ускорением $\vec{a}_п\equiv\vec{a}$ (вместе с наклонной плоскостью) и относительного с ускорением $\vec{a}_0$ вдоль наклонной плоскости.

На груз, находящийся в ускоренном движении, действуют такие же силы, что и при его равновесии: $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{тр}$ (рис. 2.7, *б*), но модули сил $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{тр}$ будут другими. Проецируем силы и ускорения на координатные оси Ox и Oy. Проекции сил равны соответственно $mg\sin\alpha$, $-F_{тр}$, $-mg\cos\alpha$ и N_1, проекции относительного и переносного ускорений равны a_0, 0, $-a\cos\alpha$ и $-a\sin\alpha$.

Под действием приложенных сил тело ускоренно движется вниз по наклонной плоскости (по оси Ox) с некоторым ускорением $\vec{a}_1$ относительно Земли и в направлении, перпендикулярном наклонной плоскости вместе с наклонной плоскостью с ускорением, проекция которого на ось Oy равна $-a\sin\alpha$.

Основное уравнение динамики для проекций на ось Ox имеет вид:

$$mg\sin\alpha - \mu N_1 = ma_1. \qquad (1)$$

Перемещение тела с ускорением $\vec{a}_1$ можно рассматривать как состоящее из двух: движения относительно наклонной плоскости с ускорением $\vec{a}_0$ и движения в противоположную сторону вместе с плоскостью с ускорением, модуль которого $a\cos\alpha$. Поэтому

$$a_1 = a_0 - a\cos\alpha. \qquad (2)$$

Основное уравнение динамики для проекций на ось Oy имеет вид:

$$N_1 - mg\cos\alpha = -ma\sin\alpha. \qquad (3)$$

В заключение остается записать кинематическое уравнение, обратив внимание на то, что относительно наклонной плоскости тело движется с ускорением $\vec{a}_0$:

$$l = \frac{a_0 t^2}{2}. \qquad (4)$$

Уравнения (1) — (4) содержат четыре неизвестные величины: a_1, a_0, N_1 и t. Решая их совместно, для времени спуска тела с наклонной плоскости получим:

$$t = \sqrt{\frac{2l\cos\alpha}{a}}; \quad t = 1{,}87 \text{ с}.$$

Пример 8. Космический корабль, имеющий скорость $v = 10$ км/с, попадает в неподвижное облако микрометеоров. В объеме $V_0 = 1 \text{ м}^3$ пространства находится $n = 1$ микрометеор. Масса каждого микрометеора $m_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ кг. На сколько должна возрасти сила тяги двигателя, чтобы скорость корабля при прохождении через облако не изменилась? Лобовое сечение корабля $S = 49 \text{ м}^2$. Удар микрометеоров об обшивку корабля считать неупругим.

Решение. При движении космического корабля в облаке микрометеоров частицы получают импульс со стороны обшивки, в результате чего их скорость возрастает от 0 до скорости корабля

v, поскольку удар неупругий. Одновременно такой же импульс, как и частицы, получает корабль, но в сторону, противоположную движению. В результате скорость корабля должна уменьшаться и для ее сохранения сила тяги двигателя должна возрасти. Прирост силы тяги должен быть тем большим, чем больше изменение импульса частиц за единицу времени.

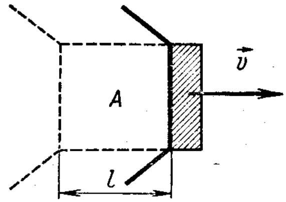

Рис. 2.8

Выделим (рис. 2.8) часть микрометеорного облака, которой был сообщен импульс за небольшой промежуток времени Δt, в течение которого движение корабля можно считать равномерным

Если за время Δt корабль пройдет расстояние l, то импульс частиц, находящихся в объеме цилиндра A, возрастет от 0 до $m\vec{v}$, частицы станут двигаться вместе с кораблем. Это изменение импульса частиц произойдет за счет импульса силы $\vec{F}\Delta t$, действующего на выделенную часть облака со стороны обшивки корабля. Сила $\vec{F}$ будет равна при этом по модулю и направлению искомому увеличению силы тяги.

С учетом того, что вначале частицы покоились и направления векторов $\vec{F}\Delta t$ и $m\vec{v}$ совпадают, согласно второму закону Ньютона для модулей векторов будем иметь:

$$F\Delta t = mv. \qquad (1)$$

Масса частиц, увлекаемых за время Δt, равна:

$$m = \frac{nm_0}{V_0} Sl. \qquad (2)$$

При малом Δt можно с достаточной степенью точности считать, что движение на участке l равномерное, и, следовательно,

$$l = v\Delta t. \qquad (3)$$

Из уравнений (1) — (3) находим, что искомое увеличение силы тяги равно:

$$F = \frac{nm_0Sv^2}{V_0}; \quad F \approx 100 \text{ кН}.$$

Решение задач динамики о равномерном движении материальной точки по окружности принципиально не отличается от решения только что разобранных задач. Если до этого основное внимание уделялось выявлению причин изменения модуля вектора скорости и составлению уравнения второго закона Ньютона в проекциях на соответствующие оси, то сейчас нас будут интересовать главным образом причины изменения направления вектора $\vec{v}$ и условия, при которых материальная точка находится на окружности. Задача состоит в составлении того же уравнения динамики, но ось будет направлена по радиусу окружности.

Некоторые из предлагаемых задач требуют применения закона всемирного тяготения. Обычно это задачи на движение небесных тел и искусственных спутников Земли. Их решение рекомендуется тоже начинать с составления уравнения второго закона Ньютона. Получив это уравнение, нужно представить в развернутом виде входящую в него силу тяжести с помощью закона всемирного тяготения, добавить при необходимости формулы кинематики и затем решить полученную систему уравнений совместно. Очень часто при этом приходится использовать формулу (2.11′), позволяющую исключить из уравнений массу Земли.

Пример 9. Автомобиль с двумя парами ведущих колес движется по мосту, имеющему форму дуги окружности радиусом $R = 40$ м, обращенной своей выпуклостью вверх. Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении может развивать автомобиль на вершине моста, если скорость его в этой точке равна $v = 54$ км/ч? Коэффициент трения колес автомобиля о мост равен $\mu = 0{,}6$.

Решение. Делаем схематический чертеж (рис. 2.9) и указываем на нем скорость автомобиля $\vec{v}$ и касательное ускорение $\vec{a}_к$. Автомобиль взаимодействует с двумя телами: Землей и поверхностью моста. Со стороны Земли на него действует сила тяжести, равная $m\vec{g}$, со стороны моста — нормальная реакция $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$.

Здесь прежде всего необходимо обратить внимание на направление силы трения. При вращении колес покрышки ведущих колес отталкиваются от поверхности дороги, действуя на нее в сторону, противоположную движению машины. По третьему закону Ньютона поверхность действует на колеса в направлении движения. Сцепление колес с поверхностью дороги осуществляется за счет трения, поэтому при качении автомобиля движущей силой является сила трения сцепления, направленная в сторону движения по касательной к поверхности дороги.

Под действием приложенных сил изменяется и модуль, и направление вектора скорости. Модуль скорости меняется за счет силы трения, сообщающей телу касательное ускорение. Согласно второму закону динамики

$$F_{тр} = ma_к.$$

По условию задачи ускорение $a_к$ максимально, поэтому колеса находятся на грани пробуксовки и сила трения имеет наибольшее значение, равное $F_{тр} = \mu N$. Поэтому

$$\mu N = ma_к. \qquad (1)$$

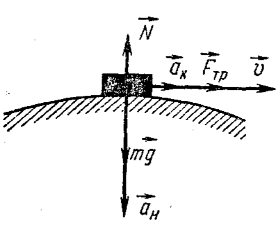

Рис. 2.9

По нормали к траектории (вдоль радиуса окружности) действуют две силы: $m\vec{g}$ и $\vec{N}$. В сумме они не равны нулю и изменяют направление вектора скорости. При движении по выпуклому мосту вектор скорости отклоняется от своего начального направления в сторону центра окружности. Это возможно лишь при условии, что нормальная реакция оказывается меньше силы тяжести. Последнее объясняется тем, что мост из-за своей кривизны как бы уходит из-под машины.

Равнодействующая сил $m\vec{g}$ и $\vec{N}$ является в данном примере силой, сообщающей автомобилю ускорение, направленное к центру окружности. Модуль равнодействующей равен разности $mg - N$, и согласно второму закону Ньютона для проекций сил и ускорения на нормаль к траектории автомобиля в верхней ее точке имеем:

$$mg - N = ma_{\text{н}} = m\frac{v^2}{R}. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно относительно касательного ускорения, получим:

$$a_{\text{к}} = \mu\left(g - \frac{v^2}{R}\right); \quad a_{\text{к}} \approx 1{,}9 \ \text{м/с}^2.$$

Пример 10. Какую скорость относительно поверхности Земли должен иметь искусственный спутник, чтобы лететь по круговой орбите, расположенной в плоскости экватора, на высоте $h = 1600$ км над Землей? Радиус Земли принять равным $R_{\text{З}} = 6400$ км, ускорение свободного падения у ее поверхности $g_0 = 9{,}8$ м/с^2.

Решение. Если пренебречь силами притяжения, действующими на спутник со стороны небесных тел, и не учитывать сопротивление среды, можно с достаточной степенью точности считать, что на спутник при его движении действует только сила земного притяжения $\vec{F}_{\text{т}}$.

Под действием этой силы спутник равномерно движется по окружности радиусом $R_{\text{З}} + h$ с некоторой скоростью $\vec{v}$ относительно центра Земли. Сила притяжения $\vec{F}_{\text{т}}$ сообщает спутнику нормальное ускорение $\vec{a}_{\text{н}}$, равное по модулю $v^2/(R_{\text{З}} + h)$ и направленное к центру Земли. Согласно второму закону Ньютона $F_{\text{т}} = ma_{\text{н}}$, или

$$F_{\text{т}} = mv^2/(R_{\text{З}} + h), \qquad (1)$$

где m — масса спутника. Модуль силы тяготения $\vec{F}_{\text{т}}$ в уравнении второго закона Ньютона нужно представить в развернутом виде, используя закон всемирного тяготения:

$$F_{\text{т}} = G\frac{mM_{\text{З}}}{(R_{\text{З}} + h)^2}. \qquad (2)$$

Если в решении задач подобного типа фигурирует масса Земли $M_{\text{З}}$, расчеты можно значительно упростить, исключив произведение $GM_{\text{З}}$ с помощью формулы

$$g_0 = G\frac{M_{\text{З}}}{R_{\text{З}}^2}. \qquad (3)$$

Скорость спутника относительно поверхности Земли равна:

$$u = v \pm v_0, \quad (4)$$

где v_0 — линейная скорость точек Земли на экваторе, которую можно найти из соотношения

$$v_0 = \frac{2\pi R_З}{\tau}, \quad (5)$$

зная радиус Земли и период ее суточного вращения $\tau = 24$ ч.

Знак «плюс» или «минус» в уравнении (4) берется в зависимости от того, запущен ли спутник с востока на запад или с запада на восток.

Уравнения (1) — (5) содержат шесть неизвестных величин: $F_т$, m, $M_З$, v, v_0 и u.

Решая систему относительно скорости спутника, находим:

$$u = \sqrt{\frac{g_0 R_З^2}{R_З + h}} \pm \frac{2\pi R_З}{\tau}.$$

Подставляя числовые значения в выражение для скорости, получим:

$$u_1 \approx 7{,}6 \text{ км/с} \quad \text{и} \quad u_2 \approx 6{,}6 \text{ км/с}.$$

Эти результаты показывают, что запускать искусственные спутники Земли легче в направлении с запада на восток, чем в противоположном.

Пример 11. Тяжелый шарик подвешен на нити длиной l. Нить равномерно вращается в пространстве, образуя с вертикалью угол α (конический маятник). Сколько оборотов делает шарик за время t? Решите задачу при условии, что конический маятник установлен в ракете, поднимающейся вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$.

Решение. 1. При вращении нити на шарик действуют две силы: со стороны Земли сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и со стороны нити сила натяжения $\vec{T}$. Под действием приложенных сил шарик движется равномерно в горизонтальной плоскости по окружности радиусом R с некоторой скоростью v (рис. 2.10, a). Это возможно лишь при условии, что равнодействующая $\vec{F}$ сил $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ оказывается направленной перпендикулярно скорости к центру окружности O и, следовательно, сообщает шарику нормальное ускорение:

$$\vec{F} = m\vec{a}_н, \text{ где } a_н = v^2/R.$$

Изобразив силы, действующие на шарик, составляем основное уравнение динамики материальной точки в проекциях по нормали к окружности:

$$F = |m\vec{g} + \vec{T}| = \frac{mv^2}{R}. \quad (1)$$

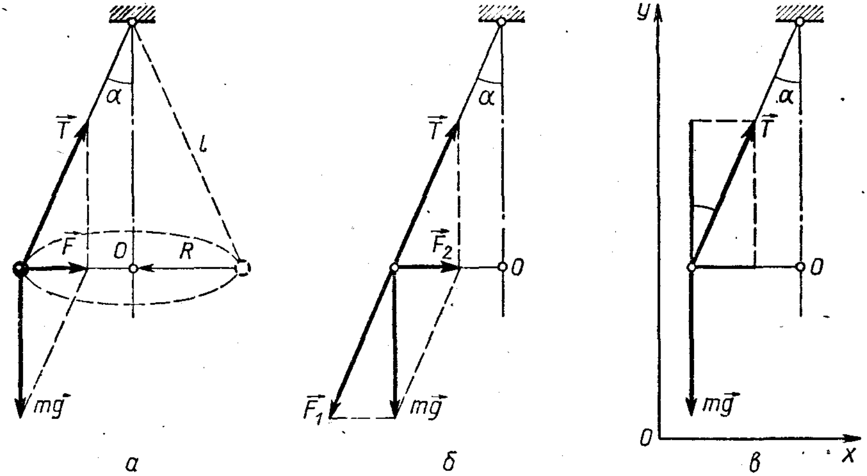

Рис. 2.10

Чтобы найти из этого соотношения какую-либо величину, в частности модуль суммы $m\vec{g}+\vec{T}$, нужно определить длину диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{T}$ и $m\vec{g}$. Сделать это можно различными способами.

а) Сложить силы $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ по правилу параллелограмма и найти его диагональ, зная, что равнодействующая этих сил направлена по радиусу. Как видно из рисунка 2.10,*а*,

$$|m\vec{g}+\vec{T}| = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha = T\sin\alpha = \sqrt{T^2-(mg)^2}\,.$$

б) Разложить вектор $m\vec{g}$ по направлению нити и радиуса вращения на составляющие $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Из рисунка 2.10,*б* видно, что модули составляющих равны $F_1 = mg/\cos\alpha$, $F_2 = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Поскольку нить нерастяжима и вдоль нее ускорения нет, то согласно второму закону Ньютона $\vec{T}+\vec{F}_1=0$ и, стало быть, $m\vec{g}+\vec{T}= \vec{F}_2+\vec{F}_1+\vec{T}=\vec{F}_2$.

Следовательно, составляющая силы тяжести $\vec{F}_2$ равна равнодействующей всех сил, приложенных к шарику, т. е. она сообщает ему нормальное ускорение.

в) Для вычисления равнодействующей сил $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ можно использовать метод проекций. Выберем для этого систему отсчета, например Землю, и связанную с ней прямоугольную систему координат. Ось Ox направим по радиусу вращения, ось Oy — вертикально вверх (рис. 2.10, *в*). Проекции сил по этим осям равны $T\sin\alpha$, $T\cos\alpha$ и $-mg$.

Так как по вертикальному направлению скорость шарика не изменяется, то основное уравнение динамики для проекций на ось Oy дает:

$$T\cos\alpha - mg = 0.$$

По оси Ox есть только одна проекция $T\sin\alpha$, которую можно рассматривать как проекцию равнодействующей всех сил, приложенных к шарику.

Сравнивая все три результата, нетрудно заметить, что в данном примере модуль равнодействующей силы равен:

$$F = |m\vec{g} + \vec{T}| = mg\operatorname{tg}\alpha = T\sin\alpha = \sqrt{T^2 - (mg)^2}$$

и согласно (1) уравнение второго закона Ньютона в скалярной форме можно представить в одном из трех видов:

$$mg\operatorname{tg}\alpha = m\frac{v^2}{R};\ T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R} \text{ и } \sqrt{T^2 - (mg)^2} = m\frac{v^2}{R}.$$

Какое из этих уравнений нужно использовать в том или ином конкретном случае, зависит от вопроса задачи и исходных данных.

Если не задана масса частицы, как, например, в нашем примере, уравнение второго закона удобно записать в первой форме:

$$mg\operatorname{tg}\alpha = m\frac{v^2}{R},$$

откуда

$$gR\operatorname{tg}\alpha = v^2. \qquad (2)$$

Составив уравнение динамики, записываем дополнительные условия:

$$v = \frac{2\pi Rn}{t}, \qquad (3)$$

где n число оборотов шарика и $R = l\sin\alpha$. (4)

Исключая из уравнений (2) — (4) v и R и решая их относительно n, получим

$$n = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l\cos\alpha}}.$$

2. Если конический маятник установлен в ракете, поднимающейся вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$, число сил, действующих на шарик, остается тем же. Однако сила натяжения действует на шарик не так, как в первом случае; она не только (совместно с силой $m\vec{g}$) обеспечивает движение шарика по кругу, но и сообщает ему ускорение $\vec{a}$, равное ускорению ракеты. Так как шарик участвует в двух ускоренных движениях (равномерном по окружности и прямолинейном вверх), для нахождения связи между действующими силами $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ и ускорениями нужно составить основное уравнение динамики в проекциях на оси прямоугольной системы координат Oxy, учитывая, что проекции ускорений на эти оси равны a и v^2/R Для оси Ox будем иметь:

$$T\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}, \qquad (5)$$

для оси Oy:

$$T\cos\alpha - mg = ma. \qquad (6)$$

Решая уравнения (3), (5) и (6) совместно относительно n, получим:

$$n = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g+a}{l\cos\alpha}}.$$

Анализируя ответ, можно заметить следующее: 1) в системе, поднимающейся ускоренно вверх, явление протекает так, как если бы ускорение свободного падения увеличилось на a; 2) по мере увеличения числа оборотов маятника в единицу времени (n/t) угол α увеличивается и становится равным 90° при бесконечно большой скорости вращения. Из этого следует, что груз на нити в горизонтальной плоскости вращаться не может.

Пример 12. Стержень, изогнутый так, как показано на рисунке 2.11, вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно оси $O'O''$. На стержень надета бусинка, размеры которой очень малы. Определите, на каком максимальном расстоянии l от точки O' бусинка может находиться в равновесии относительно стержня, если коэффициент трения между ними равен μ.

Решение. При вращении стержня на бусинку действуют три силы: сила тяжести, равная $m\vec{g}$, нормальная реакция опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно стержню, и сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$, направленная вдоль стержня к точке O'. То, что сила трения направлена вниз, а не вверх, следует из того, что расстояние l должно быть максимальным. Действительно, находясь на максимальном расстоянии, бусинка при увеличении скорости вращения стала бы сразу двигаться вверх, по раскручивающейся спирали, а это возможно лишь в том случае, когда $\vec{F}_{тр}$ имеет указанное направление. Нетрудно заметить, что, если бы речь шла о минимальном l, силу трения следовало бы направить вверх.

Под действием приложенных сил бусинка равномерно движется по окружности радиусом

$$R = l\sin\alpha \qquad (1)$$

в горизонтальной плоскости. Такое движение может происходить лишь при условии, что силы $m\vec{g}$, $\vec{N}$ и $\vec{F}_{тр}$ в сумме оказываются направленными к центру окружности C и изменяют только направление вектора скорости, сообщая бусинке только нормальное ускорение $\vec{a}_н$. Действие этих сил можно заменить

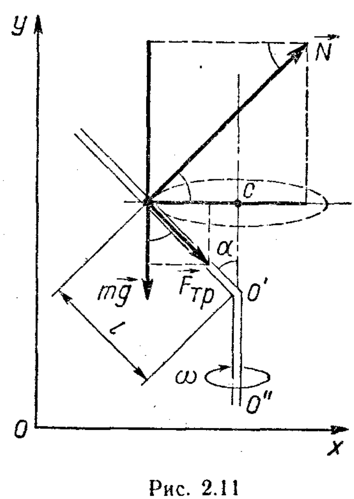

Рис. 2.11

действием одной силы — их равнодействующей, равной векторной сумме приложенных сил. Согласно второму закону Ньютона для модуля F равнодействующей должно выполняться равенство

$$F = |m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}| = ma_{\text{н}}, \text{ где } a_{\text{н}} = \omega^2 R.$$

Чтобы найти из этого равенства какую-либо величину, нужно вычислить модуль суммы, стоящей в левой части равенства. Проще всего это сделать так. Выберем систему отсчета — Землю и свяжем с ней прямоугольную систему координат. Ось Ox направим по радиусу вращения бусинки, ось Oy — вертикально вверх. Спроецируем силы, приложенные к бусинке, и ее ускорение на оси координат. Как видно из чертежа, проекции векторов на ось Ox равны: $N\cos\alpha$, $F_{\text{тр}}\sin\alpha$, 0 и $\omega^2 R$, проекции на ось Oy равны: $N\sin\alpha$, $-F_{\text{тр}}\cos\alpha$, $-mg$ и 0.

Составляем основное уравнение динамики для проекций на оси:

$$N\cos\alpha + F_{\text{тр}}\sin\alpha = m\omega^2 R, \qquad (2)$$

$$N\sin\alpha - F_{\text{тр}}\cos\alpha - mg = 0. \qquad (3)$$

Из этих уравнений следует:

$$F = N\cos\alpha + F_{\text{тр}}\sin\alpha.$$

Поскольку бусинка находится на грани скольжения (расстояние l наибольшее), то

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \qquad (4)$$

Составленные уравнения полностью отражают динамику движения бусинки. Решая их относительно l, получим:

$$l = \frac{(1 + \mu \operatorname{tg}\alpha)g}{\omega^2(\operatorname{tg}\alpha - \mu)\sin\alpha}.$$

Анализируя этот результат, нетрудно заметить, что при $\alpha = 90°$ $\operatorname{tg}\alpha = \infty$ и $l = \frac{\mu g}{\omega^2}$. При $90° < \alpha < 180°$ $\operatorname{tg}\alpha < 0$, и, следовательно,

$$l = \frac{(\mu \operatorname{tg}\alpha - 1)g}{\omega^2(\operatorname{tg}\alpha + \mu)\sin\alpha}.$$

Пример 13. Конькобежец массой M, стоя на коньках на льду, бросает шайбу массой m под углом α к горизонту. Определите начальную скорость конькобежца, если шайба брошена со скоростью $\vec{u}$: а) относительно Земли; б) относительно человека. Смещением тел за время бросания пренебречь.

Р е ш е н и е. а) Начальную скорость конькобежца можно определить из закона сохранения импульса, поскольку в задаче рассматриваются два состояния системы тел и характер сил взаимодействия неизвестен. Если пренебречь смещением тел за то время, в течение которого человек сообщает скорость шайбе, то даже при наличии трения можно с большой степенью точности считать, что на систему Земля — человек — шайба внешние силы не действуют, т. е. эта система является изолированной и закон сохранения импульса в ней выполняется.

Делаем схематический чертеж (рис. 2.12) и изображаем на нем импульсы каждого тела до и после изменения их движения — до и после броска.

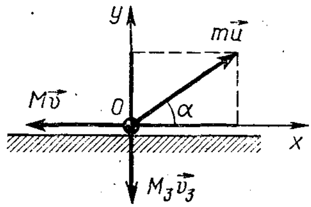

Рис. 2.12

Перед бросанием все тела находились в покое, импульс каждого тела был равен нулю, равнялась нулю и их векторная сумма. В конце броска импульс шайбы равен $m\vec{u}$, конькобежца $M\vec{v}$, земного шара $M_3\vec{v}_3$. Здесь $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{v}_3$ — скорости тел относительно точки пространства, где находился конькобежец в момент бросания. Эту точку можно считать неподвижной, так как по условию задачи смещение тел за время бросания ничтожно мало.

Согласно закону сохранения импульса

$$0 = m\vec{u} + M\vec{v} + M_3\vec{v}_3.$$

Поскольку импульсы тел направлены под углом друг к другу, для упрощения вычислений удобно перейти от векторной записи уравнения к скалярной, представив его в проекциях по осям прямоугольной системы координат Oxy. Выберем начало координат в точке бросания O и направим оси Ox и Oy вдоль поверхности Земли и по нормали к ней. Спроецируем векторы $M\vec{v}$, $m\vec{u}$ и $M_3\vec{v}_3$ на эти оси. Как видно из чертежа, проекции импульсов тел по осям равны: $-Mv$, $mu\cos\alpha$, 0 и 0, $mu\sin\alpha, -M_3v_3$.

Учитывая, что до броска импульсы всех тел были равны нулю, записываем уравнение закона сохранения импульса в проекциях.

Для оси Ox мы имеем:

$$0 = mu\cos\alpha - Mv. \tag{1}$$

Для оси Oy:

$$0 = mu\sin\alpha - M_3v_3. \tag{2}$$

Из уравнения (1) скорость конькобежца получается равной

$$v = \frac{m}{M}u\cos\alpha.$$

Уравнение (2) позволяет оценить скорость Земли, которую она приобретает во время толчка. Решая его относительно v_3, получим:

$$v_3 = \frac{m}{M_3}u\sin\alpha.$$

Из выражения для этой скорости видно, что она ничтожно мала, поскольку масса Земли M_3 во много раз больше массы груза.

б) Если дается скорость тела относительно человека, то уравнение закона сохранения импульса для проекции на ось Ox

будет иметь вид:

$$0 = -Mv + m(u\cos\alpha - v). \tag{3}$$

Уравнение закона сохранения импульса мы составляем в системе отсчета, связанной с неподвижной точкой бросания, поэтому скорости всех тел, входящие в это уравнение, нужно брать относительно точки бросания. Горизонтальная проекция скорости тела относительно неподвижной системы координат, связанной с точкой O, равна в данном случае разности $u\cos\alpha - v$. Это объясняется тем, что за то время, когда телу сообщается относительно руки скорость $\vec{u}$, сам человек приобретает скорость $\vec{v}$. Вертикальная проекция скорости тела равна $u\sin\alpha - v_3 \approx u\sin\alpha$, так как v_3 ничтожно мала.

Решая уравнение (3) относительно скорости конькобежца, получим:

$$v = \frac{m}{m+M} u\cos\alpha.$$

Анализируя ответ, мы видим, что при $m \ll M$ результат будет такой же, как и в случае а).

Пример 14. Лодка длиной l и массой M стоит в спокойной воде. На носу и корме лодки сидят два рыбака, массы которых равны m_1 и m_2. На сколько сместится лодка, если рыбаки пройдут по лодке и поменяются местами? Сопротивлением воды пренебречь.

Решение. Если не учитывать сопротивление воды и считать, что при движении лодки вода ею не увлекается, то систему тел лодка — рыбаки можно считать изолированной по любому направлению вдоль поверхности воды, так как внешние силы в горизонтальной плоскости на систему не действуют.

Вначале все тела находились в состоянии покоя и, следовательно, сумма импульсов тел равнялась нулю. Как только один рыбак пойдет по лодке, она станет двигаться ему навстречу под действием внутренних сил (сил трения). Согласно закону сохранения импульса какие бы перемещения в нашей системе тел ни начались, векторная сумма всех импульсов в любой момент времени должна оставаться равной нулю.

Предположим, что в некоторый момент времени скорость первого рыбака относительно лодки равна $\vec{v}_1$, а скорость лодки относительно берега $\vec{u}_1$. Тогда, пренебрегая движением воды и учитывая, что импульсы всех тел все время направлены по одной прямой, можно представить уравнение закона сохранения импульса в проекциях так:

$$0 = m_1(v_1 - u_1) - (M + m_2)u_1.$$

Напомним, что, составляя уравнение закона сохранения импульсов, мы договорились всегда брать абсолютную скорость тел относительно неподвижного тела отсчета (в данном случае воды).

Нетрудно сообразить, что у рыбака она равна разности между его скоростью относительно лодки и скоростью самой лодки, которую можно рассматривать для рыбака как переносную. При этом v_1 будет всегда больше u_1, поскольку обратное предположение противоречило бы закону сохранения импульсов.

Вследствие того что человек и лодка движутся одновременно и время, затрачиваемое на разгон и замедление в начале и в конце движения рыбака, мало, можно считать, что

$$v_1 = \frac{l}{t} \quad \text{и} \quad u_1 = \frac{x_1}{t},$$

где t и x_1 — соответственно время движения рыбака и модуль перемещения лодки за это время. Учитывая все это, уравнение закона сохранения импульсов можно переписать так:

$$m_1 (l - x_1) - (M + m_2) x_1 = 0. \qquad (1)$$

Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, составляем такое же уравнение для второго рыбака. Если через x_2 обозначить смещение лодки при переходе второго рыбака, то

$$m_2 (l - x_2) - (M + m_1) x_2 = 0. \qquad (2)$$

Результирующее смещение лодки равно разности:

$$s = x_1 - x_2. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1) — (3) совместно относительно искомой величины s, получим:

$$s = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M} l.$$

Следует заметить, что, как только рыбаки остановятся, остановится и лодка. Делая последний шаг, рыбак останавливает себя и лодку. Полученный результат не зависит от характера движения рыбаков.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 2

2.1. После прекращения тяги локомотива состав остановился на горизонтальном участке пути через 60 с. Определите расстояние, пройденное поездом за это время, если известно, что сила сопротивления движению не зависит от скорости и составляет 2% ве́са всего состава.

2.2. Через сколько секунд тело, брошенное вертикально вверх со скоростью 44,8 м/с, упало на землю, если сила сопротивления воздуха не зависела от скорости и составляла в среднем $^1/_7$ силы тяжести?

2.3. Динамометр вместе с прикрепленным к нему грузом сначала поднимают вертикально вверх, затем опускают. В обоих случаях движение происходило с ускорением, равным 6 м/с^2. Чему равна масса груза, если разность показаний динамометра оказалась равной 29,4 Н? Решите задачу при условии, что движение вверх и вниз происходило замедленно.

2.4. Гиря массой 10 кг лежит на пружинных весах, установленных в лифте Каково будет показание весов при движении лифта вверх, если известно, что он проходит с постоянным ускорением два одинаковых отрезка пути по 5 м каждый: первый — за 2 с, второй за 1 с Что покажут весы, если лифт будет опускаться вниз с тем же по модулю ускорением?

2.5. Груз массой 10 кг привязан к концу веревки, намотанной на лебедку. Груз и лебедка находятся на некоторой высоте. Груз начинает падать, причем веревка натянулась в тот момент, когда он пролетел 5 м Вслед за этим начинает с трением раскручиваться лебедка. Какую минимальную длину веревки пришлось вытравить до полной остановки груза, если веревка выдерживает максимальную силу натяжения 147 Н?

2.6. Санки массой 5 кг в течение 5 с тянули горизонтально с силой 20 Н. Коэффициент трения между санками и дорогой 0,3. Какое расстояние пройдут санки до полной остановки?

2.7. Спортсмен разбегается с максимальным ускорением и делает прыжок в длину. Как велика оказалась длина прыжка, если высота взлета спортсмена h? Коэффициент трения принять равным μ, время действия силы трения при разбеге считать равным τ, сопротивлением воздуха пренебречь.

2.8. Два груза, массы которых равны 0,98 и 0,2 кг, связаны нитью и лежат на гладком столе К левому грузу приложена сила 5,3 Н, к правому в противоположном направлении — 2,9 Н Чему равно натяжение нити? Изменится ли натяжение, если силы поменять местами?

2.9. N одинаковых грузов массой m каждый связаны нитями и лежат на гладком горизонтальном столе. К крайнему грузу привязан прочный тросик, переброшенный через блок, укрепленный на конце стола. а) Какой груз можно подвесить к свободному концу троса, чтобы максимально натянутая нить не оборвалась, если каждая нить выдерживает силу натяжения $\vec{F}$? б) С какой силой можно потянуть за тот же конец тросика, чтобы не произошел разрыв нити?

2.10. Через блок переброшена легкая нить, на одном конце которой укреплен грузик массой $2m$ По другую сторону блока, на расстоянии l от второго конца нити, на нить надета бусинка массой m. Между нитью и бусинкой действует сила трения, равная $0,5\ mg$. Предоставленная самой себе система приходит в ускоренное движение. Через сколько времени бусинка достигнет конца нити?

2.11. В кабине лифта, масса которой 100 кг, лежит груз массой 50 кг. Определите натяжение троса и силу давления груза на пол кабины в то время, когда лифт поднимается противовесом в 1,96 кН Трение не учитывать, массой троса пренебречь.

2.12. В верхней части штанги установлен неподвижный блок, через который перекинута нить с двумя грузами массами 0,5 и 0,1 кг. Во втором грузе есть отверстие, через которое проходит штанга. Сила трения этого груза о штангу постоянна по модулю и равна 2,94 Н. Определите ускорения грузов, силу натяжения нити, силу давления на ось блока и силу давления штанги на стол. Массой блока и штанги пренебречь.

2.13. К грузу массой 7 кг подвешен на веревке другой груз массой 5 кг. Какое натяжение будет испытывать верхний конец и середина веревки, если всю систему поднимать вертикально вверх, приложив к большему грузу силу 235 Н? Масса веревки равна 4 кг.

2.14. На концах веревки длиной 12 м и массой 6 кг укреплены два груза, массы которых равны 2 и 12 кг. Веревка переброшена через неподвижный блок и начинает скользить по нему без трения. Какое натяжение испытывает середина веревки в тот момент, когда длина ее по одну сторону блока достигнет 8 м?

2.15. На столе лежит деревянный брусок, к которому привязаны нити, перекинутые через блоки, укрепленные на краю стола (рис. 2.13). К свободным концам нитей подвешены грузы массами $m_1 = 0{,}85$ кг и $m_2 = 0{,}2$ кг, вследствие чего брусок приходит в движение и за 1 с проходит путь 1 м. а) Зная, что масса бруска равна $m = 2$ кг, определите коэффициент трения скольжения μ и натяжение нитей. б) Каковы будут ускорение, скорость и перемещение бруска спустя 4 с после начала движения, если нить между грузом массой m_1 и бруском оборвется в конце первой секунды движения? в) С каким ускорением будут двигаться тела, если груз массой m_2 положить на брусок, пропустив нить через блок? Коэффициент трения между этим грузом и бруском равен 0,015.

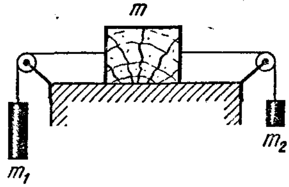

Рис. 2.13

2.16. Две гири *1* и *2*, находящиеся на блоках, установлены на высоте 3 м друг от друга (рис. 2.14). Предоставленные самим себе, грузы через 1 с после начала движения оказались на одной высоте. Какова масса гири, подвешенной к свободному концу веревки, если масса другой гири 0,3 кг? Чему равно натяжение нити и сила давления на ось неподвижного блока? Массой блоков и трением пренебречь.

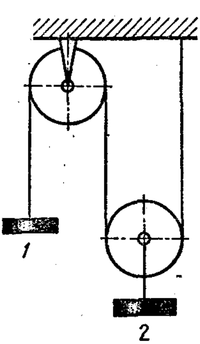

Рис. 2.14

2.17. Через блок ничтожно малой массы перекинута нить, на концах которой находятся грузы массами m и $2m$. Больший груз поднимают настолько, чтобы меньший коснулся пола. На какую максимальную высоту поднимется этот груз, если систему предоставить самой себе? В начальный момент времени больший груз находился на высоте h. Решите задачу при условии, что на нить при ее скольжении по блоку действует сила трения, равная 0,5 mg.

2.18. Через неподвижный блок перекинута веревка, за концы которой одновременно хватаются два гимнаста, массы которых 60 и 70 кг. Более легкий из них держится за конец веревки, а второй старается подниматься вверх. При этом оказывается, что более тяжелый гимнаст остается на одной и той же высоте, а другой поднимается вверх. Через сколько времени этот гимнаст достигнет блока, если вначале он находился ниже блока на 4,9 м?

2.19. Гладкий клин массой M лежит на пружинных весах. По клину с ускорением $\vec{a}$ спускается небольшая пластинка массой m. Каково будет показание весов при движении пластинки?

2.20. На легкой нити укреплены два маленьких шарика одинаковой массы — один на конце, другой в середине нити. Точка подвеса нити движется с ускорением $\vec{a}$, направленным под углом α к горизонту. На какие углы отклонятся нити от вертикали?

2.21. Скользящие с горы санки за время t прошли путь L. Скорость санок за это время возросла в три раза. Определите коэффициент трения, если угол наклона горы равен α.

2.22. Небольшое тело пустили снизу вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Время спуска тела оказалось в n раз больше времени подъема. Чему равен коэффициент трения?

2.23. За какое время тяжелое тело спустится с вершины наклонной плоскости высотой 2 м и углом наклона 45°, если предельный угол, при котором тело может находиться на наклонной плоскости в покое, равен 30°?

2.24. Санки можно удержать на ледяной горке с уклоном 0,2 силой, не меньшей 49 Н. Чтобы тянуть санки в горку равномерно, силу тяги надо увеличить на 9,8 Н. С каким ускорением будут двигаться санки, если их предоставить самим себе?

2.25. Тело массой $m = 10$ кг тянут по горизонтальной поверхности с силой $F = 39{,}2$ Н. Если эта сила приложена к телу под углом 60° к горизонту, оно движется равномерно. а) С каким ускорением будет двигаться тело, если силу приложить под углом $\alpha = 30°$? б) Под каким углом нужно приложить силу, чтобы тело двигалось с максимальным ускорением? Чему равно это ускорение?

2.26. Тележка с установленным на ней отвесом скатывается с горки, затем движется по горизонтальному участку и вновь въезжает на другую горку. В каком положении будет находиться нить отвеса при движении тележки, если: а) трение ничтожно мало; б) трение таково, что ускорение тележки $a > 0$; $a = 0$; $a < 0$?

2.27. На плоскости, наклоненной под углом α к горизонту, находится бак с водой. С какой силой, приложенной параллельно наклонной плоскости, нужно двигать бак, чтобы уровень воды в баке

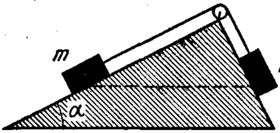

Рис. 2.15

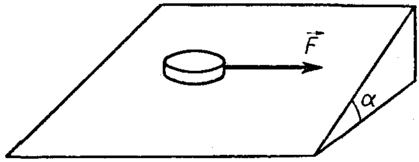

Рис. 2.16

стоял вдоль наклонной плоскости? Коэффициент трения между плоскостью и баком равен μ, масса бака с водой M.

2.28. По канатной железной дороге с наклоном 30° к горизонту спускается вагонетка массой 500 кг. Какую силу нужно приложить к канату, чтобы вдвое снизить скорость вагонетки на пути 10 м, если перед торможением она имела скорость 4 м/с? Коэффициент трения принять равным 0,1.

2.29. Буксир при буксировке баржи вверх по реке развивает скорость $v_1 = 10$ км/ч относительно берега, натягивая буксирный канат с силой $F = 11{,}7$ кН. Считая силу сопротивления воды пропорциональной скорости, определите, с какой скоростью баржа будет двигаться самосплавом, если скорость течения реки равна $v_т = 2$ км/ч, а уклон реки составляет $h = 10$ м на $l = 1$ км. Масса баржи $m = 5000$ кг.

2.30. Два груза массами M и m находятся на гранях гладкого прямоугольного клина с острым углом α (рис. 2.15). а) При каком соотношении масс грузы будут находиться в равновесии; груз массы M будет опускаться? б) Решите задачу при условии, что коэффициент трения между грузами и наклонной плоскостью равен μ. в) Какова будет сила давления на ось блока во время движения грузов при коэффициенте трения $\mu_1 < \dfrac{M - m\,\mathrm{tg}\,\alpha}{m + M\,\mathrm{tg}\,\alpha}$?

2.31. Небольшая шайба массой m лежит на наклонной грани клина, составляющей с горизонтом угол α (рис. 2.16). Коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен $\mu = 3\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Какую силу нужно приложить к шайбе параллельно нижнему ребру клина, чтобы сдвинуть ее с места? Какое ускорение нужно сообщить клину параллельно нижнему ребру клина, чтобы шайба начала скользить по плоскости?

2.32. Вверх по наклонной плоскости с углом наклона α тянут с ускорением $\vec{a}$ однородную веревку длиной l и массой m. Коэффициент трения между веревкой и плоскостью равен μ. Какое натяжение испытывает веревка в сечении, находящемся на расстоянии x от ее верхнего конца? Как будет изменяться это натяжение в зависимости от угла α?

2.33. На идеально гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α находится доска массой m. Куда и с каким ускорением должен бежать по доске мальчик массой M, чтобы доска оставалась на месте? При каком минимальном коэффициенте трения между доской и подошвами ботинок это возможно?

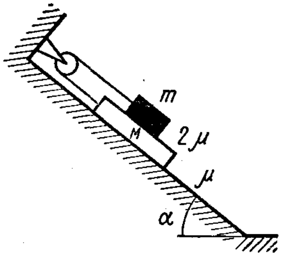

Рис. 2.17

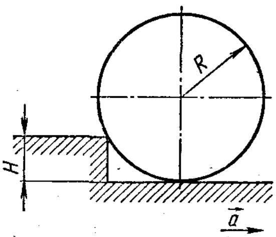

Рис. 2.18

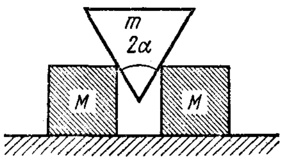

Рис. 2.19

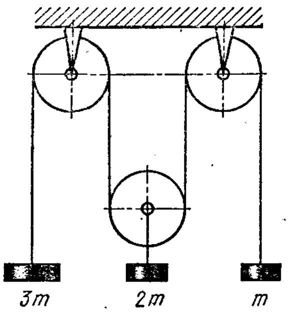

Рис. 2.20

2.34. На наклонной плоскости с углом при основании 45° лежит доска массой 2 кг, на доске находится брусок массой 1 кг. Коэффициент трения между плоскостью и доской 0,5, между доской и бруском 0,25. Предоставленная самой себе система приходит в движение. Чему равны ускорения доски и бруска? При каком значении коэффициента трения между доской и бруском тела будут двигаться как одно целое?

2.35. На наклонной плоскости с углом при основании α находится доска массой M и на ней брусок массой $m < M$ (рис. 2.17). Коэффициенты трения между плоскостью и доской, доской и бруском равны соответственно μ и 2μ. Определите ускорение тел. При каком отношении масс тела будут находиться в равновесии?

2.36. На горизонтальной доске есть выступ высотой H, в который упирается цилиндр радиусом $R > H$, лежащий на доске (рис. 2.18). С каким максимальным ускорением можно двигать доску в горизонтальном направлении, чтобы цилиндр не перекатился через выступ?

2.37. Цепочка массой m надета на гладкий прямой конус, высота которого H, а радиус основания R. Ось конуса направлена вертикально вверх, цепочка расположена в горизонтальной плоскости. Конус поднимается вверх с ускорением $2g$. Определите натяжение цепочки.

2.38. На горизонтальной доске стоят два одинаковых кубика массой M каждый. Между кубиками вставляют идеально гладкий клин массой m с углом при вершине 2α (рис. 2.19). С каким ускорением будут двигаться кубики, если коэффициент трения между кубиками и доской равен μ?

2.39. Легкая нить переброшена через два неподвижных и один подвижный блок (рис. 2.20). На концах нити висят грузы массами m и $3m$, а к оси подвижного блока подвешена гиря массой $2m$. Определите ускорение грузов.

2.40. Через неподвижный блок переброшена легкая нить, на одном конце которой висит груз массой $3\ m$, а на другом — подвижный блок (рис. 2.21). Через подвижный блок переброшены на нити гири массами $2m$ и $m = 1$ кг. а) Каково будет натяжение нитей и сила давления на оси блоков при движении грузов? б) При каком значении массы среднего груза он будет находиться в равновесии? Массой блоков пренебречь.

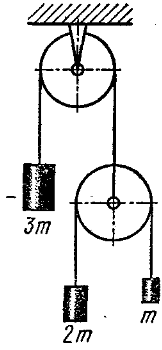

Рис. 2.21

2.41. Два клина одинаковой массы $M/2$ лежат на идеально гладком столе, как указано на рисунке 2.22. Коэффициент трения между наклонными гранями клиньев равен μ. С какой максимальной силой можно давить на верхний клин, чтобы система двигалась как одно целое?

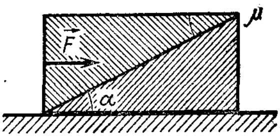

Рис. 2.22

2.42. На доске массой $m = 1$ кг, расположенной на горизонтальном столе, лежит брусок массой $M = 2$ кг. Коэффициент трения между доской и поверхностью стола равен $\mu_1 = 0{,}5$, между бруском и доской $\mu_2 = 0{,}25$. Каково будет ускорение бруска относительно доски и стола, если к доске приложить силу $F = 19{,}6$ Н? 29,4 Н?

2.43. На рисунке 2.23 показана система грузов, соединенных через блоки легкими нерастяжимыми нитями. При каком минимальном значении коэффициента трения между грузами массами M и $2M$ они в процессе движения системы не будут проскальзывать относительно друг друга? Каково будет ускорение тел, если грузы, находящиеся на горизонтальной плоскости, поменять местами? Трением о стол пренебречь.

2.44. На гладком столе расположена система грузов (рис. 2.24). Коэффициент трения между грузами массами M и m равен μ. Определите ускорение грузов в зависимости от модуля силы $\vec{F}$, приложенной: а) к верхнему грузу; б) к нижнему грузу.

2.45. На легкой нити, перекинутой через блок, подвешены два груза массами m и M. Предоставленные самим себе, грузы приходят в ускоренное движение. Зная, что на нить действует сила

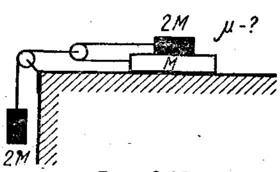

Рис. 2.23

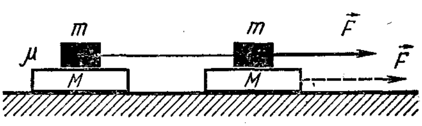

Рис. 2.24

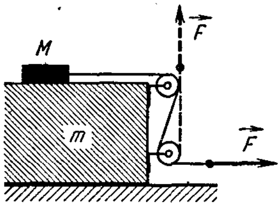

Рис. 2.25

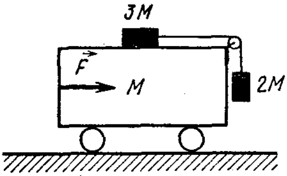

Рис. 2.26

трения F, определите ускорение и изменение импульса центра масс системы спустя время t после начала движения.

2.46. На столе массой $m = 9$ кг лежит брусок массой $M = 10$ кг. К бруску привязана нить, пропущенная через блоки, укрепленные на краю и сбоку стола, как показано на рисунке 2.25. С какими ускорениями будут двигаться брусок и стол, если за нить потянуть силой $F = 78{,}5$ Н: а) в горизонтальном направлении; б) вертикально вверх? Коэффициент трения между бруском и столом равен $\mu = 0{,}3$; трением между полом и столом можно пренебречь. Как будет изменяться ускорение стола, если сила тяги будет изменяться с течением времени по закону $F = kt$? Начертите график зависимости $a = \varphi(t)$.

2.47. Посмотрите на рисунок 2.26. а) Какую постоянную горизонтальную силу $\vec{F}$ нужно приложить к тележке массой M, чтобы бруски массами $2M$ и $3M$ относительно нее не двигались? Трением пренебречь. б) При каком значении силы $\vec{F}$ груз массой $2M$ начнет подниматься с ускорением, численно равным ускорению свободного падения; перемещаться в вертикальном направлении с ускорением, равным ускорению тележки? в) Ответьте на первый вопрос, полагая, что коэффициент трения между тележкой и брусками $\mu < 2/3$.

2.48. На столе лежит деревянный брусок массой $M = 2$ кг, к которому привязана нить, перекинутая через блок, укрепленный на краю стола. К свободному концу нити подвешен груз массой $m = 1$ кг, вследствие чего брусок движется с ускорением $a = 0{,}6$ м/с^2. Каковы будут ускорения груза и бруска, а также натяжение нити, если вся система будет: а) подниматься с ускорением $a = 2{,}2$ м/с^2; б) опускаться с тем же по модулю ускорением?

2.49. В лифте, поднимающемся вверх с ускорением $\vec{a}$, укреплен неподвижный блок, на котором висит веревка массой m. Ничтожно малой силой веревка выводится из равновесия и начинает скользить по блоку без трения. Определите натяжение в середине веревки, когда длина ее по одну сторону блока будет равна 2/3 всей длины веревки.

2.50. В ракете, поднимающейся вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$, установлена наклонная плоскость. Тяжелое тело, предоставленное самому себе, спускается с вершины наклонной плоскости за время t. За какое время тело спустится с наклонной плоскости, если: а) ракета стоит неподвижно на земле; б) опускается вниз с ускорением $a < g$?

2.51. Небольшое тело находится на наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 60°$. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен $\mu = 0{,}1$. С каким минимальным (максимальным) ускорением $\vec{a}$ можно двигать наклонную плоскость в горизонтальном направлении, чтобы тело не скользило по ней? Каково будет ускорение тела относительно плоскости при $a = 29{,}4$ м/с^2?

2.52. Груз массой m находится на наклонной грани клина массой m. С каким ускорением будет двигаться клин по столу, если груз начнет соскальзывать с него? Коэффициент трения между клином и столом, а также между грузом и клином достаточно мал и равен μ, грань клина, на которой лежит груз, образует с плоскостью стола угол α. При каком соотношении масс x клин будет находиться в покое во время движения груза?

2.53. По идеально гладкой наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол 60°, скользит клин массой 3 кг. На горизонтальной грани клина лежит гладкий кубик массой 1 кг. а) С какой силой кубик давит на клин во время движения? б) При каком значении коэффициента трения между клином и кубиком они будут двигаться без проскальзывания?

2.54. Шайба массой m лежит на вершине идеально гладкого клина массой $2m$ (рис. 2.27). Предоставленная самой себе система приходит в ускоренное движение. Определите скорость шайбы в тот момент, когда она достигнет стола. Трением в блоках пренебречь.

2.55. Какой путь пройдет тело за первую секунду, если оно будет падать свободно с высоты 1000 км? Радиус Земли принять равным 6400 км.

2.56. На какой высоте сила тяжести в n раз меньше, чем на поверхности Земли?

2.57. Радиус Луны приблизительно в 3,8 раза меньше радиуса Земли, а ее масса в 81 раз меньше массы Земли. Во сколько раз нужно изменить начальную скорость бросания, чтобы подбросить тело на Луне на такую же высоту, что и на Земле?

2.58. Радиус Марса составляет 0,53 радиуса Земли, а масса — 0,11 земной массы. Какой груз мог бы поднять человек, находящийся на полюсе Марса, если на Земле он в состоянии поднять груз массой 100 кг?

2.59. Каково ускорение силы тяжести на поверхности Солнца, если радиус его в 108 раз больше радиуса Земли, а плотность солнечной материи относится к плотности Земли, как 1 : 4?

2.60. В шаре радиусом R сделана сферическая полость, поверхность которой касается шара (рис. 2.28.). Масса сплош-

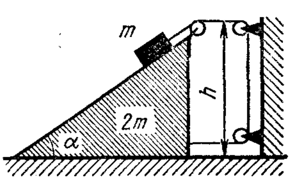

Рис. 2.27

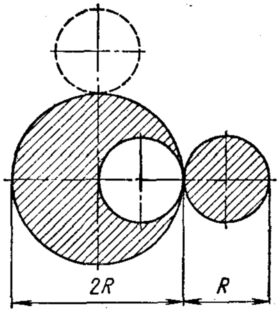

Рис. 2.28

ного шара равнялась M. С какой силой этот шар будет притягивать шар диаметром R, имеющий плотность, равную плотности большего шара, если шары расположить так, как указано на рисунке?

2.61. В воде находится стальной шарик радиусом r и пузырек воздуха такого же радиуса. Расстояние между их центрами равно L. Какая сила притяжения действует на шарик со стороны воды? Как изменится ответ, если стальной шарик заменить воздушным пузырьком того же радиуса? Массой воздуха в пузырьках пренебречь.

2.62. С какой силой притягивается к центру Земли тело массой m, находящееся на расстоянии $r < R_З$ от центра? Плотность Земли считать всюду одинаковой, ускорение свободного падения на поверхности Земли g_0.

2.63. Внутри однородного шара плотностью ϱ имеется сферическая полость, центр которой находится на расстоянии r от центра шара. С какой силой гравитационное поле будет действовать на частицу массой m, помещенную в полость?

2.64. Частица массой 1 кг движется по окружности радиусом 1 м. Зависимость пути, пройденного частицей, от времени определяется уравнением $s = 2t^2 + t + 1$ (величины выражены в единицах СИ). По какому закону изменяется с течением времени сила, действующая на частицу? Чему будет равна эта сила в тот момент, когда частица первый раз пройдет половину окружности?

2.65. Гоночный автомобиль массой 1800 кг идет по шоссе со скоростью 480 км/ч вдоль экватора. На сколько отличаются силы давления автомобиля на полотно дороги при его движении с запада на восток и с востока на запад?

2.66. На вертикальной оси укреплена горизонтальная штанга, по которой могут без трения перемещаться два груза массами m_1 и m_2, связанные нитью длиной l. Система вращается с угловой скоростью ω. На каких расстояниях от оси вращения будут находиться грузы в состоянии покоя относительно штанги? Чему будет равно при этом натяжение нити? Что произойдет с грузами, если их немного сместить из найденного положения?

2.67. Наибольшее значение силы трения покоя между вращающимся диском и расположенным на нем грузом массой 10 кг равно 24,5 Н. На каком максимальном расстоянии от оси вращения груз будет удерживаться на диске, не скользя по нему, если диск станет вращаться со скоростью 0,5 об/с? Чему равна сила трения груза о диск в тот момент, когда груз находится от оси вращения на половине найденного расстояния? Решите задачу при условии, что диск установлен в ракете, поднимающейся с ускорением $4g$.

2.68. Динамометр вместе с прикрепленным к нему грузом массой 2 кг равномерно вращают в горизонтальной плоскости со скоростью 1 об/с Показания динамометра при этом равны 39,2 Н. Каковы будут показания динамометра, если скорость вращения увеличить до 1,5 об/с? Жесткость пружины динамометра 0,98 кН/м.

2.69. Какую максимальную скорость может развивать автомобиль перед подъемом в гору, если допустимая перегрузка на передний мост автомобиля не должна превышать $z\%$ от его веса? Радиус кривизны полотна дороги при подъеме равен R

2.70. Какова должна быть максимальная длина выпуклого моста радиусом 100 м, чтобы автомобиль мог проходить по нему со скоростью 90 км/ч, не отрываясь от полотна дороги?

2.71. Гирю массой 98 г равномерно вращают в вертикальной плоскости со скоростью 6 м/с на стержне длиной 2 м. По какому закону будет изменяться сила, действующая вдоль стержня, в зависимости от его положения? Чему будет равна эта сила в тот момент, когда гиря находится в верхней точке траектории, нижней точке, проходит горизонтальное положение? Чему равна сила, действующая на груз в этих точках?

2.72. Две улицы A и B выходят на площадь радиусом 98 м (рис. 2.29) Автомобиль трогается с места перед площадью и, равномерно набирая скорость, выезжает на улицу B. Коэффициент трения между асфальтом и шинами равен 0,314. За какое минимальное время машина может проехать площадь, двигаясь по дуге окружности?

2.73. Два грузика массами $2m$ и m соединены нитью длиной l (рис. 2.30). Нить пропущена через кольцо, укрепленное на вертикальном стержне. С какой угловой скоростью нужно вращать стержень, чтобы нить была изогнута под углом 90°?

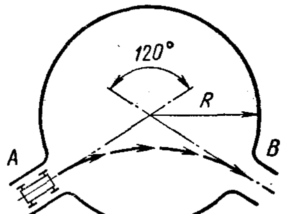

Рис. 2.29

2.74. Средняя высота спутника над поверхностью Земли равна 1700 км. Определите скорость и период обращения спутника вокруг Земли, считая ее радиус равным 6400 км, а ускорение свободного падения у поверхности 9,8 м/с^2

2.75. Определите расстояние от центра Земли до искусственного спутника и его скорость относительно ее поверхности, если спутник запущен так, что он движется в плоскости земного экватора и с Земли все время кажется неподвижным. Радиус Земли принять равным 6400 км

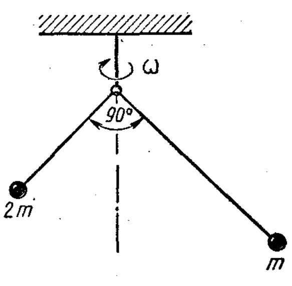

Рис 2.30

2.76. Чему равна продолжительность лунного месяца, если ускорение свободного падения у поверхности Земли равно 9,8 м/с^2 и расстояние от Земли до Луны $3{,}84 \cdot 10^5$ км? Радиус Земли $6{,}4 \cdot 10^3$ км.

2.77. Расстояние от Земли до Луны равно $3{,}84 \cdot 10^5$ км, время обращения Луны вокруг Земли 27,32 суток. Расстояние от Сатурна до его спутника Дионы равно $3{,}77 \cdot 10^3$ км, время обращения Дионы вокруг Сатурна 2,74 суток. Радиус Земли $6{,}4 \cdot 10^3$ км. Определите по этим данным массу Сатурна.

2.78. Диаметр Солнца виден с Земли под углом $\varphi = 32'$. Полагая, что Земля движется по окружности, определите плотность солнечной материи.

2.79. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Определите среднюю плотность вещества планеты, зная, что период ее обращения вокруг собственной оси равен 2 ч 27,5 мин.

2.80. Чему равен вес гири массой m на экваторе и на широте 60°, если известны масса земного шара M, его радиус R и период вращения T?

2.81. Сфера радиусом R вращается с угловой скоростью ω около вертикальной оси (рис. 2.31). При каком минимальном коэффициенте трения скольжения тело A будет удерживаться на поверхности сферы, не скользя по ней, так, чтобы радиус сферы, проведенный в точку A, составлял с горизонтом угол α? Каков будет ответ, если тело находится в точке B на внешней поверхности сферы?

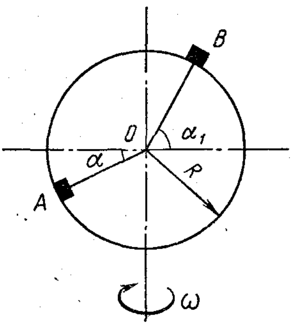

Рис. 2.31

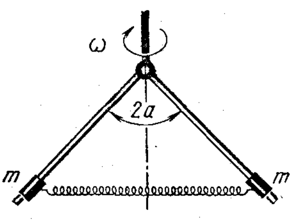

Рис. 2.32

2.82. Две штанги расположены под углом α к вертикальной оси и лежат в одной плоскости с ней (рис. 2.32). На каждую штангу надета муфта массой m, соединенная с противоположной муфтой пружиной жесткостью k. Система вращается с постоянной угловой скоростью ω так, что муфты находятся на одном уровне. Определите расстояние между муфтами, если в недеформированном состоянии длина пружины равнялась l. Трение не учитывать.

2.83. На невесомом стержне длиной $2l$ укреплены два груза массой M каждый. Один груз находится в середине стержня, второй — на конце. Стержень представляет конический маятник и вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Определите угол между стержнем и осью вращения. Точка подвеса стержня находится на его конце.

2.84. Внутри конуса, установленного в ракете, поднимающейся вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$, находится небольшое тело. Конус имеет при вершине угол 2α и вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. На каком максимальном расстоянии от вершины конуса будет находиться тело, если коэффициент трения между телом и поверхностью конуса равен μ? Ось конуса совпадает с продольной осью ракеты.

2.85. Мотоциклист едет по шоссе со скоростью $\vec{v}$. Коэффициент трения μ. За какое минимальное время мотоциклист может развернуться, не снижая скорости? Какова должна быть при этом ширина шоссе?

2.86. В известном аттракционе «мотоцикл на вертикальной стене» мотоцикл движется по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом 10 м по горизонтальному кругу. Какова при этом должна быть минимальная скорость движения мотоцикла, если известно, что коэффициент трения скольжения между шинами и поверхностью цилиндра равен 0,24? Под каким углом к стене должен быть при этом наклонен мотоциклист? Как будет двигаться мотоцикл, если скорость станет меньше (больше) найденной?

2.87. На краю платформы радиусом R, вращающейся вокруг вертикальной оси, стоит цилиндр высотой $2h$ и радиусом $r \ll R$. При каком значении угловой скорости платформы цилиндр опрокинется? Чему будет равна при этом сила трения, действующая между цилиндром и платформой, если масса цилиндра m?

2.88. Стальной шарик диаметром 4 см катится по двум кольцевым рельсам, расположенным в горизонтальной плоскости. Радиус кольца внешнего рельса 170 см. Определите, при какой наибольшей скорости шарик не сойдет с рельсов, если расстояние между ними равно 2 см.

2.89. Во сколько раз увеличится максимально допустимая скорость движения велосипеда по наклонному треку с углом наклона α по сравнению с допустимой скоростью на горизонтальном треке, если радиус закругления и коэффициент трения скольжения μ в обоих случаях имеют одинаковые значения?

2.90. Кольцо массой m и радиусом R вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через центр кольца. Кольцо сделано из тонкой проволоки, выдерживающей натяжение F. С какой максимальной скоростью можно вращать кольцо, чтобы оно имело трехкратный запас прочности?

2.91. К вертикальной оси центробежной машины прикреплена легкая нить, на конце которой находится тонкая замкнутая цепочка массой m. При вращении оси с угловой скоростью ω нить составляет с вертикалью угол α и цепочка образует кольцо, вращающееся в горизонтальной плоскости. Определите: а) расстояние между центром тяжести цепочки и осью вращения; б) натяжение нити.

2.92. Мячик массой 60 г падает на пол с высоты 1 м и подскакивает на высоту 0,5 м. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите среднюю силу удара мяча о пол, если известно, что продолжительность удара составляет 0,1 с.

2.93. На корме массой M стоит матрос массой m. Длина шлюпки l. В некоторый момент времени матрос начинает идти на нос шлюпки со скоростью $\vec{v}$ относительно лодки. Считая силу сопротивления воды постоянной и равной F, определите: а) скорость шлюпки в зависимости от времени; б) расстояние, на которое сместится матрос, перейдя с кормы на нос шлюпки.

2.94. Мяч, катившийся без скольжения по полу, после упругого удара о стенку отлетел от нее под углом α к горизонту. Чему равен коэффициент трения между мячом и стенкой?

2.95. Тело массой 10 г летит горизонтально со скоростью 5 м/с. Определите модуль и направление импульса силы, если в конце действия импульса тело стало двигаться со скоростью 5 м/с под углом 30° к своему начальному направлению.

2.96. Гладкая вертикальная стенка движется в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{u}$. В стенку попадает шарик массой m, летящий со скоростью $\vec{v}$, направленной под углом α к стенке. Считая удар абсолютно упругим, определите изменение импульса шарика после соударения и угол, под которым шарик отлетит от стенки. Проанализируйте ответ в зависимости от u и α.

2.97. Доска массой M движется равномерно по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $\vec{v}$. Сверху на доску осторожно кладут кирпич массой $m = \frac{M}{2}$. Какое расстояние пройдет кирпич по доске за время проскальзывания? Коэффициент трения между доской и кирпичом равен μ.

2.98. Плот массой M свободно скользит по поверхности воды со скоростью $\vec{v}$. С берега на плот прыгает человек массой m, скорость которого в горизонтальном направлении равна $\vec{u}$. Пренебрегая погружением плота при толчке, определите его скорость вместе с человеком для случаев, когда скорости плота и человека направлены в одну сторону, в противоположные, перпендикулярно друг другу. Трением плота о воду пренебречь.

2.99. Гладкий неупругий шарик из мягкого свинца налетает на такой же шарик, находящийся в покое. Скорость первого шарика в момент удара направлена под углом α к линии центров шаров. Под каким углом разлетятся шары после удара?

2.100. На горизонтальной плоскости сделан выстрел из винтовки. Ствол винтовки был поднят под углом 30° к горизонту, и пуля массой 10 г попала в вагончик массой 2 кг, шедший со скоростью 1 м/с навстречу пуле. Определите скорость вагончика после удара пули, если известно, что она попадает в него на расстоянии 100 м от места выстрела и что конец ствола и вагончик находятся на одном уровне. Как изменится ответ, если в момент удара пули вагончик будет удаляться от места выстрела?

2.101. Из орудия выстрелили вертикально вверх. Снаряд вылетел из ствола со скоростью v_0 и в верхней точке разорвался на два одинаковых осколка. Первый осколок упал со скоростью

v_1 недалеко от места выстрела. Через сколько времени упадет второй осколок?

2.102. Снаряд, выпущенный под углом к горизонту, разорвался в верхней точке траектории на два осколка, отношение масс которых равно n. Один осколок после разрыва полетел горизонтально и упал недалеко от места выстрела. Определите, на каком расстоянии x от этого осколка упадет второй осколок, если точка разрыва удалена по горизонтали от места выстрела на расстояние s.

2.103. При неудачном запуске ракеты под некоторым углом к горизонту она разорвалась в верхней точке траектории на высоте 400 м на две одинаковые части. Через 2 с после разрыва одна часть падает на землю под тем местом, где произошел взрыв. На каком расстоянии от места старта упадет второй осколок, если первый упал на расстоянии 1 км от стартовой площадки?

2.104. На гладком столе лежат два одинаковых шара массой M каждый. Расстояние между шарами l намного больше их радиусов. В один из шаров по линии их центров попадает пуля массой m, летевшая горизонтально со скоростью $\vec{v}$. Пробив первый шар, пуля теряет половину скорости и попадает во второй шар. Через сколько времени столкнутся шары?

2.105. Через легкий блок, вращающийся на оси без трения, перекинута нить, на концах которой привязаны грузы одинаковой массы M. Один из концов нити пропущен через кольцо массой m, укрепленное на высоте h от соответствующего груза. В некоторый момент времени кольцо падает и остается на грузе. Определите время, за которое расстояние между грузами станет равным $2h$.

2.106. На тонкой пластинке лежит шар массой M. Снизу вертикально вверх в шар стреляют из пистолета пулей массой m. Пробив пластинку, пуля ударяет в шар, который подскакивает на высоту h. На какую высоту поднимется пуля, если известно, что в момент удара о шар она имела скорость $\vec{v}$, направленную по оси шара, и пробила шар насквозь? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2.107. Две лодки массой M, на каждой из которых находилось по одному человеку массой m, двигались равномерно навстречу друг другу параллельными курсами. В тот момент, когда лодки поравнялись, из каждой из них в другую перешел человек. После этого лодки двигались в прежних направлениях со скоростями u_1 и u_2. Чему были равны начальные скорости лодок?

2.108. С неподвижного ракетного катера массой M выпущены одна за другой n ракет массой m каждая. Пренебрегая сопротивлением воды, определите, какую скорость будет иметь катер, если скорость ракет относительно катера в горизонтальном направлении равна u.

2.109. Две лодки массами M и $2M$ двигались навстречу друг другу со скоростями, равными соответственно $2v$ и v. Когда лодки поравнялись друг с другом, из первой лодки во вторую переложили мешок массой m. Скорость мешка относительно лодки в горизонтальном направлении была равна u и направлена перпендикулярно движению. Какими станут скорости лодок? Решите задачу при условии, что вначале лодки двигались перпендикулярно друг другу.

2.110. Лыжник массой M, скользящий с горы, у которой длина спуска равна l и наклон к горизонту α, на половине пути стреляет вертикально вверх. Ракета массой $m \ll M$ вылетает из ракетницы со скоростью u. Определите скорость лыжника в конце спуска. Трением пренебречь.

2.111. С высоты H без начальной скорости падает шар массой M. На высоте $\frac{H}{2}$ в шар попадает пуля массой $m \ll M$, имеющая в момент удара скорость u, направленную вниз под углом α к горизонту. Полагая, что пуля застревает в центре шара и продолжительность импульса ничтожно мала, определите, с какой скоростью шар упадет на землю.

2.112. Человек, находящийся в лодке, движущейся со скоростью $v = 1$ м/с, прыгает с кормы в воду под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $u = 5$ м/с относительно лодки. Масса лодки $M = 180$ кг, масса человека $m = 60$ кг. Определите: а) дальность прыжка; б) угол, под которым должен прыгнуть человек, чтобы дальность прыжка была наибольшей.

2.113. Под каким углом α к горизонту и с какой скоростью u относительно земли (относительно тележки) должен прыгнуть человек, стоящий на краю неподвижной тележки, чтобы попасть на ее другой край к моменту остановки тележки? Масса человека m, масса и длина тележки M и l, коэффициент трения между тележкой и дорогой равен μ. При каком значении α скорость u будет экстремальной?

2.114. Тело массой m лежит на клине массой M с длиной основания l и высотой h. Определите расстояние, на которое переместится клин за то время, когда тело опустится с его вершины до основания. Трением пренебречь. Как будет направлена скорость тела в конце спуска?

2.115. Через неподвижный блок переброшена веревка длиной l, за концы которой на одной высоте удерживаются два гимнаста массой m каждый. Через сколько времени первый гимнаст достигнет блока, если он полезет вверх со скоростью v относительно веревки? С какой скоростью он будет приближаться к блоку? Каково будет ускорение гимнастов и натяжение веревки? Массу веревки не учитывать, трением на блоке пренебречь.

2.116. К свободному аэростату массой M привязана веревочная лестница длиной l, на конце которой находится человек массой m. Аэростат не движется. Человек начинает подниматься по лестнице вверх. На какой высоте будет находиться человек над землей в тот момент, когда он доберется до аэростата, если в начальный момент он находился от нее на высоте h?

2.117. Плот с человеком плывет в спокойной воде со скоростью v. Человек находится в середине плота, масса плота M, масса человека m. Человек проходит по плоту расстояние l со скоростью u относительно плота и останавливается. Какое расстояние пройдет плот за это время, если человек шел: а) в направлении движения плота; в сторону, противоположную движению плота; б) перпендикулярно движению плота? В каком направлении и с какой скоростью должен идти человек, чтобы плот не двигался?

Глава 3

РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Работой постоянной силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$ ее точки приложения называется скалярное произведение этих векторов:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = Fs\cos\alpha, \tag{3.1}$$

где α — угол между направлением силы и перемещения (скорости). Если на тело действует несколько сил, каждая из которых совершает над ним работу, то вся произведенная работа равна алгебраической сумме работ отдельных сил:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Если в процессе совершения работы сила изменяется по модулю или направлению, ее работу можно вычислить по формуле (3.1) при условии, что известно среднее значение силы на данном перемещении. Вычислить $F_{ср}$ методами элементарной математики можно лишь для простейшего случая, когда модуль силы $\vec{F}$ изменяется пропорционально перемещению $\vec{s}$, т. е. когда

$$\vec{F} = k\vec{s}, \tag{3.2}$$

где k — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности. По закону (3.2) изменяется, в частности, сила, действующая со стороны упругой пружины на растягивающие или сжимающие ее тела. Для пружины s — ее удлинение (сжатие); k — жесткость пружины, показывающая, какую силу нужно приложить к пружине, чтобы ее растянуть (сжать) на единицу длины. Среднее значение переменной силы (3.2) на каком-либо перемещении равно полусумме ее значений $F_н$ в начале и $F_к$ в конце этого перемещения:

$$F_{ср} = \frac{F_н + F_к}{2}.$$

Если $F_н = 0$ и $F_к = F$, работа силы (3.2) на перемещении $\vec{s}$ равна:

$$A = \frac{Fs}{2} = \frac{ks^2}{2} = \frac{F^2}{2k}. \qquad (3.3)$$

Такую же работу совершает и сила упругости при растяжении или сжатии пружины из свободного состояния.

Минимальная работа по подъему тела массой m в поле тяготения равна:

$$A = mgh_{ц.т}, \qquad (3.4)$$

где $h_{ц.т}$ — расстояние, на которое поднимается центр тяжести тела по вертикали.

В общем случае работа силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$ ее точки приложения определяется как скалярная величина, равная

$$A = \int_0^s \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^s F ds \cos \alpha, \qquad (3.5)$$

где $d\vec{s}$ — бесконечно малое перемещение вдоль траектории, на котором можно считать силу постоянной; α — угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{s}$. Формула (3.5) позволяет вычислить работу силы на данном отрезке пути, если известно, по какому закону изменяется сила в процессе движения — вид функции $F = f(s)$. В частности, если имеет место зависимость (3.2), при $\alpha = 0$ из (3.5) мы получим (3.3).

2. Мощность, развиваемая постоянной силой $\vec{F}$, направленной под углом α к направлению перемещения, может быть рассчитана по формуле

$$N = \frac{A}{t}, \qquad (3.6)$$

и

$$N = Fv \cos \alpha = F_т v, \qquad (3.6')$$

где $F_т = F \cos \alpha$ — проекция силы на направление перемещения; v — модуль скорости тела.

Используя формулу (3.6′) для практических расчетов, необходимо различать два возможных случая. Если по условию задачи требуется определить среднее значение мощности, то под v следует понимать среднюю скорость движения. Если же необходимо найти мощность в некоторый момент времени — мгновенную мощность, за v нужно принять мгновенное значение скорости в этот момент. К мгновенной мощности относятся максимальная и минимальная мощности.

Понятие мощности вводится для оценки работы, которую совершает или может совершить та или иная машина (механизм) в единицу времени, поэтому в формуле (3.6′) под $F_т$ всегда подразумевается одна строго определенная сила — сила тяги, направленная в сторону перемещения рассматриваемого тела.

3. Физическое состояние всех тел и полей определяется различными видами движения материи, каждое из этих состояний характеризуется рядом величин. Существует скалярная физическая величина, которая при любых изменениях, происходящих в изолированной системе тел (полей), остается неизменной и поэтому может быть принята за единую количественную меру движения материи. Единую количественную меру движения материи, не зависящую от форм этого движения, называют энергией.

В различных процессах и явлениях, обусловленных проявлением того или иного вида движения материи, в каждом конкретном случае энергию можно выразить через комбинации физических величин, характеризующих частные свойства материи и ее движения.

Поскольку движение материи изменяется лишь при взаимодействии тел и в процессе такого взаимодействия всегда совершается работа, то за меру энергии принимается работа, которую может совершить тело или система тел, находясь в данном состоянии. Учитывая это, энергию, хотя она и является одной из фундаментальных физических характеристик, для большей наглядности определяют как величину, показывающую, какую максимальную работу может совершить тело (поле) или их система за счет изменения своего физического состояния.

Часть энергии тела, соответствующую механическим формам движения материи, называют механической энергией.

Иначе, механическая энергия — это величина, которая показывает, какую максимальную работу может совершить тело (система тел) за счет изменения своего механического состояния.

Механическую энергию принято делить на кинетическую и потенциальную. В случае движения материальной точки или поступательного движения твердого тела эта работа, а следовательно, и кинетическая энергия равна:

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \qquad (3.7)$$

Потенциальная энергия представляет собой часть механической энергии, обусловленную взаимным расположением тел или частей тела и их взаимодействием друг с другом. Потенциальную энергию измеряют максимальной работой, которая может быть совершена внутренними силами системы вследствие изменения конфигурации этой системы.

Потенциальную энергию сжатой (растянутой) пружины измеряют работой, которую может совершить сила упругости при возвращении пружины в исходное состояние. Согласно (3.3) она равна

$$W_p = \frac{ks^2}{2}. \qquad (3.8)$$

Потенциальную энергию тел, расположенных около Земли, измеряют работой, совершаемой силой земного притяжения при удалении тел от Земли на бесконечно большое расстояние.

Если считать, что на тело действует только сила земного притяжения, то эта работа, а следовательно, и потенциальная энергия тела массой m, находящегося на расстоянии $r \geqslant R_3$ от центра Земли, равна:

$$W_p = -G\frac{mM}{r} = -mgr = -mg_0\frac{r^2}{R_3}, \tag{3.9}$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли, g — ускорение свободного падения, R_3 — радиус Земли.

На поверхности Земли ($r = R_3$) тело обладает потенциальной энергией

$$W_p = -G\frac{mM}{R_3} = -mg_0R_3. \tag{3.9$'$}$$

Для всех практических вопросов, связанных с движением тел у поверхности Земли, интерес представляет не само значение потенциальной энергии, а ее изменение, равное

$$\Delta W_p = mgh. \tag{3.10}$$

Эта формула справедлива только для перемещения тел по вертикали на расстояние во много раз меньшее, чем среднее расстояние от тела до центра Земли, так как лишь при этом условии можно пренебречь изменением силы тяжести с высотой и считать ее постоянной. Для тел, расположенных вблизи поверхности Земли, выражение, стоящее в правой части формулы (3.10), рассматривают обычно не как изменение потенциальной энергии, а как ее значение на высоте h, отсчитанной от поверхности Земли. (Потенциальную энергию на уровне поверхности Земли условно принимают равной нулю.)

Полная механическая энергия системы тел равна сумме кинетических и потенциальных энергий всех тел, входящих в данную систему:

$$W_{\text{полн}} = \sum W_k + \sum W_p.$$

Кинетические энергии тел суммируются арифметически, поскольку они не зависят от направления движения, потенциальные энергии тяготения могут иметь положительное и отрицательное значение в зависимости от выбора уровня отсчета высоты.

В изолированной системе тел при любых переходах системы из одного состояния в другое полная энергия системы (включая все известные виды энергии) остается неизменной (закон сохранения энергии). Если в такой системе механическая энергия не преобразуется в другие виды энергии (и наоборот), полная механическая энергия системы остается постоянной:

$$W_{\text{полн}} = \text{const}. \tag{3.11}$$

Из закона сохранения механической энергии как следствие вытекает:

а) Если в какой-либо момент времени полная механическая энергия изолированной системы равна W_1, а в любой последующий момент времени W_2, то

$$W_2 - W_1 = 0. \qquad (3.11')$$

б) В применении к наиболее часто встречающемуся случаю, когда в задаче рассматривают изолированную систему, состоящую из двух тел — Земля плюс тяжелый предмет у ее поверхности, уравнение (3.11) можно представить в виде:

$$\frac{mv_2^2}{2} + mgh - \frac{mv_1^2}{2} = 0, \qquad (3.11'')$$

где v_1 и v_2 — модули скоростей тела относительно поверхности Земли в первом и втором состоянии; h — модуль перемещения тела по вертикали. Изменение энергии самой Земли при этом не учитывают.

в) Если на тело (систему тел) в процессе его перехода из одного состояния в другое, помимо силы земного притяжения, действуют другие силы, то работа этих сил равна изменению полной механической энергии:

$$A = W_2 - W_1. \qquad (3.12)$$

В том случае, когда в правой части этого уравнения изменение потенциальной энергии тяготения учтено, работа силы тяжести $m\vec{g}$ и ее составляющих в A не входит.

При движении тел под действием одной лишь силы тяжести их нельзя считать изолированными. Изолированной системой, в которой имеет место закон сохранения энергии, здесь является система тело — Земля, однако при составлении уравнения (3.11″) изменение энергии Земли не учитывается, так как оно мало.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Правила решения задач о работе постоянной силы сводятся к следующим:

а) Установить, работу какой силы требуется определить, и записать исходную формулу: $A = Fs\cos\alpha$, где $\vec{F}$ может быть и равнодействующей, и отдельной силой.

б) Сделать чертеж, указав на нем силы, приложенные к телу.

в) Установить, чему равен угол α между направлением вектора силы, работу которой нужно вычислить, и направлением перемещения (скорости).

г) Если сила условием задачи не задана, ее следует найти из уравнения второго закона динамики.

д) Найти модуль перемещения (если оно неизвестно) по формулам кинематики.

е) Подставить найденные выражения для F и s в формулу работы и провести вычисления.

2. Задачи на работу переменной силы решают в основном по формулам (3.3). Для решения таких задач необходимо:

а) Установить, работу какой силы нужно определить, и записать одну из трех расчетных формул в зависимости от того, что в данной задаче считается известным и неизвестным.

б) Сделать чертеж, на котором указать все силы, приложенные к телу.

в) Определить, чему равна сила, совершающая работу над телом, и подставить ее выражение в исходную формулу (обычно такими силами являются сила упругости пружины, переменная сила трения, переменная выталкивающая сила жидкости).

г) Если конечное значение силы не задано, из дополнительных условий нужно определить коэффициент пропорциональности k и, подставив найденное выражение k в расчетную формулу (3.3), провести вычисления.

3. Решение задач механики, связанных с расчетом мощности, развиваемой постоянной силой, основано на применении формул (3.6) и (3.6′).

а) Приступая к решению задач такого типа, необходимо сначала установить, какую мощность требуется определить — среднюю или мгновенную. Далее следует записать исходную формулу, подразумевая под v в первом случае среднюю скорость на заданном участке пути, во втором — мгновенную скорость в конце рассматриваемого перемещения.

б) Сделать чертеж, указав на нем все силы, приложенные к телу, и заданные кинематические характеристики движения.

в) Составить основное уравнение динамики материальной точки и найти из него модуль силы тяги $\vec{F}_т$.

г) Если значения $v_{ср}$ или v не заданы, то определить их из формул кинематики.

д) Подставить в формулу мощности вместо v и $F_т$ их выражения и провести окончательный расчет.

4. Уравнение закона сохранения и превращения энергии (3.10), представляющее одну из самых общих формул динамики, позволяет при известном навыке решить почти все задачи элементарной динамики, включая многие из тех, что были разобраны в главе 2. Во многих задачах это уравнение является одним из основных, которое вместе с уравнением второго закона динамики и уравнением закона сохранения импульса составляет полную систему уравнений, описывающих данное явление. Особенно удобно (а во втором случае просто необходимо) использовать закон сохранения энергии при решении задач, где: а) дается два механических состояния или положения тела в пространстве при равнопеременном движении; б) рассматриваются два состояния или положения тела (или системы тел) в процессе неравномерного переменного движения.

Закон сохранения энергии связывает характеристики начального и конечного состояния системы взаимодействующих тел, поэтому его использование позволяет упростить решение многих задач и не рассматривать действующие между телами силы.

Общую схему решения задач, требующих составления уравнения закона сохранения энергии, можно представить так:

а) Сделать схематический чертеж и записать формулу закона сохранения и превращения энергии:

$$A = W_2 - W_1.$$

б) Установить первое и второе состояние (положение) рассматриваемого тела (системы тел). Ими обычно служат начальное и конечное положение движущегося тела.

в) Выбрать нулевой уровень отсчета потенциальной энергии. Его можно взять произвольно, но удобнее выбирать или по самому нижнему положению, которое занимает тело при своем движении, или отсчитывать от уровня, на который опускается тело, переходя из первого положения во второе.

Если потенциальная энергия тела или системы тел при переходе из одного состояния в другое не изменяется, то при составлении уравнения закона сохранения энергии ее вообще можно не рассматривать.

г) Расставить все внешние силы, действующие на тело в произвольной точке траектории, и отметить кинематические величины v и h, характеризующие механическое состояние тела (системы) в первом и втором положениях.

д) С помощью формул (3.1), (3.3), (3.7) и (3.8) составить выражения для работы внешних сил и полной механической энергии тела (системы) в положениях I и II — представить работу A как функцию модуля силы $\vec{F}$ и модуля перемещения $\vec{s}$ ($A = f(F, s)$), а энергии W_1 и W_2 как функции скоростей v и расстояний h. Подставить эти выражения в исходное уравнение закона сохранения энергии и найти из него ту величину, которая считается неизвестной. Если неизвестных оказывается больше одного, то к составленному уравнению закона сохранения энергии нужно добавить основное уравнение динамики материальной точки, уравнение закона сохранения импульса или формулы кинематики. В результате получится система уравнений, совместное решение которых позволит определить искомую величину.

Пример 1. Вагонетку массой $m = 3$ т поднимают по рельсам в гору, наклон которой к горизонту равен $\beta = 30°$. Какую работу совершила сила тяги на пути $s = 50$ м, если известно, что вагонетка двигалась с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2? Коэффициент трения принять равным $\mu = 0{,}1$; $g = 10$ м/с^2.

Р е ш е н и е. По условию задачи необходимо вычислить работу постоянной силы тяги $\vec{F}_т$. Эта работа определяется формулой

$$A = F_т s \cos \alpha. \qquad (1)$$

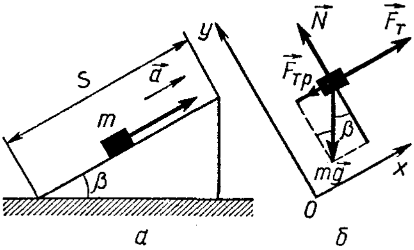

Рис. 3.1

Делаем чертеж (рис. 3.1) и расставляем силы, действующие на вагонетку: это сила тяги $\vec{F}_т$, сила тяжести, равная $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и реакция опоры $\vec{N}$.

По условию задачи сила тяги направлена вдоль перемещения, поэтому угол α между $\vec{F}_т$ и перемещением равен нулю, и, следовательно, $\cos\alpha = 1$. (Этот угол не следует путать с углом наклона β плоскости.)

Чтобы определить силу тяги, нужно составить основное уравнение динамики материальной точки. Выберем систему отсчета — Землю и связанную с ней прямоугольную систему координат. Ось Ox направим вдоль наклонной плоскости вверх, ось Oy — перпендикулярно наклонной плоскости. Проекции сил, действующих на вагонетку, по этим осям равны соответственно $F_т$, $-mg\sin\beta$, $-F_{тр}$, N и $-mg\cos\beta$.

Уравнение второго закона Ньютона в проекциях на ось Ox дает:

$$F_т - mg\sin\beta - F_{тр} = ma,$$

на ось Oy:

$$N - mg\cos\beta = 0.$$

Учитывая, что $F_{тр} = \mu N$, основное уравнение динамики в проекциях на ось Ox можно записать так:

$$F_т - mg\sin\beta - \mu mg\cos\beta = ma.$$

Найдя из этого уравнения силу тяги и подставив ее значение в уравнение (1), получим:

$$A = m(a + g\sin\beta + \mu g\cos\beta)s; \; A \approx 900 \text{ Дж}.$$

Пример 2. Две пружины одинаковой длины, имеющие соответственно жесткость, равную $k_1 = 9{,}8$ Н/см и $k_2 = 19{,}6$ Н/см, соединены между собой концами (параллельно). Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружины на $s_0 = 1$ см? Чему будет равна эта работа, если пружины будут соединены между собой только одним концом (последовательно)?

Р е ш е н и е. Чтобы растянуть или сжать пружину на заданную длину, к ней нужно приложить силу, модуль которой зависит от упругих свойств пружины. Эти свойства характеризуются ее жесткостью k. При небольших удлинениях или сжатиях упругих пружин можно с большой степенью точности считать, что удлинение s пружины прямо пропорционально приложенной к ней силе, т. е. $F = ks$. Работа такой силы, как мы знаем, может быть рассчитана по второй формуле (3.3), если известны удлинение и жесткость пружины. При параллельном или последовательном соединении пружин с известной жесткостью k_1 и k_2 их общую жесткость k_0 можно вычислить следующим образом.

При растяжении силой $\vec{F}_0$ двух пружин, соединенных паралельно, общее удлинение пружин

$$s_0 = s_1 = s_2, \tag{1}$$

где s_1 и s_2 — удлинение первой и второй пружины. Если растянутые пружины находятся в равновесии и массы их ничтожно малы, то модуль силы, деформирующей пружины, равен сумме модулей сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ натяжений пружин, т. е.

$$F_0 = F_1 + F_2, \tag{2}$$

поскольку все силы действуют по одной прямой.

Согласно формуле (3.2) для системы пружин и каждой пружины в отдельности можно записать:

$$F_0 = k_0 s_0; \quad F_1 = k_1 s_1; \quad F_2 = k_2 s_2. \tag{3}$$

Исключая из уравнений (1) — (3) силы и удлинения, получим:

$$k_0 = k_1 + k_2. \tag{4}$$

В общем случае при параллельном соединении n пружин их общая жесткость равна:

$$k_0 = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

Зная жесткость двух пружин, соединенных параллельно, и удлинение, легко найти работу, совершенную силой $\vec{F}_0$. Согласно формуле (3.3) она равна:

$$A_1 = \frac{k_0 s_0^2}{2} = \frac{(k_1 + k_2)\, s_0^2}{2}; \quad A_1 = 0{,}147 \text{ Дж}.$$

При растяжении двух пружин, соединенных последовательно, натяжение каждой пружины равно внешней приложенной силе:

$$F_1 = F_2 = F_0, \tag{1}$$

а общее удлинение — сумме удлинений каждой пружины:

$$s_0 = s_1 + s_2. \tag{2}$$

Кроме того, для системы пружин и каждой пружины в отдельности будут иметь место соотношения (3).

Исключая из уравнений (1), (2) и (3) силы и удлинения, получим:

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2},$$

откуда

$$k_0 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}. \tag{3}$$

В общем случае при последовательном соединении n пружин их общую жесткость можно найти из формулы

$$\frac{1}{k_0}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{k_i}.$$

Работа по растяжению двух последовательно соединенных пружин согласно формуле (3.3) равна:

$$A_2=\frac{k_0 s_0^2}{2}=\frac{k_1 k_2 s_0^2}{2(k_1+k_2)}; \quad A_2=0{,}037 \text{ Дж}.$$

Пример 3. Самолет массой $m=3$ т для взлета должен иметь скорость $v=360$ км/ч и длину разбега $s=600$ м. Какова должна быть минимальная мощность мотора, необходимая для взлета самолета? Силу сопротивления движению считать пропорциональной силе нормального давления, средний коэффициент сопротивления принять равным $\mu=0{,}2$. Движение при разгоне самолета считать равноускоренным.

Решение. В задаче требуется определить мгновенную мощность мотора в момент взлета самолета. Она и будет являться той минимальной мощностью, при которой самолет может еще набрать скорость, необходимую для отрыва от земли:

$$N_{\min}=F_{\text{т}}v. \tag{1}$$

При разгоне самолета на его винт действует со стороны отбрасываемого воздуха сила тяги $\vec{F}_{\text{т}}$, кроме того, к самолету приложены следующие силы: сила тяжести, равная $m\vec{g}$, нормальная реакция опоры $\vec{Q}$ и сила сопротивления, равная по модулю μmg. Согласно второму закону Ньютона

$$F_{\text{т}}-\mu mg=ma. \tag{2}$$

Поскольку известна длина s разбега самолета и скорость при отрыве v, ускорение самолета можно найти из формулы

$$a=\frac{v^2}{2s}. \tag{3}$$

Исключая из уравнений (1) — (3) неизвестные величины $F_{\text{т}}$ и a, получим для минимальной мощности:

$$N_{\min}=m\left(\frac{v^2}{2s}+\mu g\right)v; \quad N_{\min}=3 \text{ МВт}.$$

Пример 4. Поезд массой $m=784$ т начинает двигаться под уклон и за $t=50$ с развивает скорость $v=18$ км/ч. Коэффициент сопротивления равен $\mu=0{,}005$, уклон $\varphi=0{,}005$. Определите среднюю мощность локомотива, считая силу сопротивления пропорциональной силе нормального давления.

Указание. Уклоном называют отношение высоты наклона плоскости к ее длине; уклон $\varphi=h/l=\sin\alpha$, где α — угол наклона плоскости к горизонту.

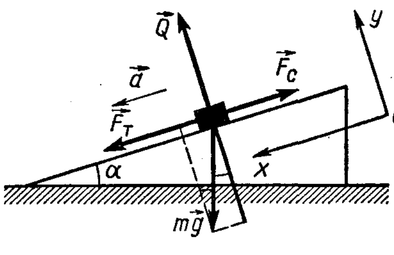

Рис. 3.2

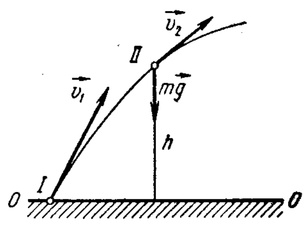

Рис. 3.3

Решение. Среднюю мощность, развиваемую силой тяги локомотива, можно определить по формуле

$$N_{\text{ср}} = F_{\text{т}} v_{\text{ср}}. \tag{1}$$

Силу тяги находим из уравнения второго закона Ньютона. Для его составления расставляем силы, приложенные к поезду (рис. 3.2): силу тяги $\vec{F}_{\text{т}}$, действующую со стороны рельсов (силой тяги здесь является сила трения сцепления колес с рельсами), силу тяжести, равную $m\vec{g}$, нормальную реакцию опоры $\vec{Q}$ и силу сопротивления движению $\vec{F}_{\text{c}}$.

Примем за тело отсчета Землю и свяжем с ней прямоугольную систему координат. Ось Ox направим вдоль наклонной плоскости вниз, ось Oy — вверх. Спроецировав силы на оси, составляем основное уравнение динамики в проекциях. Для оси Ox имеем $F_{\text{т}} + mg\sin\alpha - F_{\text{c}} = ma$, а так как по условию $F_{\text{c}} = \mu Q = \mu mg\cos\alpha$, то

$$F_{\text{т}} + mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma. \tag{2}$$

Формулы кинематики дают:

$$a = \frac{v}{t}; \quad v_{\text{ср}} = \frac{v}{2}. \tag{3}$$

Решая систему уравнений (1) — (3) относительно $N_{\text{ср}}$, получаем:

$$N_{\text{ср}} = m\left(\frac{v}{t} + \mu g\cos\alpha - g\sin\alpha\right)\frac{v}{2} \approx m\left(\frac{v}{t} + \mu g - g\varphi\right)\frac{v}{2},$$

$$N_{\text{ср}} = 200 \text{ кВт}.$$

Пример 5. Камень брошен под некоторым углом к горизонту со скоростью $\vec{v}_1$ (рис. 3.3). Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, на какой высоте от точки бросания скорость камня уменьшится вдвое.

Решение. Многие задачи динамики в курсе элементарной физики можно решить двумя способами: или с помощью уравнения второго закона Ньютона, или с помощью закона сохранения энергии. Данную задачу проще решить, применив уравнение закона сохранения энергии.

Записываем основное уравнение энергетического баланса:

$$A = W_2 - W_1.$$

Отмечаем первое (I) и второе (II) положение камня: в начальной точке траектории и на искомой высоте. За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принимаем нижнее положение, которое занимает камень по условию задачи,— уровень бросания OO

Расставляем силы, приложенные к камню. На него действует только сила тяжести, равная $m\vec{g}$. Указываем вектор скорости $\vec{v}_2$ и высоту h камня над уровнем OO в положении II.

Так как внешние силы на тело не действуют (в системе тело — Земля сила $m\vec{g}$ считается внутренней и ее работа учитывается изменением потенциальной энергии), то их работа

$$A = 0.$$

Полная механическая энергия камня в положении I и II соответственно равна

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2},$$

$$W_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh.$$

Подставляем выражения для A, W_1 и W_2 в исходную формулу:

$$0 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh - \frac{mv_1^2}{2},$$

откуда после упрощений получим:

$$0 = v_2^2 + 2gh - v_1^2$$

Так как по условию задачи $v_2 = \frac{v_1}{2}$, то

$$h = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = \frac{3v_1^2}{8g}.$$

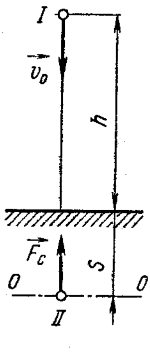

Рис 3.4

Несмотря на то что при решении задачи мы не использовали угол бросания α и в ответ он не вошел, полученный результат неявно зависит от α. Можно легко показать, что условие $v_2 = \frac{v_1}{2}$ имеет место лишь в том случае, если $\alpha \geqslant 60°$ Рекомендуем доказать это самим читателям

Пример 6. Груз массой $m = 1$ кг падает с высоты $h = 240$ м и углубляется в песок на $s = 0{,}2$ м (рис. 3.4). Определите среднюю силу сопротивления грунта, если начальная скорость падения груза $v_0 = 14$ м/с. Сопротивление воздуха не учитывать.

Р е ш е н и е. Делаем чертеж и записываем для груза исходное уравнение закона сохранения и превращения энергии:

$$A = W_2 - W_2.$$

Выбираем уровень OO отсчета потенциальной энергии по самому нижнему положению груза (но не от поверхности Земли!).

На груз при свободном падении внешние силы не действуют (в системе тело — Земля сила тяжести, равная $m\vec{g}$,— внутренняя сила). При перемещении груза в земле внешней силой, действующей на него, является сила сопротивления грунта $\vec{F}_c$. Работа этой силы равна:

$$A = -F_c s$$

(знак «минус» указывает, что сила направлена в сторону, противоположную перемещению, и образует с вектором скорости угол 180°, $\cos 180° = -1$). В положении I груз обладает механической энергией

$$W_1 = \frac{mv_0^2}{2} + mg(h+s).$$

В положении II кинетическая, а также потенциальная энергия относительно выбранного уровня равны нулю, т. е. $W_2 = 0$. Подставляя найденные выражения для работы и полной энергии в исходное уравнение, получим:

$$-F_c s = -\frac{mv_0^2}{2} - mg(h+s).$$

Откуда после подстановки числовых значений будем иметь:

$$F_c = \frac{m}{s}\left[\frac{v_0^2}{2} + g(h+s)\right]; \quad F_c \approx 12 \text{ кН}.$$

Пример 7. Тяжелый шарик соскальзывает без трения по наклонному желобу, образующему «мертвую петлю» радиусом R. С какой высоты шарик должен начать движение, чтобы не оторваться от желоба в верхней точке траектории?

Р е ш е н и е. Нам дана задача о переменном движении материальной точки по окружности. Причем в процессе этого движения изменяется положение точки по высоте. Эта и подобные задачи относятся ко второй группе задач о криволинейном движении, и, как указывалось выше, главным в их решении является составление уравнения закона сохранения энергии и уравнения второго закона Ньютона в проекциях на нормаль к траектории движения.

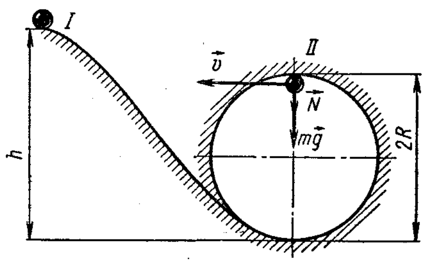

Рис. 3.5

Делаем чертеж (рис. 3.5) и записываем формулу закона сохранения энергии:

$$A = W_2 - W_1.$$

Первым считаем положение шарика в начале движения, вторым — положение в верхней точке траектории. Уровень отсчета высоты выберем на поверхности стола.

В процессе движения на шарик действуют две силы: сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и нормальная реакция опоры $\vec{N}$. Работа силы тяжести учитывается в изменении потенциальной энергии, сила $\vec{N}$ работу не совершает, так как она перпендикулярна перемещению (в формуле работы $\cos\alpha = 0$), поэтому

$$A = 0.$$

Полная механическая энергия шарика в I и II положениях равна соответственно:

$$W_1 = mgh$$

и

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} + mg2R.$$

Подставляя выражения для работы и энергии в исходное уравнение, получим:

$$0 = \frac{mv^2}{2} + 2mgR - mgh,$$

откуда

$$v^2 + 4gR - 2gh = 0. \qquad (1)$$

В верхней точке петли на шарик в общем случае действуют вниз две силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}$. Следовательно, по второму закону Ньютона

$$N + mg = \frac{mv^2}{R}. \qquad (2)$$

При пуске с достаточно большой высоты шарик приобретает такую скорость, что в каждой точке петли давит на желоб с некоторой силой $\vec{N}$, различной в разных точках. По третьему закону Ньютона желоб действует на шарик с той же по модулю силой в противоположную сторону и отжимает его на дугу окружности радиусом R.

По мере уменьшения начальной высоты спуска скорость шарика в верхней точке петли уменьшается и при некотором значении становится такой, что он пролетает верхнюю точку петли, лишь касаясь желоба. Для этого предельного случая $N = 0$, и уравнение второго закона примет вид:

$$mg = \frac{mv^2}{R},$$

откуда

$$gR = v^2. \qquad (3)$$

Такой же результат получается из анализа уравнения (2). При заданном радиусе R модуль N уменьшается с уменьшением скорости v, пока не достигнет нуля. Это соответствует минимальной высоте, когда шарик еще описывает «мертвую петлю».

Решая уравнения (1) и (3) совместно относительно h, получим:

$$h = 2{,}5R.$$

Пример 8. Груз массой m висит на легкой нити длиной l. Нить отклонили от вертикального положения на угол α_0 и отпустили. а) По какому закону изменяется сила натяжения нити при движении груза? б) На какой максимальный угол можно отклонить нить, чтобы при последующих качаниях она не оборвалась, если нить выдерживает силу натяжения, равную по модулю $2mg$?

Р е ш е н и е. В задаче рассматриваются два положения системы, которые проходит груз при неравномерном движении по дуге окружности. Для решения задачи нужно составить уравнение закона сохранения энергии и второго закона Ньютона в проекциях на направление радиуса.

а) Делаем чертеж (рис. 3.6), отмечаем первое положение груза, характеризуемое начальным углом отклонения α_0, и второе, характеризуемое произвольным углом α. Записываем уравнение закона сохранения энергии:

$$A = W_2 - W_1.$$

За начало отсчета потенциальной энергии примем произвольное положение груза — уровень OO.

Отмечаем высоту h и скорость $\vec{v}$ груза в положении II. На груз при его движении действует сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила тяжести, равная $m\vec{g}$. Во время движения сила натяжения всюду направлена под углом 90° к вектору скорости, поэтому при перемещении груза из положения I в положение II работа этой силы равна нулю:

$$A = 0.$$

Полная энергия груза в указанных положениях равна соответственно

$$W_1 = mgh \quad \text{и} \quad W_2 = \frac{mv^2}{2},$$

так как в положении I скорость груза, а в положении II высота

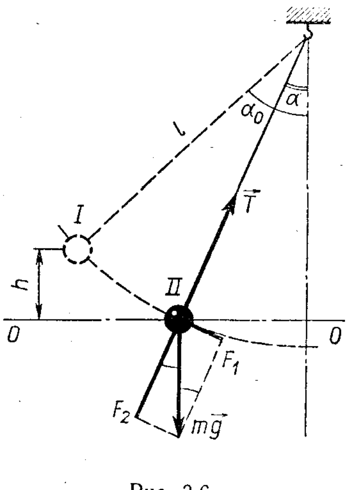

Рис. 3.6

груза над уровнем OO равны нулю. Подставляя найденные выражения для работы и полной энергии в исходную формулу, получим:

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = 0,$$

откуда

$$v^2 = 2gh. \tag{1}$$

В тот момент времени, когда нить составляет с вертикалью угол α, на груз действует сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и сила натяжения нити $\vec{T}$. Под действием этих сил груз движется по дуге окружности, обладая нормальным $a_н$ и касательным $a_к$ ускорениями. Спроецируем вектор $m\vec{g}$ на направления радиуса и касательной. Как видно из чертежа, соответствующие проекции равны: $F_1 = mg \sin\alpha$, $F_2 = mg \cos\alpha$. Согласно второму закону Ньютона

$$mg \sin\alpha = ma_к, \text{ откуда } a_к = g \sin\alpha.$$

Нетрудно заметить, что $T > F_2$ (от своего начального направления движения груз отклоняется вверх), поэтому уравнение второго закона Ньютона в проекциях на нормаль к траектории имеет вид:

$$T - mg\cos\alpha = \frac{mv^2}{l}, \tag{2}$$

где l — длина нити; v — скорость груза во II положении системы.

Для нахождения вида функции $T(\alpha)$ составленных уравнений недостаточно. К ним необходимо добавить связь между h, l, α_0 и α. Как видно из чертежа,

$$h = l(\cos\alpha - \cos\alpha_0). \tag{3}$$

Уравнения (1) — (3) содержат три неизвестные величины: T, v и h. Решая их относительно искомой силы натяжения, мы получим ответ на первый вопрос задачи: как меняется сила натяжения нити в зависимости от ее положения, характеризуемого углом α:

$$T = mg(1 + 2\cos\alpha - 2\cos\alpha_0).$$

Анализируя полученный результат, мы видим:

1) при $\alpha = 0$, т. е. в нижней точке траектории (при вертикальном положении нити) сила натяжения имеет максимальное значение, равное

$$T_{max} = mg(3 - 2\cos\alpha_0);$$

2) если в начальный момент нить занимает горизонтальное положение ($\alpha_0 = 90°$), то сила натяжения будет меняться по закону

$$T = mg(1 + 2\cos\alpha).$$

Она имеет максимальное значение $T_{max} = 3mg$ при $\alpha = 0$.

б) Наибольшее значение начального угла отклонения, при котором максимальная сила натяжения нити равна $T_{max} = 2mg$, можно найти из уравнений (1) (3) Так как максимальное натяжение нить испытывает в вертикальном положении, то, положив в них $\alpha = 0$ и $T_{max} = 2mg$, получим:

$$v^2 = 2gh,\ 2mg - mg = \frac{mv2}{l},$$

$$h = l(1 - \cos\alpha_0).$$

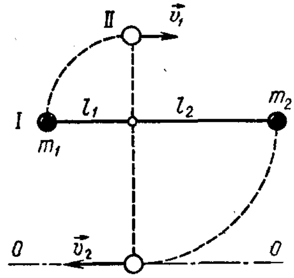

Рис 3.7

Решая эти уравнения совместно относительно α_0, получим $\cos\alpha_0 = 0{,}5$; $\alpha_0 = 60°$.

Таким образом, при отклонении нити в горизонтальное положение $T_{max} = 3mg$, при отклонении на угол $\alpha_0 = 60°$ $T_{max} = 2mg$.

Пример 9. Вокруг горизонтальной оси может без трения вращаться легкий рычаг (рис. 3,7), плечи которого равны l_1 и l_2. На концах рычага укреплены грузы массой, равной соответственно m_1 и m_2. Предоставленный самому себе, рычаг переходит из горизонтального положения в вертикальное. Какую скорость будет иметь в нижней точке второй груз?

Решение. В задаче рассматривается переменное движение системы материальных точек. Решать эту задачу нужно с помощью закона сохранения энергии. Приняв за первое положение системы начальное положение штанги, а за второе — ее положение в момент прохождения вертикали, записываем исходное уравнение:

$$A = W_2 - W_1.$$

Потенциальную энергию грузов будем отсчитывать от нижнего уровня OO.

Из внешних сил на движущийся рычаг с грузами действуют только силы со стороны оси. Если пренебречь трением, то можно считать, что работа этих сил равна нулю ($A = 0$) и поэтому полная энергия грузов не меняется. Поскольку масса рычага ничтожно мала, в горизонтальном положении система обладает механической энергией, равной сумме потенциальных энергий первого и второго грузов, т. е.

$$W_1 = m_1 g l_2 + m_2 g l_2$$

(кинетические энергии грузов в этом положении равны нулю)

В вертикальном положении механическая энергия системы равна:

$$W_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g(l_1 + l_2) + \frac{m_2 v_2^2}{2},$$

где v_1 и v_2 — скорости соответственно первого и второго грузов.

Подставляя полученные выражения для полной энергии в исходную формулу и учитывая, что внешние силы работу не совершают, имеем:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g (l_1 + l_2) + \frac{m_2 v_2^2}{2} - (m_1 + m_2) g l_2 = 0. \qquad (1)$$

В этом уравнении содержатся две неизвестные величины — скорости грузов. Второе недостающее уравнение получим, исходя из того, что в каждый рассматриваемый момент времени радиусы вращения всех точек рычага имеют одинаковую угловую скорость, и, следовательно, в положении *II*

$$\omega_2 = \frac{v_1}{l_1} = \frac{v_2}{l_2}. \qquad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) v_1, находим:

$$v_2 = l_2 \sqrt{\frac{2(m_2 l_2 - m_1 l_1) g}{m_2 l_2^2 + m_1 l_1^2}}.$$

Уровень отсчета высоты не обязательно проводить по нижнему положению тел, хотя ради общности в данной задаче мы поступили именно так. Если, например, уровень *OO* провести через начальное положение штанги, мы имели бы для энергий системы в *I* и *II* положениях:

$$W_1 = 0; \quad W_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g l_1 + \frac{m_2 v_2^2}{2} - m_2 g l_2.$$

Обратите внимание, что потенциальная энергия второго груза здесь взята со знаком «минус», поскольку он оказался ниже уровня отсчета высоты. Подставив эти выражения энергии в исходную формулу, мы получили бы уравнение (1).

Пример 10. Для определения скорости пули применяется баллистический маятник (рис. 3.8), состоящий из деревянного бруска, подвешенного на легком стержне. При выстреле в горизонтальном направлении пуля массой m попадает в брусок и застревает в нем Какова была скорость пули, если маятник поднимается на высоту h? Масса бруска равна M; трение в подвесе и массу стержня не учитывать. Какая часть кинетической энергии пули переходит в теплоту?

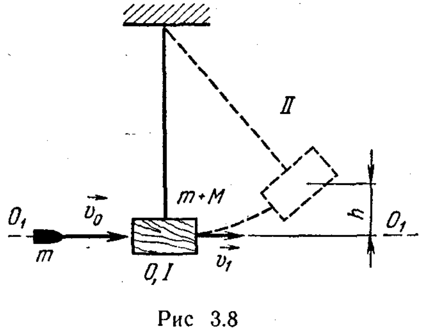

Рис 3.8

Р е ш е н и е. Это одна из распространенных задач на неупругий удар двух тел, в результате которого изменяется их положение по высоте.

Неупругим ударом называется удар, при котором происходит частичное или полное превращение механической энергии во внутреннюю. При неупругом ударе тел механическая энергия системы до соударения не равна механической энергии системы после удара; часть механической энергии расходуется на остаточную деформацию тел, вызывая их нагревание. Закон сохранения и превращения энергии для неупругого соударения тел имеет вид:

$$W_1 = W_2 + Q.$$

Здесь W_1 и W_2 — полная механическая энергия системы (всех тел) до удара и после удара; Q — количество теплоты, выделившейся при ударе.

Задачи на неупругое соударение тел решаются на основании закона сохранения импульса и закона сохранения энергии. Составление этих уравнений представляет главную часть решения почти всех задач подобного типа.

В данном примере рассматриваются три состояния системы: первое — до удара, второе — сразу же после удара и третье — конечное состояние тел в крайнем положении.

На чертеже (рис. 3.8) отмечаем эти состояния системы O, I, II, искомую скорость пули до удара $\vec{v}_0$, скорость $\vec{v}_1$ бруска и пули сразу же после того, как удар закончился и тела начали двигаться вместе, и, наконец, высоту подъема маятника h. Напомним, что во всех задачах на соударение тел, как неупругое, так и упругое, когда нет специальных оговорок, предполагается, что удар происходит очень быстро и за время взаимодействия тела не успевают заметно сместиться. Иными словами, мы считаем, что скорость $\vec{v}_1$ возникает мгновенно и во время удара маятник не отклоняется от вертикали.

До удара — в положении O — пуля имела скорость $\vec{v}_0$, брусок покоился и система имела импульс $\vec{p}_0 = m\vec{v}_0$, в конце удара — в положении I — пуля и брусок имеют скорость $\vec{v}_1$, импульс системы равен $\vec{p}_1 = (M + m)\vec{v}_1$. При нашем допущении относительно времени соударения можно считать, что во время удара внешние силы $\vec{T}$ и $m\vec{g}$ не влияют на скорости тел и, следовательно, система тело — брусок замкнутая. Согласно закону сохранения импульса

$$\vec{p}_0 = \vec{p}_1 \quad \text{или} \quad mv_0 = (M + m)\,v_1. \qquad (1)$$

Приступим теперь к составлению уравнения закона сохранения механической энергии, который имеет место при переходе системы из положения I в положение II.

Выбрав уровень O_1O_1 отсчета потенциальной энергии по нижнему положению тел и принимая во внимание, что при переходе системы из положения I в положение II внешние силы в системе тело — брусок — Земля работу не совершают, запишем формулу закона сохранения энергии:

$$W_2 - W_1 = 0.$$

Учитывая, что $W_1=\frac{(m+M)v_1^2}{2}$, $W_2=(m+M)gh$,

получим окончательно:

$$(m+M)gh-\frac{(m+M)v_1^2}{2}=0 \quad \text{или} \quad v_1^2=2gh. \tag{2}$$

Решая уравнения (1) — (2) относительно начальной скорости пули, получим:

$$v_0=\frac{m+M}{m}\sqrt{2gh}.$$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи: найти $x=\frac{Q}{W_0}$ — часть кинетической энергии пули, перешедшей при ударе во внутреннюю энергию, нужно использовать закон сохранения и превращения энергии при переходе системы из состояния O в состояние I. Так как здесь происходит выделение теплоты, то

$$W_0=W_1+Q.$$

Следовательно,

$$x=\frac{W_0-W_1}{W_0}. \tag{3}$$

Поскольку $W_0=\frac{mv_0^2}{2}$, $W_1=\frac{(m+M)v_1^2}{2}$, то согласно (3) будем иметь:

$$x=1-\frac{m+M}{m}\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2. \tag{4}$$

Исключая из уравнений (1) и (4) отношение скоростей, получим:

$$x=\frac{M}{m+M}.$$

Пример 11. Космический корабль массой M, летевший со скоростью $\vec{v}_1$, сталкивается с метеором массой m, летевшим со скоростью $\vec{v}_2$. Метеор попадает в середину лобовой части корабля под углом α к его продольной оси. Считая удар абсолютно упругим и пренебрегая трением между метеором и обшивкой корабля, определите скорость корабля после удара.

Решение. Абсолютно упругим ударом называется удар, при котором нет превращения механической энергии в другие виды энергии — полная механическая энергия системы остается неизменной.

Закон сохранения энергии для упругого соударения тел имеет вид:

$$W_1=W_2,$$

где W_1 и W_2 — полная механическая энергия системы (всех тел) до и после удара.

Механизм взаимодействия идеально гладких тел при абсолютно упругом ударе вдоль линии центров тел можно представить примерно так. При соприкосновении и дальнейшем сближении тел возникают силы упругости, увеличивающиеся до тех пор, пока скорости тел не сравняются. В этот момент деформация и потенциальная энергия тел достигают наибольшего значения, а кинетическая энергия — минимального — тела движутся с одинаковой скоростью. Затем форма тел начинает восстанавливаться, силы упругости начинают расталкивать тела до тех пор, пока они не разойдутся. Потенциальная энергия деформации полностью переходит в кинетическую энергию. В результате кинетическая энергия перераспределяется между соударяющимися телами, причем ее суммарное значение не меняется.

Если в момент удара скорости тел направлены под углом α к линии их центров, то в процессе удара происходит не только деформация тел и сближение их центров, но и проскальзывание одного тела по поверхности другого. Помимо сил, направленных по нормали к поверхности соприкосновения, возникают силы трения скольжения, действие которых рассчитать очень трудно.

В тех случаях, когда тела достаточно гладкие и сила трения во много раз меньше силы упругого действия по нормали, задача об ударе решается сравнительно просто — она сводится к задаче о центральном ударе, поскольку при отсутствии трения импульс сил, направленных перпендикулярно линии центров, равен нулю и проекции векторов скорости на это направление не меняются.

Задачи на упругое соударение тел решают с помощью законов сохранения импульса и энергии. Обычно в этих задачах даются скорости тел до удара и нужно найти их скорости после соударения.

В данной задаче рассматриваются два состояния изолированной системы двух тел: первое — до удара, второе — после удара.

Обозначим скорости корабля и метеора до и после соударения соответственно через $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ и будем считать, что после удара корабль продолжал двигаться в прежнем направлении (рис. 3.9,*а*,*б*).

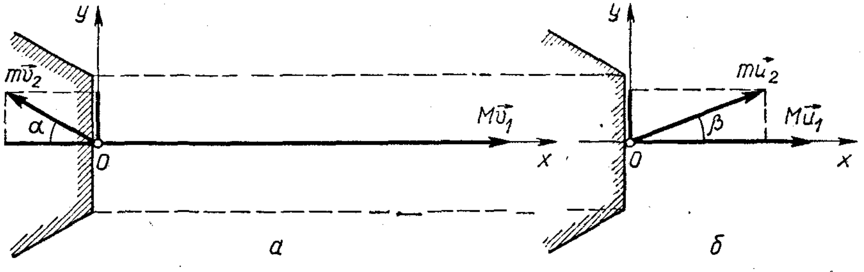

Рис. 3.9

Так как импульсы тел в момент удара направлены под углом α друг к другу, то для простоты решения спроецируем их на линию центров (примем ее за ось Ox) и нормаль к ней (ось Oy). Проекции импульсов корабля и метеора на эти оси равны:

$$\text{до удара: } Mv_1,\ -mv_2\cos\alpha,\quad mv_2\sin\alpha,$$
$$\text{после удара: } Mu_1,\ mu_2\cos\beta,\quad mu_2\sin\beta,$$

где β — угол, под которым отразится метеор.

Учитывая, что система корабль — метеор изолированная, запишем уравнение закона сохранения импульса по оси Ox:

$$Mv_1 - mv_2\cos\alpha = Mu_1 + mu_2\cos\beta. \tag{1}$$

Так как обшивка корабля идеально гладкая, то для проекций импульсов на ось Oy будем иметь:

$$mv_2\sin\alpha = mu_2\sin\beta. \tag{2}$$

Поскольку соударение корабля и метеора абсолютно упругое и внешние силы на них не действуют, в соответствии с законом сохранения энергии должно быть:

$$Mv_1^2 + mv_2^2 = Mu_1^2 + mu_2^2. \tag{3}$$

В отличие от закона сохранения импульса уравнение закона сохранения энергии в общем случае по осям не выполняется. Однако если взять прямоугольную систему координат, то в случае упругого удара уравнение закона сохранения механической энергии будет иметь место и для той ее части, которая приходится на движение тел по осям Ox и Oy (рекомендуем доказать это читателям). В данной задаче это уравнение для линии центров — оси Ox имеет вид[1]:

$$Mv_1^2 + mv_2^2\cos^2\alpha = Mu_1^2 + mu_2^2\cos^2\beta. \tag{4}$$

Чтобы найти из уравнений (1), (4) скорость корабля после столкновения, рекомендуется их сначала преобразовать, сгруппировав члены, содержащие одинаковую массу:

$$M(v_1 - u_1) = m(u_2\cos\beta + v_2\cos\alpha), \tag{5}$$
$$M(v_1^2 - u_1^2) = m(u_2^2\cos^2\beta - v_2^2\cos^2\alpha). \tag{6}$$

После этого нужно разделить первое уравнение на второе:

$$v_1 + u_1 = u_2\cos\beta - v_2\cos\alpha. \tag{7}$$

В результате мы получили два уравнения (5) и (7) первой степени, из которых гораздо легче найти скорости тел после удара, чем непосредственно из уравнений (1), (4). Умножая уравнение

---

[1] Для оси Oy мы имели бы $mv_2^2\sin^2\alpha = mu_2^2\sin^2\beta$, что эквивалентно уравнению (2).

(7) на m и вычитая его из (5), после простых преобразований для скорости корабля после удара получим:

$$u_1=\frac{(M-m)v_1-2mv_2\cos\alpha}{M+m}.$$

Аналогично для проекции вектора скорости метеора на ось Ox найдем:

$$u_{2x}\equiv u_2\cos\beta=\frac{(M-m)v_2\cos\alpha+2Mv_1}{M+m}.$$

Из уравнения (2) проекция вектора скорости метеора на ось Oy равна:

$$u_{2y}=v_2\sin\alpha.$$

Зная проекции u_{2x} и u_{2y}, можно найти модуль скорости $\vec{u}_2$:

$$u_2=\sqrt{u_{2x}^2+u_{2y}^2}\,.$$

Из уравнений (1), (2), (4) можно определить также направление вектора скорости метеора после удара:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{u_{2y}}{u_{2x}}=\frac{(M+m)v_2\sin\alpha}{2Mv_1+(M-m)v_2\cos\alpha}.$$

Анализируя выражения для скоростей u_1 и u_2, которые тела будут иметь после абсолютно упругого удара, можно сделать следующие выводы:

1) при центральном лобовом соударении тел $\alpha=0$ и скорости тел после удара равны:

$$u_1=\frac{(M-m)v_1-2mv_2}{M+m},$$

$$u_2\equiv u_{2x}=\frac{(M-m)v_2+2Mv_1}{M+m}\quad \text{и}\quad \beta=0;$$

2) если при центральном лобовом соударении происходит упругое столкновение двух тел одинаковой массы ($m=M$), то $u_1=-v_2$, $u_2=v_1$, т. е. тела обмениваются скоростями.

Если при этом одно из тел покоилось, например $v_1=0$, то $u_1=-v_2$, а $u_2=0$ — движущееся тело после удара остановится, неподвижное станет двигаться со скоростью второго тела;

3) если $\alpha\neq 0$, но $m=M$, для угла β разлета тел будем иметь:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{v_2}{v_1}\sin\alpha;$$

4) если $\alpha\neq 0$, $m=M$ и $v_1=0$, т. е. упругое тело налетает под углом α на неподвижное тело той же массы, тела разлетаются под углом 90°.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 3

3.1. Какую работу нужно совершить, чтобы груз массой 1 кг поднять вначале равномерно на высоту 1 м с ничтожно малой скоростью, далее в течение 2 с поднимать с ускорением 0,5 м/с^2, а затем — с ускорением 0,5 м/с^2 до полной остановки? Сопротивление воздуха не учитывать.

3.2. Груз массой m равноускоренно поднимается лебедкой. На некотором участке пути длиной h груз двигался со средней скоростью v, причем его скорость возросла на Δv. Определите работу силы натяжения троса на этом пути.

3.3. Пластинка массой m лежит на горизонтальном столе. В центре пластинки укреплена легкая пружина с жесткостью k. Какую работу нужно совершить, чтобы на пружине поднять пластинку на высоту h от поверхности стола?

3.4. Два бруска массами M и m, соединенные пружиной с жесткостью k, лежат на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между брусками и поверхностью равен μ. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы систему сдвинуть с места, прикладывая силу вдоль поверхности?

3.5. Три одинаковые пружины прикреплены к кольцам так, как показано на рисунке 3.10. За каждое кольцо тянут силой $F = 49$ Н. Какая работа была совершена при растяжении пружин, если известно, что при нагрузке $F_0 = 9{,}8$ Н каждая пружина удлиняется на $s = 1$ см?

3.6. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вынуть пробку из бутылки, если сила трения между пробкой и горлышком бутылки равна F? Размеры пробки и горлышка указаны на рисунке 3.11.

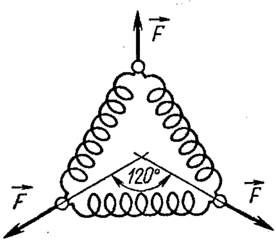

Рис. 3.10

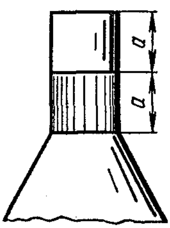

Рис. 3.11

3.7. Поезд, отходя от станции, за 5 мин развивает скорость 64,8 км/ч. Масса поезда 600 т, коэффициент трения 0,004. Определите среднюю мощность локомотива за время равноускоренного движения. Какова должна быть минимальная мощность локомотива, чтобы за указанное время поезд набрал такую скорость?

3.8. При спуске с небольшого уклона один тепловоз идет со скоростью $\vec{v}_1$ и развивает максимальную мощность N_1. Второй тепловоз на том же участке пути идет со скоростью $\vec{v}_2$, развивая мощность N_2. С какой скоростью могут везти по этому пути тепловозы в сцепе друг с другом состав массой m? Силу сопротивления движению считать пропорциональной силе нормального давления, коэффициент пропорциональности равен μ.

3.9. Тягач массой 15 т, обладающий мощностью 375 кВт, поднимается равномерно в гору с наклоном 30°. Какую максимальную скорость может развивать тягач на подъеме, если при спуске с горы с выключенным мотором он движется с той же скоростью?

3.10. Автомобиль массой 4 т подходит к горке высотой 12 м и длиной 80 м со скоростью 36 км/ч. Какую среднюю мощность развивает автомобиль на подъеме, если его скорость при постоянной силе тяги на вершине горы оказалась равной 21,6 км/ч? Коэффициент сопротивления считать равным 0,1.

3.11. Веревка массой $M = 30$ кг связана своими концами и переброшена через неподвижный блок. Обезьяна массой $m = 12$ кг прыгает на веревку и начинает карабкаться вверх. Некоторое время она находится на одной и той же высоте. Сколько времени она сможет продержаться на этой высоте, если максимальная мощность, развиваемая обезьяной, равна $N_{max} = 360$ Вт? Какую работу совершит обезьяна за это время? Трением на блоке пренебречь.

3.12. Какую мощность должен развить человек, чтобы подняться вверх по движущемуся вниз эскалатору метро на высоту h за время t? Скорость эскалатора постоянна и равна $\vec{v}$, угол наклона эскалатора к горизонту α. Какую мощность должен развить человек, чтобы за то же время спуститься с высоты h по эскалатору, движущемуся вверх? Какую мощность должен развивать человек, чтобы находиться на эскалаторе на одной высоте? Масса человека m.

3.13. Шкив приводится во вращение приводным ремнем. Радиус шкива 25 см, шкив делает 2 оборота в секунду. Сила натяжения ведущей ветви ремня вдвое больше силы натяжения ведомой ветви. Обе ветви ремня параллельны друг другу. Какую минимальную силу натяжения выдерживает ремень без разрыва при передаче шкиву мощности 15 кВт?

3.14. Велосипедист имеет массу m и может развивать мощность N. По какому максимальному уклону может подниматься велосипедист при коэффициенте трения между колесами и дорогой, равном μ? С какой скоростью он будет при этом ехать?

3.15. Реактивный самолет летит со скоростью 183 м/с. Двигатель забирает каждую секунду воздух массой 70 кг, который идет на сжигание топлива массой 2,9 кг. Скорость истечения газов из сопла 488 м/с. Определите мощность, отдаваемую двигателем.

3.16. На столе лежат карманные часы с цепочкой. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы часы оторвать от стола, поднимая их за цепочку? Цепочка имеет длину L и массу m, масса часов M, диаметр часов D.

3.17. Камень брошен с крыши дома высотой 20 м со скоростью 18 м/с. Определите работу по преодолению сопротивления воздуха, если известно, что к моменту удара о землю камень имел скорость 24 м/с. Масса камня равна 50 г.

3.18. Хоккейная шайба, имеющая начальную скорость 5 м/с, проходит по льду до удара о бортик расстояние 10 м и после удара отскакивает от него. Определите, на какое расстояние отлетит шайба, если коэффициент трения о лед в обоих случаях равен 0,036.

3.19. Автомобиль удерживается тормозами на склоне горы с уклоном, не большим 0,25. Какой тормозной путь пройдет автомобиль по горизонтальной дороге при скорости движения 36 км/ч? Каким будет тормозной путь при подъеме в гору с указанным уклоном и такой же скоростью?

3.20. Из винтовки в горизонтальном направлении сделано два выстрела в щит, расположенный на расстоянии 50 м. После первого выстрела перед дулом винтовки была поставлена доска, вследствие чего вторая пуля, пробив доску, попала в щит на 5 см ниже первой. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите работу, совершенную пулей, если масса пули и ее начальная скорость равны соответственно 8 г и 800 м/с.

3.21. Тело массой m нужно втащить на горку произвольного профиля, прикладывая постоянную по модулю силу по касательной к траектории движения. Высота горки h, длина основания l, путь от основания до вершины s. Каково должно быть минимальное значение этой силы, если коэффициент трения между телом и горкой равен μ?

3.22. Санки скатываются с горки и, пройдя в горизонтальном направлении расстояние l, останавливаются. Масса санок m, коэффициент трения μ. Какую работу нужно совершить, чтобы санки затащить в горку на прежнюю высоту, прикладывая к ним силу в направлении движения?

3.23. С наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, с высоты h соскальзывает небольшая шайба. В конце спуска, у основания наклонной плоскости, шайба ударяется о стенку и отскакивает от нее вверх по наклонной плоскости. Считая удар абсолютно упругим, определите, на какую высоту поднимается шайба после удара, если коэффициент трения шайбы о плоскость равен μ.

3.24. Тело пущено вверх по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен 0,20, начальная скорость тела 3,00 м/с. Определите скорость, с которой тело вернется в исходную точку, и время движения тела.

3.25. Тело массой 4 кг двигалось по горизонтальной прямой со скоростью 2 м/с. После действия некоторой силы оно стало двигаться в противоположную сторону с вдвое большей скоростью. Найдите модуль этой силы и совершенную ею работу, если время действия силы 2 с. Решите задачу при условии, что после действия силы тело стало двигаться под углом 90° к начальной траектории с той же по модулю скоростью.

3.26. Человек массой 70 кг подтягивает к берегу лодку массой 300 кг. Один раз он тянет ее канатом с берега, другой — закрепив канат на берегу, подтягивается к берегу, сидя в лодке. Какую работу совершит человек к концу третьей секунды, если в обоих случаях он тянул за канат с силой 147 Н? Чему равна максимальная мощность, развиваемая человеком? Массой каната и сопротивлением воды пренебречь.

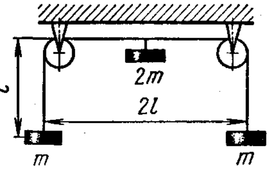

Рис. 3.12

3.27. На концах нити длиной $4l$ подвешены грузы массой m каждый. В середине нити укреплен груз массой $2m$ (рис. 3.12). Предоставленные самим себе грузы приходят в движение. Определите их скорость в тот момент, когда они будут находиться на одном уровне.

3.28. Нить маятника, установленного в ракете, отклонили до горизонтального положения и отпустили. В тот момент, когда маятник проходил положение равновесия, ракета стала подниматься вертикально вверх, вследствие чего максимальный угол отклонения маятника от вертикали оказался равным 45° Каково было ускорение ракеты в момент старта?

3.29. Какая сила необходима для вытаскивания из доски гвоздя длиной 120 мм, если он забит двенадцатью ударами молотка массой 0,5 кг при скорости молотка перед ударом 5 м/с? Силу сопротивления считать не зависящей от направления движения.

3.30. Санки, скользящие по горизонтальному льду со скоростью $\vec{v}$, выезжают на асфальт. Длина полозьев санок l, коэффициент трения об асфальт равен μ. Какое расстояние пройдут санки по асфальту до полной остановки? Трением о лед пренебречь.

3.31. С какой высоты может прыгнуть акробат в упругую сетку, если он выдерживает перегрузку $5g$? Статический прогиб сетки равен 0,20 м. Массой сетки пренебречь.

3.32. Груз массой m падает с высоты h на пружину с жесткостью k. Пренебрегая массой пружины, определите максимальную скорость, которую будет иметь груз при движении, и максимальное сжатие пружины.

3.33. Пружина детского пистолета имеет в свободном состоянии длину $l_0 = 15$ см. Сила, необходимая для изменения ее длины на $x_0 = 1$ см, равна $F_0 = 9{,}8$ Н. Какова будет максимальная дальность полета шарика массой $m = 10$ г, если им зарядить пистолет, сжав пружину до $l_1 = 5$ см? Решите задачу при условии, что пистолет расположен вертикально. Сопротивлением воздуха пренебречь.

3.34. При посадке самолета на палубу авианосца торможение осуществляется тросом, натянутым поперек палубы корабля. Полагая жесткость k троса постоянной на пути торможения, определите максимальную силу, действующую на летчика массой m при посадке. Начальная скорость и масса самолета равны $\vec{v}$ и M.

3.35. На столе, свисая на одну треть в небольшое отверстие стола, лежит на грани скольжения цепочка массой m и длиной $3l$. а) Какую работу нужно совершить, чтобы цепочку втащить на стол горизонтальной силой, прикладывая силу к концу цепочки? б) Какую скорость будет иметь цепочка в момент отрыва от стола, если ее вывести из положения равновесия ничтожно малой силой и она начнет соскальзывать?

3.36. Два мальчика играют в мяч, стоя на льду на расстоянии 10 м друг от друга. Один из них бросает мяч массой 1 кг, второй ловит его через 0,5 с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите расстояние, на которое откатится мальчик массой 40 кг, бросивший мяч, если коэффициент трения подошвы о лед равен 0,01. Какую работу совершил этот мальчик?

3.37. На легком стержне длиной l висит деревянный шар массой M. В шар попадает пуля массой m, имеющая в момент удара скорость $\vec{v}$, направленную под углом α к горизонту. На какой угол отклонится стержень после неупругого центрального удара пули?

3.38. Два шарика разной массы подвешены на нитях одинаковой длины в одной точке. Нити отводят в горизонтальное положение и отпускают. После неупругого удара шариков нити отклонились от вертикального положения на угол α. Чему равно отношение масс шариков?

3.39. На расстоянии l_1 от поверхности вертикальной стальной плиты подвешен маятник, состоящий из легкого стержня длиной $l_2 > l_1$ и небольшого тяжелого шарика. На какой угол отклонится маятник после абсолютно упругого удара о плиту, если первоначально он находился в горизонтальном положении? На какую высоту поднимется маятник, если плита будет расположена горизонтально на расстоянии l_1 от точки подвеса стержня?

3.40. Автоматический пистолет имеет подвижный кожух, связанный с корпусом пружиной. Масса кожуха 250 г, масса пули 8 г, жесткость пружины 980 Н/м. Какова должна быть минимальная скорость пули при вылете из ствола, чтобы пистолет перезаряжался, если при выстреле кожух должен отходить назад на 3 см? Трением пренебречь.

3.41. Груз массой $m = 0{,}5$ кг падает с некоторой высоты на плиту массой $M = 1$ кг, укрепленную на пружине с жесткостью $k = 980$ Н/м. Определите наибольшее сжатие пружины, если в момент удара груз обладал скоростью $v = 5$ м/с. Удар считать неупругим.

3.42. В гладком горизонтальном желобе, имеющем форму круга радиусом R, находятся два маленьких шарика массами m_1 и m_2. Между шариками вставлена пружина, сжатая нитью. В некоторый момент нить пережигают, и шарики начинают двигаться по желобу. Определите: а) в каком месте произойдет столкновение шариков. Массой и размерами пружины пренебречь; б) через сколько времени после пережигания нити шарики столкнутся 2-й

(n-й) раз, если потенциальная энергия сжатой пружины была равна W_p.

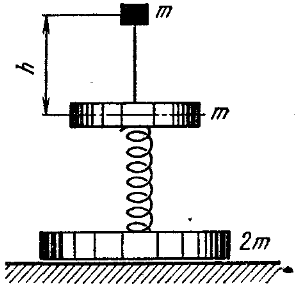

Рис. 3.13

3.43. Пластинки массами m и $2m$ соединены легкой пружиной с жесткостью k (рис. 3.13). С какой высоты должен упасть на верхнюю пластинку грузик массой m, чтобы при растяжении пружины после удара нижняя пластинка оторвалась от стола? Удар считать неупругим. На какую высоту от начального уровня поднимутся после удара грузик и верхняя пластинка?

3.44. По идеально гладкой горизонтальной поверхности пущены навстречу друг другу два абсолютно упругих шара массами 10 и 20 г. Каковы будут скорости шаров после центрального удара, если вначале они равнялись соответственно 20 и 10 м/с? Чему будут равны скорости шаров в момент их наибольшей деформации?

3.45. В идеально гладком горизонтальном желобе расположены упругие шары массами M_1 и M_2. Между ними находится шарик массой m, много меньшей массы двух первых шаров. В некоторый момент времени маленький шарик получает скорость $\vec{v}$ в направлении шара массой M_1. Какие скорости будут иметь большие шары после очень многих соударений?

3.46. Два абсолютно гладких одинаковых шара массой M покоятся на горизонтальной плоскости, касаясь друг друга. Третий шар того же радиуса, но вдвое большей массы движется к ним по плоскости со скоростью $\vec{v}$ вдоль прямой, проходящей через точку касания шаров и перпендикулярной отрезку, соединяющему их центры. Определите скорость шаров после упругого удара. Каков будет ответ, если один из покоящихся шаров убрать, оставив все остальное неизменным?

3.47. Центры трех упругих шаров лежат на одной прямой. Первому шару массой m сообщили некоторую скорость, после этого он сталкивается со вторым шаром, затем второй шар ударяет в третий шар массой $3m$. При каком значении массы второго шара скорость третьего шара будет максимальной?

3.48. Атом распадается на две равные части, которые летят со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ под углом α друг к другу. Зная, что общая кинетическая энергия частей атома равна W_k, определите его массу и кинетическую энергию до разрыва.

3.49. Шарик, движущийся со скоростью v, налетает на неподвижный шарик вдвое меньшей массы. После упругого удара первый шарик стал двигаться под углом 30° к своему начальному направлению движения. Чему равны скорости шариков после удара?

3.50. От удара молота копра массой 50 кг, падающего свободно с высоты 4 м, свая массой 150 кг погружается в грунт на 10 см.

Определите силу сопротивления грунта, считая ее постоянной, а удар: а) неупругим; б) упругим.

3.51. В клин массой M попадает горизонтально летящая пуля массой $m \ll M$ и после абсолютно упругого удара о поверхность клина отскакивает вертикально вверх. На какую высоту поднимется пуля, если скорость клина после удара равна $\vec{v}$? Трением пренебречь.

3.52. Два упругих шарика подвешены на тонких нитях так, что они находятся на одной высоте и касаются друг друга. Длины нитей равны 10 и 6 см, массы шариков — 8 и 20 г. Меньший шарик отклонили на угол 60° и отпустили. На какие высоты поднимутся шарики после абсолютно упругого удара?

3.53. На пути тела массой m, скользящего по идеально гладкой горизонтальной поверхности со скоростью $\vec{v}$, находится незакреплённая горка, угол наклона которой к горизонту плавно изменяется от некоторого максимального значения в верхней части до нуля в нижней. На какую высоту тело поднимется на горку, если масса ее равна M? Решите задачу при условии, что горка сама движется навстречу телу со скоростью $2v$.

3.54. Мальчик массой 30 кг вбегает со скоростью 2 м/с на наклонную плоскость массой 20 кг, которая может двигаться по горизонтальному полу без трения. Угол наклона плоскости к горизонту равен 30°. Какую работу совершил мальчик, поднявшись на высоту 2 м? Какую мощность он при этом развивал?

3.55. Вертикально вверх бросают шар массой $2M$, сообщая ему скорость $\vec{v}_0$. К шару привязан легкий шнур длиной $l < v_0^2/2g$, на втором конце которого находится груз массой M. Через сколько времени и на каком расстоянии от точки бросания встретятся тела? Нить абсолютно упругая.

3.56. Спутник Земли массой 10 кг обращается по круговой орбите в верхних слоях атмосферы. На сколько изменяется скорость спутника за один оборот, если сила сопротивления среды равна $5 \cdot 10^{-4}$ Н?

3.57. Спутник движется по круговой орбите вокруг Луны на высоте, равной радиусу Луны. С какой скоростью нужно запустить кабину с космонавтами с поверхности Луны, чтобы можно было осуществить стыковку кабины с кораблем без дополнительной коррекции модуля скорости кабины? Ускорение свободного падения на поверхности Луны равно 1,7 м/с^2, радиус Луны 1740 км.

3.58. На нити, выдерживающей силу натяжения 1,96 Н, подвешен груз массой 100 г. На какой максимальный угол можно отклонить нить от вертикали, чтобы при последующих качаниях она не оборвалась? Чему равно натяжение нити, когда она находится под углом 30° к вертикали? В какой точке траектории скорость груза в вертикальном направлении будет наибольшей? В каких точках траектории полное ускорение груза направлено вертикально вверх и в каких горизонтально?

3.59. Шарик на нити отклонили на некоторый угол и отпустили. При прохождении положения равновесия ускорение шарика равно 4,9 м/с^2. Чему был равен угол отклонения нити?

3.60. На легкой нерастяжимой нити подвешен тяжелый шарик. На какой угол нужно отвести нить от положения равновесия, чтобы: а) при последующих качаниях максимальная сила натяжения нити была в 1,5 раза больше минимальной; б) модули ускорений шарика в крайних и нижнем положении были одинаковыми?

3.61. Груз массой m свободно вращается на нити в вертикальной плоскости. На сколько отличаются силы натяжения нити при переходе груза из верхнего положения в нижнее?

3.62. На легкой нити длиной l подвешен небольшой шарик. Какую минимальную скорость нужно сообщить шарику в горизонтальном направлении, чтобы он описал окружность в вертикальной плоскости?

3.63. На тележке массой m на легком штативе укреплена нить длиною l с грузом массой m на конце. В тележку попадает пуля массой m, летевшая горизонтально, и застревает в ней. При какой скорости пули грузик будет вращаться в вертикальной плоскости? Какое натяжение испытывает нить в горизонтальном положении?

3.64. Шарик массой $m = 0,1$ кг скатывается с высоты $h = 1$ м по желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиусом $R = 0,5$ м. По какому закону будет изменяться сила давления N шарика на желоб и полное ускорение a шарика при его движении? Трение не учитывать.

3.65. Маятник длиной l с грузом массой m на конце отводят в горизонтальное положение и отпускают. Определите максимальное натяжение нити и предельную высоту подъема маятника после удара о гвоздь, вбитый на расстоянии $l/2$ от точки подвеса на линии, образующей с вертикалью угол $\alpha = 60°$.

3.66. Маленькая шайба массой m надета на проволочное кольцо радиусом R в его верхней точке. Ничтожно малой силой шайбу выводят из положения равновесия, и она начинает скользить по кольцу. По какому закону будет изменяться сила давления шайбы на кольцо в зависимости от высоты положения шайбы? Чему равны силы максимального и минимального давления? Трение не учитывать.

3.67. Небольшое тело массой M лежит на вершине гладкой полусферы радиусом R. В тело попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью $\vec{v}$, и застревает в нем. Пренебрегая смещением тела во время удара, определите высоту, на которой оно оторвется от поверхности полусферы. При какой скорости пули тело сразу оторвется от полусферы?

3.68. Вагонетка, стоящая горизонтально, начинает опускаться вниз по рельсам, представляющим винтовую линию с шагом h и радиусом внешнего рельса R. Сколько полных оборотов может сделать вагонетка, не сходя с рельсов, если расстояние между ними

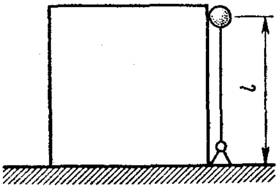

Рис. 3.14

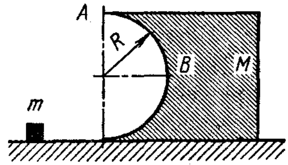

Рис. 3.15

равно l, а центр тяжести вагонетки находится на высоте b от полотна дороги? Каково будет полное ускорение вагонетки в этот момент? (h и $l \ll R$).

3.69. На концах и в середине невесомого стержня длиной l закреплены одинаковые шарики. Стержень ставят вертикально на идеально гладкую горизонтальную поверхность и легким толчком выводят из положения неустойчивого равновесия. Каковы будут скорости шариков в момент удара верхнего шарика о горизонтальную поверхность? Каким будет результат, если нижний конец стержня шарнирно закрепить? Какую скорость нужно сообщить верхнему шарику в горизонтальном направлении, чтобы нижний шарик не давил на подставку?

3.70. На гладком столе стоит куб массой m, около которого находится легкая штанга с небольшим шариком массой $m/4$ на конце (рис. 3.14). Легким толчком штангу выводят из положения неустойчивого равновесия, и она начинает падать в сторону куба. Пренебрегая трением, определите максимальные скорости куба и шарика.

3.71. На идеально гладком столе находится брусок массой M, одна сторона которого представляет собой цилиндр радиусом R (рис. 3.15). Какую скорость $\vec{v}$ нужно сообщить шайбе массой m вдоль стола, чтобы она достигла точки A? Какое давление будет оказывать шайба на брусок в точке B? Трением пренебречь.

3.72. Определите кинетическую энергию гусеницы трактора, который движется со скоростью $\vec{v}$, если расстояние между осями колес равно l, радиус колеса r, масса единицы длины гусеницы q.

Глава 4

СТАТИКА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Статикой называют раздел механики, в котором изучаются условия равновесия твердых тел. Равновесием называют такое состояние тела, когда оно находится в покое, движется равномерно прямолинейно или равномерно вращается вокруг какой-либо неподвижной оси, проходящей через центр масс тела.

В курсе элементарной физики изучают статику материальной точки и некоторые вопросы статики твердого тела.

Относительный покой и движение материальной точки с постоянной скоростью можно рассматривать как частный случай переменного движения, при котором ее ускорение равно нулю. Согласно основному уравнению динамики $a = 0$ и $\vec{v} = \text{const}$, если

$$\sum \vec{F} = 0. \tag{4.1}$$

Для равновесия материальной точки необходимо, чтобы геометрическая сумма всех сил, приложенных к точке, равнялась нулю. Условие равновесия (4.1) можно записать иначе. Для этого все силы, действующие на материальную точку, нужно спроецировать на какие-либо две оси (обычно берут перпендикулярные оси Ox и Oy) и приравнять нулю суммы проекций сил на эти оси:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0. \tag{4.1$'$}$$

Уравнения (4.1′) называют уравнениями равновесия материальной точки в проекциях.

2. Равновесие твердого тела зависит не только от модуля и направления действующих сил, но и от того, где они приложены. Механическое состояние абсолютно твердого тела не изменяется, если точку приложения действующей на него силы переносить вдоль линии ее действия.

Равнодействующая двух или нескольких сил, действующих на тело по одной прямой или приложенных к телу под углом друг к другу, равна их векторной сумме и находится по правилу параллелограмма.

Две параллельные силы могут быть уравновешены одной силой. Уравновешивающая сила параллельна им, и ее модуль равен алгебраической сумме модулей слагаемых сил $F = F_1 \pm F_2$. Линия действия уравновешивающей отстоит от линии действия силы $F_1 > F_2$ на расстоянии

$$x = \frac{F_2}{F_1 \pm F_2} l, \tag{4.2}$$

где l — расстояние между линиями действия приложенных сил. Знак «плюс» берется, когда силы направлены в одну сторону, знак «минус» — в противоположные.

Мерой взаимодействия тел, при котором происходит деформация или изменение угловой скорости вращения тел, служит момент силы.

Модуль момента силы $\vec{F}$ относительно какой-либо точки O равен произведению модуля силы на длину перпендикуляра l (плечо), опущенного из точки O на линию действия силы:

$$M = Fl. \tag{4.3}$$

Момент силы, стремящейся повернуть тело относительно точки O по направлению вращения часовой стрелки, берется со знаком «плюс», против часовой стрелки — со знаком «минус». Если на тело действует несколько сил, расположенных в одной плоскости (плоская система сил), модуль результирующего момента этих сил относительно выбранной точки O равен алгебраической сумме отдельных моментов:

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i.$$

Систему двух равных антипараллельных сил, действующих на тело не по одной прямой, называют парой сил. Относительно любой точки, принадлежащей плоскости сил, пара сил создает одинаковый вращающий момент $M = Fl$, где F — модуль одной из сил, l — кратчайшее расстояние между их линиями действия (плечо пары).

Если на тело действует несколько сил, лежащих в одной плоскости, и тело находится в состоянии покоя или равномерного движения (поступательного или вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс тела), геометрическая сумма приложенных сил и алгебраическая сумма моментов, взятых относительно произвольной точки, должны равняться нулю:

$$\sum \vec{F} = 0; \quad \sum M = 0. \tag{4.4}$$

Условия равновесия тела (4.4) можно представить в более удобном для практического применения виде, записав первое из них в форме (4.1′).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

Основная задача статики заключается в том, чтобы найти условия равновесия материальной точки, системы точек, тела или системы тел. Статические процессы представляют собой частный случай динамических процессов, при которых отсутствуют угловые и линейные ускорения, поэтому правила решения задач статики материальной точки принципиально ничем не отличаются от правил решения задач динамики. Вместо уравнения второго закона Ньютона здесь нужно составить вытекающее из него уравнение равновесия (4.1) или (4.1′).

Порядок действий при решении задач на статику такой.

1. а) Нужно сделать чертеж, на котором указать все силы, действующие на материальную точку, находящуюся в равновесии. (Если дана система материальных точек, это нужно проделать для каждой из них, освободив все точки от связей.)

б) Выбрать тело отсчета и связанную с ним прямоугольную систему координат Oxy и спроецировать на оси координат все силы, действующие на рассматриваемую точку. Как обычно, оси координат следует направлять так, чтобы максимум проекций обращалось в нуль. Найдя проекции сил, необходимо составить уравнения равновесия в проекциях по осям (4.1′) и решить полученную систему уравнений относительно неизвестной величины.

2. В общем случае решение задач на статику твердого тела сводится к составлению уравнений равновесия (4.4).

При условии $\sum \vec{F} = 0$ исключается всякое ускоренное поступательное движение тела, при условии $\sum M = 0$ исключается его ускоренное вращение. Главное в этих задачах — правильно расставить силы, действующие на тело, и затем составить уравнение моментов относительно той или иной точки. При этом нужно точно указать линии действия сил, которые отмечаются на чертеже. Составление уравнений равновесия в проекциях обычно не вызывает серьезных затруднений, если только все силы расставлены правильно.

Чтобы составить уравнение равновесия твердого тела, необходимо:

а) Сделать чертеж и указать все силы, приложенные к рассматриваемому телу. Само тело нужно изобразить свободным от связей, заменив их действие силами. Особое внимание здесь нужно обратить не только на количество и направление сил, но и на то, в какой точке тела эти силы приложены, как проходят линии действия сил.

б) Затем можно приступить к составлению уравнения моментов. Для этого нужно прежде всего выбрать точку O, относительно которой будут рассматриваться моменты действующих сил. Точку O можно брать произвольно, однако во многих случаях удачный выбор этой точки значительно упрощает решение и позволяет применять только одно уравнение моментов (без уравнения равновесия сил). Учитывая это, во всех задачах на статику тела, перед составлением уравнений равновесия, необходимо тщательно подумать над тем, как лучше составить уравнение моментов.

Если невозможно или не удается ограничиться одним уравнением моментов, то точку O в общем случае удобно выбирать так, чтобы через нее проходило как можно больше линий действия сил. Моменты этих сил относительно такой точки будут равны нулю (поскольку их плечи будут равны нулю), и уравнение моментов окажется предельно простым.

Выбрав точку O, нужно найти плечи всех сил относительно этой точки, помня, что плечо — это перпендикуляр, опущенный из точки O на линию действия силы. После этого можно приступить к составлению уравнения моментов, следя за знаками моментов рассматриваемых сил.

в) Если в полученное уравнение моментов входит две и более неизвестные величины, к нему можно добавить уравнения моментов, взятых относительно других точек, однако значительно проще использовать уравнения равновесия в проекциях. Для этого нужно выбрать оси координат Ox и Oy и спроецировать на них все силы, действующие на тело.

Поскольку тело находится в равновесии и в любом направлении у тела ускорения нет, проекции сил по осям должны быть связаны между собой уравнениями (4.1′).

Уравнение моментов и уравнения равновесия в проекциях дают систему трех независимых уравнений. Решая их совместно относительно искомой величины, мы и получим ответ на вопрос задачи.

г) Если тело, находящееся в равновесии, имеет закрепленную ось вращения, исключающую всякое поступательное движение, то можно ограничиться лишь составлением уравнения моментов, так как для равновесия такого тела достаточно, чтобы алгебраическая сумма моментов приложенных сил относительно какой-либо точки, лежащей на заданной оси, равнялась нулю.

д) Если на тело действует несколько сил, лежащих в одной плоскости и направленных под углом друг к другу (сходящаяся система сил), то равновесие тела возможно лишь при условии, что линии действия приложенных сил пересекаются в одной точке. В задачах на статику, когда дается сходящаяся система сил и направления линий действия сил очевидны или их можно найти, не прибегая к математическим выкладкам, ответ можно получить на основании векторного уравнения $\sum \vec{F} = 0$, не используя уравнение моментов. Для этого все силы, действующие на тело (систему тел), нужно перенести по линии их действия в одну точку и воспользоваться подобием полученных треугольников сил и геометрических треугольников, образуемых элементами системы, находящейся в равновесии. Задача решается на основании построений и правил геометрии; математические выкладки здесь оказываются значительно проще, чем при составлении общих условий равновесия.

Пример 1. На ледяной горке с углом при основании $\alpha = 30°$ находятся санки массой $m = 10{,}2$ кг. Коэффициент трения между санками и горкой $\mu = 0{,}1$. Какую минимальную силу нужно приложить к санкам, чтобы они находились в равновесии? Какой минимальной силой санки можно поднимать по наклонной плоскости?

Р е ш е н и е. Это задача на статику материальной точки (геометрические размеры санок не заданы). Анализируя задачу, нужно прежде всего обратить внимание на следующее. Санки не могут находиться в равновесии на горке, так как коэффициент трения $\mu < \operatorname{tg} \alpha$ $(0{,}1 < \operatorname{tg} 30°)$. Чтобы санки удержать в равновесии, к ним нужно приложить силу под некоторым углом β к наклонной плоскости так, чтобы сила препятствовала скольжению санок и прижимала их к поверхности, увеличивая силу трения.

Делаем схематический чертеж (рис. 4.1) и указываем на нем силы, действующие на санки: силу тяжести, равную $m\vec{g}$, максимальную силу трения покоя $\vec{F}_{тр}$, нормальную реакцию опоры $\vec{N}$ и искомую силу $\vec{F}$. Под действием приложенных сил санки находятся в равновесии (на грани скольжения), и, следовательно, уравнение равновесия в векторной форме имеет вид:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} = 0.$$

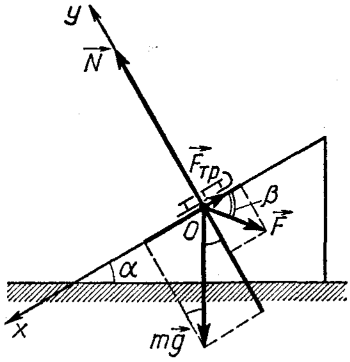

Рис. 4.1

Чтобы найти связь между модулями векторов, входящих в это уравнение, и определить затем искомую силу, нужно записать условие равновесия санок в проекциях. Для этого выбираем оси координат Ox и Oy, как показано на рисунке, и проецируем на них силы, действующие на санки. Проекции сил по осям равны: $mg\sin\alpha$, $-F\cos\beta$, $-F_{тр}$, N, $-F\sin\beta$, $-mg\cos\alpha$.

Уравнение равновесия в проекциях на ось Ox имеет вид:

$$mg\sin\alpha - F\cos\beta - \mu N = 0; \qquad (1)$$

в проекциях на ось Oy:

$$N - mg\cos\alpha - F\sin\beta = 0. \qquad (2)$$

При составлении первого уравнения сразу учтено, что $F_{тр} = \mu N$.

Решая уравнения (1) и (2) совместно относительно искомой силы, получим:

$$F = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta} mg. \qquad (3)$$

Из физических соображений и анализа последнего выражения видно, что с изменением угла β модуль силы $\vec{F}$, необходимой для удержания санок, будет изменяться. Наименьшим он окажется в том случае, когда знаменатель дроби будет наибольшим. Чтобы найти максимальное значение функции $\varphi(\beta) = \cos\beta + \mu\sin\alpha$, нужно найти производную $\varphi'(\beta)$, приравнять ее к нулю и, решив полученное уравнение, определить значение аргумента, при котором функция имеет экстремум.

$$\varphi'(\beta) = -\sin\beta + \mu\cos\beta = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta = \mu. \qquad (4)$$

В том, что при найденном значении угла β знаменатель дроби (3) имеет именно максимальное значение, легко убедиться, взяв вторую производную от φ по β,— она меньше нуля. Действительно,

$$\varphi''(\beta) = -\cos\beta - \mu\sin\beta < 0,$$

так как $\beta < \pi/2$.

Учитывая, что $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}$ и $\sin\beta = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\beta}}$, согласно (3) и (4) для минимальной силы, необходимой для удержания санок на горке, получаем выражение

$$F = F_{\min} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}} mg; \quad \mathrm{tg}\,\beta = \mu.$$

Подставляя числовые значения, найдем $F_{\min} = 41{,}4$ Н; $\beta \approx 5{,}7°$.

Если санки поднимать в горку равномерно, то сила трения будет действовать вниз — по оси Ox, препятствуя движению санок. Сила тяги $\vec{F}$ должна в данном случае не только смещать санки, но и отжимать их от поверхности, уменьшая тем самым силу трения. Нетрудно заметить, что при равномерном движении на санки действуют такие же силы, что и в предыдущем случае, но только проекция силы трения $F_{\text{тр}}$ и проекция $F\sin\beta$ имеют противоположные знаки. Учитывая это, согласно (1) и (2) можно записать:

$$mg\sin\alpha + \mu N - F\sin\beta = 0, \tag{5}$$
$$N + F\sin\beta - mg\cos\alpha = 0. \tag{6}$$

Решая уравнения совместно относительно модуля силы тяги $\vec{F}$ и анализируя полученный результат, аналогично предыдущему получим:

$$F = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\beta + \mu\sin\beta} mg;$$

при

$$\mathrm{tg}\,\beta = \mu \quad F = F_{\min} = \frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sqrt{1+\mu^2}} mg = 58{,}6 \text{ Н}.$$

Пример 2. Однородный ящик, имеющий форму куба, опирается одним ребром на пол, другим — на вертикальную стену. Коэффициент трения между полом и ящиком, а также между ящиком и стеной равен μ. При каких значениях угла между полом и гранью ящика возможно его равновесие?

Р е ш е н и е. Это задача на статику твердого тела, не имеющего закрепленной оси вращения.

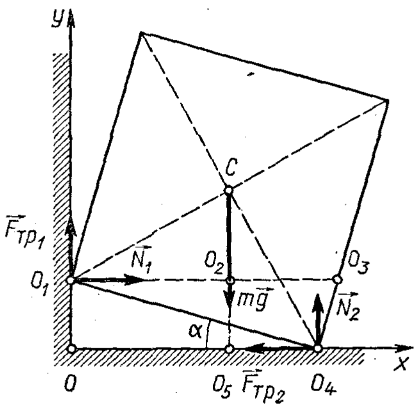

Рис. 4.2

Делаем чертеж (рис. 4.2) и, полагая ребро куба равным l, расставляем приложенные к нему силы. Со стороны стены на него действуют нормальная реакция опоры $\vec{N}_1$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр1}$, препятствующая скольжению ящика по стене вниз. Со стороны пола на ящик действуют реакция опоры $\vec{N}_2$ и сила трения $\vec{F}_{тр2}$, препятствующая скольжению куба вправо, со стороны Земли — сила тяжести, равная $m\vec{g}$, проходящая через центр куба.

Поскольку куб покоится, сумма моментов всех сил относительно любой точки O должна равняться нулю. Чтобы уравнение моментов было предельно простым, выбираем точку O так, чтобы через нее проходило наибольшее число линий действия сил. Такому условию в данной задаче удовлетворяют шесть точек O, O_1, ..., O_5. Через каждую из них проходят две линии действия сил. Возьмем одну из них, например O_4.

Относительно этой точки моменты сил $\vec{N}_2$ и $\vec{F}_{тр2}$ равны нулю, так как плечи этих сил относительно точки O_4 равны нулю.

Находим плечи сил $m\vec{g}$, $\vec{N}_1$ и $\vec{F}_{тр1}$ относительно O_4. Из треугольников OO_1O_4 и CO_4O_5 они получаются равными соответственно $l\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(45° + \alpha)$, $l\sin\alpha$ и $l\cos\alpha$.

Учитывая, что ящик стоит под предельным углом на грани скольжения и, следовательно, силы трения покоя имеют наибольшие значения, равные соответственно $F_{тр1} = \mu N_1$ и $F_{тр2} = \mu N_2$, а также знаки моментов, составляем уравнение моментов:

$$mgl\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(45° + \alpha) - N_1 l\sin\alpha - \mu N_1 l\cos\alpha = 0. \qquad (1)$$

Из полученного уравнения мы не можем найти угол наклона, поэтому нужно составить уравнение равновесия для проекций.

Проведем оси координат Ox и Oy, как показано на рисунке, и, поскольку все силы направлены по этим осям, записываем уравнение равновесия ящика в проекциях:
на ось Ox:

$$N_1 - \mu N_2 = 0; \qquad (2)$$

на ось Oy:

$$\mu N_1 - mg + N_2 = 0. \qquad (3)$$

Составив уравнения равновесия (1) — (3) и решая их совместно относительно искомого неизвестного α — минимального угла наклона ящика к горизонту, получим:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{1 + 2\mu}.$$

Максимальный угол, под которым может стоять ящик, равен, очевидно, $\pi/4$; таким образом,

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{1 + 2\mu} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Пример 3. Пять шаров, массы которых равны соответственно m, $2m$, $3m$, $4m$ и $5m$, укреплены на стержне так, что их центры находятся на расстоянии l друг от друга. Пренебрегая массой стержня, найдите центр тяжести системы.

Решение. В основе решения задач на определение центра тяжести системы материальных точек (системы тел с известным положением центра тяжести каждого тела) лежит следующее обстоятельство. Если в центре тяжести системы частиц, жестко связанных друг с другом, приложить вертикально вверх уравновешивающую силу $\vec{F}$, равную по модулю силе тяжести всех частиц, то система будет находиться в равновесии. Сумма моментов всех сил (включая, конечно, и уравновешивающую силу) должна в этом случае равняться нулю относительно любой точки.

Пусть массы частиц системы равны m_0, m_1, ..., m_n и положение центра тяжести мы будем отсчитывать по горизонтали (ось Ox) от центра тяжести крайней левой частицы (рис. 4.3, a). Тогда расстояние от точки O до линии действия уравновешивающей силы — координату x_C центра тяжести системы можно найти из уравнения моментов, составленного относительно точки O:

$$m_0 g \cdot 0 + m_1 g x_1 + ... + m_n g x_n - F x_C = 0,$$

где x_1, x_2 и т. д.— плечи сил $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, ..., $m_n\vec{g}$ относительно центра тяжести левой частицы. Подставляя в это уравнение вместо модуля уравновешивающей силы его выражение $F = m_0 g + m_1 g + ... + m_n g$ и решая уравнение относительно x_C, получим:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + ... + m_n x_n}{m_0 + m_1 + ... + m_n}, \text{ или, короче,}$$

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=0}^{n} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M},$$

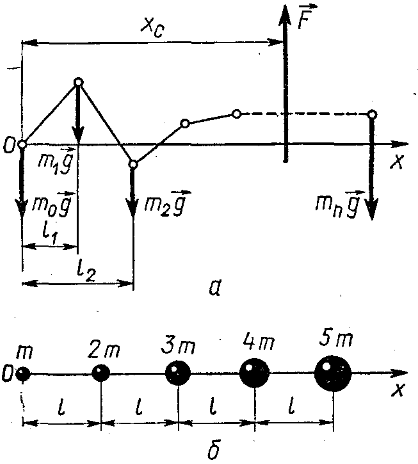

Рис. 4.3

где m_i и x_i — масса и координата i-й частицы; M — масса всех частиц.

Аналогично находится y_C — координата центра тяжести системы материальных точек по оси Oy.

Полученные выражения для x_C и y_C являются одними из основных формул механики, позволяющими определить координаты центра тяжести системы материальных точек на плоскости.

Решение нашей задачи основано на только что полученном результате.

Сделав чертеж (рис. 4.3, *б*), расставляем все силы, действующие на систему. Выбираем точку отсчета O в центре первого шара и на произвольном от нее расстоянии x мысленно прикладываем к стержню уравновешивающую силу $\vec{F}$, модуль которой равен модулю силы тяжести, действующей на всю систему:

$$F = mg + 2mg + 3mg + 4mg + 5mg.$$

Находим плечи всех сил относительно O. Они равны соответственно 0, l, $2l$, $3l$ и $4l$.

По формуле (4.5) определяем положение центра тяжести:

$$x = \frac{2ml + 3m \cdot 2l + 4m \cdot 3l + 5m \cdot 4l}{m + 2m + 3m + 4m + 5m} = \frac{8}{3}l.$$

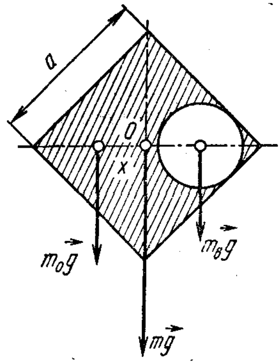

Рис. 4.4

Пример 4. Определите положение центра тяжести однородной квадратной пластинки со стороной a, в которой вырезано круглое отверстие радиусом $a/4$ так, как показано на рисунке 4.4.

Решение. На примере задачи мы рассмотрим, как определяется положение центра тяжести однородных плоских фигур, имеющих вырез. Элементарными методами эти задачи решаются лишь при условии, что положение центра тяжести целой фигуры и центра тяжести вырезанной части известно.

В задачах этого типа фигуру с вырезом желательно изобразить так, чтобы ось симметрии была горизонтальна. В основе вывода расчетного соотношения лежит следующее обстоятельство, имеющее общий характер. Если вставить вырезанную часть пластинки на прежнее место, то силу тяжести всего тела, равную $m\vec{g}$ (в данной задаче квадрата), можно представить как сумму двух параллельных сил — силы тяжести вырезанной части (диска), равной $m_в\vec{g}$, и силы тяжести оставшейся фигуры (квадрата с отверстием), равной $m_0\vec{g}$. Первая из этих сил приложена в центре тяжести невырезанной фигуры (квадрата), вторая — в центре тяжести вырезанной части (круга), третья — в неизвестном пока центре тяжести пластинки с отверстием. Если известны равнодействующая сила ($m\vec{g}$), одна из параллельных сил ($m_в\vec{g}$) и расстояние l между линиями действия этих сил, легко определить положение линии действия второй силы ($m_0\vec{g}$), а следовательно, и расстояние x между центрами тяжести вырезанной и целой фигур. Действительно, относительно точки O должно быть

$$m_0gx = m_вgl \quad \text{или} \quad (m - m_в)x = m_вl,$$

так как модуль силы тяжести оставшейся части фигуры равен:

$$m_0g = mg - m_вg.$$

Из предыдущего равенства находим

$$x = \frac{m_B l}{m - m_B},$$

или окончательно:

$$x = \frac{S_В}{S - S_В}\, l,$$

поскольку масса однородной пластинки одинаковой толщины h равна: $m = \varrho h S$, где S — площадь; ϱ — плотность материала.

В данном примере площадь вырезанной части $s_В = \pi \frac{a^2}{16}$, площадь всей фигуры $S = a^2$. Расстояние между центрами тяжести вынутого диска и квадрата равно:

$$l = \frac{\sqrt{2}}{4}\, a.$$

Подставляя в расчетную формулу для x вместо $S_В$, l и S их значения и проводя упрощения, получим:

$$x = \frac{\pi \sqrt{2}}{4(16 - \pi)}\, a.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 4

4.1. Груз массой 50 кг прижат к вертикальной стене силой 118 Н. Какую минимальную силу необходимо приложить к грузу, чтобы удержать его в покое; чтобы поднимать равномерно вверх? Коэффициент трения скольжения равен 0,3. Что будет происходить с грузом, если в вертикальном направлении прикладывать силу 460 Н? 490 Н? Какова будет при этом сила трения?

4.2. В песчаном грунте была вырыта траншея, поперечное сечение которой имеет форму равносторонней трапеции с параллельными верхним и нижним основаниями. Когда песок высох, края траншеи осыпались и размеры ее стали такими: верхнее основание 9 м, нижнее основание 1 м, глубина 3 м. Определите коэффициент трения между песчинками в сухом грунте.

4.3. Какой груз можно удержать на наклонной плоскости длиной 1 м и высотой 0,5 м силой 49 Н, направленной параллельно наклонной плоскости, если коэффициент трения равен 0,4? Как изменится ответ, если силу прикладывать перпендикулярно наклонной плоскости?

4.4. На горизонтальной шероховатой доске лежат две пластинки, имеющие форму равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 4.5). Пластинку *1* сдвигают равномерно вправо вдоль гипотенузы на ее длину. Пластинка *2* при этом скользит по катету BC и проходит 3/4 его длины. Чему равен коэффициент трения между пластинками?

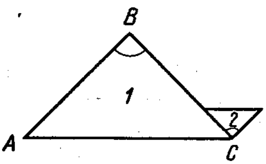

Рис. 4.5

4.5. Через два блока, оси которых расположены на одной высоте, перекинута нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены два груза массами 2 и 3 кг. В середине нити прикреплен груз массой 4 кг, предоставленный самому себе. Чему будет равно смещение этого груза по вертикали, когда система придет в равновесие? Расстояние между блоками равно 1,6 м.

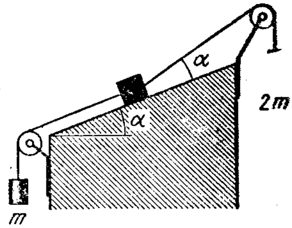

Рис. 4.6

4.6. Система грузов находится в равновесии (рис. 4.6). Найдите массу груза, расположенного на наклонной плоскости, и силу, с которой он давит на плоскость, если массы двух других грузов и угол наклона плоскости к горизонту известны. Массой нитей и трением пренебречь.

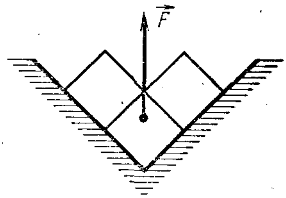

Рис. 4.7

4.7. На гладком вертикальном полукруге помещена легкая нить, длина которой равна четверти длины окружности. На концах нити находятся грузы массами 10 и 15 г. Какое натяжение испытывает нить и как она будет расположена на полукруге при равновесии?

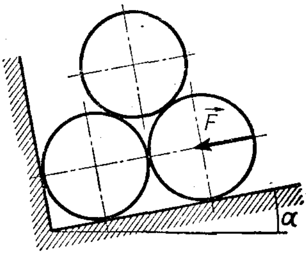

Рис. 4.8

4.8. N маленьких шариков, каждый из которых имеет массу m, тянут равномерно по столу силой, направленной горизонтально. Коэффициент трения между шариками и плоскостью μ. Шарики соединены между собой легкими пружинками, имеющими в свободном состоянии длину l. Жесткость каждой пружинки k. Определите расстояние между крайними шариками при движении системы.

4.9. На двух плоскостях, наклоненных под углом $\alpha = 45°$ к горизонту, лежат три куба массой $m = 1$ кг каждый (рис. 4.7). Какую минимальную силу $\vec{F}$ нужно приложить в вертикальном направлении к нижнему кубу, чтобы систему сдвинуть с места? Коэффициент трения между каждой парой соприкасающихся плоскостей равен $\mu = 0{,}1$.

4.10. Тяжелый ящик стоит на доске, наклоненной к горизонту под углом α. Чтобы ящик сдвинуть с места вверх по доске, к нему нужно приложить силу, модуль которой должен быть не меньше модуля силы тяжести, действующей на ящик. Чему равен коэффициент трения между ящиком и доской? Как должна быть направлена сила тяги?

4.11. Три идеально гладкие трубы массой m каждая лежат на наклонной плоскости, как указано на рисунке 4.8. Какую минимальную силу $\vec{F}_{min}$ нужно приложить к крайней трубе, чтобы система находилась в равновесии? При каком значении $\vec{F}$ трубы не раскатятся при $\alpha = 0$?

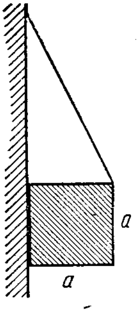

Рис. 4.9

4.12. Шар висит на нити, опираясь на стену. Точка, в которой закреплена нить, находится на стене на одной вертикали с точкой опоры шара. При каком минимальном коэффициенте трения между шаром и стеной точка, где нить прикреплена к шару, будет находиться на одной вертикали с его центром тяжести? Решите задачу двумя способами: а) сложением сил; б) правилом моментов.

4.13. Какой длины нужно взять нить, чтобы подвесить на ней у стены кубик с ребром a, как показано на рисунке 4.9? Коэффициент трения между стеной и кубиком равен μ.

4.14. Через конец стрелы корабельного крана, масса которой m, проходит неподвижная горизонтальная ось, вокруг которой стрела может вращаться без трения. Ко второму концу стрелы привязан трос, перекинутый через неподвижный блок, находящийся на одной вертикали с осью на расстоянии от нее, равном длине стрелы. С какой силой нужно тянуть за трос, чтобы удержать на стреле груз массой $3m$ при угле наклона стрелы к вертикали, равном α? Какова будет при этом сила, действующая вдоль стрелы?

4.15. Масса колеса равна 100 кг, радиус 0,5 м. Какую минимальную силу нужно приложить к колесу, чтобы перекатить его через балку высотой 0,10 м? При каком минимальном коэффициенте трения между колесом и выступом это можно сделать?

4.16. Ромб $ABCD$ сделан из однородных стержней массой m каждый, соединенных шарнирно. Середины сторон BC и CD соединены легким стержнем распоркой. Острый угол ромба $\angle DAB = 2\alpha$. Ромб подвешен в точке A. С какой силой сжимается распорка?

4.17. Однородный стержень длиной l подвешен за концы на двух пружинах, с жесткостью соответственно равной k_1 и k_2. В нерастянутом состоянии длина пружин одинаковая, масса единицы длины стержня q. Под каким углом к горизонту будет висеть стержень при равновесии? Где нужно прикрепить вторую пружину, чтобы стержень висел горизонтально?

4.18. Автомобиль массой 10^3 кг равномерно поднимается по наклонному шоссе с уклоном 0,2. Расстояние между осями переднего и заднего мостов равно 2,5 м, центр тяжести автомобиля расположен на равных расстояниях от осей на высоте 0,75 м. Определите, на сколько отличаются силы давления передних и задних колес на дорогу.

4.19. На какую высоту может подняться по трехметровой лестнице человек массой 60 кг, если лестница стоит под углом 30° к идеально гладкой стене? Масса лестницы 20 кг, коэффициент трения скольжения между полом и лестницей 0,5.

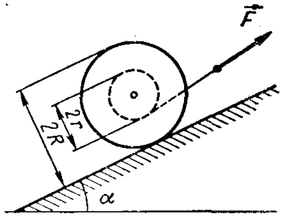

Рис. 4.10

4.20. Маховик радиусом 0,2 м насажен на неподвижную ось радиусом $2 \cdot 10^{-2}$ м. Сила трения между маховиком и осью 10^3 Н. Чтобы легче снять маховик с оси, по касательной к его ободу приложили силу $F = 80$ Н. С какой минимальной силой нужно тянуть маховик вдоль оси, чтобы его снять? При каком значении силы F маховик можно снять ничтожно малой силой?

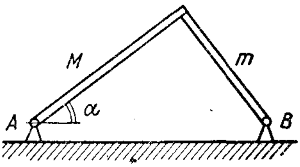

Рис. 4.11

4.21. Катушка с намотанной на нее нитью лежит на наклонной плоскости, как показано на рисунке 4.10. С какой силой и под каким углом нужно тянуть за нить, чтобы катушка находилась в равновесии? Масса катушки m, коэффициент трения между плоскостью и катушкой μ.

4.22. Под каким минимальным углом к горизонту нужно приложить силу к верхнему ребру прямоугольного ящика длиной l и высотой h, чтобы он двигался поступательно? Коэффициент трения равен μ. Каким должен быть модуль этой силы, если масса ящика равна m?

4.23. Чтобы выложить карниз здания, каменщик кладет кирпичи один на другой так, что часть каждого кирпича выступает над нижележащим. Сколько кирпичей нужно уложить в карниз, чтобы он выступал не менее чем на 35 см от стены и чтобы кирпичи находились в равновесии без цементного раствора? Длина каждого кирпича 30 см. На какое максимальное расстояние может выступать карниз, уложенный без соединительного раствора?

4.24. Две тонкие палочки, массы которых M и m, установлены перпендикулярно друг другу (рис. 4.11). Палочки могут свободно вращаться в шарнирах A и B. При каком минимальном коэффициенте трения между палочками система будет находиться в равновесии? Какова будет при этом сила давления, действующая на шарнир A?

4.25. На земле лежат вплотную друг к другу два одинаковых цилиндрических бревна. Сверху на них кладут такое же бревно. При каком условии бревна будут находиться в равновесии, не раскатываясь?

4.26. В открытый с обеих сторон полый цилиндр радиусом R, стоящий торцом на горизонтальной плоскости, положили два одинаковых шара радиусом $r > R/2$ и массой m. При какой минимальной массе M цилиндра шары его не опрокинут? Поверхности шаров и цилиндра считать гладкими, стенки цилиндра тонкими.

4.27. Найдите положение центра тяжести треугольника, составленного из тонких однородных проволочек длиной 3, 4 и 5 см.

4.28. Квадрат из однородной проволоки, у которого отрезана одна сторона, подвешен на гвоздь. Какой угол образует средняя сторона с вертикалью?

4.29. Стержень длиной l, составленный из двух однородных кусков одинаковой длины, массы которых соответственно равны M и m, подвешен за концы на двух легких нитях длиной $2l$ (рис. 4.12). Какой угол образует стержень с горизонтом в положении равновесия? Какую силу нужно приложить к стержню, чтобы он находился в горизонтальном положении?

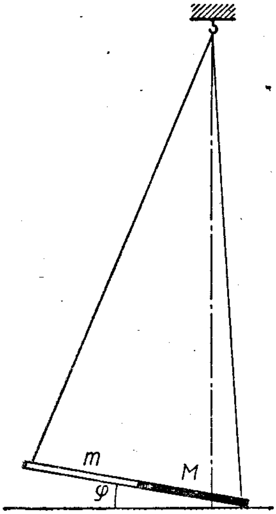

Рис. 4.12

4.30. Два идеально гладких шара, радиусы которых равны 5 и 10 см, подвешены в одной точке на легких нитях длиной 45 и 40 см. Чему равно натяжение нитей и сила давления одного шара на другой, если массы шаров равны соответственно 50 и 100 г?

4.31. Какова должна быть высота цилиндра радиусом R, укрепленного на полушаре того же радиуса и материала, чтобы вся фигура находилась в безразличном равновесии? Центр тяжести полушара лежит на расстоянии $\frac{3}{8}R$ от плоскости сечения шара.

4.32. Однородная пластинка имеет форму равностороннего треугольника со стороной 16 см. В пластинке вырезано круглое отверстие радиусом 2 см. Определите положение центра тяжести полученной фигуры при условии, что центр отверстия лежит на отрезке высоты, опущенной из вершины треугольника, а края отверстия касаются сторон треугольника.

4.33. В цилиндре радиусом R на расстоянии $\frac{2}{3}R$ от центра просверлено отверстие радиусом $\frac{1}{4}R$ параллельно оси цилиндра. Отверстие залито металлом, плотность которого в 5 раз больше плотности вещества цилиндра. Цилиндр лежит на дощечке. Коэффициент трения между цилиндром и дощечкой 0,3. На какой максимальный угол можно наклонить дощечку, чтобы цилиндр находился на ней в равновесии?

4.34. Бревно радиусом r лежит на бревне радиусом R так, что оси бревен перпендикулярны друг другу. При каком соотношении между радиусами бревен их равновесие устойчивое? На какой максимальный угол можно отклонить верхнее бревно без проскальзывания, если коэффициент трения между бревнами равен μ?

4.35. На полу лежит стержень массой M и длиной L. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы стержень повернуть на полу на угол α вокруг одного из его концов? Коэффициент трения между стержнем и полом μ. Какие минимальные силы нужно приложить к концам стержня, чтобы вращать его на полу с постоянной угловой скоростью вокруг середины стержня?

4.36. На идеально гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч массой M и радиусом R. По обручу начинает ползти жук массой m. Какие траектории описывают центр обруча и жук? На какое расстояние сместится жук относительно своего начального положения, пройдя четвертую часть кольца?

Глава 5

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Колебательным движением называют движение, при котором происходит частичная или полная повторяемость состояния системы по времени. Если значения физических величин, характеризующих данное колебательное движение, повторяются через равные промежутки времени, колебания называют периодическими.

Самым простым колебательным движением является гармоническое колебание материальной точки. Гармоническим называют колебание, в процессе которого величины, характеризующие движение (смещение, скорость, ускорение, сила и т. д.), изменяются с течением времени по закону синуса или косинуса (гармоническому закону).

Основные законы гармонических колебаний материальной точки можно установить, анализируя равномерное круговое движение точки и движение ее проекции на оси прямоугольной системы координат Oxy, коллинеарные двум диаметрам окружности. Если точка B равномерно движется по окружности радиусом x_m со скоростью $\vec{v}_m$ (рис. 5.1), то ее проекция на горизонталь-

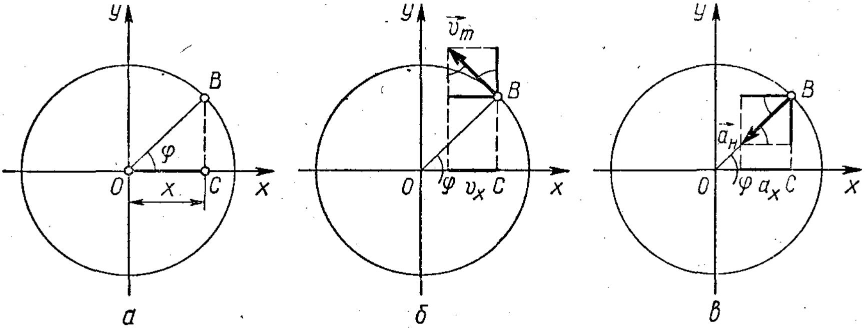

Рис. 5.1

ный диаметр — точка C совершает гармонические колебания вдоль оси Ox. Проекция точки B на вертикальный диаметр совершает гармонические колебания вдоль оси Oy.

Смещение точки C от начала отсчета движения O — ее координата x в каждый момент времени определяется уравнением

$$x = x_m \cos(\varphi + \varphi_0) \text{ или } x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (5.1)$$

где t — время, отсчитываемое от момента начала наблюдения за движением; φ_0 — угол, характеризующий положение точки в начальный момент времени (на чертеже $\varphi_0 = 0$); x_m — максимальное смещение точки; ω — угловая скорость вращения радиус-вектора точки B.

2. Проецируем вектор скорости $\vec{v}_m$ и вектор нормального ускорения $\vec{a}_н$ на оси Ox и Oy. Для проекций v_x и a_x получим:

$$v_x = -v_m \sin(\omega t + \varphi_0);$$
$$a_x = -a_н \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Поскольку $v_m = x_m\omega$ и $a_н = x_m\omega^2$, уравнения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания, можно представить в виде:

$$v_x = -x_m\omega \sin(\omega t + \varphi_0); \qquad (5.2)$$
$$a_x = -x_m\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x. \qquad (5.3)$$

Знак «минус» в последней формуле указывает на то, что ускорение при гармоническом колебании всегда направлено в сторону, противоположную смещению. Эти же результаты мы получили бы, взяв первую и вторую производную по времени от координаты колеблющейся точки (5.1).

Из формул (5.2) и (5.3) вытекает, что:

1) максимальные значения скорости и ускорения колеблющейся точки равны:

$$v_m = x_m\omega, \qquad (5.2')$$
$$a_m = x_m\omega^2; \qquad (5.3')$$

2) скорость и ускорение сдвинуты друг относительно друга по фазе на угол $\pi/2$. Там, где скорость наибольшая, ускорение равно нулю, и наоборот;

3) во всех точках траектории ускорение направлено к центру колебаний — точке O.

3. Согласно формуле (5.3), уравнение второго закона Ньютона для материальной точки массой m, совершающей гармонические колебания вдоль оси Ox, можно представить в виде:

$$F_x = ma_x = mx_m\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x, \qquad (5.4)$$

где F_x — проекция равнодействующей всех сил, приложенных к точке.

Произведение $m\omega^2$, стоящее в правой части уравнения (5.4), — величина постоянная, поэтому материальная точка может совершать гармонические колебания лишь при условии, что в процессе движения сама возвращающая сила изменяется пропорционально смещению и направлена к положению равновесия, т. е. когда

$$F_x = -kx. \tag{5.5}$$

Здесь k — постоянный для данной системы коэффициент. В каждом конкретном случае его можно выразить через величины, характеризующие колебательную систему. Согласно формулам (5.4) и (5.5) коэффициент k в то же время всегда равен:

$$k = m\omega^2. \tag{5.6}$$

Сила, изменяющаяся по закону (5.5), называется квазиупругой силой.

4. Кинетическая энергия гармонически колеблющейся точки равна:

$$W_k = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mx_m^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)}{2}. \tag{5.7}$$

В процессе гармонического колебания сила изменяется пропорционально смещению, поэтому в каждый момент времени потенциальная энергия точки равна:

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{mx_m^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0)}{2}. \tag{5.8}$$

Полная механическая энергия колеблющейся точки

$$W = W_k + W_p = \frac{m\omega^2 x_m^2}{2}. \tag{5.9}$$

5. Всякое колебательное движение, в том числе и гармоническое, характеризуется амплитудой, периодом колебаний, частотой, круговой частотой и фазой колебаний.

Амплитудой называют наибольшее значение колеблющейся величины (смещения, скорости, ускорения и т. д.). Число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называют частотой колебаний f:

$$f = \frac{n}{t}.$$

Круговая частота — это число полных колебаний, совершаемых в течение 2π с:

$$\omega = \frac{2\pi n}{t} = 2\pi f.$$

Периодом называют время, в течение которого совершается одно полное колебание:

$$T = \frac{t}{n} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}.$$

Величина $\omega t+\varphi_0$, стоящая под знаком тригонометрической функции в формулах (5.1) и характеризующая значение колеблющейся величины в данный момент времени, называется фазой колебаний. Величина φ_0, определяющая значение колеблющейся величины в начальный момент времени, называется начальной фазой колебаний.

6. Если на тело массой m действует квазиупругая сила, то согласно (5.6) независимо от природы этой силы тело совершает гармонические колебания с круговой частотой

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

В простейшем случае, когда тело массой m совершает колебания на пружине, коэффициентом k является жесткость пружины и период этих колебаний равен:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (5.10)$$

7. Материальная точка, подвешенная на легкой невесомой и нерастяжимой нити, совершающая колебания под действием силы тяжести и натяжения нити, называется математическим маятником. При малых углах отклонения нити от положения равновесия (точнее, бесконечно малых) колебания математического маятника являются гармоническими с периодом колебаний:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{a}}, \qquad (5.11)$$

где l — длина нити маятника; a — модуль ускорения, сообщаемого грузу силой натяжения нити.

В наиболее распространенном частном случае, когда точка подвеса маятника находится в равновесии в поле земного тяготения и сила натяжения нити равна по модулю mg, ускорение $\vec{a}$ численно равно ускорению свободного падения на данной широте и направлено вертикально вверх. Полное ускорение математического маятника, как и во всяком гармоническом колебании, определяется уравнением (5.3).

8. Время, показываемое маятниковыми часами, пропорционально числу полных колебаний маятника n. Это число при заданном времени наблюдения t зависит от периода колебаний, а следовательно, от длины маятника и ускорения, создаваемого силой натяжения нити. Если за время t_1 маятниковые часы, идущие точно, делают n_1 полных колебаний, то при изменении l и a они за то же время t_1 будут делать n_2 колебаний — станут отставать или уходить вперед. Показания точных и неточных маятниковых часов окажутся при этом равными соответственно $t_1=Kn_1$ и $t_2=Kn_2$, где K — коэффициент пропорциональности, зависящий от конструкции часов. Учитывая, что

$$t_1 = n_1 T_1 = n_2 T_2; \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_1}{a_1}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l_2}{a_2}}$$

и разность показаний точных и неточных часов равна $\pm \Delta t = t_1 - t_2$, из составленных уравнений получим:

$$\pm \Delta t = t_1 \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = t_1 \left(1 - \sqrt{\frac{l_1 a_2}{l_2 a_1}}\right). \qquad (5.12)$$

Эта формула служит исходным соотношением для расчета поправки к маятниковым часам. Знак «плюс» соответствует случаю, когда $t_1 > t_2$ — неточные часы отстают; знак «минус», когда $t_1 < t_2$ — неточные часы спешат.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

Задачи о колебательном движении материальной точки можно разделить на две группы: задачи, требующие применения общих уравнений гармонических колебаний, и задачи о математических маятниках и маятниковых часах.

Основная трудность при решении задач первого типа заключается в составлении уравнений (5.1) — (5.9). Получив же эти уравнения и внимательно проанализировав их, можно легко довести решение до конца, так как все дальнейшие расчеты почти целиком сводятся к математическим выкладкам.

Следует обратить особое внимание на составление уравнения второго закона Ньютона для точки, совершающей гармонические колебания. Это уравнение в конечном итоге приводит к формуле $k = m\omega^2$, в которой коэффициент k должен быть выражен через те или иные величины, характеризующие колебательную систему. Нахождение развернутого выражения для этого коэффициента фактически и представляет основное содержание решения задач такого типа.

Задачи второй группы требуют детального анализа физического явления и глубокого понимания основных формул. Эти задачи включают в себя задачи, связанные с нахождением величин, характеризующих колебание маятников в инерциальных и неинерциальных системах, и задачи на расчет поправок к показаниям маятниковых часов.

При ускоренном движении точки подвеса математического маятника изменяется сила натяжения нити, что приводит к изменению равнодействующей силы и, следовательно, частоты и периода колебаний. Вывести формулу периода колебаний точки, обладающей не только относительным, но и переносным ускорением, элементарными методами сравнительно трудно. Однако ее легко получить для каждого конкретного случая, внося соответствующую поправку в формулу периода математического маятника (5.11).

Если маятник в том или ином направлении приобретает переносное ускорение $\vec{a}_п$, то причиной этому служит изменение силы натяжения $\vec{F}_н$ на некоторую величину $\Delta\vec{F}_н$, поскольку $m\vec{g}$ не меняется и на маятник другие силы не действуют. Ускорение $\vec{a}$, сообщаемое силой натяжения нити, здесь равно сумме ускорений $-\vec{g}$ и $\vec{a}_п$, сообщаемых силой $\vec{F}_н$ и ее приращением $\Delta\vec{F}_н$, т. е.

$$\vec{a} = -\vec{g} + \vec{a}_п.$$

Найдя обычными методами модуль этого ускорения и подставив его в соотношение (5.11), мы получим формулу периода колебаний математического маятника с учетом движения точки подвеса.

Пример 1. Небольшой груз совершает колебания по закону $x = 0{,}02 \sin \pi (t + 0{,}5)$ (все величины выражены в единицах СИ). Определите амплитуду, период, начальную фазу колебаний, а также максимальную скорость и ускорение груза. Через сколько времени после начала движения груз будет проходить через положение равновесия? За какое время после начала движения груз проходит расстояние, равное половине амплитуды колебаний? Чему равна средняя скорость движения груза на этом участке пути?

Решение. Сравнивая заданное уравнение с уравнением гармонических колебаний (5.1), записанным в общем виде, легко заметить, что в нашем примере $x_m = 0{,}02$ м. Фаза колебаний равна:

$$\varphi = \pi (t + 0{,}5) = \pi t + 0{,}5\pi,$$

откуда следует, что угловая частота $\omega = \pi$ с$^{-1}$, период $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2$ с, а начальная фаза $\varphi_0 = 0{,}5\pi$.

Зная амплитуду колебаний и угловую частоту, можно найти максимальную скорость и ускорение колеблющейся точки. Согласно (5.2′) и (5.3′) они будут равны:

$$v_m = 0{,}02\pi \text{ м/с};$$
$$a_m = 0{,}02\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Уравнение движения колеблющейся точки позволяет определить ее смещение в любой момент времени и найти время, по истечении которого точка сместится от положения равновесия на заданное расстояние. В момент прохождения положения равновесия $x = 0$. Подставляя это значение в закон движения точки, получим:

$$0 = 0{,}02 \sin \pi (t + 0{,}5),$$

откуда $\pi (t + 0{,}5) = n\pi$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, и, следовательно, промежутки времени, спустя которые груз будет проходить положение равновесия, определяются формулой

$$t = n - 0{,}5,$$

где t измеряется в секундах.

Первый раз груз пройдет положение равновесия через время $t=(1-0{,}5)$ с $=0{,}5$ с $(n=1)$ после начала отсчета движения.

Чтобы найти время прохождения расстояния s, равного первой половине амплитуды, нужно в законе движения груза положить $x=x_m-s=0{,}5x_m=0{,}01$ м и решить уравнение относительно t. Делая такую подстановку, находим $0{,}01=0{,}02\sin\pi(t+0{,}5)$, откуда $\pi/3=\pi t$, и, следовательно, искомое время будет равно $t_1={}^1/_3$ с.

Средняя скорость $v_{ср}$ точки за это время по определению равна:

$$v_{ср}=\frac{x_m}{2t_1}=0{,}03 \text{ м/с}.$$

Пример 2. Шарик массой $m=20$ г колеблется с периодом $T=2$ с. В начальный момент времени шарик обладал энергией $W=0{,}01$ Дж и находился от положения равновесия на расстоянии $x_1=2{,}5$ см. Запишите уравнение гармонического колебания и закон изменения возвращающей силы с течением времени.

Р е ш е н и е. Законы изменения смещения и возвращающей силы можно записать, если мы знаем амплитуду, круговую частоту, начальную фазу и массу колеблющейся точки.

По условию задачи период колебаний нам известен, следовательно, круговая частота

$$\omega=\frac{2\pi}{T}. \tag{1}$$

Кроме того, известна полная энергия колеблющейся точки, которая согласно формуле (5.7) независимо от положения точки равна:

$$W=\frac{m\omega^2x_m^2}{2}. \tag{2}$$

Наконец, используя последнее условие задачи, можно записать уравнение движения для начального момента, когда $t=0$:

$$x_1=x_m\cos\varphi_0. \tag{3}$$

Из соотношений (1) — (3) находим:

$$\omega=\pi \text{ с}^{-1}; \qquad x_m=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2W}{m}}; \qquad x_m\approx0{,}32 \text{ м};$$

$$\cos\varphi_0=\frac{x_1}{x_m}\approx0{,}78,$$

следовательно,

$$\varphi_0\approx51°\approx0{,}3\pi.$$

Подставляя найденные значения x_m, ω и φ_0 в уравнения (5.1) и (5.4) и проводя упрощения, получим (в единицах СИ) ответ на вопрос задачи:

$$x=0{,}32\cos\pi(t+0{,}3); \qquad F=0{,}063\cos\pi(t+0{,}3).$$

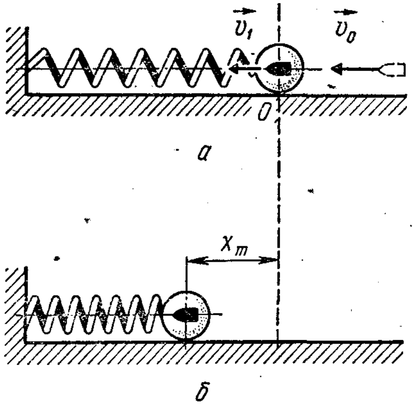

Рис. 5.2

Пример 3. На гладком горизонтальном столе лежит шар массой M, прикрепленный к пружине с жесткостью k. В шар попадает пуля массой m, имеющая в момент удара скорость $\vec{v}_0$, направленную вдоль оси пружины (рис. 5.2, *а*). Считая удар абсолютно неупругим и пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определите амплитуду и период колебаний шара.

Решение. При соударении с шаром пуля сообщает ему кинетическую энергию, вследствие чего шар приходит в движение и сжимает пружину. Пружина сжимается до тех пор, пока кинетическая энергия полностью не перейдет в потенциальную энергию деформации. В этот момент кинетическая энергия шара станет равной нулю, потенциальная энергия пружины достигнет максимума, смещение шара от положения равновесия станет равно амплитудному значению (рис. 5.2, *б*). Дальше процесс пойдет в обратном порядке: форма пружины будет восстанавливаться, ее потенциальная энергия станет уменьшаться, кинетическая энергия шара будет возрастать и в положении равновесия (в точке O) первая обратится в нуль, вторая достигнет максимума. Скорость шара будет направлена вправо, и при своем движении он начнет растягивать пружину. Так как поверхность стола идеально гладкая и сопротивление воздуха ничтожно мало, кинетическая энергия шара полностью перейдет в потенциальную энергию деформации пружины и процесс начнет повторяться заново. Возвращающая сила упругости, приложенная к шару, всюду будет при этом пропорциональна смещению, и колебания шара будут гармоническими.

Чтобы определить амплитуду этих колебаний, нужно использовать закон сохранения импульса для системы пуля — шар и закон сохранения энергии для системы шар — пуля — пружина. Закон сохранения импульса позволяет определить скорость $\vec{v}_1$, с которой начнет двигаться система после удара пули. Пренебрегая, как обычно, смещением шара за время удара и учитывая, что пуля застревает в нем, получим:

$$mv_0 = (m + M)\,v_1. \qquad (1)$$

Для составления уравнения закона сохранения энергии $A = W_2 - W_1$ рассмотрим два состояния системы. За первое состояние примем состояние системы в момент окончания удара, когда деформации прекратились и шар начал двигаться. Энергия пружины здесь была равна нулю, шар вместе с пулей обладал энергией

$$W_1 = \frac{(m+M)\,v_1^2}{2}.$$

За второе состояние примем состояние системы в момент наибольшей деформации пружины, когда смещение x шара достигло амплитудного значения x_m. Энергия системы здесь равна только потенциальной энергии сжатой пружины

$$W_2 = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2}.$$

Внешние силы (реакция опоры $\vec{N}$ и сила тяжести, равная $m\vec{g}$) над системой шар — пуля — пружина работу не совершают, поэтому $A=0$ и по закону сохранения энергии $0 = W_2 - W_1$ или

$$\frac{kx_m^2}{2} - \frac{(m+M)\,v_1^2}{2} = 0. \qquad (2)$$

Для нахождения периода колебаний системы нужно составить уравнение второго закона Ньютона для шара с пулей.

Согласно (5.4) в процессе сжатия пружины должно быть

$$F = -(m+M)\,\omega^2 x, \qquad (3)$$

где F — модуль силы упругости, ω — круговая частота, равная

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \qquad (4)$$

Силу F в данном примере можно выразить через жесткость пружины k и сжатие x:

$$F = -kx. \qquad (5)$$

Соотношения (1) — (5) полностью отражают явление, рассматриваемое в задаче, и служат исходной системой уравнений для нахождения неизвестных x_m и T.

Решая уравнения (1) и (2), получаем:

$$x_m = \frac{mv_0}{m+M}\sqrt{\frac{m+M}{k}}.$$

Из формул (3) — (5) находим:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}.$$

Пример 4. Математический маятник, состоящий из нити длиной $l = 243$ см и стального шарика радиусом $r = 2$ см, совершает гармонические колебания с амплитудой $x_m = 10$ см. Определите скорость шарика при прохождении им положения равновесия и наибольшее значение равнодействующей всех сил, действующих на шарик. Плотность стали $\varrho = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Р е ш е н и е. К математическому маятнику применимы все уравнения гармонических колебаний. Они дают возможность определить кинематические и динамические характеристики движения маятника, причем в отличие от общего случая к этим уравнениям добавляется формула периода колебаний математического маятника, позволяющая найти круговую частоту, если известна его длина.

Исходя из условий задачи, можно сразу определить период и, следовательно, круговую частоту колебаний маятника. Применяя формулу математического маятника к колебаниям шарика, необходимо учесть, что входящая в нее длина равна расстоянию $l+r$ от точки подвеса до центра тяжести колеблющегося тела, поскольку в данном примере шарик можно рассматривать как материальную точку. Кроме того, здесь $a=g$, так как точка подвеса находится в равновесии:

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{g}{l+r}}. \qquad (1)$$

Зная угловую частоту и амплитуду, легко найти скорость маятника при прохождении им положения равновесия. В этом положении она имеет максимальное значение, равное согласно формуле (5.2′)

$$v_m=\omega x_m. \qquad (2)$$

Наибольшее значение возвращающая сила имеет в крайнем положении маятника, где смещение становится равным амплитуде, а ускорение достигает максимума:

$$F_m=ma_m=mx_m\omega^2. \qquad (3)$$

Массу колеблющегося шарика мы найдем, зная радиус и плотность материала:

$$m=\varrho\frac{4}{3}\pi r^3. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1) — (4) совместно относительно скорости и силы, после подстановки числовых данных получим:

$$v_m=x_m\sqrt{\frac{g}{l+r}}; \quad v_m\approx 0{,}2 \text{ м/с}; \quad F_m=\frac{4\pi g\varrho r^3 x_m}{3(l+r)}; \quad F_m\approx 0{,}1 \text{ Н}.$$

Пример 5. Маятниковые часы, выверенные при комнатной температуре, уходят за сутки на $\Delta t=2$ мин вследствие изменения длины маятника, вызванного понижением температуры. Как нужно изменить длину маятника, чтобы часы шли верно?

Р е ш е н и е. Из-за понижения температуры длина l_1 маятниковых часов, выверенных при комнатной температуре, уменьшается и становится равной l_2. Период колебаний таких часов уменьшается, поскольку ускорение a остается неизменным. За сутки — время t_1 — эти часы сделают большее число колебаний, чем точные часы, и, следовательно, будут спешить. Согласно формуле

(5.9) показания маятниковых часов за сутки будут отличаться от показаний точных часов на время

$$-\Delta t = t_1\left(1 - \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\right), \qquad (1)$$

так как в данном случае $a_1 = a_2 = g_0$.

Чтобы часы шли точно, маятник часов нужно удлинить настолько, насколько он уменьшился при охлаждении. Относительное изменение длины, которое нам требуется определить, должно быть при этом равно $(l_1 - l_2)/l_2$.

Из уравнения (1) находим отношение l_1/l_2:

$$\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{\Delta t}{t_1} + 1\right)^2 \approx \frac{2\Delta t}{t_1} + 1$$

(в задачах данного типа, если $\Delta t \ll t_1$, членом $\Delta t^2/t_1^2$ можно пренебречь и этим упростить вычисления). Решая последнее уравнение относительно искомого изменения длины, получим:

$$\frac{l_1 - l_2}{l_2} = \frac{2\Delta t}{t_1} = 2{,}8 \cdot 10^{-3},$$

т. е. длину маятника нужно увеличить на 0,3% по сравнению с длиной, которую он имел, когда часы спешили.

Пример 6. Самое высокое место, обжитое человеком на земном шаре, находится на высоте $h = 6200$ м над уровнем моря (Ронбургский монастырь в Гималаях). На сколько будут уходить за сутки маятниковые часы, выверенные на этой высоте, если их перенести на уровень моря?

Решение. При перемещении маятниковых часов с одного уровня на другой изменяется период колебаний маятника, так как ускорение свободного падения зависит от высоты. Выверенные на одном уровне, такие часы будут уходить вперед или отставать в зависимости от того, опускают их вниз или поднимают вверх. По условию задачи часы переносят на более низкий уровень, поэтому ускорение $a = g$ будет увеличиваться, и часы, выверенные в горах, станут уходить вперед. Это вызвано тем, что период колебаний маятника уменьшается, и за сутки такие часы делают больше колебаний, чем часы, идущие в монастыре.

Согласно формуле (5.9) показания маятниковых часов, перенесенных на уровень моря, за время t_1 будут больше показаний правильно идущих часов на время

$$-\Delta t = t_1\left(1 - \sqrt{\frac{g_2}{g_1}}\right), \qquad (1)$$

так как в данном случае $l = \text{const}$. В этой формуле g_1 — модуль ускорения свободного падения на высоте h, равный

$$g_1 = G\frac{M_З}{(R_З + h)^2}, \qquad (2)$$

g_2 — модуль ускорения свободного падения на уровне моря:

$$g_2 = g_0 = G \frac{M_З}{R_З^2}. \qquad (3)$$

Из формул (2) — (3) находим:

$$\frac{g_2}{g_1} = \frac{(R_З + h)^2}{R_З^2}.$$

Подставляя это отношение в уравнение (1), для разности показаний маятниковых часов при перемещении их на высоту h получим:

$$-\Delta t = t_1 \left(1 - \frac{R_З + h}{R_З}\right) = -t_1 \frac{h}{R_З}.$$

Откуда с учетом данных задачи найдем, что за сутки часы уйдут вперед на

$$\Delta t = 70 \text{ с}.$$

Пример 7. В ракете и на Земле установлены маятниковые часы. Ракета стартует без начальной скорости и за время равноускоренного движения поднимается на высоту H. Затем двигатели выключаются и ракета продолжает двигаться замедленно с вдвое меньшим по модулю ускорением, чем при разгоне. На сколько будут отличаться показания маятниковых часов от показаний точных часов в тот момент, когда ракета достигнет высоты $2H$? Изменением ускорения свободного падения с высотой пренебречь.

Решение. Если маятниковые часы находятся в системе, которая движется с ускорением, например в ракете, период колебаний маятника, а следовательно, и показания часов будут отличаться от показаний неподвижных часов. Это объясняется тем, что ускорение $\vec{a}$, создаваемое силой натяжения нити, становится по модулю больше или меньше ускорения $\vec{g}$, при котором обычно выверяются часы.

В нашем примере первую половину всего пути ракета двигалась ускоренно: сила натяжения нити $\vec{F}_{1н}$ была больше силы тяжести $m\vec{g}$ груза, т. е. $a_1 > g$, и, стало быть, маятниковые часы уходили вперед. Вторую половину пути ракета, а с ней и маятниковые часы двигались замедленно. Это возможно лишь при условии, что $F_{2н} < mg$, т. е. $a_2 < g$. Маятниковые часы в этом случае будут отставать. Чтобы определить разность показаний маятниковых часов, установленных в ракете, и часов, идущих правильно на Земле, нужно найти, на сколько они уйдут вперед при $a_1 > g$, отстанут затем при $a_2 < g$, и из первой поправки вычесть вторую.

При ускоренном подъеме ракеты на высоту H период колебаний маятника уменьшится, частота колебаний увеличится, и за время подъема t_{01} маятниковые часы уйдут вперед на

$$-\Delta t_1 = t_{01}\left(1 - \sqrt{\frac{a_1}{g}}\right), \qquad (1)$$

поскольку длина маятника останется неизменной.

Если ракета поднимается вверх с ускорением $\vec{w}_1$, то полное ускорение, создаваемое силой натяжения нити, по модулю будет равно:

$$a_1 = g + w_1. \qquad (2)$$

Ускорение $\vec{w}_1$ можно рассматривать как переносное и определить его из уравнения движения ракеты

$$H = \frac{w_1 t_{01}^2}{2}. \qquad (3)$$

При замедленном движении ракеты сила натяжения и сообщаемое ею ускорение уменьшаются. Период колебаний маятниковых часов увеличится, частота колебаний станет меньше, и за время t_{02} подъема ракеты с высоты H на высоту $2H$ маятниковые часы отстанут от правильно идущих часов на

$$\Delta t_2 = t_{02}\left(1 - \sqrt{\frac{a_2}{g}}\right). \qquad (1')$$

Ускорение, создаваемое силой натяжения нити при таком движении, будет равно:

$$a_2 = g - w_2, \qquad (2')$$

где согласно условию задачи

$$w_2 = \frac{w_1}{2}.$$

Точное время замедленного подъема можно определить из уравнения движения

$$H = v_0 t_{02} - \frac{w_2 t_{02}^2}{2}, \qquad (3')$$

где

$$v_0 = w_1 t_{01}.$$

Показания маятниковых часов в момент достижения ракетой высоты $2H$ будут отличаться от истинного времени (времени подъема) на величину

$$\Delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1) — (4) совместно с учетом того, что $t_{01} = t$, получим:

$$\Delta t = \sqrt{t^2 + \frac{2H}{g}} + 0{,}59\sqrt{t^2 - \frac{H}{g}} - 1{,}59\ t.$$

Это и будет ответ на вопрос задачи.

5.1. Две идеально гладкие плоскости составляют двугранный угол. Левая плоскость наклонена к горизонту под углом α, правая — под углом β. Определите период колебаний шарика, скользящего вниз и вверх по этим плоскостям, если вначале он находился на левой плоскости на высоте h.

5.2. Грузик массой 10 г совершает колебания на нити длиной 1 м и обладает энергией 0,015 Дж. Чему равна амплитуда колебаний грузика? Можно ли эти колебания считать гармоническими?

5.3. Точка совершает колебания по закону $x = 2 \cdot 10^{-4} \cos 3140t$ (величины выражены в единицах СИ). Определите: а) за какие промежутки времени точка проходит отрезки пути, равные половине амплитуды колебаний; б) чему равны средняя скорость и среднее ускорение точки за эти промежутки времени.

5.4. Точка, совершающая гармонические колебания, в некоторый момент времени имеет смещение, скорость и ускорение, равные соответственно $4 \cdot 10^{-2}$ м, 0,05 м/с, 0,8 м/с^2. Чему равны амплитуда и период колебаний точки? Чему равна фаза колебаний в рассматриваемый момент времени? Каковы максимальная скорость и ускорение точки?

5.5. Шарик массой 10 г совершает синусоидальные колебания с амплитудой 3 см и частотой 10 с$^{-1}$. Чему равны максимальное значение силы и полная энергия шарика? Каковы будут эти значения, когда шарик удален от положения равновесия на расстояние 2 см? Начальная фаза колебаний равна нулю.

5.6. Точка совершает колебания, описываемые уравнением $x = 0{,}05 \sin 2t$ (величины выражены в единицах СИ). В некоторый момент сила, действующая на точку, и ее потенциальная энергия равны соответственно $F = 5 \cdot 10^{-3}$ Н и $W_p = 10^{-4}$ Дж. Чему равны фаза и кинетическая энергия точки в этот момент времени?

5.7. Автомобиль массой 1,5 т при движении по ребристой дороге совершает гармонические колебания в вертикальном направлении с периодом 0,5 с и амплитудой 15 см. Определите максимальную силу давления, действующую на каждую из четырех рессор автомобиля.

5.8. Платформа совершает гармонические колебания в горизонтальном направлении с частотой $\nu = 0{,}25$ с$^{-1}$. На платформе лежит груз, коэффициент трения которого о платформу равен $\mu = 0{,}1$. Какова может быть максимальная амплитуда x_m колебаний платформы, чтобы груз не скользил по ней?

5.9. К грузу массой m, лежащему на идеально гладком горизонтальном столе, прикреплены две легкие пружины с жесткостью, соответственно равной k_1 и k_2. Другие концы пружин закреплены. В начальный момент первая пружина оказывается растянутой на x_1, вторая — сжатой на x_2. Груз смещают от положения равновесия и отпускают. Найдите период колебаний груза. С какой амплитудой груз будет совершать колебания, если его сместить к стене на x_1, а затем отпустить?

5.10. Легкая пружина с жесткостью 19,6 Н/м подвешена к штативу массой 0,5 кг. В некоторый момент к свободному концу пружины подвесили гирю массой 0,1 кг и отпустили. Запишите уравнение движения гири на пружине, приняв за начало отсчета положение равновесия. Какова будет круговая частота колебаний груза, если на расстоянии 1 см от равновесного положения груза поставить тяжелую упругую плиту? По какому закону изменяется сила упругости, действующая со стороны пружины на штатив? При какой амплитуде колебаний груза штатив начнет подскакивать на столе?

5.11. Две пружины с жесткостью, соответственно равной k_1 и k_2, соединены один раз последовательно, второй раз параллельно. Во сколько раз будут отличаться периоды вертикальных колебаний груза на таких пружинах?

5.12. В открытые сообщающиеся сосуды с площадью поперечного сечения S и $2S$ налита ртуть массой m. Столбик ртути в одном из сосудов вывели из положения равновесия, вследствие чего ртуть начала колебаться. Найдите период колебаний ртути.

5.13. Два цилиндрических шкива одинакового радиуса вращаются в противоположные стороны. Расстояние между осями шкивов 15 см. На шкивы положили однородный стержень так, что его центр тяжести оказался смещен к одному из шкивов. Коэффициент трения между стержнем и шкивом 0,2. Определите период колебаний стержня.

5.14. Два шарика массами m и $2m$ соединены между собой пружиной с жесткостью k. Шарики лежат на идеально гладком столе. а) Пружину сжали, прикладывая к шарикам две силы, каждая из которых по модулю равна $F = mg$, и затем быстро отпустили. Как будут двигаться шарики? б) В маленький шарик попадает пуля массой m, летящая вдоль линии центров шаров со скоростью v. Считая удар неупругим, определите период и амплитуду колебаний шаров.

5.15. Длина нити одного из математических маятников на 15 см больше длины другого. В то время как один из маятников делает 7 колебаний, другой делает на одно колебание больше. Чему равны периоды колебаний маятников?

5.16. В идеально гладкой сферической полости радиусом R небольшой грузик совершает гармонические колебания. Сколько раз в течение времени t грузик побывает в положении равновесия, если известно, что амплитуда его колебаний ничтожно мала по сравнению с радиусом полости?

5.17. На сколько уменьшится число колебаний маятника с периодом колебаний 1 с за сутки, если длина его возрастет на 5 см?

5.18. Два маленьких упругих шарика одинаковой массы подвешены на нитях длиной $4l$ и $l/4$ так, что нити параллельны, а сами шарики соприкасаются. Нить одного из шариков отклонили на небольшой угол и отпустили. Сколько раз шарики столкнутся за достаточно большое время t?

5.19. Маятник совершает колебания с амплитудой 1 см и имеет период 1 с. Определите максимальные значения скорости и ускорения маятника.

5.20. Математический маятник совершает колебания с амплитудой x_m. Через время t после начала движения из положения равновесия его смещение было равно 0,5 x_m. Определите длину маятника, а также его скорость и ускорение в указанный момент времени.

5.21. В ракете установлен математический маятник длиной l. Чему будет равен период колебаний такого маятника, если ракета начнет подниматься вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$?

5.22. В лифте находится математический маятник. Во сколько раз изменится период колебаний маятника, если лифт будет опускаться с ускорением 0,25 g?

5.23. Маятник длиной 1 м совершает гармонические колебания в кабине самолета. Чему равен период колебаний маятника при движении самолета в горизонтальном направлении с постоянным ускорением 3 м/с^2? Будет ли зависеть период от знака ускорения и положения плоскости колебаний относительно кабины самолета? Чему будет равен период, если самолет, имея скорость $\vec{v}$, начнет описывать в горизонтальной плоскости окружность радиусом R?

5.24. Маятник укреплен на тележке, скатывающейся без трения с наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Чему равен период колебаний маятника во время движения тележки? Длина маятника l. Каков будет ответ, если тележку пустить вверх по наклонной плоскости?

5.25. В ракете, запущенной вертикально вверх, установлен математический маятник. Что произойдет с маятником после того, как двигатели прекратят работу и ракета будет двигаться лишь под действием силы тяжести? Как будет вести себя маятник при свободном падении ракеты?

5.26. В кабине аэростата установлены маятниковые часы. Без начальной скорости аэростат начинает подниматься вверх с ускорением $a = 0{,}2$ м/с^2. На какую высоту h поднимется аэростат за время, когда по маятниковым часам пройдет $t_м = 60$ с?

5.27. В космическом корабле установлены маятниковые часы. Корабль без начальной скорости запускают вертикально вверх, и он поднимается с ускорением, равным по модулю 0,5 g. Достигнув высоты h, корабль начинает двигаться замедленно с тем же по модулю ускорением. На какой высоте маятниковые часы будут показывать точное время? Изменением g с высотой пренебречь.

Глава 6

ГИДРОМЕХАНИКА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Основная задача гидромеханики состоит в том, чтобы найти законы распределения давлений и скоростей внутри жидкости. Сравнительно просто эта задача решается для идеальной жидкости — несжимаемой жидкости, в которой отсутствуют силы трения между ее слоями (нет вязкости). Со стороны идеальной жидкости на тела могут действовать только нормальные силы упругости. Силовое взаимодействие в жидкости характеризуется скалярной величиной — давлением.

Давление, производимое силой $\vec{F}$, равномерно распределенной по плоской поверхности площадью S и действующей перпендикулярно поверхности, равно:

$$p = \frac{F}{S}. \tag{6.1}$$

Давление, создаваемое покоящейся жидкостью, называют гидростатическим.

При отсутствии движения внутри идеальной жидкости, находящейся в равновесии, давление, производимое жидкостью на глубине h, равно:

$$p = \varrho g h, \tag{6.2}$$

где ϱ — плотность жидкости; g — модуль ускорения свободного падения.

Формула (6.2) носит общий характер: давление не зависит от того, какую форму имеет сосуд, содержащий жидкость.

Сила гидростатического давления жидкости на дно сосуда равна весу столба жидкости с основанием, равным площади дна сосуда:

$$F_{\text{дн}} = p_{\text{дн}} S_{\text{дн}} = \varrho g h S_{\text{дн}}.$$

Средняя сила давления жидкости на плоскую боковую стенку наполненного сосуда равна давлению жидкости на глубине центра тяжести стенки, умноженному на площадь ее поверхности:

$$F_{\text{б}} = p_{\text{ц.т.}} S_{\text{б}} = \varrho g h_{\text{ц.т}} S_{\text{б}}.$$

Давление p_0 на открытой поверхности жидкости передается во все точки жидкости без изменения (закон Паскаля).

Из закона Паскаля следует:

1) полное давление в любой точке жидкости складывается из давления p_0 на ее открытой поверхности, которое обычно равно атмосферному, и гидростатического давления столба жидкости, находящегося над этой точкой:

$$p = p_0 + \varrho g h;$$

2) при равновесии жидкости давление на поверхности одного уровня внутри однородной жидкости во всех точках этой поверхности одинаково.

2. На тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, модуль которой равен весу жидкости, вытесненной телом:

$$F_{в} = \rho_{ж} g V,$$

где $\rho_{ж}$ — плотность жидкости; V — объем вытесненной жидкости. Выталкивающая сила является суммой сил упругости, действующих на поверхность тела со стороны жидкости. Приложена эта сила в центре тяжести вытесняемого объема жидкости и направлена по нормали к ее открытой поверхности.

На тело, находящееся на дне сосуда с жидкостью (или погруженное в жидкость на нити), в общем случае действуют три силы: сила тяжести, равная $m\vec{g}$; выталкивающая сила $\vec{F}_{в}$ и реакция $\vec{N}$ дна сосуда (или сила натяжения нити $\vec{F}_{н}$), равная по модулю весу тела в жидкости.

3. При стационарном (установившемся) течении идеальной жидкости, когда все частицы жидкости, проходящие через данную точку пространства, имеют одинаковую скорость, через любое сечение потока проходит одинаковое количество жидкости (закон постоянства потока):

$$Q = \frac{m}{t} = \text{const}. \tag{6.3}$$

Если жидкость с плотностью ρ проходит через сечение S со скоростью $\vec{v}$, то временной расход жидкости Q через это сечение равен:

$$Q = \rho S v. \tag{6.3'}$$

Из формул (6.3) и (6.3′) следует, что для двух произвольных сечений потока

$$\rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2, \tag{6.3''}$$

где v_1 и v_2 — модули скоростей частиц жидкости, проходящих через сечения S_1 и S_2.

Поток жидкости, текущей со скоростью $\vec{v}$ и падающей с высоты h, обладает мощностью

$$N = \frac{W_{полн}}{t} = \frac{W_k + W_p}{t} = \frac{mv^2}{2t} + \frac{mgh}{t}, \tag{6.4}$$

или

$$N = \frac{Qv^2}{2} + Qgh, \tag{6.4'}$$

или

$$N = \rho\frac{Sv^3}{2} + \rho Svgh. \tag{6.4''}$$

Если в произвольном сечении установившегося потока выбрать достаточно тонкий слой жидкости, центр тяжести которого находится на высоте h от нулевого уровня отсчета, то вдоль всего потока должно выполняться соотношение (закон Бернулли)

$$p + \varrho g h + \frac{\varrho v^2}{2} = \text{const}, \qquad (6.5)$$

где p — внешнее давление; v — скорость движения жидкости через данное сечение.

Сумма $p + \varrho g h$ представляет статическое давление, член $\varrho \frac{v^2}{2}$ — динамическое давление жидкости. Все вместе дает полное давление жидкости в движущемся слое.

С энергетической точки зрения давление p есть работа, совершаемая внешними силами над единичным объемом жидкости, произведения $\varrho g h$ и $\varrho v^2/_2$ соответственно представляют собой потенциальную и кинетическую энергию жидкости, заключенной в этом объеме.

Согласно формуле (6.5) для двух произвольных сечений потока идеальной жидкости

$$p_1 + \varrho g h_1 + \frac{\varrho v_1^2}{2} = p_2 + \varrho g h_2 + \frac{\varrho v_2^2}{2}. \qquad (6.5')$$

Если $v_1 = 0$, $h_2 = 0$ и $p_1 = p_2$ (жидкость вытекает из малого отверстия широкого открытого сосуда), то

$$v = \sqrt{2gh} \ \text{(формула Торричелли)}, \qquad (6.5'')$$

где $v = v_2$, $h = h_1$ — глубина, на которой находится отверстие в сосуде.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

Законы гидромеханики (6.2) — (6.5) позволяют решать многие задачи как по статике, так и по динамике жидкостей. Среди этих задач нужно прежде всего выделить задачи на уравнение второго закона Ньютона, в которых движущимся телом является слой жидкости. В этих задачах приходится учитывать не силы, действующие между телами, а производимые ими давления.

1. Правила решения задач этой группы почти такие же, как задач на статику или динамику тела, движущегося поступательно. Различие состоит лишь в том, что уравнения равновесия или второго закона Ньютона нужно записывать не через силы, а через давления. Выразить левую часть основного уравнения динамики через давление можно следующим образом. Выбрав слой жидкости, для которого составляется уравнение, надо представить его массу как произведение $\varrho S l$, где ϱ — плотность жидкости, S — площадь поперечного сечения, проведенного перпендикулярно направлению движения жидкости, l — толщина слоя. Тогда урав-

нение второго закона Ньютона можно записать так:

$$\sum \vec{F} = \varrho S l \vec{a}, \text{ откуда } \sum p = \varrho l a.$$

В левой части последнего равенства стоит алгебраическая сумма давлений, производимых на движущийся слой жидкости.

2. Задачи, связанные с нахождением давления и сил давления в какой-либо точке внутри покоящейся жидкости, решают на основании закона Паскаля и вытекающих из него следствий. Методика решения таких задач состоит в следующем:

а) Необходимо сделать чертеж и отметить все равновесные уровни жидкости, которые она занимала по условию задачи. Если даны сообщающиеся сосуды с разнородной жидкостью, нужно отметить уровни каждой из них и указать границы раздела. Затем следует провести поверхность нулевого уровня — поверхность, от которой будут отсчитываться высоты столбов жидкости. Эта поверхность должна проходить через однородную жидкость — по самой нижней границе раздела сред (жидкость — жидкость, жидкость — воздух). Если по условию задачи происходит перетекание жидкости из одной части сосуда в другую и при этом имеются два или несколько равновесных состояний жидкости, необходимо отметить высоты всех уровней, отсчитывая их от поверхности нулевого уровня.

б) Указав высоты всех столбов и расстояния, на которые смещаются уровни жидкости, можно приступать к составлению уравнения равновесия жидкости. Для двух произвольных точек, лежащих на поверхности нулевого уровня, должно быть

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{k=1}^{m} p'_k,$$

или подробнее:

$$p_0 + \varrho_1 g h_1 + \ldots + \varrho_n g h_n = p'_0 + \varrho'_1 g h'_1 + \ldots + \varrho'_k g h'_k.$$

В этом уравнении p_0 — давление на свободной поверхности верхнего слоя (обычно атмосферное), h_1, ϱ_1, h', ϱ' и т. д.— высоты элементарных столбов жидкостей и их плотности.

в) Если до наступления момента равновесия жидкость переливалась из одной части сосуда в другую, то к составленному уравнению добавляют условие несжимаемости жидкости: при уменьшении объема жидкости в какой-либо части сосуда на V_1 в другой части сосуда объем возрастет на такую же величину. Если сосуды имеют форму цилиндров, то условие несжимаемости $V_1 = V_2$ можно записать так:

$$S_1 h_1 = S_2 h_2,$$

где S_1 и S_2 — площади поперечного сечения; h_1 и h_2 — высоты столбов переливаемой жидкости.

Составив уравнение равновесия и, если нужно, уравнение несжимаемости, следует записать математически все остальные условия задачи. Как правило, они связывают между собой высоты h_1, h_2 и т. д.

г) Затем надо выписать числовые значения известных величин, проверить число неизвестных в полученных уравнениях и решить их совместно относительно искомой величины.

д) В заключение остановимся на задачах, где требуется найти давление внутри жидкости, находящейся в сосуде, движущемся ускоренно. При решении их нужно учесть замечания к п. 7 гл. 2. Давление на глубине, отсчитанной от установившейся поверхности жидкости, движущейся с ускорением $\vec{a}$, можно вычислить по формуле

$$p = p_0 + \varrho g' h, \quad \text{где} \quad g' = |\vec{g} + (-\vec{a})|.$$

3. Решение задач о плавании тел основано на законах динамики поступательного движения твердого тела с учетом архимедовой силы. Принципиально решение таких задач не отличается от решения задач динамики материальной точки.

а) Нужно сделать чертеж и, руководствуясь третьим законом Ньютона, расставить силы, действующие на тело, погруженное в жидкость.

Если в задаче говорится о весе тела в воде, то тело удобно изобразить подвешенным на нити в жидкости или лежащим на дне сосуда и помнить, что вес в воде по модулю равен силе натяжения нити или нормальной реакции дна (но не силе тяжести, равной $m\vec{g}$). Не следует также забывать, что сила давления верхнего слоя жидкости, действующая на погруженное тело, в выталкивающей силе учтена.

Если тело плавает на границе раздела двух жидкостей, модуль выталкивающей силы, действующей на тело, равен:

$$F_{\text{в}} = \varrho_1 g V_1 + \varrho_2 g V_2,$$

где V_1 и V_2 — объем частей тела, находящихся в жидкостях с плотностями ϱ_1 и ϱ_2 соответственно.

б) Следует составить основное уравнение динамики поступательного движения

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

в проекциях на вертикальное направление и подставить в него вместо модулей действующих сил, если эти силы не заданы, их выражения:

$$mg = \varrho_{\text{т}} g V_{\text{т}} \qquad \text{и} \qquad F_{\text{в}} = \varrho_{\text{ж}} g V.$$

Здесь $V_{\text{т}}$ и $\varrho_{\text{т}}$ — объем и плотность погруженного тела; V — объем погруженной части тела, равный объему вытесненной жидкости.

Если погруженное тело находится в равновесии относительно жидкости, то основное уравнение упрощается, поскольку правая

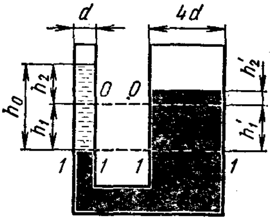

Рис. 6.1

часть обращается в нуль, и задача сводится к задаче статики. Для ее решения нужно составить уравнение равновесия в проекциях и редко уравнение моментов.

в) Далее, руководствуясь общими правилами решения задач механики, необходимо составить дополнительные уравнения, выписать числовые значения заданных величин, проверить число неизвестных в полученной системе уравнений и решить ее относительно искомой величины.

Пример 1. В сообщающихся сосудах находится ртуть. Диаметр одного сосуда в четыре раза больше диаметра другого. В узкий сосуд наливают столб воды высотой $h_0 = 0{,}7$ м. На сколько поднимется уровень ртути в одном сосуде и опустится в другом?

Решение. Делаем чертеж (рис. 6.1), на котором отмечаем начальный уровень ртути *0 — 0*, и выбираем поверхность нулевого уровня по границе раздела воды и ртути *1 — 1*.

Разбиваем столбы жидкости над этой поверхностью в левом и правом сосудах на элементарные части и обозначаем их высоты: h_1 и h'_2 — понижение и повышение уровней в левом и правом колене; h' — расстояние между уровнями *0 — 0* и *1 — 1* в правом колене; h_2 — высота столба воды над начальным уровнем.

Записываем условие равновесия жидкости в сообщающихся сосудах: на поверхности *1 — 1* давление в любых точках, находящихся в левом колене, равно давлению в точках, находящихся в правом:

$$\rho_в g h_1 + \rho_в g h_2 = \rho_р g h'_1 + \rho_р g h'_2, \qquad (1)$$

где $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 и $\rho_р = 1{,}36 \cdot 10^4$ кг/м^3 (табличные значения плотности воды и ртути).

Обратите внимание, что на поверхности *0 — 0*, проходящей через разнородные жидкости, давления в левом и правом коленах разные.

Условие несжимаемости и дополнительные условия задачи позволяют составить еще три уравнения:

$$S_1 h_1 = S_2 h'_2 \quad \text{или} \quad d^2 h_1 = 16 d^2 h'_2; \qquad (2)$$

$$h_1 + h_2 = h_0; \qquad (3)$$

$$h_1 = h'_1. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1) — (4) совместно относительно искомых неизвестных h'_2 и h_1, после подстановки числовых значений получим:

$$h'_2 = \frac{\rho_в h_0}{17\rho_р}; \quad h'_2 \approx 0{,}003 \text{ м}; \quad h_1 = \frac{16}{17}\frac{\rho_в h_0}{\rho_р}; \quad h_1 \approx 0{,}0048 \text{ м}.$$

Пример 2. Какова должна быть масса камня, который нужно положить на плоскую льдину толщиной $h = 0{,}20$ м, чтобы он вместе с льдиной полностью погрузился в воду, если площадь льдины равна $S=1$ м^2? Плотность льда $\varrho_л=900$ кг/м^3, плотность камня $\varrho_к=2200$ кг/м^3. С какой силой камень давит на льдину в воде?

Решение. Так как льдина и камень находятся в погруженном состоянии в равновесии и по условию задачи требуется определить не только массу камня, но и внутреннюю силу, действующую между этими телами, необходимо составить уравнения равновесия отдельно для каждого тела.

На льдину действуют сила тяжести, равная $m_л\vec{g}$, и сила нормального давления камня $\vec{N}$ (эти силы направлены вертикально вниз), а также выталкивающая сила со стороны воды $\vec{F}_1$, направленная вертикально вверх. Под действием этих сил льдина находится в покое, ее ускорение равно нулю, следовательно,

$$F_1 - m_л g - N = 0. \qquad (1)$$

Поскольку величины $m_л$ и F_1, входящие в это уравнение, не заданы, их нужно выразить через известные величины:

$$m_л = \varrho_л hS; \quad F_1 = \varrho_в ghS, \qquad (2)$$

где $\varrho_л$ и $\varrho_в$ — плотность льда и воды; h и S — толщина и площадь льдины (объем погруженного тела равен объему вытесненной жидкости).

На камень действует сила тяжести, равная $m_к\vec{g}$, выталкивающая сила $\vec{F}_2$ воды и нормальная реакция опоры $\vec{N}$ (со стороны льдины). Так как камень находится в равновесии, то

$$F_2 + N - m_к g = 0 \qquad (3)$$

(при записи уравнения мы учли направления действующих сил). Как и в первом случае, силу тяжести и выталкивающую силу нужно выразить через плотности и объемы.

$$m_к = \varrho_к V_к; \quad F_2 = \varrho_в g V_к, \qquad (4)$$

где $m_к$ — искомая масса камня.

Исключая из уравнений (1) — (4) неизвестные величины F_1, $m_л$, F_2 и $V_к$, находим:

$$m_к = \frac{(\varrho_в - \varrho_л)\varrho_к hS}{\varrho_к - \varrho_в}; \quad m_к \approx 3{,}7 \text{ кг};$$

$$N = (\varrho_в - \varrho_л) ghS; \quad N \approx 19{,}6 \text{ Н}.$$

Пример 3. Прямой деревянный цилиндр плавает в воде так, что в нее погружена $n=0{,}9$ объема цилиндра. Какая часть цилиндра будет погружена в воду, если на воду налить слой масла, полностью закрывающий цилиндр? Плотность масла принять равной $\varrho_м=800$ кг/м^3.

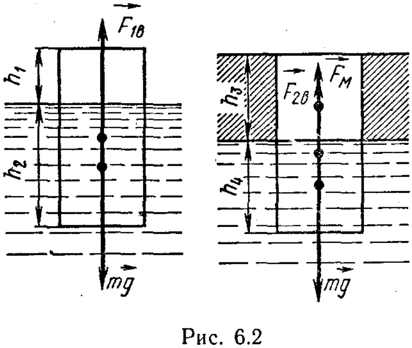

Рис. 6.2

Р е ш е н и е. Делаем чертеж (рис. 6.2), на котором изображаем два положения цилиндра: до и после того, как было налито масло. Обозначаем площадь цилиндра через S, высоты частей цилиндра, находящихся в воздухе и в воде (первый случай), через h_1 и h_2, в масле и воде (второй случай) — через h_3 и h_4. В первом случае на цилиндр действуют сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и выталкивающая сила со стороны воды $\vec{F}_{1в}$; во втором — сила тяжести, равная $m\vec{g}$, и выталкивающая сила со стороны воды $\vec{F}_{2в}$ и масла $\vec{F}_м$. (На тела, находящиеся частично в жидкости, частично в воздухе, действует выталкивающая сила воздуха. В большинстве случаев ею пренебрегают, так как она очень мала.)

В обоих случаях цилиндр находится в равновесии, поэтому

$$F_{1в} - mg = 0; \quad F_{2в} + F_м - mg = 0.$$

Учитывая, что

$$m = \rho_0 (h_1 + h_2) S, \quad F_{1в} = \rho_в g h_2 S,$$
$$F_{2в} = \rho_в g h_4 S, \quad F_м = \rho_м g h_3 S,$$

где ρ_0 и $\rho_в$ — соответственно плотность материала цилиндра и воды, записываем условия равновесия более подробно:

$$\rho_в h_2 - \rho_0 (h_1 + h_2) = 0 \text{ (после сокращения на } S \text{ и } g), \quad (1)$$
$$\rho_в h_4 + \rho_м h_3 - \rho_0 (h_1 + h_2) = 0. \quad (2)$$

Кроме того,

$$h_1 + h_2 = h_3 + h_4, \quad (3)$$

и по условию задачи

$$\frac{h_2}{h_1 + h_2} = n. \quad (4)$$

Из составленной системы уравнений надо определить отношение

$$x = \frac{h_4}{h_3 + h_4}. \quad (5)$$

Система уравнений (1) — (5) содержит шесть неизвестных величин: все высоты, ρ_0 и x. Такая система имеет определенное решение, если требуется найти не все неизвестные, а только некоторые из них или их отношение. Уравнения (1) — (4) позволяют сразу определить плотность дерева:

$$\rho_0 = \frac{h_2}{h_1 + h_2} \rho_в = \rho_в n.$$

Второе уравнение с учетом равенства (3) можно представить после несложных преобразований так:

$$\rho_в \frac{h_4}{h_3 + h_4} + \rho_м \frac{h_3}{h_3 + h_4} - \rho_0 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{h_4}{h_3 + h_4} = \frac{\varrho_0 - \varrho_м}{\varrho_в - \varrho_м},$$

или с учетом выражения для плотности дерева:

$$x = \frac{n\varrho_в - \varrho_м}{\varrho_в - \varrho_м} = 0{,}5.$$

Пример 4. Полый медный шар весит в воздухе $P = 2{,}6 \cdot 10^{-2}$ Н, в воде $T = 2{,}17 \cdot 10^{-2}$ Н. Определите объем внутренней полости шара. Плотность меди $\varrho_м = 8{,}8 \cdot 10^3$ кг/м³. Выталкивающей силой воздуха пренебречь.

Решение. При взвешивании шара в воде на него вниз действует сила тяжести, равная по модулю весу тела P в воздухе (так как выталкивающей силой воздуха можно пренебречь), вверх — сила натяжения $\vec{T}$ нити, на которой шар подвешен к динамометру (численно она равна весу тела в воде), и выталкивающая сила воды $\vec{F}_в$. Поскольку взвешиваемое тело находится в равновесии и все силы действуют по одной прямой, то должно быть:

$$F_в + T - P = 0.$$

Выразив $F_в$ через плотность воды $\varrho_в$ и объем погруженной части тела, равный объему тела V_0, получим:

$$\varrho_в g V_0 + T - P = 0. \quad (1$$

Объем полости $V_п$ равен объему всего тела V_0 без объема $V_м$, который занимает материал тела (в нашем примере медь):

$$V_п = V_0 - V_м, \quad \text{или} \quad V_п = V_0 - \frac{P}{\varrho_м g}. \quad (2)$$

Исключая из уравнений (1) и (2) объемы тел, находим объем полости:

$$V_п = \frac{P - T}{\varrho_в g} - \frac{P}{\varrho_м g}; \qquad V_п = 1{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3.$$

Пример 5. Тонкая палочка плотностью ϱ закреплена шарнирно на одном конце и опущена свободным концом в жидкость плотностью $\varrho_0 < \varrho$. Какая часть длины палочки будет находиться в жидкости при равновесии?

Решение. Палочка шарнирно закреплена одним концом и может совершать только вращательное движение. Следовательно, условием ее равновесия будет равенство нулю алгебраической суммы моментов всех действующих сил относительно оси, проходящей через шарнир.

Допустим, что палочка имеет длину l, при равновесии образует с горизонталью угол α и в жидкости находится ее часть длиной x (рис. 6.3).

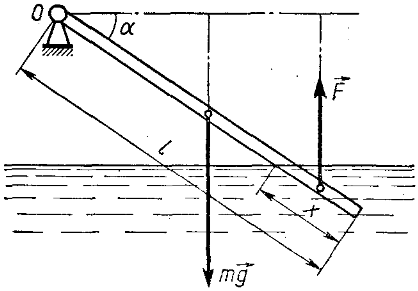

Рис. 6.3

Чтобы составить уравнение моментов, изобразим сначала внешние силы, действующие на палочку (все силы, кроме силы, действующей со стороны шарнира, так как ее момент относительно точки O равен нулю). Со стороны Земли на палочку действует сила тяжести, равная $m\vec g$, приложенная в середине палочки; со стороны жидкости — выталкивающая сила $\vec F$, приложенная в центре тяжести жидкости, находившейся на месте погруженной части тела, т. е. на расстоянии $x/2$ от свободного конца палочки.

Плечо силы $m\vec g$ относительно точки O равно $\frac{l}{2}\cos\alpha$, а плечо силы $\vec F$ равно $\left(l-\frac{x}{2}\right)\cos\alpha$ и условие равновесия — уравнение моментов относительно неподвижной оси вращения, проходящей через точку O, будет иметь вид:

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha - F\left(l-\frac{x}{2}\right)\cos\alpha = 0. \qquad (1)$$

Силы, входящие в уравнение моментов, не заданы, поэтому их нужно выразить через плотности и объемы тела и жидкости:

$$m = \varrho lS; \quad F = \varrho_0 gxS. \qquad (2)$$

По условию задачи требуется определить отношение x/l. Подставляя в уравнение (1) выражения для m и F, после простых преобразований получим:

$$\varrho_0\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\varrho_0\left(\frac{x}{l}\right) + \varrho = 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно искомого отношения, находим:

$$\frac{x}{l} = \frac{\varrho_0 - \sqrt{\varrho_0^2 - \varrho_0\varrho}}{\varrho_0}.$$

(Второй, больший корень уравнения, как нетрудно заметить, показывает, какая часть длины находится в воздухе, если под x подразумевать длину палочки над водой.)

Пример 6. Стальной цилиндр плотностью ϱ, диаметром d и высотой h опущен в воду на тонкой цепочке длиной l и массой m_1. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вынуть цилиндр из воды за цепочку?

Решение. Чтобы совершить минимальную работу при подъеме тела, к нему нужно приложить такую силу, которая увеличивала бы потенциальную энергию тела, не сообщая ему заметной скорости.

Для подъема цилиндра из воды необходимо совершить работу A_1 по подъему цепочки и работу A_2 по подъему самого цилиндра. В обоих случаях придется преодолевать только действие силы тяжести, поэтому вся совершенная работа равна:

$$A = A_1 + A_2. \qquad (1)$$

Чтобы нижнее основание цилиндра оказалось на уровне воды, цепочку надо поднять вверх на расстояние $l + h$. Так как по условию задачи цепочка тонкая, то выталкивающей силой воды, действующей на цепочку, можно пренебречь, и работа по подъему цепочки равна:

$$A_1 = m_1 g (l + h). \qquad (2)$$

При перемещении цилиндра на него, помимо силы тяжести, равной $m_2 g$, и натяжения, действует выталкивающая сила воды, направленная вверх и как бы уменьшающая силу тяжести. Пока цилиндр полностью находится в воде, выталкивающая сила постоянна, когда же цилиндр станет выходить из воды, выталкивающая сила начнет уменьшаться от максимального значения $F_в$ до нуля. Объем погруженной части цилиндрического тела пропорционален глубине погружения h, поэтому выталкивающая сила здесь меняется в зависимости от h по линейному закону, и, следовательно, ее работу можно найти по формуле

$$A' = F_{в ср} h = \frac{F_в h}{2}.$$

Учитывая это, всю работу A_2 по подъему цилиндра можно представить как работу по преодолению силы тяжести, равной $m_2 g$, на пути $l + h$ без работы постоянной выталкивающей силы на пути l (верхнее основание цилиндра доходит до поверхности воды) и работы переменной выталкивающей силы на перемещении, равном высоте цилиндра:

$$A_2 = m_2 g (l + h) - F_в l - F_в \frac{h}{2}, \qquad (3)$$

где

$$m_2 = \varrho \frac{\pi d^2}{4} h; \quad F_в = \varrho_0 g \frac{\pi d^2}{4} h. \qquad (4)$$

С учетом соотношений (2), (3) и (4) вся работа по подъему цилиндра будет равна:

$$A = m_1 g (l + h) + [l(\varrho - \varrho_0) + h(\varrho - 0{,}5\varrho_0)]\, g \frac{\pi d^2}{4} h.$$

Пример 7. В дне сосуда проделано отверстие сечением S_1. В сосуд налита вода до высоты h и уровень ее поддерживается постоянным. Определите площадь поперечного сечения струи, вытекающей из сосуда на расстоянии $3h$ от его дна. Считать, что

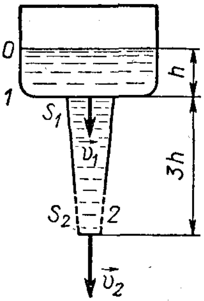

Рис. 6.4

струя не разбрызгивается, силами трения в жидкости пренебречь.

Р е ш е н и е. Решение этой задачи основано на применении закона постоянства потока жидкости и уравнения Бернулли.

Делаем чертеж к условию задачи (рис. 6.4) и отмечаем на нем сечения потока S_1, S_2 и скорости течения воды через эти сечения $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$.

Если не учитывать сжимаемости воды, можно считать, что за любые равные промежутки времени через сечения потока *1* и *2* проходит одинаковое количество жидкости. Согласно уравнению (6.3″) площади поперечного сечения потока S_1 и S_2 и модули скоростей жидкости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ должны быть связаны между собой соотношением

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \qquad (1)$$

Скорости слоев в потоке жидкости можно определить из закона Бернулли (6.5), представляющего собой выражение закона сохранения энергии для жидкости, заключенной в единичном объеме.

При составлении уравнения Бернулли нужно рассмотреть энергию единичного объема жидкости в каких-либо двух сечениях потока. Одно из этих сечений нужно взять на уровне *1*, второе — на уровне *2*, т. е. там, где нас интересуют скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Для определения потенциальной энергии, как всегда, устанавливаем уровень отсчета высоты. При сравнении энергий, которые имеет единичный объем жидкости, переходя из слоя *0* в слой *1*, уровень отсчета высоты берем на слое *1*, при сравнении энергий в слоях *0* и *2* — на слое *2*.

Находясь на уровне *0*, жидкость, заключенная в единичном объеме, имеет относительно уровня *1* только потенциальную энергию, равную ϱgh, так как по условию задачи скоростью жидкости на открытой поверхности можно пренебречь. Перейдя в сечение *1* эта жидкость будет иметь только кинетическую энергию $\varrho v_1^2/2$. Поскольку работа внешних сил в процессе перемещения жидкости равна нулю (внешними силами здесь являются силы атмосферного давления, действующие на жидкость сверху и снизу), то по закону Бернулли

$$\varrho gh = \frac{\varrho v_1^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad v_1 = \sqrt{2gh}. \qquad (2)$$

При переходе единичного объема жидкости с уровня *0* на уровень *2* ее потенциальная энергия $\varrho g4h$ полностью переходит в кинетическую $\varrho v_2^2/2$, и аналогично предыдущему мы получим:

$$\varrho g 4R = \frac{\varrho v_2^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad v_2 = \sqrt{8gh}. \qquad (3)$$

Исключая из уравнений (1) — (3) скорости и решая их относительно искомого сечения S_2 потока, получим:

$$S_2 = 0{,}5\ S_1.$$

Пример 8. Какова должна быть минимальная мощность насоса, поднимающего воду по трубе с сечением S на высоту $2h$, если КПД насоса равен η и ежесекундная подача воды равна Q?

Решение. За счет работы насоса увеличивается потенциальная и кинетическая энергия каждой единицы объема воды, перекачиваемой насосом. В результате вода заполняет трубу и приобретает такую скорость $\vec{v}$, что за время t из трубы вытекает вода массой m.

Предположим, что столб воды, заполняющий трубу, имеет массу m; рассмотрим два состояния системы: первое — до поступления воды в насос, второе — когда вода заполнит трубу. По закону сохранения энергии работа насоса

$$A = W_2 - W_1.$$

Для минимальной мощности с учетом КПД получим:

$$\eta N = \frac{W_2 - W_1}{t}.$$

Энергия системы в первом состоянии равна: $W_1 = 0$, во втором состоянии энергия равна сумме кинетической энергии всего столба воды и потенциальной энергии его центра тяжести:

$$W_2 = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Поэтому

$$\eta N = \frac{mv^2}{2t} + \frac{mgh}{t},$$

или

$$N = \frac{Q}{\eta}\left(\frac{v^2}{2} + gh\right),$$

где

$$Q = \frac{m}{t}.$$

Из формулы ежесекундного расхода воды $Q = \varrho S v$ находим значение v и, подставив его в выражение для N, получаем окончательно для мощности насоса:

$$N = \frac{Q}{\eta}\left(\frac{Q^2}{2\varrho^2 S^2} + gh\right).$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 6

6.1. Снаряд массой 8 кг вылетает из ствола орудия со скоростью 700 м/с. Определите давление пороховых газов во время выстрела, принимая движение снаряда внутри ствола за равноускоренное. Сила сопротивления движению снаряда равна 16,2 кН, длина нарезной части ствола 3 м, диаметр 77 мм.

6.2. В автомобиле укреплена канистра с бензином, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, грани которого перпендикулярны оси автомобиля и находятся на расстоянии 30 см друг от друга. Какова разность давлений бензина на эти грани во время разгона автомобиля, если он набирает скорость 65 км/ч за 1 мин? Плотность бензина 700 кг/м^3.

6.3. По каналу с радиусом закругления 30 м и шириной 3 м течет вода. Два манометра, находящиеся в одной горизонтальной плоскости у наружной и внутренней стенок канала, дают показания, отличающиеся на 400 Па. Чему равна скорость воды в канале?

6.4. Воздух из магдебургских полушарий откачан до давления 1,06 кПа. Радиус полушарий 0,5 м. Какую силу нужно приложить, чтобы разорвать полушария? Атмосферное давление 102 кПа.

6.5. В цилиндрический сосуд налиты ртуть и вода в равных по массе количествах. Общая высота двух слоев жидкости равна 29 см. Определите давление жидкости на дно сосуда. Изменится ли это давление, если в воду пустить деревянный шарик?

6.6. В резервуар с водой погружают закрытый цилиндрический сосуд, нижнее основание которого закрыто легкой пластинкой. Пластинка находится на глубине 50 см. Какой наибольший груз можно положить на пластинку внутри сосуда, чтобы пластинка не оторвалась? Давление воздуха в сосуде равно 33 кПа, площадь основания сосуда 100 см^2, атмосферное давление нормальное.

6.7. Вертикально расположенный цилиндр наполнен водой. Сверху в цилиндр вставлен поршень сечением S, в дно цилиндра впаяна короткая трубка сечением s. Трубка закрыта гладкой пробкой, соединенной нитью длиной l с поршнем. Чему равно натяжение нити? Каково будет натяжение нити, если цилиндр поставить в горизонтальное положение, закрепив пробку? Массой поршня и пробки пренебречь.

6.8. Поршень массой m представляет собой круглый диск радиусом R с отверстием, в которое вставлена тонкостенная трубка радиусом r. Поршень вплотную входит в стакан и вначале касается дна стакана. Пренебрегая трением, определите, на какую высоту поднимется поршень, если в трубку налить воду массой M. На сколько после этого сместится поршень, если сверху него налить масла массой m? Плотность воды ρ.

6.9. Воронка, имеющая форму конуса с радиусом основания R, стоит на столе. Края воронки плотно прилегают к столу, масса воронки m. Сколько воды нужно налить в воронку, чтобы она оторвалась от стола, если в момент отрыва высота уровня воды в воронке равна h?

6.10. К весам подвешена коническая барометрическая трубка длиной $L=1$ м, нижний конец которой погружен в ртуть на ничтожную глубину. Масса трубки $m=200$ г, радиус сечения нижнего конца трубки $r=0{,}56$ см, верхнего — $R=1{,}36$ см. Какой груз нужно положить на другую чашку весов, чтобы весы были в равновесии при атмосферном давлении $p_a=98$ кПа? Решите задачу при условии, что радиус сечения нижнего конца трубки равен R, а верхнего r.

6.11. Две трубки диаметром 4 см представляют собой сообщающиеся сосуды. В одно колено сосуда наливают 0,25 л воды, в другое — 0,25 л ртути. Какова будет разность уровней жидкостей в коленах? Объемом изогнутой части трубки пренебречь.

6.12. В двух цилиндрических сообщающихся сосудах, имеющих одинаковое поперечное сечение 11,5 см^2, находится ртуть. В один из сосудов поверх ртути наливают 1 л воды, в другой — 1 л масла. На какое расстояние переместится уровень ртути в сосудах? Каков будет ответ, если в воду опустить плавать тело массой 150 г? Плотность масла 0,8 г/см^3.

6.13. В стакан диаметром 5 см налита вода массой 313 г На сколько повысится уровень воды в стакане и чему будет равно давление на дно, если в стакан пустить сосновый кубик объемом 31,4 см^3? Атмосферное давление нормальное. Плотность сосны 0,5 г/см^3.

6.14. В один из сообщающихся сосудов налита вода плотностью ϱ_1, в другой — масло плотностью ϱ_2. На какое расстояние сместится граница раздела жидкостей в горизонтальной трубке, если на поверхность воды налить слой масла толщиной h? Площадь поперечного сечения сосудов в k раз больше площади поперечного сечения соединительной трубки.

6.15. Барометрическая трубка сечением 1 см^2 опущена в чашку со ртутью. Как изменится уровень ртути в чашке, если, не вынимая конца трубки из ртути, наклонить ее под углом 45° к вертикали? Диаметр чашки 6 см, атмосферное давление нормальное

6.16. Барометр, состоящий из барометрической трубки, опущенной открытым концом в чашку со ртутью, установлен в ракете и показывает давление 101 кПа. Каково будет показание барометра во время подъема ракеты вертикально с ускорением 1,2 м/с^2? во время ее спуска с тем же по модулю ускорением?

6.17. Сосуд, имеющий форму куба, до половины налит водой и движется в горизонтальном направлении с ускорением $\vec{a}$. Длина ребра куба l. Чему равно давление жидкости в точках, лежащих в воде в углах сосуда? Чему равна средняя сила давления, действующая на дно и стенки сосуда, перпендикулярные движению? Чему будут равны эти силы и давления, если сосуд будет подниматься (опускаться) с ускорением $\vec{a}$?

6.18. В трубку, имеющую вид перевернутой буквы П, налита жидкость. Какой станет разность уровней жидкости в трубке, если она начнет вращаться с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, расположенной на расстоянии x от оси левого колена? Длина горизонтальной части трубки l. Внутренний диаметр трубки считать малым по сравнению со всеми рассматриваемыми размерами.

6.19. *Цилиндрическая труба с поршнем погружена в воду.* Вначале поршень касается воды, а затем с малой скоростью поднимается до высоты 15 м. Площадь сечения трубы 10^{-2} м^2. Какую работу пришлось совершить, поднимая поршень при нормальном атмосферном давлении? Вес поршня, трение и давление паров воды не учитывать.

6.20. Плотность жидкости в n раз больше плотности материала тела. Какая часть объема тела будет выступать над поверхностью, если тело поместить в жидкость?

6.21. Однородное тело плавает на поверхности спирта так, что объем погруженной части составляет 0,92 всего объема V тела. Определите объем погруженной части при плавании этого тела на поверхности воды. Плотности спирта и воды равны соответственно 800 и 1000 кг/м^3.

6.22. Вес однородного тела в воде в n раз меньше, чем в воздухе. Чему равна плотность материала тела? Выталкивающей силой воздуха пренебречь.

6.23. Шарик на нити, уравновешенный на весах, опускают в воду. Когда шарик на 0,3 своего объема погрузился в воду, равновесие нарушилось и для его восстановления пришлось снять гирьки, масса которых составила $^1/_6$ часть массы шарика. Какова плотность материала шарика?

6.24. Что труднее удержать полностью погруженными в воду: кусок алюминия или кусок пробки, если они имеют одинаковую массу? Во сколько раз нужно изменить объем пробки по сравнению с первоначальным, чтобы оба тела можно было удержать в воде одинаковой силой? Плотность пробки 200 кг/м^3, алюминия $2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3.

6.25. Какой минимальный груз из свинца нужно подвесить к куску пробки массой 1 кг, чтобы пробка и груз полностью погрузились в воду? Чему будет равна при этом сила натяжения нити? Плотность свинца $1{,}13 \cdot 10^4$ кг/м^3, пробки 200 кг/м^3.

6.26. В цилиндрическом сосуде диаметром 50,0 см плавает льдинка объемом $1{,}2 \cdot 10^4$ см^3. В льдинку вмерз стальной шарик объемом 50 см^3. Плотность льда и стали равна соответственно 900 и $7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3. Какой объем льдинки выступает над водой? Как изменится уровень воды в сосуде, если лед растает?

6.27. В цилиндрическом сосуде высота налитой воды составляет $h_0=30$ см. Когда в сосуд опустили пустой стеклянный стакан так, чтобы он плавал, вода поднялась на $\Delta h = 2{,}2$ см. Чему будет равна высота столба воды в сосуде, если стакан утопить в воде? Плотность стекла $\varrho_{ст}=2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3.

6.28. Стальной шарик плавает в ртути. Какая часть объема шарика будет находиться в ртути, если поверх нее налить слой воды, полностью закрывающий шар? Плотность стали $7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность ртути $1{,}36 \times 10^4$ кг/м^3.

6.29. Дубовый цилиндр высотой 12 см плавает в стакане с водой. Как изменится уровень воды в стакане, если поверх воды налить слой керосина толщиной 2 см? Площадь поперечного сечения стакана в четыре раза больше площади поперечного сечения цилиндра. Плотность керосина и дуба равна 800 кг/м^3.

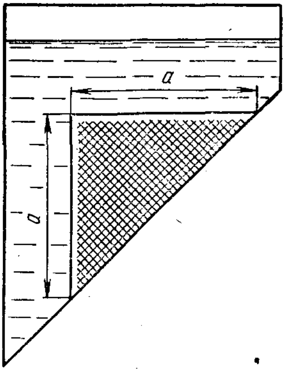

Рис. 6.5

6.30. На дне сосуда, показанного на рисунке 6.5, лежит клин, вырезанный из куба с ребром a. Верхняя грань клина находится на глубине $a/2$. В сосуд налита жидкость плотностью ϱ, которая под клин не подтекает. При каком значении плотности материала клина он будет находиться в равновесии, если коэффициент трения равен μ? Атмосферное давление p_0.

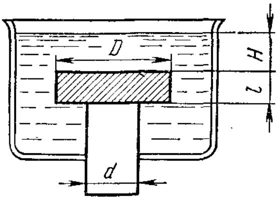

Рис. 6.6

6.31. В дно бака, наполненного водой, впаяна труба диаметром d, прикрытая сверху цилиндрической пластинкой диаметром D и толщиной l (рис. 6.6). Какова должна быть минимальная плотность материала пластинки, чтобы она не всплывала, если известно, что уровень воды в баке отстоит от верхнего основания пластинки на расстоянии H? Давление воздуха в трубе равно атмосферному.

6.32. На дне водоема глубиной H стоит бетонная конструкция, имеющая форму усеченного конуса высотой h. Площади оснований конуса S_1 и $S_2 < S_1$. Конструкция стоит на меньшем основании и вода под него не подходит. Какую силу нужно приложить к конструкции в вертикальном направлении, чтобы ее оторвать ото дна? Плотность бетона ϱ, воды ϱ_0, атмосферное давление p_0.

6.33. Однородный шар весит в воздухе P_1, а в воде — P_2. Чему равен вес шара в пустоте и какова его плотность? Плотности воздуха и воды соответственно равны ϱ_1 и ϱ_2.

6.34. Тело объемом $5 \cdot 10^{-4}$ м^3 при взвешивании в воздухе было уравновешено на весах медными гирями массой 0,44 кг. Определите массу тела. Плотность воздуха принять равной 1,29 кг/м^3, плотность меди $8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

6.35. Однородный стержень длиной l шарнирно закреплен своим нижним концом на глубине $h < l$ под свободной поверхностью жидкости. Плотность жидкости ϱ_0 больше плотности ϱ_1 стержня. Под каким углом к вертикали должен находиться стержень, чтобы его равновесие было устойчивым? При каком максимальном значении l стержень будет находиться в устойчивом равновесии в вертикальном положении?

6.36. Определите минимальный объем шара, наполненного водородом, который может поднять человека массой $m_1=70$ кг на высоту $H=100$ м за время $t=30$ с. Масса оболочки и корзины $m_2=20$ кг, плотность воздуха и водорода принять равными соответственно $\varrho_1=1{,}3$ кг/м^3 и $\varrho_2=0{,}1$ кг/м^3. Сопротивлением воздуха пренебречь.

6.37. В стакан радиусом R налита жидкость плотностью ϱ_0. На дне стакана у одной из стенок находится шарик радиусом $r \ll R$ и плотностью $\varrho_1 > \varrho_0$. С какой силой шарик будет давить на стенку стакана, если стакан будет вращаться с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси?

6.38. Ареометр массой m, имеющий площадь поперечного сечения S, плавает в растворе электролита плотностью ϱ. Ареометр погрузили еще немного и отпустили. С какой частотой ареометр будет совершать вертикальные колебания?

6.39. Однородный цилиндр длиной l плавает в вертикальном положении на границе двух несмешивающихся жидкостей и делится этой границей пополам. Плотности жидкостей ϱ_1 и ϱ_2. Пренебрегая трением, найдите период малых вертикальных колебаний цилиндра.

6.40. Пробковый шарик диаметром $2 \cdot 10^{-2}$ м погрузили в воду на глубину 1 м и отпустили. На какую высоту над поверхностью воды поднимется шарик и как глубоко он затем погрузится? Какова будет энергия шарика на предельной глубине, которую он достигнет? Трением шарика о воздух и воду пренебречь, поверхностное натяжение не учитывать. Плотность пробки 200 кг/м^3.

6.41. Палочка длиной $2l$ и плотностью ϱ_1 погружена в вертикальном положении в жидкость плотностью $\varrho_2 > \varrho_1$. Верхний конец палочки находится на расстоянии l от поверхности жидкости. На какую максимальную высоту от уровня жидкости поднимется палочка, если ее отпустить? Рассмотрите все возможные варианты.

6.42. В стакане сечением $S=27$ см^2 плавает сосновый кубик объемом $V=27$ см^3. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы кубик полностью погрузить в воду? Плотность сосны $\varrho=0{,}5$ г/см^3.

6.43. С какой скоростью понижается уровень воды в баке с площадью поперечного сечения 1 м^2, если скорость истечения воды через отверстие диаметром 2 см, просверленное в баке, равна 2 м/с?

6.44. Из брандспойта бьет струя воды под углом 30° к горизонту и падает от него на расстоянии 5 м. Сколько воды подает брандспойт за 10 с, если площадь его отверстия равна 2 см^2? Сопротивление воздуха не учитывать.

6.45. Огнетушитель выбрасывает ежесекундно 0,2 кг пены со скоростью 20 м/с. Какую силу нужно приложить к огнетушителю, чтобы удержать его неподвижно в вертикальном положении в начальный момент работы? Масса полного огнетушителя 2 кг.

6.46. Через трубу, изогнутую под прямым углом, за время t протекает вода массой m. Площадь поперечного сечения трубы S. Чему равна сила бокового давления в месте закругления трубы, если труба расположена в горизонтальной плоскости?

6.47. Какой мощностью обладает воздушный поток, набегающий на автомобиль «Волга», при скорости движения 100 км/ч, если площадь лобовой поверхности машины равна примерно 2,5 м^2? Плотность воздуха 1,3 кг/м^3.

6.48. Балластный резервуар подводной лодки объемом $V=5$ м^3 заполнен водой. Для сброса балласта в верхнюю часть резервуара подается воздух от компрессора, и вода через трубу сечением $S=100$ см^2, расположенную в нижней части резервуара, вытекает наружу. Какова должна быть минимальная мощность компрессора, чтобы лодка на глубине $H=100$ м могла полностью освободиться от балласта за время $t=50$ с? Атмосферное давление нормальное.

6.49. Чему равна полезная мощность водяного двигателя, КПД которого равен 80%, если известно, что вода поступает в него со скоростью 3 м/с, а оставляет его со скоростью 1 м/с на уровне, находящемся на 1,5 м ниже уровня входа? Секундный расход воды равен 0,3 м^3/с.

6.50. В широкий сосуд налита вода до высоты H. На поверхность воды налит слой масла плотностью ϱ_2 и высотой h. С какой скоростью вода начнет вытекать из сосуда, если на дне его образуется отверстие? Понижением уровня воды в баке пренебречь. Плотность воды ϱ_1.

6.51. На столе стоит цилиндрический сосуд высотой h, наполненный водой. На каком расстоянии от дна сосуда нужно сделать отверстие, чтобы струя из него падала на поверхность стола на максимальном расстоянии от сосуда? Чему равно это расстояние? Каков будет при этом опрокидывающий момент, действующий на цилиндр, если площадь отверстия равна S?

6.52. Две открытые манометрические трубки установлены на горизонтальной трубе переменного сечения. Одна трубка находится в том месте, где сечение трубы равно S_1, вторая — где сечение $S_2>S_1$. По трубе течет вода, и разность уровней воды в манометрических трубках равна h. Сколько воды ежесекундно проходит через сечение трубы?

6.53. Из крана выливается вода. Начиная с некоторого места диаметр струи уменьшается на протяжении 3 см с 3 до 2 см. Сколько воды можно налить из крана за 60 с?

ЧАСТЬ II

ТЕРМОДИНАМИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

Глава 7

ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Все тела состоят из атомов и молекул, находящихся в непрерывном беспорядочном движении. Хаотическое движение молекул тела называют тепловым движением. Каждая молекула вещества обладает кинетической и потенциальной энергией, поэтому всякое тело наряду с механической энергией направленного движения частиц обладает внутренней энергией.

В молекулярной физике под внутренней энергией подразумевают часть ее: кинетическую энергию хаотического движения микрочастиц (молекул, атомов, ионов, свободных электронов) и потенциальную энергию их взаимодействия друг с другом:

$$U = W_k + W_p = \sum m_i \frac{v_i^2}{2} + W_p.$$

Все другие виды внутренней энергии тела (энергия электромагнитного излучения, электронных оболочек, внутриядерная) считаются неизменными и не влияющими на рассматриваемые процессы.

Изменение внутренней энергии и передача ее от одного тела к другому происходит в процессе взаимодействия тел. Есть два способа, две формы такого взаимодействия. При первом способе внутренняя энергия одного тела изменяется за счет изменения энергии упорядоченного (механического) движения частиц другого тела (механической работы, электризации, перемагничивания, облучения). Мерой изменения энергии упорядоченного движения частиц вещества в процессе макроскопического взаимодействия тел служит работа A.

Во втором случае изменение внутренней энергии происходит вследствие соударения хаотически движущихся молекул соприкасающихся тел.

Процесс изменения внутренней энергии тела, обусловленный передачей теплового движения молекул без совершения работы внешней средой, называют тепловым процессом или процессом теплопередачи.

Мерой взаимодействия тел, приводящего к изменению энергии хаотического движения и взаимодействия молекул (мерой энергии хаотического движения, переданной от одного тела к другому в процессе теплообмена), служит величина Q, называемая количеством теплоты.

2. Количество теплоты, подведенное к телу (системе тел), идет в общем случае на изменение внутренней энергии тела и на совершение телом работы над внешними телами (первое начало термодинамики — закон сохранения и превращения энергии с учетом тепловых явлений):

$$Q = \Delta U + A. \tag{7.1}$$

Количество теплоты Q, сообщенное телу, считают при этом положительным, отданное телом — отрицательным. Работу считают положительной, если тело за счет своей внутренней энергии совершает работу над внешней средой, и отрицательной, если работа совершается над телом и за счет работы увеличивается внутренняя энергия.

Количество теплоты и работа являются мерами изменения внутренней энергии, количество теплоты — в процессе теплопередачи, работа — в процессе превращения механической энергии во внутреннюю.

3. Если при подведении к телу количества теплоты Q температура тела повышается на Δt, то теплоемкость тела в рассматриваемом процессе равна:

$$C = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{A}{\Delta t}. \tag{7.2}$$

Удельная теплоемкость тела массой m:

$$c = \frac{Q}{m\Delta t}.$$

Если суммарная кинетическая энергия теплового движения молекул изменяется при неизменной потенциальной энергии, то изменение внутренней энергии тела массой m равно:

$$\Delta U = c_V m \Delta t, \quad \text{или} \quad \Delta U = C_V \Delta t, \tag{7.3$'$}$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ — изменение температуры тела; c_V — удельная теплоемкость и C_V — теплоемкость тела, взятые при постоянном объеме ($A = 0$).

4. Тела могут находиться в одном из трех агрегатных состояний — твердом, жидком и газообразном — и при определенных условиях могут переходить из одного состояния в другое. Эти превращения происходят или в процессе теплообмена тела с окружающими телами, или вследствие перераспределения внутренней энергии в самом теле.

а) При плавлении кристаллических тел за счет энергии, подводимой к телу (при $A = 0$), потенциальная энергия атомов или молекул вещества, имеющего массу m, возрастает на величину

$$\Delta U = Q = \lambda m, \tag{7.4}$$

где λ — удельная теплота плавления.

В процессе кристаллизации потенциальная энергия уменьшается на такую же величину, и соответствующее количество теплоты отводится к окружающим телам. Кинетическая энергия атомов при этом почти не меняется.

б) Если при испарении жидкости образуется пар массой m, то потенциальная энергия молекул пара увеличивается, а кинетическая энергия молекул, остающихся в жидкости, уменьшается на величину

$$\Delta U = rm, \tag{7.5}$$

где r — удельная теплота парообразования. Внутренняя энергия системы пар — жидкость при этом остается неизменной. Если процессу испарения сопутствует теплообмен с окружающей средой, в результате которого температура жидкости остается постоянной, то количество подводимой к ней теплоты определяется той же формулой (7.5).

При образовании пара массой m в процессе кипения жидкости потенциальная энергия молекул возрастает на величину

$$\Delta U = r_{к} m,$$

где $r_{к}$ — удельная теплота кипения, являющаяся частным значением удельной теплоты парообразования жидкости для температуры кипения. Внутренняя энергия системы в процессе кипения (при $A = 0$) увеличивается за счет сообщаемого жидкости соответствующего количества теплоты извне.

в) В процессе химического соединения у ряда веществ перестраивается структура молекул, в результате чего резко увеличивается их кинетическая энергия. Такие процессы называют процессами горения, а участвующие в них тела — топливом и окислителем.

При полном сгорании топлива массой m внутренняя энергия теплового движения молекул возрастает на величину

$$\Delta U = Q = qm, \tag{7.6}$$

где q — удельная теплота сгорания топлива при данном окислителе.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Решение задач этой главы основано на уравнении закона сохранения и превращения энергии с учетом формул изменения внутренней энергии тел и некоторых уравнений механики. Умение правильно применять закон сохранения энергии к конкретным

физическим процессам представляет основную трудность при решении задач на тепловые явления. Особое внимание здесь нужно обратить на различие между количеством теплоты и изменением внутренней энергии и на выбор системы тел (или тела), для которой составляется основное уравнение. Нередко возникают затруднения при числовых расчетах в задачах, связанных с превращением одного вида энергии в другой. Здесь нужно помнить, что в уравнении (7.1) закона сохранения и превращения энергии все три величины Q, ΔU и A должны быть выражены в одних единицах.

2. Задачи об изменении внутренней энергии тел можно разделить на три группы. В задачах первой группы рассматривают такие явления, где в изолированной системе при взаимодействии тел изменяется лишь их внутренняя энергия без совершения работы над внешней средой. Одни из тел, участвующих в теплообмене, при этом охлаждаются, другие — нагреваются. Согласно закону сохранения и превращения энергии (7.1) для тел, внутренняя энергия которых уменьшается, можно записать:

$$Q_{\text{отд}} = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \ldots + \Delta U_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i, \tag{7.7}$$

так как ни самими телами, ни над телами работа не совершается.

Аналогично для тел, энергия которых возрастает, будем иметь:

$$Q_{\text{получ}} = \Delta U'_1 + \Delta U'_2 + \ldots + \Delta U'_m = \sum_{k=1}^{m} \Delta U'_k. \tag{7.7$'$}$$

Из определения понятия количества теплоты и закона сохранения энергии как следствие вытекает:

$$Q_{\text{отд}} = Q_{\text{получ}} \qquad \text{или} \qquad \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i = \sum_{k=1}^{m} \Delta U'_k. \tag{7.8}$$

Перенеся все члены в левую часть равенства, уравнение (7.8) представим в ином виде:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta U_i - \sum_{k=1}^{m} \Delta U'_k = 0,$$

или короче:

$$\sum \Delta U = 0. \tag{7.8$'$}$$

Последнее уравнение является очевидным следствием первого начала термодинамики — в изолированной системе тел, где происходят только процессы теплопередачи, внутренняя энергия системы не изменяется и, следовательно, алгебраическая сумма изменений энергии отдельных тел равна нулю.

Уравнение (7.8) называют уравнением теплового баланса, оно обычно служит основным расчетным соотношением для всех задач первой группы.

Правила их решения состоят в следующем:

а) Прочитав условие задачи, нужно установить, у каких тел внутренняя энергия уменьшается, у каких — возрастает. Особое внимание следует обращать на то, происходят ли в процессе теплообмена агрегатные превращения или нет.

б) Составить уравнение (7.7) для тел, энергия которых уменьшается, (7.7′) — для тел, энергия которых возрастает, и приравнять полученные суммы.

При записи уравнения теплового баланса в виде (7.8) нужно в выражении $cm(t_2 - t_1)$ для изменения внутренней энергии всегда вычитать из большей температуры тела меньшую и суммировать все члены арифметически, если же уравнение записывается в виде (7.8′), необходимо вычитать из конечной температуры тела начальную и суммировать члены с учетом получающегося знака.

В ряде задач задается КПД теплообмена; в этом случае его всегда нужно ставить сомножителем перед $Q_{отд}$.

Во всех задачах на теплообмен, где нет специальных оговорок, предполагается, что теплопроводность всех взаимодействующих тел бесконечно большая и поэтому передача энергии от одного тела к другому происходит мгновенно.

При определенном навыке можно составлять уравнение (7.8) или (7.8′) теплового баланса сразу, не прибегая к промежуточным выкладкам. Практически при решении задач удобнее пользоваться первым из этих уравнений.

3. В задачах второй группы рассматривают явления, связанные с превращением одного вида энергии в другой при взаимодействии двух тел. Результат такого взаимодействия — изменение внутренней энергии одного тела вследствие совершенной им или над ним работы. Теплообмен между телами здесь, как правило, не учитывают.

Уравнение закона сохранения и превращения энергии в этом случае имеет вид:

$$0 = \Delta U + A. \qquad (7.9)$$

Решение таких задач удобно проводить по следующей схеме.

а) Анализируя условие задачи, нужно прежде всего установить, у какого из двух взаимодействующих тел изменяется внутренняя энергия и что является причиной этого изменения — работа, совершенная самим телом, или работа, совершенная над телом. Кроме того, следует убедиться, что в процессе взаимодействия тел теплота извне к ним не подводится, т. е. действительно ли $Q = 0$.

б) Записать уравнение (7.9) для тела, у которого изменяется внутренняя энергия, учтя знак перед A и КПД η рассматриваемого процесса. При записи уравнения (7.9) с учетом КПД удобно поступать так. Если по смыслу задачи работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии одного из тел и по каким-либо причинам лишь часть ее идет на совершение работы A, то

$$A = \eta \Delta U. \qquad (7.9')$$

Если же из условия видно, что внутренняя энергия тела увеличивается за счет работы, совершенной над телом, и по каким-либо причинам лишь часть ее идет на увеличение U, то

$$\eta A = \Delta U. \qquad (7.9'')$$

в) Составив уравнение (7.9), нужно найти выражение для A и ΔU.

Для A возможно одно из следующих соотношений:

$$A = Fs;$$
$$A = N\tau;$$
$$A = W_2 - W_1.$$

Для ΔU чаще всего достаточно использовать одну из формул:

$\Delta U = qm$ (сжигание топлива);
$\Delta U = cm\Delta t + \lambda m$ (нагревание и плавление тела);
$\Delta U = cm\Delta t + rm$ (нагревание и испарение).

Подставляя в исходное уравнение вместо A и ΔU их выражения, получим окончательное соотношение для определения искомой величины. Если в условиях задачи даются дополнительные условия, то к основному уравнению следует, как обычно, добавить вспомогательное.

г) Далее нужно выписать числовые значения известных величин, проверить число неизвестных в уравнениях и решать систему уравнений относительно искомой величины.

4. Задачи третьей группы объединяют в себе две предыдущие. В этих задачах рассматривают взаимодействие трех и более тел. В процессе такого взаимодействия к одному из тел подводится некоторое количество теплоты Q, в результате чего изменяется его внутренняя энергия и совершается работа.

Для решения этих задач надо составить полное уравнение закона сохранения и превращения энергии (7.1). Составление такого уравнения включает в себя приемы, описанные в п. 2 и 3.

Пример 1. В закрытом медном калориметре массой $m_м = 0{,}2$ кг находится лед массой $m_л = 1$ кг при температуре $t_л = -10°$С. В калориметр впускают пар массой $m_п = 0{,}2$ кг, имеющий температуру $t_п = 110°$С. Какая температура установится в калориметре? Удельную теплоемкость паров воды в интервале от 100 до 110°С считать равной $c_п = 1{,}7$ кДж/(кг · К). Удельная теплота парообразования воды при 100°С равна $r = 2{,}1$ МДж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}34$ МДж/кг.

Решение. Примем систему пар — лед — калориметр за изолированную и будем считать, что с окружающей средой ее теплообмен ничтожно мал и им можно пренебречь. В такой системе внутренняя энергия остается неизменной, поскольку $Q = 0$ и $A = 0$.

Основным уравнением, описывающим процесс теплового взаимодействия между телами системы, здесь является уравнение теплового баланса с учетом агрегатных превращений. В данном примере $m_{п}r \gg m_{л}\lambda$, поэтому можно предположить, что при установившейся температуре в калориметре будет находиться вода при температуре, большей $0°C$.

При тепловом взаимодействии со льдом и калориметром внутренняя энергия пара уменьшается: при охлаждении от начальной температуры $t_{п}$ до температуры конденсации $t_{к} = 100°C$ на величину $c_{п}m_{п}(t_{п} - t_{к})$, при конденсации пара в воду на величину $rm_{п}$, при дальнейшем охлаждении образовавшейся воды от температуры $t_{к}$ до окончательно установившейся температуры θ на величину $c_{в}m_{п}(t_{к} - \theta)$. В результате внутренняя энергия горячего тела — пара уменьшится на

$$\Delta U_1 = c_{п}m_{п}(t_{п} - t_{к}) + rm_{п} + c_{в}m_{п}(t_{к} - \theta) = Q_{отд}.$$

За счет этой энергии калориметр нагревается от начальной температуры, равной температуре льда $t_{л}$, до окончательной θ; его внутренняя энергия увеличивается на величину $c_{м}m_{м}(\theta - t_{л})$. Кроме того, часть энергии пара переходит ко льду. Энергия молекул льда возрастает: при нагревании от начальной температуры $t_{л}$ до температуры плавления $t_0 = 0°C$ на величину $c_{л}m_{л}(t_0 - t_{л})$, в процессе плавления на величину $\lambda m_{л}$ и при дальнейшем нагревании образовавшейся воды на величину $c_{в}m_{л}(\theta - t_0)$.

В результате внутренняя энергия холодных тел возрастает на

$$\Delta U_2 = c_{м}m_{м}(\theta - t_{л}) + c_{л}m_{л}(t_0 - t_{л}) + \lambda m_{л} + c_{в}m_{л}(\theta - t_0) = Q_{получ}.$$

Так как $\Delta U_1 = \Delta U_2$, то уравнение теплового баланса для данного процесса будет иметь вид:

$$c_{п}m_{п}(t_{п} - t_{к}) + rm_{п} + c_{в}m_{п}(t_{к} - \theta) = c_{м}m_{м}(\theta - t_{л}) + c_{л}m_{п}(t_0 - t_{л}) + \lambda m_{л} + c_{в}m_{л}(\theta - t_0).$$

Решая это уравнение относительно θ и подставляя числовые данные, находим:

$$\theta = \frac{c_{п}m_{п}(t_{п} - t_{к}) + rm_{п} + c_{в}m_{п}t_{к} + c_{м}m_{м}t_{л} + c_{в}m_{л}t_0 - c_{л}m_{л}(t_0 - t_{л}) - \lambda m_{л}}{c_{в}(m_{п} + m_{л}) + c_{м}m_{м}};$$

$$\theta \approx 37°C.$$

Анализируя полученное выражение, можно заметить, что при достаточно большой массе пара $m_{п}$ температура θ может оказаться больше начальной температуры пара $t_{п}$, чего в действительности быть не может. Такой результат объясняется тем, что после теплообмена при установившейся температуре одновременно могут существовать две фазы вещества: жидкость и пар, если при охлаждении пар не полностью конденсируется в воду. Точно так же и при достаточно большой массе льда равновесные состояния системы могут быть самыми различными и наше решение окажется неверным. При агрегатных превращениях вещества уравнение теплового баланса в общем случае нельзя записать в общем виде, так как вид его будет зависеть от числовых значений заданных величин. Чтобы не делать лишних вычислений, во всех сомнительных случаях, когда заранее невозможно сказать, окажется ли вещество в одном или двух агрегатных состояниях, рекомендуется сделать предварительную числовую прикидку — найти, какое количество теплоты Q_1 требуется для нагревания холодного тела до температуры соответствующего превращения (плавления или кипения) и сколько теплоты Q_2 может отдать горячее тело при остывании или при полной конденсации (кристаллизации). Если окажется, что $Q_1 > Q_2$, то после перераспределения энергии получится одна фаза вещества, если же будет $Q_1 < Q_2$, то при установившейся температуре вещество будет находиться в двух фазах — в виде пара и жидкости (жидкости и льда).

Установив на основании числовой прикидки, что получится в результате теплообмена, можно составить окончательное уравнение теплового баланса, из которого определяется искомая величина.

Пример 2. При соблюдении необходимых предосторожностей вода может быть переохлаждена до температуры $t_1 = -10°C$. Сколько льда образуется из такой воды массой $m_0 = 1$ кг, если в нее бросить кусочек льда и этим вызвать замерзание воды? Какую температуру должна иметь переохлажденная вода, чтобы она целиком превратилась в лед? Удельная теплоемкость переохлажденной воды $c_в = 4{,}19$ кДж/(кг·К), льда $c_л = 2{,}1$ кДж/ /(кг·К). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг.

Решение. Чтобы вода замерзла при охлаждении, в ней должны находиться неоднородные включения — центры кристаллизации, около которых начинается рост кристалликов льда. При отсутствии центров кристаллизации воду можно охладить до температуры значительно ниже 0°C. Такая вода называется переохлажденной.

Если в переохлажденной воде искусственно создать центры кристаллизации, в ней начнет образовываться лед. Молекулы станут переходить в состояние, соответствующее минимуму их потенциальной энергии. Уменьшение потенциальной энергии одной части молекул воды, образующих лед, вызывает увеличение теплового движения остальных молекул, которое регистрируется нами как нагревание воды. По условию задачи можно пренебречь взаимодействием переохлажденной воды с окружающей средой, поэтому в результате частичной кристаллизации воды в ней произойдет только перераспределение энергии. Полная внутренняя энергия останется неизменной, и, следовательно, уменьшение потенциальной энергии части молекул приведет к соответствующему увеличению кинетической энергии хаотического движения — повышению температуры системы.

Задача сводится к составлению уравнения теплового баланса при условии, что $Q = 0$, $A = 0$ с учетом агрегатного превращения.

При образовании из переохлажденной воды льда массой m_2 потенциальная энергия молекул уменьшится на величину

$$\Delta U_1 = \lambda m_2.$$

Эта энергия частично пойдет на нагревание образовавшегося льда от начальной температуры t_1 до температуры $t_0 = 0°C$ и частично на нагревание оставшейся после кристаллизации воды массой m_1 на $t_0 - t_1$ (дальнейшее нагревание невозможно, так как при 0°C кристаллизация воды прекратится). Таким образом, вследствие нагревания внутренняя энергия теплового движения молекул увеличится на

$$\Delta U_2 = c_л m_2 (t_0 - t_1) + c_в m_1 (t_0 - t_1).$$

По закону сохранения энергии $\Delta U_1 = \Delta U_2$, поэтому уравнение теплового баланса будет иметь вид:

$$\lambda m_2 = c_л m_2 (t_0 - t_1) + c_в m_1 (t_0 - t_1). \quad (1)$$

Кроме того,

$$m_1 + m_2 = m_0. \quad (2)$$

Из соотношений (1) — (2) находим массу образовавшегося льда:

$$m_2 = \frac{c_в (t_0 - t_1)}{\lambda + (c_в - c_л)(t_0 - t_1)} m_0;$$

$$m_2 \approx 0,12 \text{ кг}.$$

Чтобы замерзла вся переохлажденная вода, энергия, выделившаяся при кристаллизации, должна полностью пойти на нагревание образовавшегося льда, т. е.

$$\lambda m_0 = c_л m_0 (t_0 - t_x), \quad (3)$$

где t_x — начальная температура переохлажденной воды.

Из последнего уравнения находим:

$$t_x = -\frac{\lambda}{c_л}; \quad t_x = -160°C.$$

Пример 3. В колбе находилась вода при $t = 0°C$. Выкачиванием из колбы воздуха заморозили всю воду в сосуде. Какая часть воды при этом испарилась, если колба была теплоизолирована? Удельная теплота испарения воды при 0°C $r = 2,5$ МДж/кг. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33$ МДж/кг.

Р е ш е н и е. При испарении воды вылетают наиболее быстрые молекулы, вследствие чего потенциальная энергия этих молекул увеличивается, суммарная кинетическая энергия оставшихся молекул уменьшается и температура воды понижается. Если из сосуда, в котором происходит испарение, откачивать пары воды и свести до минимума теплообмен с окружающей средой, то кинетическая энергия оставшихся молекул может уменьшиться на столько, что они смогут образовать твердую фазу воды — лед. Поскольку в данном процессе энергия извне не подводится ($Q=0$) и работа не совершается ($A=0$), внутренняя энергия всей системы остается постоянной, изменение потенциальной энергии вылетающих молекул воды ΔU_1 равно изменению потенциальной энергии ΔU_2 оставшихся, так как температура системы не изменяется.

При образовании пара массой m_1 потенциальная энергия молекул пара возрастает на величину

$$\Delta U_1 = rm_1.$$

При образовании льда массой m_2 потенциальная энергия молекул воды уменьшается на

$$\Delta U_2 = \lambda m_2.$$

Поскольку $\Delta U_1 = \Delta U_2$, то

$$rm_1 = \lambda m_2, \qquad (1)$$

причем

$$m_1 + m_2 = m_0. \qquad (2)$$

По условию задачи нам нужно определить отношение

$$x = m_1/m_0.$$

Из соотношений (1) — (2) находим:

$$x = \frac{\lambda}{\lambda + r}; \qquad x \approx 11{,}7\%.$$

Пример 4. В дьюаровском сосуде, содержащем жидкий азот при температуре $t_а = -195°C$, за время $\tau_1 = 24$ ч испаряется азот объемом $V_1 = 10^{-3}$ м^3 при температуре окружающего воздуха $t_в = 20°C$. Определите удельную теплоту парообразования азота, если известно, что при температуре $t_л = 0°C$ в том же сосуде за время $\tau = 22{,}5$ ч тает лед массой $m_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг. Считать, что количество теплоты, подводимое ежесекундно к сосуду, пропорционально разности температур снаружи и внутри сосуда. Плотность жидкого азота $\varrho_1 = 800$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг.

Р е ш е н и е. Вследствие того что дьюаровский сосуд не является идеальным теплоизолятором, между телами, находящимися в сосуде, и окружающей средой происходит теплообмен. Так как работа при этом не совершается, то основным уравнением, описывающим процесс теплопередачи при испарении азота и плавлении льда, служит уравнение теплового баланса

$$Q = \Delta U.$$

В результате теплообмена хранящиеся в сосуде холодные тела нагреваются и могут переходить из одного агрегатного состояния в другое. За счет энергии, подводимой извне, увеличивается внутренняя энергия этих тел, причем согласно условию задачи

$$\frac{Q}{\tau}=k(t_2-t_1),$$

где τ — время, в течение которого к сосуду подводится количество теплоты Q; k — коэффициент пропорциональности, зависящий от устройства и материала сосуда; t_2-t_1 — разность температур снаружи и внутри сосуда.

К жидкому азоту за время τ_1 подводится количество теплоты, равное

$$Q_1=k(t_а-t_в)\tau_1.$$

За счет этого количества теплоты внутренняя энергия азота возрастает на величину

$$\Delta U_1=rm_1,$$

где m_1 — масса испарившегося азота; r — удельная теплота парообразования.

Согласно закону сохранения и превращения энергии

$$Q_1=\Delta U_1, \quad \text{или} \quad k(t_а-t_в)\tau_1=rm_1. \qquad (1)$$

Проводя аналогичные рассуждения для льда, получим:

$$k(t_л-t_в)\tau_2=\lambda m_2. \qquad (2)$$

Дополнительные условия позволяют записать:

$$m_1=\varrho_1 V_1. \qquad (3)$$

Исключая из уравнений (1) — (3) неизвестные k и m_1, находим:

$$r=\frac{m_2(t_а-t_в)\tau_1}{\varrho_1 V_1(t_л-t_в)\tau_2}\lambda; \quad r\approx 0{,}19 \text{ МДж/кг}.$$

Пример 5. Лед массой $M=1$ кг при температуре 0°С заключен в теплонепроницаемый сосуд и подвергнут давлению $p=6{,}9\cdot 10^7$ Па. Сколько льда расплавится, если при увеличении давления на $\Delta p=3{,}8\cdot 10^7$ Па температура плавления льда понижается на $\Delta t=1$°С? Понижение температуры плавления от 0°С считать пропорциональным увеличению давления сверх атмосферного.

Решение. Если лед подвергнут давлению больше атмосферного, температура его плавления понизится и такой лед, находясь при $t_{0п}=0$°С, плавится, заимствуя энергию из окружающей среды.

При достаточной теплоизоляции льда средой, отдающей эту энергию, служит сам лед. Работа, совершаемая внешними силами, идет в этом случае на перераспределение энергии между молекулами воды. Часть исходного количества льда растает, часть охладится до новой температуры плавления $t_{1п}$, и система придет в равновесное состояние.

При отсутствии тепловых потерь количество теплоты, выделенной при охлаждении нерастаявшего льда от 0°С до температуры плавления $t_{1п}$, равно количеству теплоты, пошедшей на его частичное плавление:

$$Q_{отд} = Q_{получ}, \quad \text{или} \quad \Delta U_1 = \Delta U_2.$$

Температура плавления $t_{1п}$ при давлении $p > p_{атм}$ определяется из условия, что ее понижение $t_{0п} - t_{1п}$ пропорционально увеличению давления $p - p_{атм}$, т. е.

$$t_{0п} - t_{1п} = k(p - p_{атм}), \qquad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств вещества.

Вместе с уравнением теплового баланса это уравнение является основным соотношением для решения данной задачи.

При сжатии льда и понижении температуры плавления от $t_{0п}$ до $t_{1п}$ внутренняя энергия теплового движения молекул льда массой M уменьшится на

$$\Delta U_1 = cM(t_{0п} - t_{1п}) = Q_{отд},$$

где c — удельная теплоемкость льда.

Так как система изолирована, то вся энергия, выделяющаяся при сжатии, идет на плавление льда массой m:

$$\Delta U_2 = \lambda m = Q_{получ}.$$

Согласно закону сохранения энергии

$$cM(t_{0п} - t_{1п}) = \lambda m. \qquad (2)$$

Кроме того, дополнительное условие позволяет записать:

$$\Delta t = k \Delta p. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1) — (3) совместно относительно m и подставляя числовые значения, получим:

$$m = \frac{c\Delta t(p - p_{атм})}{\lambda \Delta p} M; \quad m \approx 11{,}3 \text{ г}.$$

Пример 6. Некоторая установка, развивающая мощность $N = 30$ кВт, охлаждается проточной водой, текущей по спиральной трубке сечением $S = 1$ см^2. При установившемся режиме проточная вода нагревается на $\Delta t = 15$°С. Определите скорость воды v, предполагая, что на нагревание воды идет $\eta = 0{,}3$ мощности, развиваемой установкой.

Решение. В процессе работы установки часть механической энергии расходуется на нагревание проточной воды, охлаждающей установку. Так как теплообмен с окружающей средой не учитывается ($Q=0$), то указанная часть мощности установки идет на увеличение внутренней энергии воды, и согласно закону сохранения и превращения энергии должно быть:

$$0=\Delta U-\eta A, \quad \text{или} \quad \eta A=\Delta U.$$

Если за время τ в трубках нагревается вода массой m на Δt, то работа, совершенная за это время (при мощности N), и изменение внутренней энергии воды будут равны соответственно:

$$A=N\tau$$

и

$$\Delta U=cm\Delta t,$$

где c — удельная теплоемкость воды.

Подставляя выражения для A и ΔU в исходное уравнение энергетического баланса, получим:

$$\eta N\tau=cm\Delta t.$$

При течении воды по трубе сечением S масса воды m, прошедшей через это сечение за время τ, равна:

$$m=\varrho S v\tau,$$

где ϱ — плотность воды; v — скорость течения.

С учетом этого выражения уравнение закона сохранения и превращения энергии в окончательном виде можно записать так:

$$\eta N=c\varrho Sv\Delta t,$$

откуда искомая скорость воды равна:

$$v=\frac{\eta N}{c\varrho S\Delta t}; \quad v=4{,}8 \text{ м/с}.$$

Пример 7. Санки массой $m=5$ кг скатываются с горы, которая образует с горизонтом угол $\alpha=30°$. Пройдя расстояние $l=50$ м, санки развивают скорость $v=4{,}1$ м/с. Вычислите количество теплоты, выделенное при трении полозьев о снег.

Решение. При движении одного тела по поверхности другого часть механической энергии идет из-за трения на увеличение внутренней энергии соприкасающихся тел. Мерой изменения энергии здесь могут служить и работа A, и количество теплоты Q. Как A, так и Q показывают, на сколько возрастает внутренняя энергия беспорядочного движения молекул при изменении энергии направленного движения, вызванном трением санок о снег. Следует заметить, что работа силы трения скольжения всегда связана с нагреванием тел. Поскольку изменение внутренней энергии тел в процессе движения санок по условию задачи не рассматривается

($\Delta U=0$), то согласно (7.1) исходной формулой для решения задачи может служить уравнение

$$-Q=0+A.$$

При его записи мы учли, что $Q<0$ и $A>0$ (работа совершается санками).

Работу A, совершаемую внешними силами в системе санки — Земля, можно вычислить двумя способами: или с помощью закона сохранения энергии, или с помощью второго закона Ньютона. Проще воспользоваться первым способом. В системе санки — Земля на санки действуют две внешние силы: сила трения $\vec{F}_{тр}$ и нормальная реакция опоры $\vec{N}$. Так как $\vec{N}\perp\vec{v}$, то работа этой силы равна нулю и изменение механической энергии происходит лишь под действием силы трения, т. е. $A\equiv A_{тр}$.

Выбрав первое положение системы в начале движения санок, второе — в конце перемещения, можно записать:

$$A_{тр}=W_2-W_1.$$

Так как полная механическая энергия санок в первом и втором положениях соответственно равна:

$$W_1=mgl\sin\alpha \quad \text{и} \quad W_2=\frac{mv^2}{2},$$

то

$$A_{тр}=\frac{mv^2}{2}-mgl\sin\alpha,$$

и исходное уравнение можно переписать так:

$$Q=mgl\sin\alpha-\frac{mv^2}{2}.$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$Q\approx 1{,}19 \text{ кДж}.$$

Пример 8. Свинцовая пуля, летящая со скоростью $v_1=400$ м/с, попадает в стальную плиту и отскакивает от нее со скоростью $v_2=300$ м/с. Какая часть пули расплавится, если ее температура в момент удара была равна $t_1=107$°C и на нагревание пули пошло $\eta=0{,}8$ всей работы, совершаемой при ударе? Удельная теплоемкость и удельная теплота плавления свинца равны соответственно $c=126$ Дж/(кг · К), $\lambda=25$ кДж/кг.

Решение. В процессе удара пули о плиту происходит уменьшение кинетической энергии пули, вследствие чего увеличивается ее внутренняя энергия. Пуля нагревается до температуры плавления и частично плавится без теплообмена с окружающей средой ($Q=0$), поскольку время удара бесконечно мало. Согласпо закону сохранения и превращения энергии

$$0 = \Delta U + \eta A, \quad \text{или} \quad -\eta A = \Delta U,$$

где η — коэффициент, показывающий, какая часть механической энергии пошла на нагревание и агрегатное превращение свинца.

Если в момент удара пуля обладала кинетической энергией $W_1 = \frac{mv_1^2}{2}$, а после удара $W_2 = \frac{mv_2^2}{2}$ (считаем, что расплавленный свинец находится внутри пули и отлетает вместе с ней), то работа силы упругости плиты при ударе равна:

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

При нагревании пули массой m от начальной температуры t_1 до температуры плавления $t_2 = 327\,°C$ и плавлении свинца массой Δm внутренняя энергия пули возрастает на величину

$$\Delta U = cm(t_2 - t_1) + \lambda \Delta m.$$

Подставляя выражения для A и ΔU в исходное уравнение, получим уравнение энергетического баланса в окончательном виде:

$$\eta\left(\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}\right) = cm(t_2 - t_1) + \lambda \Delta m.$$

Отношение $\Delta m / m$, показывающее, какая часть пули расплавилась, отсюда равно:

$$\frac{\Delta m}{m} = \left[\frac{\eta(v_1^2 - v_2^2)}{2} - c(t_2 - t_1)\right]\frac{1}{\lambda}; \quad \frac{\Delta m}{m} \approx 0{,}05.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 7

7.1. Температура термометра, погруженного в воду массой 6,7 г, повысилась на 14,6°С. Какова была температура воды перед измерением, если показание термометра равно 32,4°С? Теплоемкость термометра равна 1,92 Дж/К.

7.2. Три химически не взаимодействующие жидкости массами 1, 10 и 5 кг налили в калориметр и сообщили им количество теплоты 1,3 МДж. Начальные температуры жидкостей и их удельные теплоемкости равны соответственно 6, —40 и 60°С, 2, 4 и 2 кДж/(кг·К). Чему равна установившаяся температура смеси?

7.3. Вода может находиться при температурах, меньших 0°С и больших 100°С. В калориметре с теплоемкостью 1,67 кДж/К находится переохлажденная вода массой 1 кг при температуре —10°С. Какая температура установится в калориметре, если в него влить 170 г воды, перегретой до 120°С?

7.4. В калориметре с теплоемкостью C находится вода массой M, нагретая до температуры t_1. В калориметр опускают смесь латунных и алюминиевых опилок массой m, имеющую температуру

t_2. В результате этого температура воды повышается и становится равной Θ. Определите количество латунных и алюминиевых опилок в смеси.

7.5. В воду массой 1 кг при 20°С брошен комок мокрого снега массой 250 г. Когда весь снег растаял, общая температура стала равной 5°С. Определите количество воды в комке снега. Удельная теплота плавления снега 334 кДж/кг.

7.6. В латунный калориметр массой 125 г опускают кусок льда массой 0,1 кг. Температура калориметра и льда равна —20°С. Сколько воды при температуре 20°С надо добавить в калориметр, чтобы половина льда растаяла? Удельная теплоемкость латуни 0,38 кДж / (кг · К), льда 2,1 кДж / (кг · К), удельная теплота плавления льда 334 кДж/кг.

7.7. Тигель с оловом нагревается электрическим током. Количество теплоты, ежесекундно подводимой к тиглю, постоянно. За 10 мин олово нагрелось от 20 до 70°С и спустя еще 83 мин полностью расплавилось. Найти удельную теплоту плавления олова. Удельная теплоемкость олова 0,23 кДж / (кг · К), температура плавления 232°С.

7.8. Железный шарик радиусом R, нагретый до температуры t, положили на лед, температура которого 0°С. На какую глубину шарик погрузится в лед? Теплопроводностью льда и работой силы тяжести пренебречь. При расчете считать, что шарик погрузился в лед полностью.

7.9. В куске льда, находящемся при 0°С, сделано углубление, объем которого 160 см^3. В это углубление влито 60 г воды, температура которой 75°С. Какой объем будет иметь свободное от воды углубление, когда вода остынет? Удельная теплота плавления льда 334 кДж/кг.

7.10. В открытом сосуде находится лед массой 10 кг при температуре —10°С. Сколько воды окажется в сосуде, если льду сообщить количество теплоты 20 МДж? Удельные теплоемкости воды и льда равны 4,2 и 2,1 кДж / (кг · К). Удельная теплота плавления льда и удельная теплота испарения воды равны 0,33 МДж/кг и 2,3 МДж/кг.

7.11. В чашке находится 500 г льда при 0°С. В чашку вливают 200 г воды, нагретой до температуры 80°С. Какова будет установившаяся температура и что будет находиться в чашке?

7.12. В закрытом сосуде с водой при температуре 0°С плавает лед массой M, в который вмерзла свинцовая дробинка массой m. Какое количество теплоты нужно подвести к системе лед — свинец, чтобы льдинка полностью погрузилась в воду? Плотности свинца, льда и воды равны соответственно $\varrho_с$, $\varrho_л$ и $\varrho_в$, удельная теплота плавления льда λ.

7.13. На сколько изменяется удельная теплота плавления вещества при понижении температуры плавления на Δt, если удельные теплоемкости вещества в жидкой и твердой фазе равны соответственно c_1 и c_2?

7.14. В сосуд, содержащий 200 г льда при температуре -15°C, влито 500 г воды, переохлажденной до температуры -15°C. Сколько получится льда и воды из такой смеси? Удельную теплоемкость воды и льда считать не зависящей от температуры.

7.15. Какому давлению был подвергнут лед массой 20 г, заключенный в теплонепроницаемую оболочку при 0°C, если при этом расплавилось 1,6 г льда и, кроме того, известно, что при увеличении давления на 14 МПа температура плавления понижается на 1°C? Считать, что понижение температуры плавления пропорционально повышению давления.

7.16. В калориметр, содержащий 100 г льда при 0°C, впущен пар, имеющий температуру 100°C. Сколько воды окажется в калориметре непосредственно после того, как весь лед растает? Удельная теплота парообразования воды при 100°C равна 2,26 МДж/кг.

7.17. Тонкая стеклянная пробирка, содержащая 100 г воды при температуре 20°C, опущена в дьюаровский сосуд, содержащий 50 г эфира при температуре 10°C. Какова будет температура оставшейся воды, когда весь эфир испарится? Что будет находиться в пробирке? Теплообменом с окружающей средой и стеклом пренебречь. Удельная теплоемкость жидкого и газообразного эфира 2,1 кДж/(кг·К), его удельная теплота испарения 376 кДж/кг. Решите задачу при условии, что эфира было 120 г.

7.18. При сгорании 1 г водорода и превращении его в воду выделяется количество теплоты, равное 142 кДж. Сколько угля с удельной теплотой сгорания 29 МДж/кг надо сжечь для диссоциации 1 л воды, если из выделяемой углем энергии используется 50%?

7.19. Холодильник потребляет от сети мощность 416 Вт, ежесекундные потери энергии в пространство составляют 840 Вт. За какое время можно заморозить в холодильнике 3,6 кг воды, взятой при 20°C? Удельная теплота плавления льда 0,33 МДж/кг, удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/(кг·К).

7.20. Следуя по течению, пароход прошел расстояние между двумя пунктами 150 км за 10 ч 40 мин. То же расстояние против течения пройдено за 18 ч 50 мин. Чему равна сила сопротивления воды движению парохода, если он сжигал 120 кг угля в час? Коэффициент полезного действия паровой машины 10%. Удельная теплота сгорания угля 29 МДж/кг.

7.21. Поезд массой M идет по горизонтальному пути со скоростью $\vec{v}$. Тепловоз сжигает при этом за время τ топливо массой m. КПД двигателя равен η. Какую скорость разовьет поезд при тех же условиях на пути с уклоном вверх α? Удельная теплота сгорания топлива q.

7.22. Какое количество теплоты выделяется при полном торможении поезда, идущего со скоростью 54 км/ч под уклон 0,01, если масса поезда равна 2000 т? Силу сопротивления считать пропорциональной силе нормального давления. Коэффициент сопротивления 0,05.

7.23. Стеклянный шарик объемом 0,2 см^3 равномерно падает в воде. Какое количество теплоты выделится при перемещении шарика на 6 м? Плотность стекла 2,4 г/см^3.

7.24. На сколько нагреется медная пластинка размером 2×6 см при нарезании в ней резьбы с шагом 0,75 мм, если при нарезке к воротку нужно приложить момент силы 4,9 Н·м? Размером отверстия пренебречь. Плотность меди $8,9 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость 376 Дж/(кг·К).

7.25. Грузовой автомобиль, оборудованный газогенераторным двигателем мощностью 92 кВт, имеющим КПД 18%, работает в полную нагрузку. Определите массу древесных чурок с удельной теплотой сгорания 12,5 МДж/кг, необходимых для пробега пути 1 км со скоростью 18 км/ч.

7.26. Трансформатор, погруженный в масло, вследствие перегрузок начинает нагреваться. Каков его коэффициент полезного действия, если при полной мощности 60 кВт 40 кг масла в течение 4 мин нагрелись на 20°С? Удельная теплоемкость масла 2,1 кДж/(кг·К). Количеством теплоты, идущим на нагревание металла трансформатора и его обмотки, пренебречь.

7.27. Вращающийся в подшипнике вал диаметром 10 см делает 200 об/мин и давит на подшипник с силой 12 кН. Определите часовой расход масла, пропускаемого для охлаждения подшипника, если температура масла при подаче равна 12, а при выходе 60°С. Коэффициент трения 0,015, удельная теплоемкость масла 1,7 кДж/(кг·К).

7.28. Заряд 305-миллиметровой пушки содержит 155 кг пороха. Масса снаряда 446 кг. Какова максимальная дальность полета снаряда, если КПД орудия равен 28%? Удельная теплота сгорания пороха 4,18 МДж/кг, сопротивление воздуха не учитывать.

7.29. Тележка с песком массой M катится без трения по горизонтальным рельсам со скоростью $\vec{v}_1$. Пуля массой m, выпущенная со скоростью $\vec{v}_2$, совпадающей по направлению с $\vec{v}_1$, попадает в тележку и застревает в ней. Сколько механической энергии перешло при ударе во внутреннюю энергию?

7.30. Свинцовая пуля массой 10 г, летящая горизонтально со скоростью 300 м/с, попадает в неподвижный стальной кубик массой 100 г, лежащий на гладком горизонтальном столе. Какова будет температура тел после удара? Удар считать абсолютно неупругим, температура пули в момент удара 25°С, кубика 15°С. Удельная теплоемкость стали 0,46 кДж/(кг·К), свинца 0,125 кДж/(кг·К).

7.31. С какой скоростью должны лететь навстречу друг другу две одинаковые льдинки, имеющие температуру $t = -10$°С, чтобы при ударе они обратились в пар? Удельные теплоемкость и теплота плавления льда равны соответственно $c=2,9$ кДж/(кг·К) и $\lambda=334$ кДж/кг. Удельная теплота парообразования воды при 100°С $r=2,26$ МДж/кг. Решите задачу при условии, что массы льдинок равны m_1 и m_2.

7.32. Горизонтально летящая пуля массой m попадает в деревянный шар, лежащий на полу, и пробивает его. Определите, какая часть энергии перешла в энергию деформации, если начальная скорость пули $\vec{v}_1$, скорость после вылета из шара $\vec{v}_2$, масса M. Трение между шаром и полом отсутствует, траектория пули проходит через центр шара.

7.33. Из винтовки произведен выстрел вертикально вверх. Свинцовая пуля массой 10 г вылетает со скоростью 300 м/с и на высоте 500 м попадает в такую же пулю, летящую горизонтально со скоростью 284 м/с. На сколько нагреются пули после абсолютно неупругого удара и какова будет их суммарная кинетическая энергия, если в момент удара их температура была одинаковой? Сопротивлением воздуха пренебречь.

7.34. На идеально гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массой M_1, на которой находится брусок массой M_2. В брусок попадает пуля массой m, летящая горизонтально со скоростью $\vec{v}$, и застревает в нем. Вследствие удара брусок проходит по доске некоторое расстояние и затем под влиянием сил трения перестает двигаться относительно доски. Определите потери механической энергии вследствие трения между бруском и доской.

Глава 8

ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ ТВЕРДЫХ И ЖИДКИХ ТЕЛ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Для большинства тел вблизи 0°С существует температурный интервал, в пределах которого любой линейный размер тел изменяется по закону

$$l = l_0(1+\alpha t), \tag{8.1}$$

где l — длина или какой-либо линейный размер тела при температуре t; l_0 — при 0°С; α — температурный коэффициент линейного расширения тела.

2. Если линейные размеры тела изменяются по закону (8.1), то для каждого сечения тела справедлива формула

$$S = S_0(1+\alpha' t), \tag{8.2}$$

где S — площадь данного сечения при температуре t; S_0 — при 0°С, а α' — коэффициент, характеризующий увеличение площади. При небольших температурах с достаточной степенью точности можно считать, что $\alpha' \approx 2\alpha$.

3. При увеличении линейных размеров по закону (8.1) объем тела меняется вследствие нагревания по закону

$$V = V_0(1 + \beta t), \tag{8.3}$$

где β — температурный коэффициент объемного расширения. При небольших температурах $\beta \approx 3\alpha$.

4. В случае теплового расширения тел их плотность изменяется по закону

$$\varrho = \varrho_0 / (1 + \beta t), \tag{8.4}$$

где ϱ — плотность материала тела при температуре t; ϱ_0 — плотность при 0^0С.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Решение задач о тепловом расширении тел основано на применении одной из формул (8.1) — (8.4). Если в задаче рассматривается несколько состояний тела или несколько тел, эти формулы записываются для каждого случая, для каждого тела отдельно. Все вместе они образуют полную систему уравнений, решение которых позволяет найти искомую величину. В комбинированных задачах формулы теплового расширения являются лишь частью системы уравнений, описывающих данное явление; вторую часть, как правило, составляют формулы калориметрии и гидростатики. При составлении уравнений теплового расширения тел особое внимание нужно обратить на следующее.

а) В формулах (8.1) — (8.4) под l_0, S_0 и V_0 подразумевают значения длины, площади и объема при 0^0С, а не при начальной температуре тела, отличной от нуля; это связано с тем, что табличные коэффициенты линейного и объемного расширения определяются как относительное изменение единицы длины или объема тела, взятого при 0^0С, при нагревании на 1^0С. Если за начальную температуру принять не 0^0С, а произвольную температуру, относительное удлинение, рассчитанное на 1^0С,— температурный коэффициент линейного расширения (а также и температурный коэффициент объемного расширения) — в каждом случае будет разным и не таким, как при 0^0С.

Чтобы найти связь между длинами (площадями, объемами) при температурах t_1 и t_2, нужно из уравнений

$$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1) \quad \text{и} \quad l_2 = l_0(1 + \alpha t_2)$$

исключить l_0. В результате получим:

$$l_2 = l_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1},$$

или приближенно:

$$l_2 \approx l_1[1 + \alpha(t_2 - t_1)] = l_1(1 + \alpha\Delta t), \tag{8.5}$$

так как членами, содержащими α в более высокой степени, чем первой, можно пренебречь. Практически такое приближение вполне оправдано, так как для большинства твердых тел α очень мало.

Проводя вычисления в задачах на тепловое расширение тел, нужно пользоваться формулами приближенного вычисления (см. форзац). Использование этих формул значительно облегчает вычисления и упрощает математические выкладки. В частности, при небольших температурах t, таких, что $\beta t \ll 1$, можно с достаточной степенью точности считать, что

$$\varrho \approx \varrho_0 (1 - \beta t).$$

б) Формулы (8.2) и (8.3) справедливы как для сплошных тел, так и для тел, в которых имеется полость или отверстие.

2. Задачи на тепловое расширение тел удобнее решать по следующей схеме:

а) Для каждого теплового состояния каждого тела записать соответствующую формулу теплового расширения.

б) Если в задаче наряду с расширением тел рассматриваются другие процессы, сопутствующие расширению,— теплообмен, изменение гидростатического давления жидкости или выталкивающей силы, то к уравнениям теплового расширения надо добавить формулы калориметрии и гидростатики.

в) Выписать значения заданных величин и, проверив число неизвестных в полученной системе уравнений, решить ее относительно искомой величины.

Пример 1. Какую длину $l_{0с}$ и $l_{0м}$ при температуре 0^0С должны иметь стальной и медный стержни, чтобы при любой температуре разность их длин составляла $\Delta l = 10$ см? Температурный коэффициент линейного расширения стали $\alpha_с = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\text{К}^{-1}$, меди $\alpha_м = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\text{К}^{-1}$

Решение. Рассмотрим два тепловых состояния стального и медного стержней: при начальной температуре $t_0 = 0^0$С и при некоторой произвольной температуре t. Обозначим длину стального стержня при температуре t через $l_с$, медного — через $l_м$, тогда

$$l_с = l_{0с}(1 + \alpha_с t), \quad (1)$$
$$l_м = l_{0м}(1 + \alpha_м t). \quad (2)$$

Дополнительное условие позволяет записать:

$$l_с - l_м = \Delta l,$$

в частности,

$$l_{0с} - l_{0м} = \Delta l. \quad (3)$$

Вычитая из второго уравнения первое и раскрывая скобки, получим:

$$l_с - l_м = l_{0с} - l_{0м} + l_{0с}\alpha_с t - l_{0м}\alpha_м t,$$

откуда с учетом соотношений (3) имеем:

$$l_{0с}\alpha_с - l_{0м}\alpha_м = 0.$$

Из этого и второго равенства (3) для искомых длин получаем:

$$l_{0с} = \frac{\alpha_м}{\alpha_м - \alpha_с}\Delta l; \quad l_{0с} \approx 32 \text{ см}; \quad l_{0м} = \frac{\alpha_с}{\alpha_м - \alpha_с}\Delta l; \quad l_{0м} \approx 22 \text{ см}.$$

Пример 2. Стальная и латунная полоски толщиной $h = 0{,}2$ см каждая склепаны на концах так, что при температуре $t_1 = 20°$C они образуют плоскую биметаллическую пластинку. Каков будет средний радиус изгиба биметаллической пластинки при $t_2 = 100^0$C?

Температурные коэффициенты линейного расширения стали и латуни равны $\alpha_с = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\text{К}^{-1}$; $\alpha_л = 1{,}9 \cdot 10^{-5}\text{К}^{-1}$.

Решение. Так как коэффициенты линейного расширения латуни и стали неодинаковы ($\alpha_л > \alpha_с$), то при нагревании биметаллической пластинки латунная удлинится больше стальной и вся пластинка изогнется.

Если при температуре t_1 длина средней линии латунной пластинки была равна $l_{1л}$, при температуре t_2 — равна $l_{2л}$, то, пользуясь приближенной формулой (8.5), можно записать:

$$l_{2л} = l_{1л}(1 + \alpha_л\Delta t), \tag{1}$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ — приращение температуры.

Для стальной пластинки аналогично предыдущему получим:

$$l_{2с} = l_{1с}(1 + \alpha_с\Delta t), \tag{2}$$

поскольку приращение температуры здесь то же самое.

Чтобы определить средний радиус изгиба R, будем считать, что концы пластинок при деформации не смещаются относительно друг друга и толщина их настолько мала, что ее изменением при нагревании можно пренебречь по сравнению с изменением длины.

Как видно из чертежа (рис. 8.1), $l_{2л}$ и $l_{2с}$ связаны с радиусом изгиба R уравнениями

$$l_{2л} = \varphi(R + h/2), \tag{3}$$
$$l_{2с} = \varphi(R - h/2), \tag{4}$$

где φ — угол между торцевыми поверхностями биметаллической пластинки.

Составленная система уравнений полностью отражает все условия задачи и позволяет определить искомую величину.

Решая уравнения (1) — (4) совместно относительно среднего радиуса R кривизны биметаллической пластинки, получим:

$$R = \frac{h}{2}\left[\frac{2 + (\alpha_с + \alpha_л)\Delta t}{(\alpha_л - \alpha_с)\Delta t}\right]; \quad R \approx 5 \text{ м}.$$

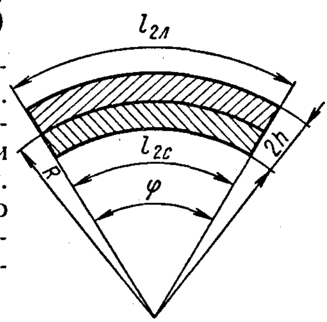

Рис. 8.1

Пример 3. Латунная шкала ртутного барометра выверена при 0°С При температуре $t_1 = 20°С$ барометр показывает давление $p_б = 760$ мм рт. ст. Каково истинное атмосферное давление $p_а$ при этой температуре? Расширением стекла пренебречь. Температурные коэффициенты линейного расширения латуни и объемного расширения ртути соответственно равны $\alpha = 1{,}9 \cdot 10^{-5} К^{-1}$ и $\beta = 1{,}8 \cdot 10^{-4} К^{-1}$

Решение. Если шкалу барометра выверить при какой-либо температуре, например при 0°С, то при всякой другой температуре его показания не будут соответствовать наружному давлению. Объясняется это тем, что с повышением температуры плотность ртути уменьшается и при неизменном атмосферном давлении высота столба ртути в барометрической трубке возрастает. Кроме того, шкала, по которой отсчитывают высоту столба, удлиняется и цена одного деления становится больше значения, указанного на шкале Чтобы определить истинное давление, показание барометра нужно привести к той температуре, при которой его шкала выверена, в данном случае к 0°С. Делается это сравнительно просто: находят число делений шкалы, в которые укладывается высота измеряемого ртутного столба, рассчитывают по формуле теплового расширения новую цену деления и по этим данным определяют действительную длину ртутного столба. Зная эту длину и плотность ртути при температуре измерений, можно вычислить и само атмосферное давление.

Если при температуре $t_1 = 20°С$ ртуть в барометрической трубке достигла высоты h_1 (n-го деления шкалы), то показания барометра равны:

$$p_б = \varrho_1 g h_1 = \varrho_1 g n l_1, \qquad (1)$$

где ϱ_1 — плотность ртути при температуре t_1; l_1 — цена одного деления шкалы. Так как расстояние l_0 между двумя соседними рисками на шкале выверено и равно единице (1 мм) лишь при 0°С, то l_1 будет больше истинной цены деления l_0, указанной на шкале

Если температурный коэффициент линейного расширения латуни равен α, то $l_1 = l_0(1 + \alpha t_1)$, и в единицах длины l_0 высота ртутного столба при температуре t_1 равна:

$$h_1 = n l_0 (1 + \alpha t_1). \qquad (2)$$

Так как по условию задачи атмосферное давление не изменяется, то $p_а = \varrho_0 g h_0$, и в то же время $p_а = \varrho_1 g h_1$, откуда

$$\varrho_0 h_0 = \varrho_1 h_1, \qquad (3)$$

где ϱ_0 - плотность ртути при 0°С; h_0 — высота, на которую поднялся бы столб ртути при температуре 0°С. Плотность ртути

$$\varrho_1 = \varrho_0 (1 - \beta t_2). \qquad (4)$$

Из уравнений (1)   (4) получим:

$$p_a = \varrho_0 g h_0 = p_б[1 + (\alpha - \beta) t_1]; \quad p_a = 758 \text{ мм рт ст}$$

Пример 4. При температуре $t_1 = 10°C$ в открытую железную канистру налили $V_1 = 20$ л бензина, и она оказалась полной. На сколько изменится масса канистры с бензином, если ее внести в помещение, где температура равна $t_2 = 30°C$? Температурный коэффициент линейного расширения железа $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$ температурный коэффициент объемного расширения бензина $\beta = 10^{-3} K^{-1}$, плотность бензина $\varrho_0 = 800$ кг/м^3

Решение. Вследствие теплового расширения канистры и бензина объем их при нагревании увеличивается. Температурный коэффициент объемного расширения жидкостей всегда больше коэффициента объемного расширения твердых тел, поэтому при одинаковом повышении температуры приращение объема бензина будет больше приращения объема сосуда и часть бензина из него выльется. Чтобы определить искомое изменение массы канистры с бензином, нужно вычислить массу бензина в канистре при начальной и комнатной температурах и из первого результата вычесть второй. Масса самой канистры при этом не изменится. Для нахождения массы бензина при указанных температурах необходимо найти его плотность при этих температурах, а также объем канистры.

Если при температуре t_1 канистра и, следовательно, бензин имеют объем V_1, а при температуре t_2 — объем V_2, то

$$V_2 \approx V_1[1 + 3\alpha(t_2 - t_1)]. \tag{1}$$

Здесь мы учли, что коэффициент объемного расширения железа $\beta_ж = 3\alpha$, поскольку для твердых тел в таблицах даются только значения α.

Плотность бензина при температурах t_1 и t_2 соответственно равна:

$$\varrho_1 \approx \varrho_0(1 - \beta t_1); \tag{2}$$
$$\varrho_2 \approx \varrho_0(1 - \beta t_2). \tag{3}$$

Массы бензина в канистре при этих температурах равны:

$$m_1 = \varrho_1 V_1 \quad \text{и} \quad m_2 = \varrho_2 V_2. \tag{4}$$

Решая уравнения (1)   (4) совместно и пренебрегая членами, содержащими коэффициенты объемного расширения в степени выше первой, из-за их малости, получим:

$$\Delta m = \varrho_0(\beta - 3\alpha)(t_2 - t_1)V; \quad \Delta m \approx 0{,}29 \text{ кг}.$$

Пример 5. В жидкости взвешивают стальной шарик. Первое взвешивание производилось при температуре t_1, и вес тела в жидкости оказался на P_1 меньше веса тела в воздухе. Второе взвешивание провели при температуре t_2, и вес тела в жидкости оказался на P_2 меньше истинного веса тела. Температурный коэффициент линейного расширения стали α. Чему равен температурный коэффициент объемного расширения жидкости?

Р е ш е н и е. При взвешивании тел в жидкости их вес — сила, с которой тело действует на динамометр, уменьшается на выталкивающую силу жидкости. Эта сила, в свою очередь, равна весу вытесненной жидкости. Вследствие теплового расширения взвешиваемых тел и изменения плотности жидкости при нагревании выталкивающая сила, а вместе с ней и изменение веса тела в жидкости будут различными при разных температурах. По условию задачи нам фактически известны значения выталкивающей силы при различных температурах и требуется определить одну из величин, через которую она выражается. Модуль этой силы определяется плотностью жидкости при данных температурах и объемом тел, погруженных в жидкость. Если при температуре t_1 в жидкость полностью погрузить шарик объемом V_1, то вес вытесненной жидкости будет равен:

$$P_1 = \varrho_1 g V_1. \qquad (1)$$

Плотность жидкости ϱ_1 и объем стального шарика V_1 при температуре t_1 могут быть выражены через их значения при 0 °С:

$$\varrho_1 \approx \varrho_0 (1 - \beta t_1); \qquad (2)$$

$$V_1 = V_0 (1 + 3\alpha t_1), \qquad (3)$$

где β — температурный коэффициент объемного расширения жидкости; 3α — температурный коэффициент объемного расширения стали. Для температуры t_2 мы имеем соответственно:

$$P_2 = \varrho_2 g V_2; \qquad (4)$$

$$\varrho_2 = \varrho_0 (1 - \beta t_2); \qquad (5)$$

$$V_2 = V_0 (1 + 3\alpha t_2). \qquad (6)$$

Решая уравнения (1) — (6) относительно β, находим:

$$\beta = 3\alpha + \frac{P_1 - P_2}{P_2(t_2 - t_0)}.$$

Члены, содержащие коэффициенты теплового расширения в степени выше первой, здесь отброшены из-за их малости.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 8

8.1. Длина стержня при температуре 0°С равна 1000 мм, при температуре 100°С — 1002 мм, при температуре красного каления — 1011,6 мм. Определите температуру красного каления.

8.2. Колесо локомотива имеет диаметр 1 м при 0°С. На сколько отличаются расстояния, пройденные поездом за 1 ч зимой и летом при температурах —25 и +25°С, если в обоих случаях двигатель делал 480 об/мин? Температурный коэффициент линейного расширения стали $1{,}2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$.

8.3. При температуре t показание ртутного барометра с латунной шкалой равно n. Каково будет показание барометра при 0°С? при температуре $-t$? Атмосферное давление во всех случаях одинаково. Температурные коэффициенты линейного расширения латуни и объемного расширения ртути равны соответственно α и β.

8.4. Два секундных маятника, первый медный, второй железный, отбивают секунды при температуре -2°С. На сколько секунд отстанет в сутки медный маятник от железного, если температура помещения поднимется до 18°С? Коэффициенты линейного расширения меди и железа равны соответственно $1{,}7 \times 10^{-5}$ и $1{,}2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$

8.5. Часы снабжены латунным маятником. Сравнивая показания этих часов с показанием точных часов, заметили, что при 0°С они спешат на 7 с в сутки, а при температуре 20°С отстают в сутки на 9 с. Определите температурный коэффициент линейного расширения латуни, а также ту температуру, при которой маятниковые часы будут идти правильно.

8.6. При нагревании железного шара до температуры 800°С площадь его поверхности увеличилась на 1 см^2. Определите диаметр шара при температуре 20°С. Температурный коэффициент линейного расширения железа $1{,}2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$.

8.7. Никелевый брусок массой 740 г и длиной 222 мм при температуре 50°С опущен в калориметр теплоемкостью 21 Дж/К, содержащий 145 г воды при 0°С. Когда температура установилась, то оказалось, что длина бруска уменьшилась на 0,13 мм. Определите по этим данным удельную теплоемкость никеля. Температурный коэффициент линейного расширения никеля $1{,}8 \cdot 10^{-5} K^{-1}$.

8.8. В центре стального диска имеется отверстие, диаметр которого при 0°С равен 4,99 мм. До какой температуры следует нагреть диск, чтобы в его отверстие начал проходить шарик диаметром 5,00 мм? Температурный коэффициент линейного расширения стали равен $1{,}1 \cdot 10^{-5} K^{-1}$.

8.9. Емкость железного сосуда при температуре 10°С равна 2 л. Каков будет вес ртути, заполняющей сосуд при температуре 25°С? Температурные коэффициенты линейного расширения железа и объемного расширения ртути соответственно равны $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ и $1{,}8 \cdot 10^{-4} K^{-1}$.

8.10. При температуре t_1 стержни с температурными коэффициентами линейного расширения α_1 и α_2 имеют одинаковую длину, при температуре t_2 одинаковыми оказываются их объемы. При какой температуре будут одинаковы площади поперечного сечения стержней?

8.11. В стеклянный цилиндр налита ртуть массой 1 кг. Остальную часть объема цилиндра занимает воздух, причем оказывается, что объем пространства над ртутью остается одним и тем же при всех температурах от 0 до 100°С. Определите объем цилиндра. Температурные коэффициенты линейного расширения стекла и объемного расширения ртути соответственно равны $9 \cdot 10^{-6}$ и $1{,}8 \cdot 10^{-4} K^{-1}$.

8.12. Стеклянный сосуд весит P_0. Этот же сосуд, наполненный ртутью, при 0°С весит P_1. Если сосуд нагреть до температуры t, то часть ртути выливается и вес сосуда с ртутью оказывается равным P_2. Чему равен температурный коэффициент объемного расширения стекла? Температурный коэффициент объемного расширения ртути β?

8.13. В наполненном сосуде содержится керосин массой $M_к$ и кусок железа массой $M_ж$. Если всей системе сообщить количество теплоты Q, то из сосуда будет выливаться керосин объемом V. Определите температурный коэффициент объемного расширения железа. Теплоемкостью и расширением сосуда пренебречь. Работой расширения пренебречь.

8.14. Стальной брусок плавает в сосуде со ртутью в вертикальном положении. При температуре 0°С в ртуть погружена 0,577 часть всего объема бруска. На сколько изменится погруженная часть объема бруска, если систему нагреть до 100°С? Температурные коэффициенты линейного расширения стали и объемного расширения ртути соответственно равны $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ и $1{,}8 \cdot 10^{-4} K^{-1}$.

8.15. Вес куска металла, погруженного в известную жидкость, уменьшается на P_1 при температуре t_1 и на P_2 при температуре t_2 по сравнению с его весом в воздухе. Определите температурный коэффициент линейного расширения металла.

8.16. Стальной шарик массой $m = 100$ г опущен на нити в керосин. На сколько изменится натяжение нити, если всю систему нагреть от $t_1 = 20°С$ до $t_2 = 50°С$? Плотности стали и керосина при 0°С равны $\varrho_{0с} = 7{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, $\varrho_{0к} = 800$ кг/м^3. Температурные коэффициенты линейного расширения стали и объемного расширения керосина соответственно равны $\alpha = 1{,}1 \cdot 10^{-5} K^{-1}$, $\beta = 10^{-3} K^{-1}$.

8.17. Два кубика массами m_1 и m_2 стоят на теплопроводящей подставке. На сколько изменится общая теплоемкость кубиков, если один из них положить на другой? Первый кубик железный, второй — медный.

Глава 9

ГАЗЫ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Состояние тел характеризуют совокупностью нескольких физических величин, называемых параметрами состояния. Важнейшими параметрами состояния газа являются его объем V, давление p и температура T.

Состояние газа, при котором все его параметры при неизменных внешних условиях остаются постоянными сколь угодно долго, называют равновесным. Процессы, состоящие из непрерывной последовательности равновесных состояний, называют равновесными. Параметры состояния газа, находящегося в равновесном состоянии, связаны между собой уравнением состояния $f(p, V, T) = 0$.

Самый простой вид уравнение состояния имеет для идеальных газов. Идеальными называют газы, молекулы которых взаимодействуют друг с другом лишь при соударениях (отсутствует межмолекулярное притяжение и отталкивание) и объем молекул ничтожно мал по сравнению с объемом, занимаемым газом. Кроме того, предполагается, что соударение молекул происходит по законам абсолютно упругого удара. Реальные газы тем точнее подчиняются законам идеальных газов, чем меньше их давление и выше температура.

2. Для идеальных газов имеют место следующие экспериментальные законы.

Закон Бойля — Мариотта:

$$pV = \text{const} \quad \text{при} \quad T = \text{const} \quad \text{и} \quad m = \text{const}. \tag{9.1}$$

Из этого закона вытекает, что для двух произвольных состояний газа при указанных условиях справедливо равенство

$$p_1 V_1 = p_2 V_2. \tag{9.1'}$$

Закон Гей-Люссака:

$$\beta_V = \frac{V - V_0}{V_0 t} = \frac{1}{273}\,\text{K}^{-1}, \text{ или } \frac{V}{T} = \text{const}, \tag{9.2}$$

если

$$p = \text{const} \quad \text{и} \quad m = \text{const}.$$

Согласно выражению (9.2) при соблюдении указанных ограничений для двух произвольных состояний

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \tag{9.2'}$$

Закон Шарля:

$$\beta_p = \frac{p - p_0}{p_0 t} = \frac{1}{273}\,\text{K}^{-1}, \quad \text{или} \quad \frac{p}{T} = \text{const}, \tag{9.3}$$

если

$$V = \text{const} \quad \text{и} \quad m = \text{const}.$$

Согласно закону Шарля для двух произвольных состояний

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \tag{9.3'}$$

Соотношения (9.1), (9.2) и (9.3) можно рассматривать как уравнения состояния идеального газа соответственно при изотермическом, изобарическом и изохорическом процессах, когда из трех параметров газа изменяются два.

3. Из опытных законов (любых двух) для идеальных газов вытекает объединенный газовый закон (уравнение Клапейрона):

$$\frac{pV}{T} = \text{const, если } m = \text{const}, \tag{9.4}$$

откуда следует, что при переходе газа из одного состояния в другое, когда меняются все три его параметра, должно быть:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}. \tag{9.4'}$$

4. Масса микрочастиц (молекул, атомов, нуклонов, электронов и т. д.) измеряется в килограммах и атомных единицах массы (а. е. м.). За атомную единицу массы принята $\frac{1}{12}$ массы самого легкого изотопа углерода: 1 а.е.м. $= 1{,}660531 \cdot 10^{-27}$ кг. В молекулярной физике и термодинамике вместо массы часто используется количество вещества, выраженное в молях. Моль — это количество вещества, в котором содержится столько же структурных элементов (молекул, атомов, ионов или других микрочастиц), сколько атомов находится в углероде -12 массой 0,012 кг. 1 моль любого вещества (элемента) содержит одинаковое число молекул (атомов), равное $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Это число называется постоянной Авогадро. Согласно закону Авогадро 1 моль идеального газа занимает при нормальных условиях ($p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К) объем $V_m = 22{,}4 \cdot 10^{-3}$ м$^3 \cdot$ моль$^{-1}$.

Если масса одной структурной частицы вещества (молекулы, атома, иона и т. д.) равна m_1, то масса моля M (молярная масса) этого вещества равна

$$M = m_1 N_A.$$

Если тело массой m состоит из вещества с молярной массой M и в нем находится N молекул, то это тело содержит число молей ν, равное

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}. \tag{9.5}$$

Относительной молекулярной (атомной) массой M_r данного вещества (элемента) называется отношение массы молекулы (атома) этого вещества m_1 к $\frac{1}{12}$ массы m_C атома самого легкого изотопа углерода: $M_r = m_1 / \left(\frac{1}{12} m_C\right)$.

По определению $m_C N_A = 12 \cdot 10^{-3}$ кг $\cdot$ моль$^{-1}$, следовательно, $M = M_r \cdot 10^{-3}$, где M — молярная масса вещества, кг $\cdot$ моль$^{-1}$; M_r — относительная молекулярная масса этого вещества.

При нормальных условиях объем идеального газа равен:

$$V_0 = \nu V_m. \tag{9.6}$$

Если в сосуде находится смесь нескольких газов, не вступающих друг с другом в химические реакции, давление смеси газов равно сумме давлений, производимых каждым газом в отдельности, как если бы он один занимал весь сосуд (закон Дальтона):

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

Если за первое состояние принять состояние идеального газа с параметрами p, V, T, а за второе — его состояние при нормальных условиях, то согласно уравнению (9.4′)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0}$$

Отсюда с учетом соотношений (9.6) и (9.5)

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0\nu V_m}{T_0} = \frac{m}{M}R = \frac{N}{N_A}R,$$

или

$$pV = \nu RT = \frac{m}{M}RT = \frac{N}{N_A}RT, \tag{9.7}$$

где величина $R = \frac{p_0V_m}{T_0}$ имеет для всех идеальных газов одинаковое значение и называется молярной газовой постоянной. Числовое значение газовой постоянной равно:

$$R = \frac{1{,}01 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 22{,}4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}}{273 \text{ К}} = 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}.$$

Уравнение состояния идеального газа (9.7) называют уравнением Менделеева — Клапейрона. Его можно представить в виде:

$$p = \frac{\varrho}{M}RT,$$

где ϱ — плотность газа при данной температуре T, а также

$$p = zkT$$

($z = \frac{N}{V}$ — концентрация молекул; $k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана).

5. Если температура идеального газа массой m изменяется на ΔT, внутренняя энергия газа изменяется на величину

$$\Delta U = c_V m\Delta T = C_{mV}\nu\Delta T, \tag{9.8}$$

где c_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме и C_{mV} — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме — теплоемкость, рассчитанная на моль газа.

Если при постоянном давлении p газ нагревается от температуры T_1 до температуры T_2, то его объем возрастает от V_1 до V_2 и газ совершает работу

$$A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V. \tag{9.9}$$

Применяя уравнение Менделеева — Клапейрона (9.7) для каждого из двух состояний газа, формулу работы можно представить в виде:

$$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1) = \frac{m}{M} R\Delta T. \tag{9.10}$$

Если в процессе расширения к газу подводится некоторое количество теплоты Q, то согласно закону сохранения и превращения энергии для изобарического процесса

$$Q = \Delta U + A = c_V m\Delta T + \begin{cases} p\Delta V \\ \frac{m}{M} R\Delta T. \end{cases} \tag{9.11}$$

Согласно (9.8) и (9.10)

$$\Delta U = \frac{c_V M}{R} A = \frac{C_{mV}}{R} A. \tag{9.12}$$

Поэтому на основании (9.11) можно записать:

$$Q = \frac{C_{mV} + R}{C_{mV}} \Delta U = \frac{C_{mV} + R}{R} A. \tag{9.13}$$

6. Коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, равен:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \tag{9.14}$$

где Q_1 и Q_2 — соответственно количество теплоты, полученное от нагревателя и отданное холодильнику; T_1 и T_2 — температура нагревателя и холодильника.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Основным уравнением, характеризующим состояние идеального газа, является уравнение Менделеева — Клапейрона. Составив это уравнение для каждого из рассматриваемых состояний газа и записав дополнительные условия в виде формул, можно сравнительно легко решить почти любую задачу. Однако этот метод в ряде случаев усложняет решение и приводит к

лишним математическим выкладкам, мало поясняющим физическую сущность явления.

Учитывая это, задачи на расчет параметров состояния газов можно разделить на две основные группы. К первой следует отнести задачи, в которых рассматриваются два или несколько состояний газа постоянной массы и к которым, следовательно, применимо уравнение объединенного газового закона (9.4).

Вторую группу составляют задачи, в условии которых дана масса газа или рассматриваются такие процессы, в которых масса газа изменяется. При решении этих задач пользоваться объединенным газовым законом нельзя, нужно применять уравнение Менделеева — Клапейрона.

Решение задач на нагревание и работу газа при изохорическом и изобарическом процессе основано на первом начале термодинамики и формулах (9.9) — (9.10). При этом обычно предполагают, что необходимые расчетные формулы будут выведены самими учащимися, а это, как правило, и составляет основную трудность решения.

2. Если по условию задачи даны два состояния газа и при переходе газа из одного состояния в другое его масса не меняется, то для решения задачи можно рекомендовать следующую последовательность:

а) Прочитав условие задачи, нужно ясно представить, какой газ участвует в том или ином процессе, и убедиться, что при изменении параметров состояния газа его масса остается постоянной.

б) Сделать, если это возможно, схематический чертеж и, отметив каждое состояние газа, указать параметры p, V, T, характеризующие эти состояния. Определить из условия задачи, какой из этих трех параметров не меняется и какому газовому закону подчиняются переменные параметры. В общем случае могут изменяться все три параметра p, V и T.

в) Записать уравнение объединенного газового закона Клапейрона для данных двух состояний. Если какой-либо параметр остается неизменным, уравнение автоматически переходит в одно из трех уравнений, выражающих закон Бойля — Мариотта, Гей-Люссака или Шарля.

В тех случаях, когда газ заключен в цилиндрический сосуд и объем газа меняется только за счет изменения высоты его столба, но не сечения сосуда, уравнение Клапейрона нужно сразу записывать в виде:

$$\frac{p_1 l_1}{T_1} = \frac{p_2 l_2}{T_2}.$$

г) Представить в развернутом виде параметры p_1, V_1, p_2, V_2, выразив их через заданные величины. Вполне естественно, что расшифровывать нужно только те параметры, которые заданы косвенно, но не те, что даны явно. Особое внимание здесь следует обратить на определение давления. Чтобы его найти в тех случаях, когда газ производит давление на жидкость, нередко приходится использовать закон Паскаля: провести нулевой уровень через границу, отделяющую газ от жидкости, и записать уравнение равновесия жидкости.

д) Записать математически все вспомогательные условия и решить полученную систему уравнений относительно неизвестной величины.

Если в задаче рассматривают процессы, связанные с изменением состояния двух или трех газов, отделенных друг от друга поршнями или входящих в состав смеси, то все указанные действия нужно проделать для каждого газа отдельно.

В задачах на газовые законы рекомендуется пользоваться только абсолютной температурой и сразу же переводить значения температуры по шкале Цельсия в значения по шкале Кельвина.

3. Если по условию задачи дано только одно состояние газа и требуется определить какой-либо параметр этого состояния или же даны два состояния с разной массой газа, то рекомендуется поступать так:

а) Установить, какие газы участвуют в рассматриваемых процессах.

б) Для каждого состояния каждого газа (если их несколько) составить уравнение Менделеева — Клапейрона. Если дана смесь газов, то это уравнение записывают для каждого компонента. Связь между значениями давлений отдельных газов и результирующим давлением смеси устанавливается законом Дальтона.

в) Записать математически дополнительные условия задачи и решить полученную систему уравнений относительно искомой величины.

В комбинированных задачах, где рассматривается движение сосуда с газом, уравнение газового состояния добавляют к уравнениям механики.

Пример 1. Для погружения и всплытия подводной лодки в ней имеются два сообщающихся между собой резервуара. В погруженном состоянии один из резервуаров емкостью V заполнен водой, во втором емкостью V_1 находится сжатый воздух. Каково должно быть минимальное давление сжатого воздуха, чтобы при всплытии лодки с глубины H сжатый воздух полностью вытеснил воду из балластной цистерны? Атмосферное давление нормальное, изменением температуры воздуха при расширении пренебречь.

Р е ш е н и е. Если соединить резервуары между собой, то при достаточной степени сжатия воздух, заключенный во втором сосуде, начнет расширяться и вытеснит воду из балластной цистерны наружу. Так как масса и температура сжатого воздуха не меняются, то увеличение его объема вызовет понижение давления. Учитывая сделанные выше рекомендации, решение задачи следует построить на законе Бойля — Мариотта.

Пусть p_1 и V_1 — давление и объем сжатого воздуха до расширения, p_2 и V_2 — давление и объем воздуха в тот момент, когда он, вытеснив воду, займет оба резервуара, тогда

$$p_1 V_1 = p_2 V_2.$$

Рассмотрим каждый из параметров воздуха и выясним, какие из них нужно представить в развернутом виде. Давление p_1 требуется определить по условию задачи, объем V_1 задан — он равен объему резервуара со сжатым воздухом, давление p_2 можно найти, исходя из следующих соображений. Чтобы вытеснить воду из балластного резервуара, воздух во втором состоянии должен находиться под давлением, большим или равным гидростатическому давлению на глубине H, т. е.

$$p_2 = p_a + \varrho g H,$$

где ϱ — плотность морской воды. Остается выразить объем V_2; он, как нетрудно заметить, равен суммарной емкости обоих резервуаров:

$$V_2 = V_1 + V.$$

Подставляя выражения для p_2 и V_2 в формулу закона Бойля — Мариотта, мы получим уравнение газового состояния в окончательном виде:

$$p_1 V_1 = (p_a + \varrho g H)(V_1 + V),$$

откуда начальное давление в резервуаре со сжатым воздухом должно быть равно:

$$p_1 = \frac{V + V_1}{V_1}(p_a + \varrho g H).$$

Пример 2. Посредине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки находится столбик ртути длиной $h = 19{,}6$ мм. Если трубку поставить под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, то столбик ртути переместится на $\Delta l_1 = 20$ мм; если поставить вертикально — на $\Delta l_2 = 30$ мм. До какого давления откачан воздух из трубки?

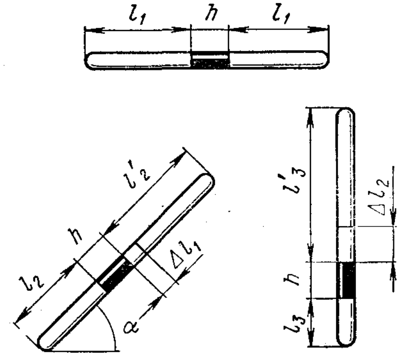

Рис. 9.1

Решение. В задаче говорится о трех состояниях двух газов одинаковой массы, разделенных столбиком ртути (рис. 9.1). В процессе движения трубки из горизонтального положения в вертикальное вследствие смещения столбика ртути газ, находящийся в правой части трубки, будет расширяться, в левой — сжиматься.

Так как по условию задачи масса и температура газа не меняются, то для каждой пары состояний каждого газа должно иметь место уравнение закона Бойля — Мариотта. Совокупность этих уравнений полностью характеризует изотермический процесс, описываемый в данной задаче.

Состояние газа при горизонтальном положении трубки примем за первое состояние. Вторым состоянием будем считать состояние газа в наклонной трубке, третьим состояние газа при вертикальном положении трубки.

Обозначим давление газа в левой части трубки в каждом из этих состояний через p_1, p_2, p_3, длину столбов воздуха через l_1, l_2, l_3, тогда, применяя закон Бойля — Мариотта для каждой пары состояний и учитывая, что площадь поперечного сечения трубки всюду одинакова, получим:

$$p_1 l_1 = p_2 l_2; \quad p_1 l_1 = p_3 l_3.$$

Аналогично для газа, заключенного в правой части трубки:

$$p_1 l_1 = p_2' l_2' \quad \text{и} \quad p_1 l_1 = p_3' l_3',$$

так как в первом состоянии давления и объемы газа в обеих частях трубки были одинаковы.

Если при отклонении трубки от горизонтального положения на угол α столбик ртути сместится на расстояние Δl_1, а при отклонении на угол 90° на расстояние Δl_2, то, как видно из чертежа,

$$l_2 = l_1 - \Delta l_1, \quad l_3 = l_1 - \Delta l_2;$$

$$l_2' = l_1 + \Delta l_1, \quad l_3' = l_1 + \Delta l_2.$$

Кроме того, при равновесии столбика ртути должно быть

$$p_2 = p_2' + \varrho g h \sin\alpha \quad \text{и} \quad p_3 = p_3' + \varrho g h,$$

где ϱ — плотность ртути

Подставляя в уравнение закона Бойля — Мариотта вместо l_2, l_3, l_2', l_3', p_2 и p_3 их выражения, получим:

$$p_1 l_1 = (p_2' + \varrho g h \sin\alpha)(l_1 - \Delta l_1);$$

$$p_1 l_1 = (p_3' + \varrho g h)(l_1 - \Delta l_2);$$

$$p_1 l_1 = p_2'(l_1 + \Delta l_1) \quad \text{и} \quad p_1 l_1 = p_3'(l_1 + \Delta l_2).$$

Решая полученные уравнения относительно p_1, найдем:

$$p_1 = \frac{\varrho g h}{2}\left[\sqrt{\frac{\Delta l_1(\Delta l_2 - \Delta l_1 \sin\alpha)}{\Delta l_2(\Delta l_1 - \Delta l_2 \sin\alpha)}} - \sqrt{\frac{\Delta l_2(\Delta l_1 - \Delta l_2 \sin\alpha)}{\Delta l_1(\Delta l_2 - \Delta l_1 \sin\alpha)}}\right];$$

$$p_1 \approx 6 \text{ мм рт. ст.}$$

Пример 3. В стеклянную манометрическую трубку, запаянную с одного конца, налита ртуть. Высота столба воздуха в запаянном колене равна $2H$, причем уровень ртути в открытом колене стоит на H выше, чем в закрытом. Манометр установлен в ракете, которая начинает подниматься вертикально вверх с ускорением $a=g$. Какова будет разность уровней ртути в коленах манометра при подъеме ракеты, если в кабине ракеты поддерживается нормальное атмосферное давление?

Р е ш е н и е. При движении тел вертикально вверх с ускорением на эти тела со стороны опоры действует сила нормального давления, сообщающая им ускорение, модуль которого равен $g+a$. Такая же по модулю, но противоположная по направлению сила действует и на опору. Эффект получается такой, как если бы ускорение свободного падения $\vec{g}$ возросло на величину $\vec{a}$. В результате вес тел в движущейся системе возрастает и становится равным не ϱgV, а $\varrho(g+a)V$.

Аналогичное явление происходит и при подъеме манометра в ракете. Перед стартом ракеты воздух в закрытом колене манометра был сжат до такой степени, что уравновешивал атмосферное давление и давление столбика ртути в открытом колене. Как только ракета начнет подниматься вверх с ускорением $\vec{a}$, давление столба ртути на поверхность *1 — 1* (рис. 9.2) возрастет, ртуть начнет переливаться в закрытое колено, сжимая находящийся там воздух. Разность уровней ртути будет уменьшаться до тех пор, пока упругость воздуха не достигнет значения, необходимого для равновесия.

Таким образом, при ускоренном движении ракеты происходит изотермическое сжатие воздуха в закрытом колене, вызванное увеличением веса ртути.

Поскольку в процессе сжатия температура и масса воздуха остаются неизменными, параметры состояния газа подчиняются закону Бойля — Мариотта.

Если в неподвижной ракете давление и высота столба воздуха в закрытом колене были равны p_1 и $2H$, а при ускоренном подъеме — p_2 и H_2, то должно быть

$$p_1 2H = p_2 H_2,$$

так как сечение трубки всюду одинаково.

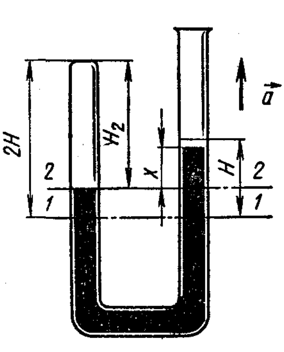

Рис. 9.2

По условию задачи исходная высота воздушного столба задана, поэтому дальнейшее решение задачи состоит в том, чтобы представить в развернутом виде параметры p_1 и p_2, а также высоту H_2, выразив их через заданные и искомые величины.

Выбрав поверхность нулевого уровня по границе *1 — 1*, согласно закону Паскаля запишем:

$$p_1 = p_a + \varrho gH,$$

где $p_а$ — атмосферное давление; H — разность уровней ртути в сосудах в неподвижной ракете; ϱ — плотность ртути.

Выбирая поверхность одного уровня по границе $2-2$ для каких-нибудь двух произвольных точек, лежащих на этой поверхности, при относительном равновесии жидкости в сосудах будем иметь:

$$p_2 = p_а + \varrho(g+a)x,$$

где $\varrho(g+a)x$ — давление столба ртути, поднимающейся вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$; x — разность уровней ртути в сосудах во время движения ракеты.

Высоту столба воздуха H_2 во втором состоянии можно выразить через начальную высоту $2H$, начальную разность уровней ртути H и конечную разность x. Как видно из чертежа,

$$H_2 = 2H - \frac{H-x}{2}.$$

(Второй член правой части равенства численно равен смещению уровней ртути от начального положения.)

Подставив выражения для p_1, p_2 и H_2 в формулу закона Бойля — Мариотта, мы и получим окончательное уравнение для определения неизвестной величины x:

$$(p_а + \varrho gH)\,2H = [p_а + \varrho(g+a)x]\left(2H - \frac{H-x}{2}\right).$$

Или, если учесть, что $p_а = \varrho gH_0$ и $a = g$, после сокращений получим:

$$4(H+H_0)H = 3HH_0 + 2x^2 + 6Hx,$$

откуда

$$x = \frac{\sqrt{17H^2 + 2HH_0} - 3H}{2}.$$

Пример 4. Компрессор захватывает при каждом качании воздух объемом $v = 1$ л при нормальном атмосферном давлении и температуре $T_1 = 273$ К и нагнетает его в автомобильный баллон, объем которого $V = 0{,}5$ м^3; температура воздуха в баллоне $T_2 = 290$ К. Сколько качаний должен сделать компрессор, чтобы площадь соприкосновения покрышки с полотном дороги уменьшилась на $\Delta S = 100$ см^2, если до этого она равнялась $S = 450$ см^2 и на колесо приходится нагрузка $F = 4{,}9$ кН?

Решение. В процессе работы компрессора воздух, нагнетаемый в баллон, сжимается от объема, занимаемого им в атмосфере, до объема в камере автопокрышки. В результате упругость баллона возрастает и площадь его соприкосновения с дорогой уменьшается. Следует заметить, что в баллоне и до этого мог находиться воздух, именно поэтому в условии задачи и говорится об уменьшении площади соприкосновения покрышки с дорогой, вызванном увеличением давления, но не о самой площади соприкосновения, величина которой, помимо прочего, зависит от полного давления в баллоне.

Так как при переходе воздуха из свободного состояния в сжатое изменяются его давление, объем и температура, то основным уравнением, характеризующим процесс, служит уравнение объединенного газового закона Клапейрона.

В первом состоянии (в атмосфере) параметры состояния воздуха равны соответственно p_1, V_1, T_1. Во втором состоянии (в баллоне) этот же воздух после n качаний компрессора будет сжат до давления p_2, займет объем баллона V_2 и нагреется до температуры T_2. Объем баллона считается при этом неизменным. Параметры первого и второго состояний воздуха связаны между собой уравнением

$$\frac{p_1V_1}{T_1}=\frac{p_2V_2}{T_2}.$$

По условию задачи нам даны $p_1=p_0$, $V_2=V$, T_1 и T_2, поэтому нужно расшифровать V_1 и p_2.

Если при одном качании компрессор захватывает воздух в объеме v, то весь воздух, содержащийся в объеме V_1, будет перекачан из атмосферы в баллон за n качаний, т. е.

$$V_1=nv.$$

Чтобы определить давление p_2, нужно учесть следующее. Если до того, как баллон стали накачивать, в нем уже было начальное избыточное давление[1] $p_и$ и площадь соприкосновения покрышки с дорогой равнялась S, то

$$p_и=\frac{F}{S},$$

где F — нагрузка, приходящаяся на колесо. После того как баллон подкачали, избыточное давление в нем возросло на p_2 и стало равным $p_и+p_2$; площадь соприкосновения с полотном дороги уменьшилась на ΔS и стала равной $S-\Delta S$. Так как нагрузка на колесо осталась прежней, то

$$p_и+p_2=\frac{F}{S-\Delta S}.$$

Исключая из последних двух равенств начальное давление $p_и$ и подставляя в исходное уравнение вместо параметров V_1 и p_2 их выражения, мы получим уравнение объединенного газового закона в окончательном виде:

$$\frac{p_1nv}{T_1}=\frac{F\Delta SV}{S(S-\Delta S)T_2},$$

[1] Избыточным давлением называется давление сверх атмосферного.

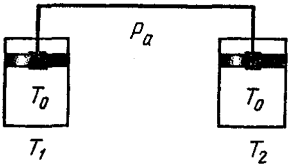

Рис. 9.3

откуда

$$n = \frac{F\Delta SVT_1}{p_1 S (S - \Delta S) vT_2} = 148$$

Пример 5. Поршни двух одинаковых цилиндров связаны между собой жесткой тягой так, что объемы под поршнями равны. Под поршнями находится одинаковое количество газа при температуре T_0. Каково будет давление в цилиндрах, если один из них нагреть до температуры T_1, а второй охладить до температуры T_2? Чему будет равно при этом относительное изменение объема газа в каждом цилиндре? Весом поршней и тяги пренебречь, трение не учитывать, атмосферное давление p_a.

Решение. В задаче рассматривают два состояния двух одинаковых газов, заключенных в разные цилиндры (рис. 9.3) Поршни этих цилиндров связаны между собой жесткой тягой и могут скользить без трения. В такой системе изменение давления или объема одного из газов вызывает изменение параметров состояния другого газа. Причем изменения объемов газа под поршнями будут всегда равны между собой, так как по условию задачи сами цилиндры и объемы под поршнями одинаковые, а поршни связаны друг с другом жестко. Что касается давлений газов, то они могут быть разными. На них накладывается лишь единственное ограничение: в сумме эти давления должны уравновесить давление, производимое на поршни снаружи.

При нагревании одного газа и охлаждении другого у каждого из них изменяются все три параметра состояния: давление, объем и температура.

Рассмотрим газ в левом сосуде. До нагревания он находился под давлением p_1, занимал объем V_1 и имел температуру T_0; после нагревания эти параметры имеют значения p_2, V_2 и T_1 Поскольку масса газа не менялась, то

$$\frac{p_1 V_1}{T_0} = \frac{p_2 V_2}{T_1}. \tag{1}$$

До охлаждения газа, содержащегося в правом сосуде, его давление, объем и температура имели значения p_1, V_1, T_0; после охлаждения — p_3, V_3, T_2. Масса газа при нагревании не менялась, поэтому

$$\frac{p_1 V_1}{T_0} = \frac{p_3 V_3}{T_2}. \tag{2}$$

Поскольку поршни находятся в равновесии, то должно быть в первом случае:

$$2p_a = 2p_1, \tag{3}$$

во втором:

$$2p_а = p_2 + p_3. \tag{3'}$$

Относительное изменение объема газа в каждом цилиндре равно:

$$x = \frac{V_1 - V_2}{V_1} = \frac{V_1 - V_3}{V_1} \tag{4}$$

Из уравнений (1) (4) находим:

$$p_2 = \frac{2T_1}{T_1 + T_2} p_а, \qquad p_3 = \frac{2T_2}{T_1 + T_2} p_а;$$

$$x = \frac{2T_0 - T_1 - T_2}{2T_0}.$$

Пример 6. Сосуд емкостью $2V = 2 \cdot 10^{-3}$ м^3 разделен пополам полупроницаемой перегородкой. В одну половину сосуда введен водород массой $m_в = 2$ г и азот массой $m_а = 28$ г, в другой половине вакуум. Через перегородку может диффундировать только водород. Во время процесса поддерживается температура $T = 373$ К. Какие давления установятся в обеих частях сосуда?

Решение. При заполнении одной половины сосуда смесью газов молекулы водорода будут диффундировать через перегородку в другую половину сосуда до тех пор, пока давления водорода по обе стороны перегородки не сравняются. Так как перегородка делит сосуд на равные объемы и температура в них одна и та же, во вторую половину сосуда продиффундирует ровно половина начального количества водорода. После этого в одной части сосуда окажется смесь азота с водородом, в другой — продиффундированный водород.

Для решения задачи нужно составить уравнение Менделеева — Клапейрона для каждого компонента газа: отдельно для азота и отдельно для водорода. Эти уравнения позволят определить давление каждого газа, после чего, используя закон Дальтона, легко найти давление смеси азота с водородом в одной половине сосуда и водорода в другой.

Если объем сосуда равен $2V$, то в половине этого объема азот массой $m_а$ при температуре T будет производить давление $p_а$ и

$$p_а V = \frac{m_а}{M_а} RT, \tag{1}$$

где $M_а$ — молярная масса азота.

В том же объеме при той же температуре после диффузии оставшийся водород массой $m_в/2$ будет производить давление $p_в$, причем

$$p_в V = \frac{m_в}{2M_в} RT, \tag{2}$$

где $M_в$ — молярная масса водорода.

Согласно закону Дальтона полное давление газа в этой части сосуда станет равным:

$$p = p_а + p_в. \tag{3}$$

По другую сторону перегородки давление водорода будет равно $p_в$. Уравнениями (1) — (3) условия задачи представлены полностью.

При проведении числовых расчетов в задачах с применением уравнения Менделеева — Клапейрона приходится пользоваться молярными массами газов, определяя их с помощью таблиц. В таблицах же даются значения относительных атомных масс элементов. Поэтому для нахождения молярной массы того или иного газа нужно прежде всего установить, сколько атомов входит в состав его молекулы. В нашей задаче, например, дается азот и водород. В свободном состоянии молекулы азота и водорода содержат не один, а два атома. Поэтому молярные массы этих газов будут равны соответственно $M_а = 2{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль и $M_в = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Эти значения мы и должны взять при расчете.

Из уравнений (1) — (3) находим:

$$p_в = \frac{m_в}{2M_в}\frac{RT}{V}; \quad p_в \approx 150 \text{ кПа};$$

$$p = \left(\frac{m_в}{2M_в} + \frac{m_а}{M_а}\right)\frac{RT}{V}; \quad p \approx 460 \text{ кПа}.$$

Пример 7. В откачанной ампуле объемом $V = 3$ см^3 содержится радий массой $m = 5$ мг в течение времени $\tau = 1$ год. В результате радиоактивного распада из радия массой $m_0 = 1$ г за время $\tau_0 = 1$ с вылетает $n_0 = 3{,}7 \cdot 10^{10}$ альфа-частиц, представляющих собой ядра гелия. Какое давление будет производить гелий при температуре $T = 300$ К?

Решение. Нам задано одно состояние гелия и дается ряд дополнительных условий, позволяющих определить массу газа. Для решения задачи нужно использовать основное уравнение газового состояния.

Если в закрытой ампуле объемом V находится ν молей гелия под давлением p при температуре T, то согласно уравнению Менделеева — Клапейрона

$$pV = \nu RT.$$

Число молей гелия, образовавшегося в результате рекомбинации альфа-частиц, вылетающих из радия, можно найти двумя способами: используя дополнительные условия задачи, определить массу гелия и, найдя с помощью таблиц его молярную массу, разделить m на M или по тем же дополнительным данным найти число атомов гелия N, образовавшихся в ампуле к интересующему нас моменту времени, и, зная число Авогадро $N_А$, определить ν из формулы $\nu = \frac{N}{N_A}$. Воспользуемся вторым способом.

Если из радия массой m_0 за время τ_0 вылетает n_0 альфа-частиц, то из радия массой m за время τ вылетит число частиц, равное

$$N = \frac{n_0 m \tau}{m_0 \tau_0}.$$

Число молей гелия, заключенного в ампуле, в этом случае равно:

$$\nu = \frac{n_0 m \tau}{m_0 \tau_0 N_A},$$

и уравнение состояния газа можно представить в окончательном виде так:

$$pV = \frac{n_0 m \tau}{m_0 \tau_0 N_A} RT.$$

Отсюда после подстановки числовых значений получим:

$$p \approx 8 \text{ Па}.$$

Пример 8. По газопроводной трубе идет углекислый газ под давлением $p = 392$ кПа при температуре $T = 280$ К. Какова средняя скорость движения газа в трубе, если через поперечное сечение трубы, равное $S = 5$ см^2, за $\tau = 10$ мин протекает газ массой $m = 20$ кг?

Решение. В задаче рассматривается одно состояние равномерно движущегося газа. Поэтому, какой бы слой газа мы ни выбрали в движущемся потоке, параметры его состояния должны удовлетворять уравнению Менделеева—Клапейрона.

Выделим в трубе некоторый объем V, содержащий газ массой m, этот газ весь проходит через поперечное сечение трубы S за время τ. Если газ находится под давлением p и имеет температуру T, то

$$pV = \frac{m}{M} RT, \qquad (1)$$

где $M = 4,4 \cdot 10^{-2}$ кг/моль — молярная масса углекислого газа CO_2.

Объем газа можно выразить через сечение S и высоту выделенного цилиндра: $V = Sl$. За время τ через сечение трубы проходит весь газ, заключенный в объеме этого цилиндра, поэтому при скорости v движения газа должно быть $l = v\tau$ и

$$V = Sv\tau. \qquad (2)$$

Решение уравнений (1) — (2) относительно скорости движения газа дает:

$$v = \frac{mRT}{MpS\tau}; \quad v \approx 9 \text{ м/с}.$$

Пример 9. Сколько гелия потребуется для наполнения воздушного шара диаметром $d=10$ м, чтобы шар мог поднять груз весом $P=9{,}8$ кН при нормальном атмосферном давлении и температуре $T=290$ К? Объемом груза пренебречь.

Решение. Для подъема воздушного шара необходимо, чтобы выталкивающая сила, равная по модулю весу вытесненного им воздуха $P_в$, была бы больше или в крайнем случае равна весу газа $P_г$, наполняющего оболочку шара, и весу P груза, т. е. $P_в \geqslant P_г + P$, или

$$m_в g \geqslant m_г g + P, \qquad (1)$$

где $m_в$ — масса воздуха, вытесненного шаром; $m_г$ — масса газа (гелия), наполняющего оболочку.

Если бы масса воздуха $m_в$ была известна, то из этого уравнения можно было бы определить массу гелия. Чтобы найти $m_в$, воспользуемся уравнением Менделеева — Клапейрона.

Воздух, окружающий шар, находится под атмосферным давлением $p_а$ и имеет температуру T, поэтому для воздуха, имеющего объем оболочки V, уравнение газового состояния дает:

$$p_а V = \frac{m_в}{M_в} RT, \qquad (2)$$

где $M_в = 2{,}9 \cdot 10^{-2}$ кг/моль — молярная масса воздуха.

И наконец, последним соотношением, которое нужно использовать в решении, является формула

$$V = \frac{\pi d^3}{6}, \qquad (3)$$

поскольку нам известен диаметр воздушного шара d, а не его объем.

Из уравнений (1) — (3) находим массу гелия:

$$m_г = \frac{M_в p_а \pi d^3}{6RT} - \frac{P}{g}; \quad m_г \approx 530 \text{ кг}.$$

Пример 10. В цилиндре с площадью основания $S=100$ см^2 находится воздух при температуре $T=290$ К. На высоте $H=0{,}60$ м от основания цилиндра расположен легкий поршень, на котором лежит гиря массой $m=100$ кг. Какую работу совершит газ при расширении, если его нагреть на $\Delta T=50$ К? Атмосферное давление $p_а=10^5$ Па.

Решение. В процессе нагревания газ расширяется и совершает работу по преодолению силы тяжести груза и силы атмосферного давления, действующих на поршень. Так как эти силы постоянные, то при достаточно медленном нагревании газ будет расширяться изобарически и его работу можно вычислить по формуле

$$A = \frac{m}{M} R\Delta T \quad \text{или} \quad A = p\Delta V.$$

По условию задачи нам задан объем газа в исходном состоянии, но не указано, что это за газ. Поэтому нужно воспользоваться второй формулой.

Если при температуре T_1 газ занимал объем V_1, а после нагревания до температуры T_2 стал занимать объем V_2, то работа расширения равна:

$$A = p(V_2 - V_1), \qquad (1)$$

где p — давление, производимое газом на поршень.

При равновесии поршня это давление в каждый момент времени уравновешено атмосферным давлением p_a и давлением $\frac{mg}{S}$, создаваемым гирей:

$$p = p_a + \frac{mg}{S}. \qquad (2)$$

Поскольку газ расширяется изобарически, параметры начального и конечного состояний газа связаны равенством

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}, \qquad (3)$$

или

$$\frac{HS}{T_1} = \frac{V_2}{T_2},$$

так как по условию задачи известны площадь и начальная высота столба газа H.

Решая уравнения (1) — (3) совместно, получим:

$$A = \left(p_a + \frac{mg}{S}\right)\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) HS; \quad A \approx 207 \text{ Дж}.$$

Пример 11. Какое количество теплоты необходимо для нагревания на $\Delta T = 16$ К кислорода массой $m = 7 \cdot 10^{-3}$ кг, находящегося в цилиндре под поршнем, на котором лежит груз, если молярная теплоемкость кислорода при нагревании его при постоянном объеме равна $C_{mV} = 2{,}1 \cdot 10^{-2}$ Дж/(моль · К)? Трение между поршнем и цилиндром не учитывать.

Решение. При изобарическом нагревании кислорода под поршнем цилиндра часть энергии, подводимой к газу, идет на увеличение его внутренней энергии, часть — на совершение работы по перемещению поршня. Вследствие большого теплового расширения газов количество теплоты, расходуемое на совершение работы по преодолению внешних сопротивлений, соизмеримо с количеством теплоты, идущим на увеличение внутренней энергии газа. Процесс теплопередачи при изобарическом расширении кислорода в цилиндре описывается уравнением первого закона термодинамики:

$$Q = \Delta U + A,$$

которое нам необходимо записать в развернутом виде.

Если ν молей кислорода нагреть на ΔT, то внутренняя энергия газа увеличится на

$$\Delta U = C_{mV}\nu\Delta T.$$

Эту формулу можно представить иначе, выразив ν через массу кислорода m и его молярную массу M:

$$\Delta U = C_{mV}\frac{m}{M}\Delta T.$$

Так как масса, молярная масса и изменение температуры газа известны, работу газа при изобарическом процессе нужно рассчитать по формуле

$$A = \frac{m}{M}R\Delta T.$$

Подставляя вместо ΔU и A их выражения в исходное уравнение энергетического баланса, получим окончательную формулу для подсчета количества теплоты, необходимого для нагревания кислорода:

$$Q = \left(C_{mV} + R\right)\frac{m}{M}\Delta T; \quad Q \approx 102 \text{ Дж}.$$

Пример 12. Сечение поршня паровой машины равно $S = 100$ см^2, ход поршня $l = 50$ см. Пар поступает в цилиндр под давлением $p_1 = 196$ кПа, которое в процессе смещения поршня на $\Delta l = 1$ см равномерно понижается на $\Delta p = 1{,}96$ кПа. Какую мощность развивает машина, когда вал ее делает $f = 240$ об/мин?

Решение. Если в цилиндр ввести пар при избыточном давлении p, поршень начнет перемещаться и приведет во вращение вал. Полагая, что работа расширения пара целиком идет на создание мощности машины, эту мощность можно вычислить по формуле

$$N = \frac{A_1}{t}, \tag{1}$$

где A_1 — работа пара за один ход поршня; t — продолжительность хода.

В данном случае в отличие от ранее разобранных примеров пар расширяется не изобарически. Чтобы вычислить работу расширения газа при переменном давлении с помощью формулы $A = p\Delta V$, нужно знать среднее давление $p_{ср}$. Тогда $A = p_{ср}\Delta V$.

Если давление изменяется пропорционально смещению поршня, то

$$p_{ср} = \frac{p_1 + p_2}{2},$$

где p_1 и p_2 — давления в начале и в конце рассматриваемого перемещения.

Допустим, что в крайних положениях поршня (в начале и в конце процесса расширения пара) давление и объем пара в цилиндре были равны соответственно p_1, V_1 и p_2, V_2, тогда при одном ходе поршня пар совершит работу

$$A_1 = \frac{p_1 + p_2}{2}\left(V_2 - V_1\right).$$

По условию задачи при перемещении поршня на единицу длины ($\Delta l = 1$ см) давление пара уменьшается на величину Δp, поэтому в конце хода поршня, когда смещение достигает величины l, давление понизится на $\frac{\Delta p}{\Delta l} l$ и станет равным

$$p_2 = p_1 - \frac{l}{\Delta l}\Delta p.$$

Если сечение цилиндра равно S и ход поршня l, то максимальное приращение объема пара равно:

$$V_2 - V_1 = Sl.$$

С учетом двух последних равенств формулу работы пара за один ход можно представить в виде:

$$A_1 = \left(p_1 - \frac{l}{\Delta l}\frac{\Delta p}{2}\right) Sl. \qquad (2)$$

Продолжительность одного хода поршня легко определить, зная скорость вращения вала f. За один ход поршня вал делает полоборота, поэтому в формуле

$$t = \frac{n}{f} \qquad (3)$$

нужно взять число оборотов $n = 0{,}5$.

Подставляя выражения (2) и (3) в формулу мощности (1) и проводя вычисления, получим:

$$N = \left(p_1 - \frac{l}{\Delta l}\frac{\Delta p}{2}\right) Sl \frac{f}{n}; \quad N \approx 6 \text{ кВт}.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 9

9.1. Если давление, под которым находится газ, изменить на 200 Па, то объем газа изменится на 3 л. Если давление изменить на 500 Па, объем изменится на 5 л. Каковы были начальный объем и давление газа? Температура газа во время опыта не менялась.

9.2. Вертикальный цилиндр высотой $2l$ разделен посредине легким подвижным поршнем. В поршне имеется отверстие, закрытое пробкой, по обе стороны поршня находится одинаковое количество воздуха при давлении p. На какое расстояние нужно сдвинуть поршень, чтобы вылетела пробка, если она вылетает при избыточном давлении Δp?

9.3. На какой глубине пузырьки воздуха имеют диаметр, вдвое меньший, чем у поверхности воды, если барометрическое давление на уровне воды равно 101 кПа?

9.4. В U-образную манометрическую трубку с сечением 1 см^2 налита ртуть; уровни ртути в обоих коленах одинаковы. Объем воздуха в запаянном колене 10 см^3. Сколько ртути нужно налить в открытое колено, чтобы его наполнить? Атмосферное давление равно 101 кПа, оба колена манометра одинаковы.

9.5. Трубка длиной l, открытая с обоих концов, наполовину погружена в ртуть. Трубку закрывают пальцем и вынимают из ртути. Чему равна длина столбика ртути, оставшегося в трубке? Атмосферное давление уравновешивается столбом ртути высотой H.

9.6. Ртуть в барометрической трубке стоит на 4 см выше уровня ртути в стакане. На сколько нужно опустить трубку, чтобы уровни ртути сравнялись, если столб воздуха над ртутью в начальном положении трубки имел высоту 19 см? Атмосферное давление нормальное.

9.7. Узкая трубка, закрытая с одного конца, содержит воздух, отделенный от наружного воздуха столбиком ртути. Когда трубка обращена закрытым концом кверху, запертый ртутью воздух занимает часть трубки длиной l_1. Если же трубку перевернуть кверху открытым концом, этот воздух займет часть трубки длиной l_2. Определите атмосферное давление, если длина ртутного столбика в трубке h.

9.8. В Ш-образную трубку, запаянную с одного конца, налита жидкость таким образом, что в правом колене остался воздух (рис. 9.4). Сечение всех трубок одинаково, плотность жидкости ϱ, атмосферное давление p_0. На какую высоту нужно поднять поршень $П$, чтобы уровни жидкости в открытом и запаянном коленах сравнялись? Массой поршня и трением пренебречь, давление паров жидкости не учитывать.

9.9. В сосуд, имеющий форму куба с ребром 10 см, до половины налита вода. Через крышку сосуда проходит короткая трубка сифона, достающая дно. Длинное колено сифона опускают вертикально вниз, и конец его лежит на 170 см ниже уровня воды в сосуде. Сифон приводят в действие и сразу же сосуд герметически закрывают. Сколько воды вытечет из сосуда? Атмосферное давление нормальное. Объемом трубки сифона пренебречь.

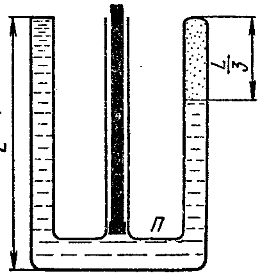

Рис. 9.4

9.10. Сколько качаний при постоянной температуре нужно сделать поршневым насосом, захватывающим при каждом качании воздух объемом v_0, чтобы давление в сосуде уменьшилось в k раз по сравнению с первоначальным? Начальное давление в сосуде равно p_1, объем сосуда V. Сколько качаний нужно сделать другим насосом с тем же рабочим объемом v_0, чтобы, нагнетая воздух из атмосферы, довести давление в сосуде до прежней величины? Атмосферное давление равно p_0.

9.11. Тонкий стакан массой 50 г ставят вверх дном на поверхность воды и медленно погружают так, что он все время остается в вертикальном положении. Высота стакана 10 см, площадь дна 20 см^2. На какую минимальную глубину надо опустить стакан, чтобы затем он сам утонул? Атмосферное давление нормальное, давлением паров воды в стакане и толщиной его стенок пренебречь.

9.12. Закрытый тонкостенный цилиндрический сосуд высотой H до половины залит маслом плотностью ϱ_1 при атмосферном давлении p_0. Сосуд плавает в воде так, что уровень масла совпадает с уровнем воды. На дне сосуда образовалось небольшое отверстие. На сколько изменится уровень масла в сосуде к тому моменту, когда система придет в равновесие?

9.13. Заполненный газом закрытый горизонтальный цилиндр длиной l и объемом V разделен пополам тонким поршнем массой m. Поршень может скользить в цилиндре без трения. Давление газа в цилиндре p. На сколько сместится поршень, если цилиндр начнет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением $\vec{a}$?

9.14. Стеклянная трубка, запаянная с одного конца, расположена горизонтально. В трубке находится воздух, отделенный от атмосферы столбиком ртути длиной l. Длина трубки $2l$, длина столбика воздуха $l/2$, атмосферное давление $p_0 = \varrho g h_0$. На какое расстояние сместится ртуть в трубке, если трубку вращать вокруг вертикальной оси, проходящей через открытый (закрытый) конец с угловой скоростью $\omega = \sqrt{g/l}$?

9.15. Трубка длиной l и сечением S запаяна с одного конца и подвешена к динамометру открытым концом вниз. В трубке находится воздух, запертый столбиком ртути, доходящей до открытого конца трубки. Показания динамометра F. С каким ускорением $\vec{a}$ нужно поднимать систему, чтобы показания динамометра возросли вдвое? Атмосферное давление p_0, сопротивлением воздуха и массой трубки пренебречь.

9.16. Два сосуда соединены между собой тонкой трубкой с краном. Емкость первого сосуда $2 \cdot 10^{-3}$ м^3, он содержит газ под давлением 170 кПа. Емкость второго сосуда $3{,}2 \cdot 10^{-3}$ м^3, он содержит такой же газ под давлением 55 кПа. Какое давление установится в сосудах после того, как открыть кран соединительной трубки?

9.17. В баллоне находилось некоторое количество газа при нормальном атмосферном давлении. При открытом вентиле баллон был нагрет, после чего вентиль закрыли и газ остыл до температуры 283 К. При этом давление в баллоне упало до 70 кПа. На сколько нагрели баллон?

9.18. Давление воздуха внутри плотно закупоренной бутылки при температуре 280 К было равно 100 кПа. На сколько нужно нагреть бутылку, чтобы из нее вылетела пробка, если известно, что из холодной бутылки без нагревания пробку можно вынуть силой 10 Н? Сечение пробки 4 см^2.

9.19. Цилиндрическая пробирка длиной l, содержащая некоторое количество газа при температуре T_1, полностью погружена в жидкость плотностью ϱ. Жидкость внутри пробирки доходит до ее середины. Пробирку вынимают из жидкости так, что она едва касается поверхности открытым концом. Как надо изменить температуру газа в пробирке, чтобы его объем остался прежним? Внешнее давление равно p_0.

9.20. В контейнере высотной ракеты начальное давление было равно 100 кПа. При подъеме ракеты с ускорением, численно равным g, установленный в контейнере ртутный барометр стал показывать давление 60 кПа. Во сколько раз увеличилась температура внутри контейнера при взлете ракеты?

9.21. Теплоизолированный сосуд разделен теплопроводящей перегородкой на две камеры. Камеры заполняют одинаковыми газами, начальные температуры и давления которых соответственно T_1, p_1 и T_2, p_2. Каково будет отношение давлений газа в камерах после того, как процесс теплообмена закончится? Теплоемкостью сосуда и перегородки пренебречь.

9.22. Сколько баллонов водорода емкостью 50 л при давлении 40,5 МПа и температуре 300 К потребуется для наполнения аэростата объемом 1000 м^3, если давление в нем при температуре 280 К должно быть равно 98 кПа? Изменится ли ответ, если водород выпускать не сразу из всех баллонов, а поочередно, сначала из одного баллона, потом из другого и т. д.?

9.23. Компрессор всасывает в 1 мин 3 м^3 сухого воздуха при температуре 290 К и давлении 100 кПа и нагнетает его в резервуар, объем которого 8,5 м^3. За какое время компрессор накачает воздух в резервуар до давления 700 кПа? Температура в резервуаре 300 К, перед накачиванием он был заполнен воздухом при давлении 200 кПа.

9.24. Баллон емкостью 20 л наполнен сжатым воздухом. При 293 К манометр показывает давление 11,8 кПа. Какой объем воды можно вытеснить из цистерны подводной лодки воздухом этого баллона, если впуск воздуха в цистерну производится на глубине 30 м при 288 К? Давление столба морской воды высотой 10 м принять равным 98 кПа.

9.25. Запаянная с одного конца трубка длиной l опущена в воду так, что над поверхностью воды выступает 1/5 ее длины и уровень воды в трубке совпадает с уровнем ее в сосуде. До какой температуры нужно нагреть воздух в трубке, чтобы из нее вышла вся вода? Атмосферное давление p_0. Начальная температура T_1. Изменением уровня воды в сосуде пренебречь.

9.26. U-образная трубка, запаянная с одного конца, содержит при 273 К столбик воздуха высотой 24 см, запертый ртутью, доходящей до открытого конца трубки. Воздух нагревают до температуры T и затем охлаждают до первоначальной температуры, уровень ртути в открытом колене при этом понижается на 6 см. До какой температуры нагревали воздух в трубке? Атмосферное давление нормальное.

9.27. Вследствие того что в барометрическую трубку попал воздух при температуре 253 К и давлении 770 мм рт. ст., барометр показывает давление 765 мм рт. ст. Какое давление покажет барометр при нормальных условиях? Длина трубки 1 м, тепловое расширение ртути не учитывать.

9.28. В середине смежных баллонов, размеры которых указаны на рисунке 9.5, находятся поршни, соединенные легким стержнем. Между вертикальными стенками баллонов и поршнями находится воздух при атмосферном давлении и температуре T, пространство между поршнями сообщается с атмосферой. Определите: а) расстояние, на которое сместятся поршни, если воздух за большим поршнем нагреть на ΔT, а за меньшим на столько же охладить; б) силу упругости F, возникающую в стержне.

9.29. В двух закрытых сообщающихся сосудах над поверхностью ртути (рис. 9.6) находится воздух при температуре T и давлении p. Уровни ртути в сосудах расположены на расстоянии H от крышек. Площадь поперечного сечения первого сосуда вдвое больше, чем второго. При нагревании воздуха во втором сосуде давление воздуха в первом сосуде возрастает в два раза. До какой температуры нагревался воздух во втором сосуде? Температура воздуха в первом сосуде остается постоянной, плотность ртути ϱ, давлением паров ртути пренебречь.

9.30. Воздух в пробирке (рис. 9.7) заперт ртутью. Атмосферное давление $p_0 = \varrho g h$, температура воздуха T_1. До какой минимальной температуры T_2 нужно нагреть воздух в пробирке, чтобы из нее вылилась вся ртуть? Какова будет высота столбика ртути в пробирке в тот момент, когда температура воз-

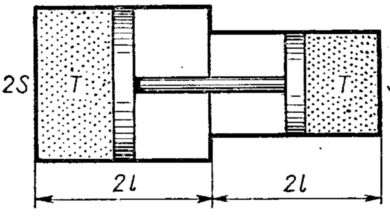

Рис. 9.5

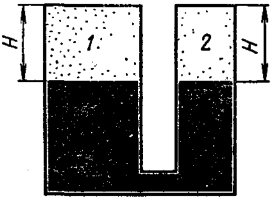

Рис. 9.6

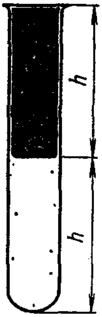

Рис. 9.7

духа достигла значения T_2? Какова будет температура газа в тот момент, когда выльется вся ртуть? Начертите диаграмму процесса расширения газа в координатах (p, V) и (T, V).

9.31. Для создания искусственной кометы при запуске первого спутника Земли было предусмотрено устройство, испаряющее 1 кг натрия. Какой объем занимали пары натрия в верхних слоях атмосферы при давлении 1,33 кПа и температуре 200 К? Относительная атомная масса натрия 23.

9.32. В баллоне емкостью $5 \cdot 10^{-3}$ м^3 находится оксид углерода (IV). Ртутный манометр, подключенный к баллону, показывает давление 50 кПа при наружном давлении 100 кПа. Температура газа в баллоне 400 К. Определите число молей газа в баллоне, массу газа и концентрацию молекул.

9.33. Плотность пара некоторого соединения углерода и водорода равна 2,5 кг/м^3 при температуре 283 К и давлении 101 кПа. Какова молекулярная формула этого соединения?

9.34. Сколько электронов заключается в 1 л кислорода при давлении 1 МПа и температуре 473 К?

9.35. Манометр стального баллона объемом 10 л, наполненного водородом, показал при температуре 288 К давление 13 МПа. Через некоторое время при 293 К манометр показывал 12 МПа. Какова масса вытекшего газа?

9.36. Сколько водорода содержал баллон, если он взорвался при температуре 1073 К? Баллон был рассчитан на хранение азота массой 1 кг при температуре 293 К при десятикратном запасе прочности.

9.37. Внутри закрытого с обоих концов горизонтального цилиндра имеется тонкий поршень, который может скользить в цилиндре без трения. С одной стороны поршня находится водород массой 3 г, с другой — азот массой 17 г. Какую часть объема цилиндра занимает водород?

9.38. Вертикальный цилиндр, закрытый с обоих торцов, разделен поршнем. По обе стороны поршня находится по одному молю воздуха при температуре 300 К. Отношение объема верхней части цилиндра к объему нижней равно 4. При какой температуре отношение этих объемов равно 3?

9.39. Баллон объемом V содержит воздух при давлении p. Посредством поршневого насоса с рабочим объемом v_0 воздух из баллона откачали, сделав n качаний, а затем снова накачали баллон, забирая воздух из атмосферы. При этом было сделано тоже n качаний. На сколько изменилась масса воздуха в баллоне? Атмосферное давление p_0, все процессы происходили медленно при температуре T.

9.40. Два одинаковых сосуда наполнены кислородом при температуре T_1 и соединены между собой трубкой, объем которой ничтожно мал по сравнению с объемом сосудов. Во сколько раз изменится давление кислорода в сосудах, если один из них нагреть до температуры T_2, а во втором поддерживать температуру T_1?

9.41. Стакан с площадью основания S и массой M ставят вверх дном на гладкое горизонтальное стекло. До какой температуры нужно нагреть стакан, чтобы половина содержащегося в нем воздуха смогла выйти наружу? С какой силой стакан будет давить после этого на стекло, если его температуру понизить до первоначального значения, равного T_0? Атмосферное давление равно p_0.

9.42. В герметически закрытом откачанном цилиндре находится на пружине скользящий без трения поршень, положение равновесия которого находится у дна цилиндра. Под поршень вводится такое количество газа, что поршень поднимается на высоту H при температуре T_1. На какую высоту поднимется поршень, если количество газа под ним увеличить вдвое, а температуру повысить до T_2?

9.43. В закрытом горизонтальном цилиндрическом сосуде длиной $2l$ находится ν молей идеального газа при температуре T. Цилиндр разделен пополам тонким гладким поршнем массой m. Найдите круговую частоту малых колебаний поршня, считая процесс изотермическим.

9.44. Некоторое тело находится в воздухе при нормальных условиях. При повышении температуры на $\Delta T = 10$ К вес тела увеличился на $\Delta P_1 = 1{,}96 \cdot 10^{-2}$ Н. Как изменится вес тела при увеличении температуры воздуха до $T_1 = 323$ К и увеличении давления до $p_1 = 106$ кПа? Расширением тела пренебречь.

9.45. Лазерные трубки объемом 60 см^3 должны заполняться смесью гелия и неона в молярном отношении 5:1, их общее давление должно быть при этом равно 6 мм рт. ст. Имеются два баллона с этими газами, каждый объемом $2 \cdot 10^{-3}$ м^3. Давление в баллоне с гелием равно 50 мм рт. ст., давление в баллоне с неоном —200 мм рт. ст. Сколько трубок можно наполнить, используя эти баллоны с газами?

9.46. В баллоне объемом $V = 10^{-2}$ м^3 содержится при температуре $T = 293$ К водород под давлением $p = 10$ МПа. Сколько водорода было потеряно, если при сжигании оставшегося водорода образовалась вода массой $m = 0{,}5$ кг?

9.47. Воздушный шар диаметром 10 м удерживается веревкой, массой которой можно пренебречь. На сколько изменится натяжение веревки при понижении температуры воздуха с 300 до 270 К? Атмосферное давление нормальное.

9.48. Шар объемом $V = 1$ м^3 наполнен гелием при температуре $T_1 = 300$ К и давлении $p_1 = 120$ кПа. Определите высоту, на которой шар будет находиться во взвешенном состоянии, если его оболочка имеет массу $m_0 = 0{,}3$ кг и при подъеме на высоту $l = 100$ м давление воздуха падает на $\Delta p = 133$ кПа, а температура понижается на $\Delta T = 0{,}54$ К. Атмосферное давление у поверхности Земли нормальное.

9.49. На электрической плитке, выделяющей полезную мощность 1 кВт, стоит чайник с кипящей водой. С какой скоростью пар выходит из носика чайника с отверстием площадью 1 см^2 при нормальном атмосферном давлении? Удельная теплота парообразования воды при 373 К равна 2,26 МДж/кг. При решении считать, что пар из-под крышки чайника не выходит.

9.50. В камеру сгорания ракетного двигателя ежесекундно поступает водород массой m и нужное для его полного сгорания количество кислорода. Выходное сечение сопла S, давление газа в сечении p, температура T. Определите силу тяги двигателя.

9.51. Определите плотность смеси водорода массой 0,5 г и кислорода массой 32 г при температуре 280 К и давлении 93 кПа.

9.52. Сосуд объемом 2 л заполнен оксидом углерода (IV) и оксидом азота (I). При температуре 400 К давление в сосуде 415 кПа. Определите массу каждого газа в сосуде, если молярная масса смеси равна $3{,}7 \cdot 10^{-2}$ кг/моль.

9.53. Изобразите графически три изопроцесса при постоянной массе газа в координатах (V, p), (T, V) и (T, p).

9.54. Начертите график изменения плотности идеального газа в зависимости от изменения температуры (объема, давления) при изотермическом, изобарическом и изохорическом процессах.

9.55. Каково будет относительное расположение изотерм кислорода и водорода, взятых в одинаковых количествах при одной температуре, в координатах (V, p), (T, p) и (T, V)? Решите эту же задачу для изобар (изохор) при условии, что одинаковы давления (объемы) газов.

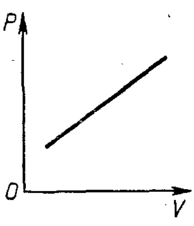

Рис. 9.8

9.56. Решите предыдущую задачу при условии, что взят газ двух разных масс.

9.57. При изотермическом расширении газа была получена зависимость p от V (рис. 9.8). Что происходило с газом в этом процессе? Как изменялась плотность газа при увеличе-

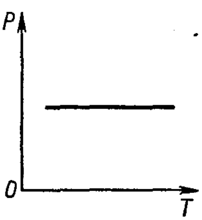

Рис. 9.9

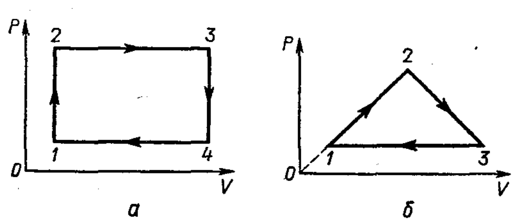

Рис. 9.10

нии объема? Нарисуйте диаграмму зависимости ϱ от V.

9.58. При изохорическом нагревании газа была получена зависимость p от T (рис. 9.9). Что происходило с газом? Как изменялась плотность газа при увеличении температуры?

9.59. На рисунке 9.10, *а, б* показано, как изменяется давление газа при изменении его объема. Начертите диаграмму, показывающую, как меняется температура газа при изменении его объема; как изменяется давление газа при изменении его температуры.

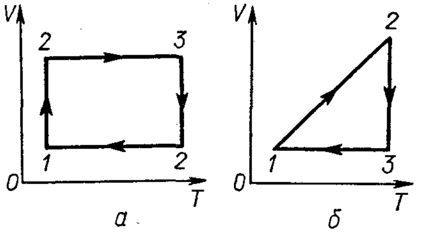

Рис. 9.11

9.60. На рисунке 9.11, *а, б* показано, как изменяется объем газа при изменении его температуры. Начертите диаграмму изменения давления газа при изменении его объема.

9.61. Баллон емкостью 10^{-3} м^3, содержащий кислород при температуре 300 К под давлением 10 МПа, нагревается. Газ получает количество теплоты 8,35 кДж. Определите температуру и давление газа после нагревания. Молярная теплоемкость кислорода при постоянном объеме равна 21 Дж/(моль · К).

9.62. Азот занимает объем 2,5 л при давлении 100 кПа. На сколько изменится внутренняя энергия газа при его сжатии до объема 0,25 л, если давление газа повысилось при этом в 20 раз? Молярная теплоемкость азота при постоянном объеме равна 21 Дж/(моль · К).

9.63. В цилиндре, площадь основания которого равна 100 см^2, находится воздух при температуре 285 К. На высоте 38 см от основания цилиндра расположен поршень, на котором находится гиря массой 100 кг. Какую работу совершит воздух, если его нагреть до 300 К? Атмосферное давление нормальное. Трением и массой поршня пренебречь.

9.64. Каковы были начальная температура T_1 и объем V_1 гелия массой $m = 5$ г, заключенного под поршнем в цилиндре, если при охлаждении его до температуры $T_2 = 273$ К потенциальная энергия груза массой $m_1 = 16$ кг, лежащего на поршне, уменьшается на $\Delta W = 39{,}2$ Дж? Площадь поршня $S = 200$ см^2, атмосферное давление нормальное.

9.65. Какую работу совершает 1 моль идеального газа при его изобарическом нагревании на 1 К?

9.66. В процессе изобарического нагревания воздух совершил работу $A = 1{,}23$ кДж. На сколько увеличилась внутренняя энергия газа и какое количество теплоты было затрачено на нагревание воздуха, если его удельная теплоемкость при постоянном объеме равна $c_V = 700$ кДж/(кг · К)? Относительная молекулярная масса воздуха равна 29.

9.67. При изобарическом нагревании газа от 288 до 340 К потребовалось количество теплоты, равное 5 кДж, при изохорическом — равное 3,56 кДж. Какой объем занимает газ при температуре 288 К и давлении 19,6 кПа?

9.68. При изобарическом нагревании 1 дм^3 воздуха, находящегося при нормальных условиях, его внутренняя энергия возросла на 271 Дж. Во сколько раз увеличился объем воздуха? Какое количество теплоты было затрачено на нагревание? Удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении равна 1 кДж/(кг · К).

9.69. При нагревании азота массой 7 г, находящегося в цилиндре под тяжелым поршнем, было израсходовано количество теплоты, равное 109 Дж. До какой температуры нагрелся газ, если его начальная температура 283 К? Молярная теплоемкость азота при его изохорическом нагревании 21 Дж/(моль · К)

9.70. 1 моль идеального газа находится в цилиндре при нормальных условиях. Газ изобарически нагревается до температуры T_1, затем изохорически охлаждается до температуры T_2, после чего изобарически сжимается до первоначального объема и потом изохорически приводится в первоначальное состояние. Какую работу совершил газ за цикл?

9.71. На рисунке 9.12 в координатах (T, p) указан цикл, происходящий с 1 моль идеального газа. Чему равна работа газа за цикл?

9.72. Идеальный газ расширяется по закону $p = \alpha V$, где α постоянный коэффициент. Найдите работу, произведенную газом, и изменение его внутренней энергии при увеличении объема газа от V_1 до V_2. Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме равна C_{mV}.

9.73. В сосуд теплоемкостью C налита вода массой m при температуре T. В воду опущен нагреватель, потребляющий от сети мощность P. Тепловая отдача нагревателя η. Сколько воды испарится за время τ, если ее температура за это время поднимается на ΔT? Расширением сосуда и воды пренебречь.

9.74. Газ, совершающий цикл Карно, отдает холодильнику k-ю часть количества теплоты, получаемого от нагревателя. Определите температуру нагревателя, если температура холодильника равна T.

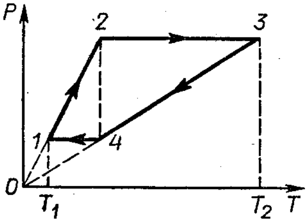

Рис 9.12

9.75. Идеальная тепловая машина имеет полезную мощность 73,5 кВт и работает в температурном интервале от 273 до 373 К. Найдите: а) энергию, получаемую машиной от нагревателя за 1 ч; б) энергию, отдаваемую холодильнику за 1 ч.

9.76. На сколько нагреется воздух в комнате объемом $V = 30$ м^3 за время $\tau = 4$ ч работы холодильника, если его производительность льда равна $m/\tau_0 = 2$ кг/сут при температуре $T_2 = 271$ K, а охлаждение начинается с температуры $T_1 = 293$ K? Удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме равна $c_V = 700$ Дж/(кг · K), удельная теплоемкость воды $c_в = 4{,}2$ кДж/(кг · K), льда $c_л = 2{,}1$ кДж/(кг · K). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 334$ кДж/кг.

ГЛАВА 10

НАСЫЩАЮЩИЕ И НЕНАСЫЩАЮЩИЕ ПАРЫ. ВЛАЖНОСТЬ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. При испарении жидкости может наступить такое состояние, при котором число молекул, вылетающих в единицу времени с открытой поверхности жидкости, будет равно числу молекул, влетающих в нее обратно. Между паром и жидкостью устанавливается подвижное — динамическое равновесие. Плотность пара над жидкостью и давление, производимое паром на стенки сосуда (упругость пара), при динамическом равновесии не меняются и имеют для данной жидкости при данной температуре максимальное значение.

Пар, давление и плотность которого имеют наибольшее значение при данной температуре, называют насыщающим Иначе, насыщающим называют пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью.

Пар, давление и плотность которого меньше давления и плотности насыщающего пара при данной температуре, называют ненасыщающим.

2. Пары, отделенные от жидкости (при неизменной массе) обладают следующими свойствами:

а) При изотермическом увеличении объема, занимаемого насыщающим паром, или при его изохорическом нагревании насыщающий пар переходит в ненасыщающий.

б) При изотермическом сжатии ненасыщающего пара или при его изохорическом охлаждении ненасыщающий пар становится насыщающим.

В процессе изотермического сжатия ненасыщающего пара его давление и плотность возрастают до тех пор, пока пар не станет насыщающим. Дальнейшее уменьшение объема сопровождается конденсацией, давление и плотность пара остаются при этом неизменными, равными давлению и плотности насыщающего пара при данной температуре.

Температуру, при которой пар становится насыщающим в результате изохорического охлаждения, называют точкой росы.

При охлаждении пара ниже точки росы начинается конденсация пара в жидкость.

в) С достаточно хорошим приближением можно считать, что ненасыщающие пары подчиняются всем основным законам идеальных газов (9.1) — (9.4).

г) Параметры каждого состояния насыщающего пара связаны между собой уравнением Менделеева — Клапейрона.

Масса насыщающего пара $m_{н.п}$, входящая в это уравнение, зависит от температуры и для двух различных состояний не может иметь одинакового значения.

Для определения давления насыщающих паров при данной температуре, если неизвестна их плотность, или же, наоборот, для определения плотности пара, если известно его давление, пользуются таблицами давления (упругости) насыщающих паров.

д) Так как в двух различных состояниях насыщающий пар имеет различную массу, параметры этих состояний законам идеальных газов (9.1) — (9.4) не подчиняются. Если же насыщающий пар переходит в ненасыщающий и его масса при этом не изменяется, то параметры состояний подчиняются всем законам идеальных газов.

е) Согласно закону Дальтона давление воздуха, содержащего водяной пар, складывается из давления сухого воздуха $p_с$ и давления паров воды $p_п$, т.е. атмосферное давление равно:

$$p_а = p_с + p_п.$$

3. Воздух, содержащий водяной пар, называют влажным. О влажности воздуха можно судить или по давлению, производимому паром (упругости водяного пара), или по его плотности $\varrho_п$. Давление, производимое паром (упругость водяного пара), называют абсолютной влажностью. Отношение плотности $\varrho_п$ (давления) водяного пара при данной температуре к плотности (давлению) насыщенного пара $\varrho_{н.п}$ при этой температуре называют относительной влажностью. Относительную влажность воздуха выражают обычно в процентах:

$$\varphi = \frac{\varrho_п}{\varrho_{н.п}} 100\% = \frac{m_п}{m_{н.п}} 100\% = \frac{p_п}{p_{н.п}} 100\%,$$

так как при одинаковой температуре

$$\frac{\varrho_п}{\varrho_{н.п}} = \frac{p_п}{p_{н.п}}.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

Задачи на пары и влажность по своему решению принципиально почти не отличаются от задач на идеальные газы. Тем не менее они вызывают у учащихся серьезные затруднения, связанные с неумением пользоваться уравнением газового состояния и попыткой искать решение путем логических рассуждений, что во многих случаях требует большой сообразительности. Особенно это относится к тем задачам, где вместо плотности насыщенного пара дается его давление.

Новым при решении задач на влажность является широкое использование таблиц упругости и плотности водяных паров и применение формулы относительной влажности. Из таблиц можно взять дополнительные данные к тем, которые известны по условию задачи, и составить вспомогательные уравнения, позволяющие вместе с основным уравнением газового состояния и законом Дальтона определить искомую величину.

Анализируя условие задачи, всегда полезно иметь в виду следующее. Если задана температура насыщающего пара, то его давление и плотность при этой температуре можно найти в таблицах, т. е. их можно считать известными. Если же заданы температура и давление (плотность) ненасыщающего пара, то его плотность (давление) определяется из уравнения Менделеева — Клапейрона без таблиц.

Давление насыщающих паров при температуре кипения жидкости равно атмосферному. Например, при температуре кипения воды (373 К) давление ее насыщающих паров равно нормальному атмосферному давлению (101 кПа).

Если известна температура ненасыщающего пара T_1 и его точка росы $T_р$, то с помощью таблиц можно определить абсолютную и относительную влажность воздуха при температуре T_1, так как при температуре $T_р$ это же количество пара будет полностью насыщать данное пространство. В общем случае порядок решения задач на влажность можно рекомендовать такой:

а) Установить число состояний газа, рассматриваемых в условии задачи, обратив особое внимание на то, дается ли чистый пар жидкости или смесь пара с сухим воздухом.

б) Для каждого состояния пара записать уравнение Менделеева—Клапейрона и формулу относительной влажности, если о последней что-либо сказано в условии. Составить уравнение Менделеева — Клапейрона для каждого состояния сухого воздуха (если дается смесь пара с воздухом). В тех случаях, когда при переходах из одного состояния в другое масса пара не меняется, вместо уравнения Менделеева — Клапейрона можно использовать сразу объединенный газовый закон. Вычисляя давление и плотность пара, следует всегда иметь в виду, что их значения не могут превышать значений этих величин для насыщающего пара при данной температуре.

С учетом формулы влажности уравнение Менделеева — Клапейрона для пара можно записать в виде:

$$p_{н.п}\varphi V = \frac{m_п}{M_п} RT, \quad \text{или} \quad p_{н.п}\varphi = \frac{\varrho_п}{M_п} RT,$$

где $p_{н.п}$ — давление, которое создавал бы пар, если бы при температуре T он был насыщающим; $\varrho_п$ — плотность пара.

в) Записать математически все дополнительные условия, связывающие величины, входящие в составленные ранее уравнения. Проверить число неизвестных в полученной системе уравнений и решить ее относительно искомой величины. Выписывая числовые значения заданных величин, нужно учесть сделанные выше замечания и использовать таблицу давления и плотности насыщающих паров при различных температурах.

Пример 1. Под колоколом насоса находится стакан, содержащий воду массой $m = 0{,}2$ кг. Насос откачивает воздух из-под колокола со скоростью $u = 8 \cdot 10^{-4}$ м^3/с. Через сколько времени вся вода испарится, если установившаяся под колоколом температура равна $T = 280$ К?

Решение. Если под колокол насоса поместить стакан с водой, то спустя некоторое время пространство под колоколом станет насыщенным водяными парами. При заданной температуре давление $p_{н.п}$ и плотность $\varrho_{н.п}$ этого пара можно считать известными, поскольку их значения могут быть найдены в таблицах. Из таблицы зависимости давления насыщающего пара от температуры находим, что при 280 К давление пара $p_{н.п} = 1$ кПа. Это значение определяет максимально возможное давление пара под колоколом при данной температуре.

Когда насос начнет работать, пары из-под колокола будут удаляться и их давление должно уменьшаться. Происходит это, однако, не сразу. Поскольку насыщающий водяной пар находится над водой и между молекулами воды и пара существует подвижное равновесие, уменьшение числа молекул пара, вызванное действием насоса, приводит к тому, что из жидкости начинает вылетать молекул больше, чем влетать в нее. Вследствие непрерывного испарения воды при работе насоса убыль молекул пара все время пополняется, в результате плотность пара, а следовательно, и давление некоторое время почти не изменяются. Само собой разумеется, что температура пара должна при этом поддерживаться постоянной.

Как только вся вода испарится, давление под колоколом начнет падать. Процесс откачки пара из-под колокола насоса до полного испарения воды удобно схематически представить так.

В сосуде находится насыщающий водяной пар, масса которого равна массе воды в стакане и давление которого при работе насоса остается неизменным. Температура пара, а значит, и давление известны, и требуется определить время, необходимое для удаления пара из сосуда при заданной скорости откачки. Применяя к данному воображаемому состоянию насыщающего пара уравнение Менделеева — Клапейрона, можно определить объем пара, а затем и время, необходимое для его откачки, зная производительность насоса. Нетрудно заметить, что это время и будет равно искомому времени τ испарения воды под колоколом.

Предположим, водяной пар массой m при температуре T насыщает пространство объемом V и производит давление $p_{н.п}$.

Тогда
$$p_{н.п} V = \frac{m}{M_п} RT, \tag{1}$$
где $M_п = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль — молярная масса водяного пара.

Если насос, откачивая пар, захватывает объем V_0 за время τ_0, то производительность насоса (скорость откачки) будет равна:
$$u = \frac{V_0}{\tau_0}, \tag{2}$$
и весь пар, находящийся в объеме V, насос откачает за время
$$\tau = \frac{V}{u}. \tag{3}$$

Это и есть время испарения всей воды.

Из уравнений (1) — (3) получим искомое время:
$$\tau = \frac{mRT}{M_п u p_{н.п}}; \quad \tau \approx 8{,}5 \text{ ч}.$$

Пример 2. В запаянной трубке объемом $V = 0{,}4$ л находится водяной пар под давлением $p_п = 8{,}5$ кПа при температуре $T_п = 423$ К. Сколько росы выпадает на стенках трубки при охлаждении воды до температуры $T_{н.п} = 295$ К? Давление насыщающих паров воды при температуре 295 К равно $p_{н.п} = 2{,}6$ кПа.

Решение. В задаче рассматривают два состояния пара в запаянной трубке — до и после охлаждения. В первом состоянии при 423 К пар был ненасыщающим (это вполне очевидно, так как даже при 373 К $p_н = 100$ кПа), поэтому при его изохорическом охлаждении, начиная с некоторой температуры (точки росы), пар станет насыщающим и дальнейшее понижение температуры до 295 К вызовет его частичную конденсацию.

Происходит ли конденсанция пара при изохорическом понижении температуры от значения T_1 до T_2, если об этом не сказано в условии задачи, можно установить самим, зная плотность или давление пара. С помощью таблиц нужно только определить, будет ли температура росы $T_р > T_2$ или нет. В нашем примере это неравенство имеет место, следовательно, пар конденсируется.

Чтобы определить массу росы, выпавшей на стенках трубки, необходимо найти массу пара при каждой из заданных температур и вычесть из первого результата второй. Для нахождения самих масс удобно воспользоваться уравнением Менделеева — Клапейрона, составив его для каждого из двух состояний пара.

Обозначим параметры состояния пара до его охлаждения через $p_п$, V, $T_п$ и будем считать, что его масса равна $m_п$. Тогда
$$p_п V = \frac{m_п}{M_п} RT_п, \tag{1}$$
где $M_п = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль — молярная масса водяного пара.

После охлаждения и конденсации, когда пар в трубке будет насыщающим, его масса станет равной $m_{н.п}$, а параметры примут значения $p_{н.п}$, V и $T_{н.п}$. Для насыщающего пара

$$p_{н.п}V = \frac{m_{н.п}}{M_п} RT_{н.п}. \qquad (2)$$

При составлении этого уравнения мы не учитывали объем, занимаемый каплями воды.

Для определения массы росы, выпавшей на стенках трубки, составляем вспомогательное уравнение:

$$m = m_п - m_{н.п}, \qquad (3)$$

где m — искомая масса росы. Этим уравнением условие задачи исчерпывается полностью.

Решая уравнения (1) — (3) совместно и проводя вычисления, находим:

$$m = \frac{M_п V}{R}\left(\frac{p_п}{T_п} - \frac{p_{н.п}}{T_{н.п}}\right); \quad m \approx 9 \text{ мг}.$$

Пример 3. В комнате объемом $V = 150$ м^3 поддерживается температура $T_1 = 293$ К, а точка росы равна $T_2 = 283$ К. Определите относительную влажность воздуха и количество водяных паров, содержащихся в комнате.

Р е ш е н и е. Если воздух в комнате содержит некоторое количество водяных паров, то при понижении температуры до точки росы эти пары становятся насыщающими. В тех случаях, когда задана точка росы, как, например, в нашей задаче, можно рассмотреть два состояния пара в комнате: при данной температуре T_1 и температуре росы T_2. Каждое из этих состояний описывается уравнением Менделеева — Клапейрона и формулой относительной влажности. Давление насыщающих паров можно считать при этом известным, так как известна их температура (точка росы). Из таблиц зависимости давления насыщающего пара воды от температуры мы находим, что при 283 К оно равно $p_{2н} = 1{,}22$ кПа.

Допустим, что пар, находящийся в комнате объемом V, при температуре T_1 создает давление p_1 и имеет массу $m_п$; тогда

$$p_1 V = \frac{m_п}{M_п} RT_1, \qquad (1)$$

где $M_п = 1{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль — молярная масса пара.

Если при этой температуре давление насыщающих паров равно $p_{1н}$, то относительная влажность воздуха в комнате

$$\varphi = \frac{p_1}{p_{1н}} 100\%, \qquad (2)$$

поскольку истинное давление паров в комнате p_1. В случае понижения температуры до T_2 (точки росы) пар в комнате стал бы насыщающим и его давление было бы равно $p_{2н}$. Для этого состояния пара мы могли бы записать:

$$p_{2н}V=\frac{m_п}{M_п}RT_2, \qquad (3)$$

так как масса пара в комнате остается неизменной.

В уравнениях (1) — (3) содержатся три неизвестные величины — φ, $m_п$, которые требуется определить, и давление p_1. Решая уравнения совместно относительно искомых неизвестных, получим:

$$\varphi=\frac{p_{2н}}{p_{1н}}100\%=\frac{T_1}{T_2}100\%; \quad \varphi\approx 54{,}5\%; \quad m_п=\frac{p_{2н}VM_п}{RT_2};\ m_п\approx 1{,}4\ кг.$$

Пример 4. Влажный воздух объемом 1 м^3 при относительной влажности $\varphi=60\%$, температуре $T=293$ К и нормальном атмосферном давлении имеет массу $m=1{,}2004$ кг. Определите давление насыщающего водяного пара при температуре T.

Р е ш е н и е. Влажный воздух представляет смесь сухого воздуха и водяного пара. В условии задачи даны величины, характеризующие эту смесь в целом, и требуется определить параметр одного из газов, входящих в смесь,— давление насыщающего пара.

Для решения задачи нужно рассмотреть каждый компонент газа в отдельности, составив для каждого из них уравнение состояния. Кроме того, необходимо учесть, что масса m и давление влажного воздуха p складываются соответственно из масс и давлений сухого воздуха и пара:

$$m=m_в+m_п; \qquad (1)$$

$$p=p_в+p_п. \qquad (2)$$

Рассмотрим сначала воздух без пара. Обозначим параметры состояния воздуха в заданном объеме через $p_в$, V, T, тогда

$$p_вV=\frac{m_в}{M_в}RT, \qquad (3)$$

где $M_в=2{,}9\cdot 10^{-2}$ кг/моль — молярная масса сухого воздуха.

Пар, находящийся в этом же пространстве, имеет давление $p_п$, объем V и температуру T. Для него

$$p_пV=\frac{m_п}{M_п}RT, \qquad (4)$$

и, кроме того, нам дано:

$$\varphi=\frac{p_п}{p_{н.п}}100\%, \qquad (5)$$

где $p_{н.п}$ — искомое давление насыщающих паров при температуре T

Из уравнений (1) — (5) находим:

$$p_{н.п} = \left[\frac{pVM_в - mRT}{(M_в - M_п)V}\right]\frac{100\%}{\varphi}; \quad p_{н.п} \approx 2{,}32 \text{ кПа}.$$

Пример 5. В сосуде находится воздух, температура которого $T_1 = 283$ К и влажность $\varphi = 60\%$. Как изменится влажность воздуха и его давление, если воздух нагреть до температуры $T_2 = 373$ К и в три раза уменьшить объем? Начальное давление сухого воздуха $p_1 = 38{,}5$ кПа, давление насыщающих паров воды при 283 К равно $p_{1н} = 1{,}2$ кПа.

Решение. Нам даны два состояния смеси сухого воздуха с паром при разных температурах. Как видно из условия задачи, в процессе нагревания сосуда меняются все три параметра состояния и воздуха, и пара. Чтобы выбрать исходные уравнения для решения задачи, надо прежде всего установить, изменяется ли масса пара при его переходе во второе состояние или нет. Сделать это можно следующим образом. С помощью объединенного газового закона надо найти давление $p_{2п}$ пара при температуре $T_2 = 373$ К и сравнить его с давлением насыщающего пара при этой температуре, равным нормальному атмосферному давлению $p_{2н} = 101$ кПа. Так как большего давления, чем $p_{2н}$, пар при данной температуре иметь не может, то, если окажется, что $p_{2п} > p_{2н}$, это будет означать, что происходила конденсация, если же $p_{2п} \leqslant p_{2н}$, то при переходе во второе состояние масса пара не менялась — его недостаточно, чтобы создать давление $p_{2н}$. Расчет показывает (предлагаем его сделать читателям), что в нашем примере $p_{2п} < p_{2н}$, т. е. пар не конденсируется, и, следовательно, к параметрам пара применимо уравнение объединенного газового закона, так как масса газа остается одной и той же.

При составлении системы уравнений для нахождения изменения относительной влажности воздуха в данной задаче можно ограничиться лишь рассмотрением пара.

Допустим, что в начальном состоянии при температуре T_1 пар, находящийся во влажном воздухе, имел давление $p_{1п}$ и объем V_1, а после нагревания сосуда до температуры T_2 эти параметры стали равными $p_{2п}$ и V_2. Тогда согласно объединенному газовому закону должно быть:

$$\frac{p_{1п}V_1}{T_1} = \frac{p_{2п}V_2}{T_2}. \qquad (1)$$

Относительная влажность воздуха до нагревания была равна:

$$\varphi_1 = \frac{p_{1п}}{p_{1н}} 100\%, \qquad (2)$$

после нагревания она станет равной:

$$\varphi_2 = \frac{p_{2п}}{p_{2н}} 100\%. \qquad (3)$$

Ее изменение

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \qquad (4)$$

Под $p_{1н}$ и $p_{2н}$ здесь подразумевается давление насыщающего пара при температурах T_1 и T_2.

Совместное решение уравнений (1) — (4) относительно $\Delta\varphi$ при условии, что $3V_2 = V_1$, дает:

$$\Delta\varphi = \varphi_1\left(\frac{3p_{1н}T_2}{p_{2н}T_1} - 1\right); \quad \Delta\varphi = -57\%.$$

Знак «минус» означает, что $\varphi_2 < \varphi_1$, т. е. во втором состоянии влажность воздуха уменьшилась.

Изменение Δp полного давления влажного воздуха равно сумме изменений давлений сухого воздуха и пара:

$$\Delta p = (p_1 + p_{1п}) - (p_2 + p_{2п}). \qquad (5)$$

Так как масса воздуха не изменялась и воздух занимает тот же объем, что и пар, то для него должно быть

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}, \qquad (6)$$

где p_2 — давление сухого воздуха после нагревания сосуда.

Решая совместно уравнения (1), (2), (5) и (6) относительно искомого изменения давления Δp, получим:

$$\Delta p = (p_1 - p_{1п}\varphi_1)\frac{T_2 - T_1}{T_1}; \quad \Delta p \approx 12 \text{ кПа}.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 10

10.1. Сколько молекул ртути может содержаться в 1 см^3 воздуха в помещении, зараженном ртутью, при температуре 300 К, если давление насыщенного пара ртути при 300 К равно 0,36 Па?

10.2. Какое давление будет создавать водяной пар, насыщенный при 373 К, если в момент насыщения его отделить от воды и изохорически нагреть на 25 К?

10.3. Цилиндрический сосуд сечением 100 см^2 снабжен поршнем массой 103,3 кг. Непосредственно под поршнем находится вода массой 0,8 г. На какое расстояние переместится поршень, приходя в равновесие, если сосуд и воду нагреть до 423 К? Атмосферное давление нормальное, давление насыщающих паров воды при 423 К равно 475 кПа.

10.4. Сосуд, снабженный поршнем, содержит водяной пар при температуре 323 К, который производит давление 7,75 кПа. Каким станет давление в сосуде, если объем, занимаемый паром, изотермически уменьшить вдвое? Давление насыщающих паров воды при 323 К равно 12,3 кПа.

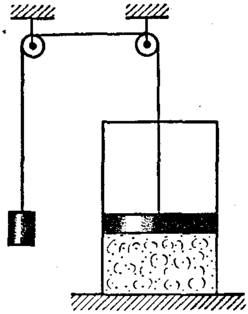

Рис. 10.1

10.5. В цилиндре под поршнем площадью 100 см^2 находится водяной пар массой 18 г при температуре 373 К. К поршню через систему блоков подвешен груз массой 500 кг (рис. 10.1). На какую высоту поднимется груз, если цилиндр охладить до 273 К? Атмосферное давление нормальное, массой поршня пренебречь. Давление насыщающих паров воды при 273 К равно 530 Па.

10.6. Закрытый цилиндрический сосуд высотой $H = 1{,}0$ м и сечением $S = 10^{-2}$ м^2, расположенный вертикально, разделен легким поршнем, под которым находится вода массой $m_в = 0{,}2$ г. Над поршнем находится азот массой $m_a = 0{,}14$ г. Начальная температура сосуда $T_1 = 333$ К. На сколько переместится поршень, если сосуд нагреть до $T_2 = 373$ К? Давление насыщающих паров воды при 333 К равно $p_{н.п} = 22$ кПа.

10.7. Запаянную с одного конца трубку, содержащую некоторое количество воздуха, опустили в резервуар с водой. Длина подводной части трубки $2H = 2$ м, уровень воды внутри трубки отстоит на расстоянии H от ее запаянного конца, начальная температура всей системы 273 К. Найдите положение уровня воды в трубке после нагревания всей системы до 373 К. Атмосферное давление нормальное, давлением паров воды при 273 К пренебречь.

10.8. При нормальном атмосферном давлении в сосуд вводят кислород O_2 и метан CH_4 в таком количестве, что парциальные давления газов оказываются равными. Сосуд закрывают и производят взрыв: $CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O$. После этого сосуд охлаждают до начальной температуры. Зная, что давление насыщающих паров воды при этой температуре равно 2,24 кПа, определите установившееся давление в сосуде.

10.9. Сосуд объемом $1{,}25 \cdot 10^{-3}$ м^3 содержит сухой воздух при нормальных условиях. В сосуд вводят воду массой 0,9 г, закрывают его и нагревают до 363 К. Чему равно давление влажного воздуха в сосуде? Как изменится ответ, если взять сосуд емкостью $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ м^3? Давление насыщающих паров воды при 363 К равно 70 кПа.

10.10. Два сосуда объемом 10^{-2} м^3 каждый содержат сухой воздух при нормальных условиях. В один сосуд вводят воду массой 3 г, в другой — массой 15 г и оба сосуда нагревают до 373 К. Чему равно давление влажного воздуха в сосудах? Каково будет давление влажного воздуха в сосудах, если их соединить короткой трубкой и дать газам перемешаться?

10.11. В сосуде объемом $V = 1$ м^3 находится смесь воздуха с парами эфира. Внесенный в сосуд барометр при температуре $T = 303$ К показывает давление $p = 107$ кПа. Определите массу воздуха и эфира в сосуде, если известно, что конденсация паров в нем начинается при $T_0 = 273$ К. Давление насыщенного пара эфира при 273 К равно $p_{0э} = 24{,}4$ кПа. Относительная молекулярная масса эфира 74, воздуха 29.

10.12. В двух одинаковых сосудах объемом $5 \cdot 10^{-4}$ м^3 каждый находится водород и кислород при температуре 293 К. Давление водорода 26,6 кПа, кислорода 53,2 кПа. Оба сосуда соединили между собой и, после того как газ перемешался, пропустили электрический ток, в результате чего гремучая смесь сгорела. Каким станет давление в сосудах после того, как установится первоначальная температура? Давление насыщающих паров воды при 293 К равно 2,32 кПа.

10.13. Найдите среднее расстояние между молекулами насыщенного водяного пара при 373 К. Во сколько раз это расстояние больше расстояния между молекулами воды при 273 К?

10.14. В цилиндре под легким незакрепленным поршнем находится насыщенный водяной пар объемом $V = 1$ м^3. Сколько льда, взятого при 273 К, надо бросить в сосуд, чтобы весь пар сконденсировался? Атмосферное давление нормальное. Удельная теплота парообразования воды при 373 К равна $r = 2{,}26$ МДж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоемкостью и теплоотдачей цилиндра пренебречь.

10.15. В цилиндре под невесомым поршнем площадью 10^{-2} м^2 находится водяной пар массой $1{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг при нормальном атмосферном давлении. В цилиндр впрыснули такое же количество воды, имеющей температуру 273 К. Пренебрегая теплоемкостью и теплопроводностью цилиндра, определите расстояние, на которое опустится поршень. Удельная теплоемкость воды 4,19 кДж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды при 373 К равна 2,26 МДж/кг.

10.16. В цилиндрическом сосуде под поршнем находятся пары воды в объеме $2 \cdot 10^{-3}$ м^3 при температуре 373 К и давлении 100 кПа. При постоянном внешнем давлении поршень опускают настолько, что объем уменьшается вдвое. Какое количество теплоты надо отвести от сосуда для того, чтобы температура пара не изменилась? Объемом сконденсировавшейся воды пренебречь.

10.17. В цилиндре под невесомым поршнем имеется вода массой 1 кг при температуре 273 К. В воду опускают кусок раскаленного железа массой 2 кг, поле чего поршень поднимается на 0,64 м. До какой температуры было нагрето железо? Атмосферное давление нормальное, удельная теплоемкость железа 500 Дж/(кг · К), площадь поршня 0,1 м^2. Теплоотдачей и теплоемкостью цилиндра пренебречь.

10.18. В цилиндре под поршнем в объеме $1{,}674 \cdot 10^{-3}$ м^3 находится насыщенный водяной пар при температуре 373 К, масса пара 10^{-3} кг. Какую работу нужно совершить, чтобы изотермически сжать пар до полной конденсации в жидкость?

При температуре 373 К плотность воды, находящейся под давлением ее насыщающего пара, равна 96 кг/м^3

10.19. Температура воздуха в комнате объемом 150 м^3 равна 6°С, относительная влажность 80%. Сколько воды нужно испарить в этой комнате, чтобы при увеличении температуры до 18°С относительная влажность стала равна 60%? Плотности насыщающих паров воды при этих температурах равны соответственно $7{,}3 \cdot 10^{-3}$ и $15{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3

10.20. Относительная влажность воздуха вечером при температуре 289 К равна 60% Ночью температура воздуха понизилась до 277 К и выпала роса. Сколько водяного пара сконденсировалось из 1 м^3 воздуха? Плотности насыщающих паров при этих температурах равны соответственно $1{,}36 \cdot 10^{-3}$ и $6{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3

10.21. Плотность влажного воздуха при температуре 300 К и давлении 103 кПа равна 1,190 кг/м^3 Чему равна абсолютная и относительная влажность воздуха при этой температуре? Плотность насыщающих паров воды при 300 К равна $2{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3

10.22. Смешали 1 м^3 воздуха с влажностью 20% и 2 м^3 воздуха с влажностью 30% При этом обе порции были взяты при одинаковых температурах. Смесь занимает объем 3 м^3 Определите относительную влажность смешанного воздуха.

10.23. Сколько теряет в своем весе шар объемом 15 м^3 при увеличении относительной влажности воздуха на 20% при температуре 288 К? Давление насыщающего пара при 288 К равно 1,7 кПа.

10.24. Давление воздуха при температуре 300 К и относительной влажности 70% равно 102 кПа. Чему будет равно давление, если температура понизится до 270 К, относительная влажность станет равной 80% при неизменных остальных условиях? Давления насыщающего пара при указанных температурах равны соответственно 31 и 47 кПа.

10.25. Сосуд объемом 100 см^3 заполнен при 313 К воздухом с относительной влажностью 40%. Как надо изменить объем сосуда, чтобы при понижении температуры до 293 К пар не конденсировался? Давление насыщающего пара воды при 313 К равно 7,3 кПа.

10.26. Сухой и влажный воздух с относительной влажностью $\varphi = 90\%$ при температуре $T = 300$ К имеет давление $p = 100$ кПа. Во сколько раз отличаются плотности сухого и влажного воздуха? Плотность насыщающих паров воды при 300 К равна $\varrho = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3.

10.27. В сосуде объемом 0,1 м^3 при температуре 303 К находится воздух с относительной влажностью 30%. Какой станет относительная влажность воздуха в сосуде, если в него ввести 1 г воды, взятой при той же температуре? Давление насыщенных паров воды при 303 К равно 4,2 кПа. Решите задачу при условии, что сосуд имел объем 10^{-3} м^3

ЧАСТЬ III

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

ГЛАВА 11

ЭЛЕКТРОСТАТИКА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Согласно закону Кулона модуль силы взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами q_1 и q_2, находящимися на расстоянии r друг от друга в среде с диэлектрической проницаемостью ε, равен:

$$F = k\frac{|q_1|\,|q_2|}{\varepsilon r^2}, \tag{11.1}$$

где k — постоянный коэффициент.

$$k = 9 \cdot 10^9\,\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \text{ где } \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}.$$

2. Если система тел не обменивается электрическими зарядами с телами, не принадлежащими этой системе, то алгебраическая сумма зарядов системы есть величина постоянная (закон сохранения зарядов):

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \text{const}. \tag{11.2}$$

3. Напряженность электрического поля в данной точке пространства равна:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}, \tag{11.3}$$

где $\vec{F}$ — сила, действующая на точечный положительный (пробный) заряд q_0, помещенный в эту точку.

Модуль вектора напряженности электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от заряда, равен:

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}. \tag{11.4}$$

Если на поверхности проводящего шара радиусом r_0 равномерно распределен заряд q, то внутри шара напряженность

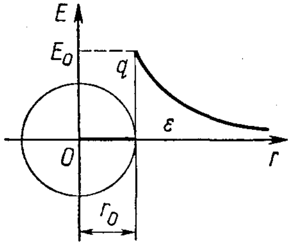

Рис. 11.1

поля всюду равна нулю. За пределами шара и на его поверхности напряженность поля точно такая, какую создавал бы заряд q, сосредоточенный в центре шара (рис. 11.1), т. е. для проводящего шара

$$E=\frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \text{ при } r\geqslant r_0 \qquad (11.4')$$

$$\text{и } E=0 \text{ при } r<r_0,$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится шар.

Если в каждой точке электрического поля

$$\vec{E}=\text{const},$$

то такое поле называется однородным.

Бесконечно большая плоскость, по которой распределен заряд с поверхностной плотностью σ, создает в направлении нормали к поверхности однородное электрическое поле напряженностью

$$E=\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0\varepsilon}, \qquad (11.5)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды в рассматриваемой точке пространства.

Если заряженная плоскость имеет конечные размеры, то по формуле (11.5) можно с достаточной степенью точности определить напряженность вблизи этой плоскости в области однородности поля.

Напряженность электрического поля, созданного несколькими заряженными телами, равна геометрической сумме напряженностей отдельных полей, создаваемых в данной точке пространства каждым из заряженных тел (принцип наложения полей):

$$\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i. \qquad (11.6)$$

При перемещении заряда q в однородном электростатическом поле напряженностью $\vec{E}$ силы $\vec{F}_э$ поля совершают над зарядом работу

$$A=F_э d=qEd, \qquad (11.7)$$

где d — модуль перемещения заряда вдоль силовой линии.

В зависимости от знака заряда q и направления его перемещения по силовым линиям работа сил поля может быть и положительной, и отрицательной.

4. Всякая система зарядов обладает потенциальной энергией электрического взаимодействия. Потенциальная энергия измеряется работой, которую могут совершить электрические силы при удалении заряженных тел, собранных в систему, на бесконечно большие расстояния относительно друг друга. Для системы

двух точечных зарядов q_1 и q_2, удаленных на расстояние r, эта работа, а следовательно, и потенциальная энергия равны:

$$A = W_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r},$$

если считать, что в бесконечности $W_\infty = 0$.

Потенциал электрического поля в данной точке определяется отношением

$$\varphi = \frac{W_p}{q_0}, \qquad (11.8)$$

где W_p — потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд q_0 вследствие его взаимодействия с полем в данной точке пространства. Здесь предполагается, что потенциальная энергия, а следовательно, и потенциал в точках, бесконечно удаленных от источника поля, равны нулю. Потенциал электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на расстоянии r от него, равен:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}. \qquad (11.9)$$

Знак потенциала в данной точке поля определяется знаком заряда, создающего это поле.

Если по поверхности проводящего шара радиусом r_0 распределен заряд q, то внутри шара и на его поверхности потенциал всюду постоянен и равен

$$\varphi_0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_0},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды, в которой находится шар. За пределами шара потенциал поля такой же, как потенциал поля точечного заряда, равного заряду шара, сосредоточенного в его центре (рис. 11.2). Таким образом, потенциал поля заряженного шара в точке, удаленной от его центра на расстояние r, равен:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}, \quad \text{если } r \geqslant r_0. \qquad (11.9')$$

Поверхность, в каждой точке которой $\varphi = \text{const}$, называется эквипотенциальной поверхностью.

Потенциал поля, созданного несколькими заряженными телами, равен алгебраической сумме потенциалов отдельных полей, создаваемых в данной точке пространства каждым из заряженных тел:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i. \qquad (11.10)$$

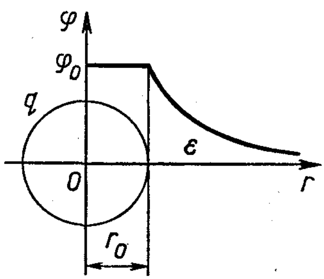

Рис. 11.2

Потенциальная энергия электрического взаимодействия системы n точечных зарядов q_i равна:

$$W_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i \tag{11.11}$$

(здесь φ_i — потенциал поля в точке, где находится заряд q_i).

При перемещении заряда q_0 из точки поля с потенциалом φ_1 в точку с потенциалом φ_2 независимо от формы пути силы электрического поля совершают над зарядом работу

$$A = W_1 - W_2 = q_0 (\varphi_1 - \varphi_2) = q_0 U, \tag{11.12}$$

где $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ — разность потенциалов (напряжение) между этими точками ($\varphi_1 > \varphi_2$).

Если заряд q_0 перемещается в поле точечного заряда q, то работа сил поля равна:

$$A = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \tag{11.13}$$

где r_1 и r_2 — расстояния между зарядами.

В однородном электрическом поле модуль вектора напряженности связан с разностью потенциалов уравнением

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d}, \tag{11.14}$$

где d — расстояние между эквипотенциальными поверхностями с потенциалами φ_1 и φ_2.

5. Электроемкость уединенного проводника, имеющего заряд q и потенциал φ, определяется формулой

$$C = \frac{|q|}{\varphi}. \tag{11.15}$$

Емкость уединенного металлического шара радиусом r, находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью ε, равна:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r. \tag{11.16}$$

Электроемкость конденсатора — двух проводников, на которых находятся два равных по модулю, но противоположных по знаку заряда q, определяют по формуле

$$C = \frac{|q|}{U}, \tag{11.17}$$

где $|q|$ — заряд конденсатора (абсолютное значение заряда одного из проводников), $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов между проводниками.

Емкость плоского конденсатора равна:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \tag{11.18}$$

где S — площадь одной пластины, перекрывающаяся другой; d — расстояние между пластинами; ε — диэлектрическая проницаемость среды, разделяющей пластины.

Если обкладка одного конденсатора соединяется с обкладкой другого конденсатора и между ними нет разветвлений, то соединение конденсаторов называется последовательным.

При подключении к источнику с напряжением U_0 батареи незаряженных конденсаторов, соединенных между собой последовательно, алгебраическая сумма напряжений U_i на отдельных конденсаторах равна напряжению на всей батарее:

$$\sum_{i=1}^{n} U_i = U_0. \tag{11.19}$$

Заряды конденсаторов при этом равны между собой и равны заряду всей батареи:

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q_0. \tag{11.20}$$

Емкость C_0 батареи, составленной из n конденсаторов емкостью C_i, соединенных между собой последовательно, может быть рассчитана по формулам

$$C_0 = \frac{|q_0|}{U_0} \quad \text{и} \quad \frac{1}{C_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}. \tag{11.21}$$

Если обе обкладки одного конденсатора соединить проводником с обкладками другого, а тот, в свою очередь, таким же образом подключить к следующему конденсатору (резистору или источнику), то получившееся соединение конденсаторов называется параллельным.

При подключении к источнику с напряжением U_0 батареи незаряженных конденсаторов, соединенных между собой параллельно, общий заряд q_0 батареи равен сумме зарядов q_i всех конденсаторов, т. е.

$$q_0 = \sum_{i=1}^{n} q_i. \tag{11.22}$$

Напряжение на каждом конденсаторе и на всей батарее в целом одинаково:

$$U_1 = U_2 = \ldots = U_n = U_0. \tag{11.23}$$

Емкость C_0 батареи при параллельном соединении конденсаторов может быть рассчитана по формулам

$$C = \frac{|q_0|}{U_0} \quad \text{и} \quad C_0 = \sum_{i=1}^{n} C_i. \tag{11.24}$$

Все заряженные тела обладают электрической энергией, заключенной (локализованной) в электрическом поле, созданном этими телами. Эту энергию можно измерить работой, которую необходимо совершить, чтобы зарядить данное тело. Для уединенного заряженного тела эта работа, а следовательно, и энергия тела равны:

$$A = W_p = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}, \tag{11.25}$$

где q, φ и C — соответственно заряд, потенциал и емкость тела.

Энергия поля заряженного конденсатора равна:

$$W_p = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 S d}{2}, \tag{11.26}$$

где q и U — заряд и напряжение на конденсаторе емкостью C; S и d — площадь пластины и расстояние между обкладками конденсатора.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Типичные задачи электростатики состоят в том, чтобы:

а) по заданному распределению зарядов в пространстве найти созданное ими поле — вычислить напряженность и потенциал поля в произвольной точке — или, наоборот, зная характеристики поля, найти создающие его заряды;

б) по заданному расположению и форме проводников, зная потенциал каждого проводника или их общий заряд, найти распределение зарядов в проводниках и вычислить характеристики полей, создаваемых этими проводниками.

В курсе элементарной физики, за небольшим исключением, рассматривают наиболее простые случаи: задачи о точечных зарядах, заряженных проводящих сферах, плоскостях и конденсаторах.

Иногда в эти задачи включают элементы механики, и задачи получаются комбинированными, однако главное внимание в них стараются уделять идеям электричества.

2. Задачи по электростатике в курсе элементарной физики удобно разделить на две группы. К первой группе можно отнести задачи о точечных зарядах и системах, сводящихся к ним, ко второй — все задачи о заряженных телах, размерами которых нельзя пренебречь.

Решение задач первой группы основано на применении законов механики с учетом закона Кулона и вытекающих из него следствий. Такие задачи рекомендуется решать в следующем порядке:

а) Расставить силы, действующие на точечный заряд, помещенный в электрическое поле, и записать для него уравнение равновесия или основное уравнение динамики материальной точки.

б) Выразить силы электрического взаимодействия через заряды и характеристики поля и подставить эти выражения в исходное уравнение.

Силы взаимодействия зарядов можно рассчитать или по закону Кулона, или по формуле $\vec{F} = q\vec{E}$, считая, что один из зарядов находится в поле другого. Второй способ сводится фактически к расчету электрического поля в той или иной точке пространства, где находится рассматриваемый заряд, им обычно пользуются в тех случаях, когда поля создаются протяженными заряженными телами. Используя последнюю формулу, следует иметь в виду, что она справедлива не только для точечного заряда, но и для заряженных протяженных тел.

в) Если при взаимодействии заряженных тел между ними происходит перераспределение зарядов, к составленному уравнению добавляют уравнение закона сохранения зарядов (11.2).

г) Далее, как обычно, надо записать вспомогательные формулы и полученную систему уравнений решить относительно неизвестной величины.

д) Проводя вычисления в задачах электростатики, полезно помнить, что множитель $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, входящий во многие расчетные формулы, равен $k = 9{,}00 \cdot 10^9$ м/Ф. Именно такое значение k и нужно подставлять в эти формулы.

Задачи на расчет полей, созданных точечными зарядами, заряженными сферами и плоскостями,— нахождение напряженности или потенциала в какой-либо точке пространства — основаны на использовании формул (11.3) — (11.6) и (11.8) — (11.10). Особое внимание следует обращать на векторный характер напряженности $\vec{E}$ и помнить, что знак перед потенциалом φ определяется знаком заряда, создающего поле.

Вычисление работы, совершенной полем над точечным зарядом, а также энергии, которую приобретает заряд в результате действия сил поля, особых затруднений не представляет. Эти величины легко могут быть найдены с помощью формул (11.7), (11.11) — (11.13) в комбинации с формулой (11.10) и уравнения закона сохранения и превращения энергии $A = W_2 - W_1$. Как и раньше, под W_1 и W_2 здесь можно понимать только полную механическую энергию заряженного тела, под A — работу внешних сил, к которым можно отнести и силы электрического поля.

Решение задач второй группы основано на использовании формул (11.14) — (11.26).

Если по условию задачи дано одно заряженное тело, то величины, характеризующие электрические свойства тела, должны быть связаны между собой формулами (11.14) — (11.18) и (11.24) — (11.25). С учетом соотношения (11.9) они позволяют найти одну из этих величин, если другие заданы.

В задачах на систему заряженных тел (обычно плоских конденсаторов) прежде всего необходимо установить тип соединения: выяснить, какие из конденсаторов соединены между собой последовательно, какие — параллельно.

В случае смешанного соединения конденсаторов, представляющего собой комбинацию последовательно и параллельно соединенных групп, в каждой из которых конденсаторы соединены по такому же принципу, расчеты удобно начинать с определения емкости всего соединения, поочередно применяя формулы (11.21) и (11.24).

Знание общей емкости соединения значительно упростит все дальнейшие расчеты, связанные с нахождением зарядов и напряжений на конденсаторах.

Соединение элементов цепи, в том числе и конденсаторов, может не относиться ни к последовательному, ни к параллельному. Общую емкость такого сложного соединения можно найти сравнительно просто лишь в тех случаях, когда в схеме есть точки с одинаковыми потенциалами. Такие точки можно соединять и разъединять, распределение зарядов и потенциалов на конденсаторах от этого не изменяется. Соединяя или разъединяя точки с одинаковыми потенциалами, можно сложное включение конденсаторов свести к комбинации последовательных и параллельных соединений. Точки с одинаковым потенциалом есть в схемах, обладающих симметрией. Способы нахождения точек с одинаковыми потенциалами подробно описаны в главе 12; все они полностью применимы и для конденсаторов.

В общем случае при расчетах электрических цепей, состоящих из конденсаторов, которые невозможно свести к комбинациям последовательных и параллельных соединений, нужно воспользоваться следующими двумя очевидными правилами.

Если батарею незаряженных конденсаторов подключить к источнику напряжения и сообщить ей некоторый заряд, то согласно закону сохранения заряда алгебраическая сумма разделенных зарядов любой группы обкладок, изолированных от источника, всегда должна равняться нулю, поскольку заряды на этих обкладках появляются вследствие индукции.

Так как работа сил электростатического поля при перемещении заряда по замкнутому контуру равна нулю, то алгебраическая сумма напряжений на конденсаторах и батареях, встречающихся при обходе любого замкнутого контура цепи, тоже должна равняться нулю.

Составив уравнения, связывающие заряды и напряжения на конденсаторах, к ним нужно добавить формулы емкости для каждого конденсатора и всей системы в целом. После этого получается полная система уравнений, позволяющая, в частности, найти и общую емкость системы. Если нам удается установить тип соединения конденсаторов и ясно, как найти их общую емкость, дальнейший расчет сведется к тому, чтобы определить связь между зарядами и напряжениями на конденсаторах и выразить через них емкости конденсаторов. В случае последовательного соединения надо составить систему уравнений (11.19) — (11.21), (11.17), в случае параллельного — (11.22) — (11.24) и (11.17).

3. При решении задач электростатики и ответах на отдельные качественные вопросы полезно иметь в виду следующее:

1) Положительные электрические заряды, предоставленные самим себе, движутся в электрическом поле от точек с большим потенциалом к точкам, где потенциал меньше. Отрицательные заряды перемещаются в противоположном направлении.

2) Напряженность электрического поля внутри статически заряженного проводника равна нулю. Этот результат не зависит от того, находится ли проводник во внешнем электрическом поле или нет. Потенциал всех точек, лежащих на проводнике, имеет при этом одинаковое значение, т. е. поверхность проводника является эквипотенциальной. Потенциал во всех точках внутри проводника равен потенциалу на его поверхности.

3) При внесении диэлектрика в электрическое поле модуль вектора напряженности $\bar{E}$ уменьшается в ε раз в пространстве, занятом диэлектриком, и остается без изменения во всех остальных точках поля.

4) Потенциал земли и всех тел, соединенных проводником с землей, принимается равным нулю.

5) Работа сил электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

6) Если два уединенных шара соединить тонким и длинным проводом, то их общая емкость будет равна сумме емкостей отдельных шаров, поскольку потенциалы шаров будут одинаковыми, а общий заряд системы равен сумме зарядов шаров. По этой же причине уединенный шар можно рассматривать как два конденсатора с емкостями, равными $2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_ш$, соединенными между собой параллельно.

7) Если конденсатор состоит из двух проводящих концентрических сфер радиусами R и r (сферический конденсатор), то его емкость равна:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rR}{R - r}, \qquad (11.27)$$

где ε — проницаемость диэлектрика, разделяющего сферы. Эта формула автоматически вытекает из формул (11.15), (11.10) и (11.9).

8) Если заряженный металлический шар поместить в центр проводящего сферического экрана, соединенного с землей, на экране появляется индуцированный заряд $q_и$, равный по модулю и противоположный по знаку заряду $q_ш$ шара. Действительно, поскольку экран соединен с землей и его потенциал равен нулю, т. е. $\varphi_э = \varphi_ш + \varphi_и = 0$, то заряд $q_и$ на экране должен удовлетворять условию

$$\frac{q_ш}{R} + \frac{q_и}{R} = 0, \quad \text{откуда } q_и = -q_ш.$$

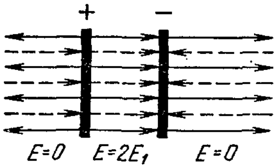

Рис. 11.3

9) Электрическое поле заряженного конденсатора можно рассматривать как результат наложения двух полей, созданных каждой обкладкой конденсатора. Если поля, создаваемые обкладками плоского заряженного конденсатора, можно считать однородными (рис. 11.3), то согласно формуле (11.5) модуль напряженности поля в конденсаторе будет равен:

$$E = 2E_1 = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{|q|}{\varepsilon_0 \varepsilon S} \tag{11.28}$$

Здесь $|q|$ — заряд конденсатора; S — площадь пластины; σ — поверхностная плотность заряда.

10) В плоском конденсаторе одну пластину можно рассматривать как тело с зарядом q, помещенное в однородное электрическое поле с напряженностью $\vec{E}_1$, созданное другой пластиной. Согласно формулам (11.3) и (11.28) со стороны первой пластины на вторую (и наоборот) будет действовать сила, модуль которой равен:

$$F = |q|E_1 = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}. \tag{11.29}$$

Если плоский конденсатор подключить к источнику питания, зарядить его и затем отключить, то при изменении емкости C конденсатора вследствие раздвижения (сближения) или смещения пластин, внесения (удаления) диэлектрика заряд на конденсаторе не меняется. Что при этом происходит с величинами q, U, E, F или W_p, легко установить, анализируя формулы (11.14), (11.17), (11.18). В том случае, когда между пластинами конденсатора вставляют (или вынимают) незаряженную металлическую пластинку, не замыкающую конденсатор, область поля конденсатора уменьшается на объем этой пластинки. Все величины при этом изменяются точно так же, как если бы мы сближали (или раздвигали) обкладки. Если конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения, то при всех указанных выше изменениях емкости конденсатора между его пластинками остается неизменным напряжение. Величины q, C, E и F могут при этом меняться.

11) При расчете полей, возникающих в системе заряженное тело — незаряженная проводящая поверхность, удобно использовать метод зеркального изображения зарядов. Этот метод основан на следующем принципе.

Если в электрическом поле заменить какую-либо эквипотенциальную поверхность проводником, имеющим потенциал и форму этой поверхности, то электрическое поле после такой замены останется прежним. Отсюда, в частности, следует, что при помещении точечного заряда вблизи бесконечной проводящей плоскости на последней заряды перераспределяются так, что электрическое поле системы оказывается тождественным полю, создаваемому рассматриваемым зарядом и его зеркальным изображением в проводящей плоскости, т. е. полю двух точечных зарядов, равных по модулю и противоположных по знаку.

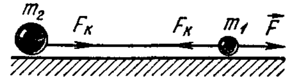

Рис. 11.4

Пример 1. Два алюминиевых шарика радиусами $R = 2$ см и $r = 1$ см соединены легкой непроводящей нитью длиной $l = 1{,}00$ м. Шарики находятся на гладкой горизонтальной непроводящей поверхности (рис. 11.4). У каждых $z = 10^9$ атомов большего шарика взято по одному электрону и все они перенесены на меньший шарик. Какую минимальную силу нужно приложить к системе, чтобы нить натянулась? Плотность и молярная масса алюминия равны соответственно $\varrho = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3 и $M = 2{,}7 \cdot 10^{-2}$ кг/моль, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Решение. Если у n атомов одного шарика отнять по одному электрону и все их поместить на другой, то первый шарик будет иметь заряд ne, второй $-ne$.

Между заряженными шариками возникнет сила кулоновского притяжения $\vec{F}_к$, которая сообщит им ускорения, направленные вдоль нити, навстречу друг другу. При отсутствии внешних сил шарики стали бы сближаться. Чтобы нить оказалась на грани натяжения, к одному из них нужно приложить в горизонтальном направлении такую силу $\vec{F}$, чтобы она вместе с кулоновской силой сообщала этому шарику в противоположную сторону такое же ускорение $\vec{a}$, с каким будет двигаться под действием одной только кулоновской силы второй шарик. Ускорение шариков относительно друг друга будет в этом случае равно нулю. Если сила $\vec{F}$ по модулю станет больше той, которую мы найдем, нить натянется.

Под действием одних лишь кулоновских сил шарики приобретут разные ускорения. У большего шарика ускорение окажется меньшим, у меньшего — большим, поэтому для их относительного равновесия искомую минимальную силу ($\vec{F}_{\min}$) нужно приложить к меньшему шарику.

Итак, допустим, мы приложили к правому шарику силу $\vec{F}$, оба тела движутся с одинаковым ускорением $\vec{a}$ и нить находится на грани натяжения. Как указывалось во введении к разделу, решение этой задачи удобно начинать с составления основного уравнения динамики точки.

При движении правого шарика на него в горизонтальном направлении действует сила $\vec{F}$ и сила $\vec{F}_к$. (Силы гравитационного взаимодействия шариков ничтожно малы по сравнению с электрическими силами, и поэтому мы ими пренебрегаем.) Если этот шарик имеет массу m_1, то согласно второму закону Ньютона

$$F - F_к = m_1 a. \tag{1}$$

На второй, больший шарик массой m_2 по горизонтали действует только сила $F_к$, поэтому

$$F_к = m_2 a. \tag{2}$$

Кулоновские силы и массы тел, входящие в уравнения динамики, не заданы, поэтому их надо выразить через известные величины и переписать уравнения (1), (2) в развернутом виде.

Заряженные шарики можно считать точечными зарядами, так как по условию задачи расстояние между ними во много раз больше их размеров. Сила притяжения между шариками будет в этом случае достаточно точно удовлетворять закону Кулона:

$$F_к = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{n^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}, \tag{3}$$

поскольку $|q_1| = |q_2| = |ne|$.

Массы шариков можно выразить через их плотность и радиусы:

$$m_1 = \varrho V_1 = \frac{4}{3}\pi\varrho r^3 \text{ и } m_2 = \varrho V_2 = \frac{4}{3}\pi\varrho R^3. \tag{4}$$

Число атомов, находящихся в большом шарике, равно:

$$N = \frac{m_2}{M} N_А, \tag{5}$$

где $N_А$ — число Авогадро.

Число электронов, взятых у большого и переданных маленькому шарику, равно:

$$n = \frac{N}{z}. \tag{6}$$

Уравнениями (1) — (6) условия задачи исчерпываются полностью. В этих уравнениях неизвестными являются F, m_1, m_2, a, N и n. Решая их совместно относительно искомой силы F и подставляя числовые значения, получим:

$$F = \frac{4\pi}{q\varepsilon_0}\left(\frac{e\varrho NR}{zMl}\right)^2 (R^2 + r^2); \quad F \approx 735 \text{ Н}.$$

Чтобы нить натянулась, нужно к шарику меньшей массы приложить силу $F_{min} > F$.

Разобранный нами пример показывает, в частности, как велика сила электрического взаимодействия по сравнению с теми силами, которые нам встречаются в повседневной жизни.

Пример 2. Три проводящих шарика радиусами r, $2r$ и $3r$, на которых находятся заряды $3q$, $-2q$ и $3q$, расположены в вершинах тетраэдра с ребром $R \gg r$. Определите напряженность и потенциал электрического поля в четвертой вершине тетраэдра, а также потенциал в центре шариков. Какой потенциальной энергией электрического взаимодействия обладают шарики?

Решение. Предположим, что шарики находятся в вершинах основания пирамиды (рис. 11.5), и надо найти напряженность поля и потенциал в точке A и потенциалы в центрах шариков B, C и D. Рассмотрим точку A. Поле в ней создается заряженными шариками. Проставляем векторы напряженности $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_3$ полей, созданных шарами с зарядами $3q$, $-2q$ и $3q$ соответственно. Условие $R \gg r$ позволяет не учитывать смещение зарядов на шариках и считать, что они распределены по поверхности равномерно. Сразу же можно заметить, что модули векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$ равны, поскольку заряды, создающие эти поля, и расстояния от них до точки A одинаковые.

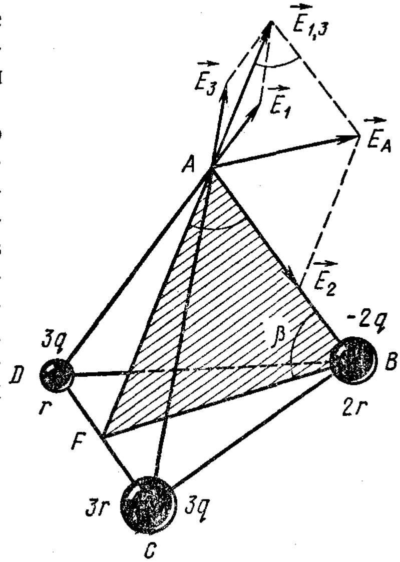

Рис. 11.5

Проставляя векторы напряженности, следует обратить внимание на их направление. В случае положительных зарядов векторы напряженности направлены от них, в случае отрицательных — к ним.

Согласно принципу наложения полей напряженность результирующего поля в точке A равна:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3.$$

Модуль суммы векторов, стоящих в правой части равенства, проще всего найти попарным сложением векторов по правилу параллелограмма. Поскольку модули векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$ равны и угол между векторами равен 60°, их результирующий вектор $\vec{E}_{1,3}$ является диагональю ромба, построенного на этих векторах, и его модуль равен: $E_{1,3} = 2E_1 \cos 30°$.

Чтобы найти $\vec{E}_A$, нам нужно сложить векторы $\vec{E}_{1,3}$ и $\vec{E}_2$. Оба эти вектора лежат в плоскости ABF (AF — высота равностороннего треугольника ACD), поэтому, применив теорему косинусов, получим:

$$E_A = \sqrt{E_{1,3}^2 + E_2^2 - 2E_{1,3}E_2 \cos \beta}\ .$$

Угол β, как видно из чертежа, равен углу между ребром и гранью пирамиды. Из треугольника ABF, поскольку он равнобедренный ($AF = BF$),

$$\cos\beta = \frac{1}{2\cos 30^\circ}.$$

С учетом этого равенства, а также выражения для $E_{1,3}$ после небольших преобразований находим:

$$E_A = \sqrt{3E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2}. \qquad (1)$$

Напряженность электрического поля, создаваемого заряженным шариком за его пределами, такая, как если бы весь заряд шарика был сосредоточен в его центре, поэтому

$$E_1 = E_3 = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}; \quad E_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) искомая напряженность поля в точке A получается равной:

$$E_A = \frac{q\sqrt{19}}{4\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Потенциал поля в точке A равен алгебраической сумме потенциалов полей, созданных заряженными шарами:

$$\varphi_A = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3. \qquad (3)$$

Потенциал поля шариков за их пределами равен:

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R}; \quad \varphi_2 = \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) находим:

$$\varphi_A = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 R}.$$

Потенциал поля в центре шариков равен потенциалу на их поверхности. Последний складывается из потенциала собственного поля шарика и потенциалов полей двух других шариков. Учитывая, что $R \gg r$, а также знаки зарядов на шариках, мы можем записать:

$$\varphi_C = \varphi_D = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R} \approx \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 r};$$

$$\varphi_B = 2\frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r} \approx \frac{-q}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Потенциальную энергию системы находим по формуле (11.13). Поскольку $R \gg r$ и заряженные тела близки к точечным зарядам, то

$$W_p = \frac{1}{2}(3q\varphi_C + 3q\varphi_D - 2q\varphi_B) = \frac{11q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

Пример 3. Металлический шарик радиусом r, имеющий заряд q, помещен в центр незаряженного сферического слоя, внутренний и внешний радиусы которого равны R_1 и R_2. Найдите напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого системой, если: а) слой изготовлен из металла; б) металлический слой заземлен; в) слой изготовлен из диэлектрика с проницаемостью ε.

Решение. Расчет полей, создаваемых заряженными сферами, основан на формулах (11.4) для напряженности и (11.9′) для потенциала электрического поля, а также принципе наложения полей (11.6), (11.10). Чтобы найти напряженность и потенциал поля в той или иной точке пространства, создаваемого несколькими сферами, нужно прежде всего знать их заряд. Определение модуля и знака заряда, закона распределения заряда на телах, помещенных в электрическое поле, представляет, как правило, основную трудность в решении почти всех задач подобного типа. Если же удается найти эти заряды, то напряженность и потенциал результирующего поля системы определить легко.

а) Поместим проводник в электрическое поле; в нем под действием сил поля произойдет разделение зарядов и на поверхности появятся индуцированные заряды. Разделение зарядов происходит до тех пор, пока индуцированные заряды не достигнут такого значения, что своим полем не скомпенсируют внешнее электрическое поле, т. е. до тех пор, пока результирующее поле внутри проводника не станет равным нулю. Отсутствие электрического поля внутри проводника при равновесии зарядов на проводнике — главное условие, позволяющее определить индуцированные заряды. Если под действием сил поля шара электроны начнут смещаться на внутреннюю поверхность слоя и на ней появится индуцированный заряд $-q_1$, то на внешней поверхности возникнет такой же заряд противоположного знака $+q_1$ (рис. 11.6). В результате получится три концентрические заряженные сферы радиусов r, R_1 и R_2 с зарядами q, $-q_1$ и $+q_1$. В пространстве между второй и третьей сферой напряженность электрического поля равна нулю, поэтому на расстоянии x от общего центра сфер при $R_1 \leqslant x \leqslant R_2$ согласно принципу наложения полей и формулы для напряженности поля заряженной сферы должно быть

$$k\frac{q}{x^2} - k\frac{q_1}{x^2} = 0,$$

откуда $q_1 = q$.

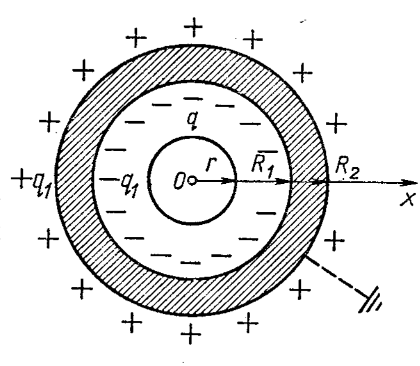

Рис. 11.6

Здесь мы учли, что вторая сфера создает снаружи такое поле, как если бы ее заряд находился в центре, а поле третьей сферы в ее внутренней области отсутствует.

Найдя заряд на поверхности сферического слоя, можно приступить к нахождению напряженности и потенциала поля в различных точках пространства. Внутри шарика (при $0 < x < r$)

$$E = 0; \quad \varphi = k\frac{q}{r} - k\frac{q}{R_1} + k\frac{q}{R_2} = kq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Между шариком и слоем ($r \leqslant x \leqslant R_1$)

$$E = k\,\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = k\,\frac{q}{x} - k\,\frac{q}{R_1} + k\,\frac{q}{R_2} = kq\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Внутри шарового слоя ($R_1 \leqslant x \leqslant R_2$)

$$E = 0; \quad \varphi = k\frac{q}{x} - k\frac{q}{x} + k\frac{q}{R_2} = k\frac{q}{R_2}.$$

За пределами системы ($R_2 \leqslant x \leqslant \infty$)

$$E = k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = k\frac{q}{x}.$$

б) Заряды, возникающие на поверхности заземленного проводника, можно найти из условия, что потенциал его равен нулю. Напряженность электрического поля в проводнике, конечно, также будет равна нулю, но заряды на поверхностях сферического слоя будут неодинаковые. В отличие от предыдущего случая они могут стекать с оболочки или, наоборот, набегать на нее. Если предположить, что на внутренней поверхности слоя появляется заряд $-q_1$, на внешней — заряд $+q_2$, то результирующий потенциал на заземленной поверхности слоя ($x = R_2$) будет равен:

$$\varphi = k\frac{q}{R_2} - k\frac{q_1}{R_2} + k\frac{q_2}{R_2} = 0,$$

откуда следует, что

$$q_1 - q_2 = q. \tag{1}$$

Поскольку поле внутри проводника отсутствует, то должно быть

$$E = k\frac{q}{x^2} - k\frac{q_1}{x^2} = 0,$$

откуда модуль заряда на внутренней поверхности слоя равен:

$$q_1 = q. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что $q_2 = 0$, т. е. на внешней поверхности заземленного слоя заряда нет, а на внутренней поверхности находится заряд $q_1 = -q$. Таким образом задача свелась к нахождению поля двух заряженных концентрических сфер радиусов r и R, на которых находятся заряды $+q$ и $-q$. При расчете поля данной системы можно воспользоваться результатом пункта а), положив во всех полученных там формулах заряд третьей сферы равным нулю. В результате мы получим

внутри шарика:

$$E=0; \quad \varphi=kq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right) \quad (0\leqslant x\leqslant r);$$

между шариком и слоем:

$$E=k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi=kq\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{R_1}\right) \quad (r\leqslant x\leqslant R_1).$$

При $R_1\leqslant x\leqslant\infty$ поле отсутствует.

в) Если сферический слой сделан из диэлектрика, то при внесении его в поле заряженного шарика произойдет поляризация слоя и на внутренней и внешней поверхностях появятся связанные заряды $-q_c$ и $+q_c$. Значение их находят следующим образом. Электрическое поле, создаваемое заряженным шариком, в диэлектрике ослаблено в ε раз. Поэтому если мы возьмем какую-нибудь точку внутри сферического слоя, удаленную от центра шарика на расстояние x, то напряженность поля в ней, с одной стороны, будет равна $E=k\frac{q}{\varepsilon x^2}$, а с другой стороны, ее можно найти как результат наложения поля шарика и поля связанных зарядов внутренней поверхности оболочки:

$$E=k\frac{q}{x^2}-k\frac{q_c}{x^2}.$$

Приравнивая оба выражения для E, мы найдем модуль связанных зарядов, возникающих на поверхности диэлектрика:

$$q_c=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}q.$$

После этого задача сводится к нахождению поля трех концентрических сфер радиусов r, R_1 и R_2, на которых находятся заряды q, $-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}q$ и $+\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}q$. Аналогично результатам пункта а) находим:

$$E=0; \quad \varphi=kq\left[\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right] \quad (0\leqslant x\leqslant r),$$

$$E=k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi=kq\left[\frac{1}{x}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right] \quad (r\leqslant x\leqslant R_1).$$

При $R_1 \leqslant x \leqslant R_2$

$$E = k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = kq\left[\frac{1}{x} - \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{R_2}\right)\right].$$

Если $R_2 \leqslant x \leqslant \infty$, то

$$E = k\frac{q}{x^2}; \quad \varphi = k\frac{q}{x}.$$

Рекомендуем читателю построить графики зависимости $E(x)$ и $\varphi(x)$ для каждого из трех разобранных примеров.

Пример 4. Пучок электронов, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U_0 = 10$ кВ, влетает в середину между пластинами плоского конденсатора параллельно им. Какое напряжение необходимо подать на пластины конденсатора, чтобы пучок электронов при выходе из конденсатора отклонялся от своего начального направления на максимальный угол? Длина пластин $l = 10$ см, расстояние между ними $d = 3$ см.

Решение. Решение задач о движении заряженных частиц в однородном электрическом поле конденсатора или заряженной плоскости очень сходно с решением задач на движение тела, брошенного в поле тяжести. Отличие состоит лишь в том, что движение частиц происходит в поле, которое сообщает им некоторое постоянное ускорение $\vec{a}$, отличное от ускорения свободного падения. Действие силы тяжести в подобных задачах, как правило, не учитывают, поскольку гравитационные силы ничтожно малы по сравнению с электрическими. Нахождение ускорения заряженной частицы связано с применением формул электростатики, которые вместе с уравнениями движения и составляют полную систему уравнений, необходимых для определения неизвестной величины. Решение задач подобного типа рекомендуется начинать с составления кинематических уравнений.

Если электрон влетает в электрическое поле заряженного конденсатора со скоростью $\vec{v}_0$, направленной параллельно пластинам (рис. 11.7), то под действием силы $\vec{F}$ поля он отклоняется от своего начального направления движения и вылетает из конденсатора под некоторым углом к этому направлению. По условию задачи электрон влетает в середину конденсатора, поэтому при максимальном отклонении он должен сместиться по вертикали на половину расстояния между пластинами.

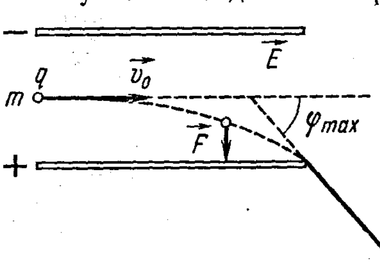

Рис. 11.7

Движение электрона в однородном поле конденсатора происходит по параболе, и его можно рассматривать как результат двух прямолинейных перемещений — равномерного со скоростью $\vec{v}_0$ в горизонтальном направлении и равноускоренного (без начальной скорости) в вертикальном с ускорением $\vec{a}$.

Если длина конденсатора l и расстояние между пластинами d, то проекции перемещений электрона за время прохождения поля конденсатора на эти направления равны соответственно:

$$l = v_0 t \quad \text{и} \quad \frac{d}{2} = \frac{at^2}{2}. \qquad (1)$$

Сила, сообщающая электрону массой m ускорение $\vec{a}$, по второму закону Ньютона равна $\vec{F} = m\vec{a}$. В задачах данного типа уравнение второго закона необходимо представить в развернутом виде, выразив силу, действующую на заряженную частицу, через характеристики поля. Поскольку $\vec{F} = q\vec{E}$, а $E = \frac{U}{d}$, где $\vec{E}$ — напряженность поля между пластинами конденсатора и U — разность потенциалов, то $F = \frac{qU}{d}$. Тогда основное уравнение динамики можно записать в скалярной форме так:

$$\frac{qU}{d} = ma. \qquad (2)$$

В задачах о движении частиц, заряд и масса которых считаются известными (как, например, у электрона и протона), скорость частицы $\vec{v}_0$ нередко задается неявно, через ускоряющую разность потенциалов U_0. Если ускоряющее поле совершает над частицей с массой m и зарядом q работу $A = qU_0$, то частица приобретает кинетическую энергию $W_k = \frac{mv_0^2}{2}$.

Согласно закону сохранения и превращения энергии $qU_0 = \frac{mv_0}{2}$. Откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2qU_0}{m}}. \qquad (3)$$

Уравнения перемещения (или скорости) вместе с уравнениями (2) и (3) являются основными расчетными соотношениями в задачах на движение заряда в однородном электрическом поле. В данном случае, решая их относительно искомой разности потенциалов на пластинах конденсатора и подставляя числовые значения, получим:

$$U = \frac{2d}{l^2} U_0; \quad U = 1{,}8 \text{ кВ}.$$

Пример 5. Протон, летящий к неподвижному ядру двукратно ионизированного атома гелия, на очень большом расстоянии от ядра имеет скорость $v_0 = 10^4$ м/с. На какое расстояние протон сможет приблизиться к ядру? Заряд протона $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m = 1,66 \cdot 10^{-27}$ кг. Решите задачу при условии, что: а) ядро гелия все время остается неподвижным; б) ядро гелия свободно.

Р е ш е н и е. а) В состав ядра атома гелия входят два протона и два нейтрона, поэтому ядро гелия можно считать частицей с массой $4m$ и зарядом $+2q$. Протон, летящий в направлении ядра гелия, будет тормозиться полем ядра до тех пор, пока не остановится на некотором расстоянии от него. После остановки протон начнет двигаться назад и улетит в бесконечность. В момент остановки, когда скорость одной частицы относительно другой равна нулю, расстояние между ними будет минимальным. Так как поле ядра неоднородно, то на движущийся протон действует переменная сила, поэтому для решения задачи нужно воспользоваться законом сохранения и превращения механической энергии:

$$A = W_2 - W_1.$$

Работа внешних сил над протоном — работа сил поля равна:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

(здесь φ_1 — потенциал поля ядра в той точке, где протон обладал кинетической энергией $W_1 = \frac{mv_0^2}{2}$; φ_2 — потенциал поля в точке, где протон остановился, $W_2 = 0$). Если расстояние от ядра до указанных точек поля равно r и R, то, учитывая, что по условию задачи заряд ядра равен $2q$ и $\varepsilon = 1$, для потенциалов поля в этих точках получим:

$$\varphi_1 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

С учетом этих выражений для работы сил поля будем иметь:

$$A = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right), \quad \text{или} \quad A = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

так как в данном случае $R \gg r$.

Подставляя выражения для работы сил поля и кинетических энергий протона в исходную формулу закона сохранения и превращения энергии, мы получим окончательное уравнение для определения минимального расстояния r, на которое протон приближается к неподвижному ядру гелия:

$$\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Решая это уравнение относительно r и подставляя числовые значения, находим:

$$r = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m v_0^2}; \quad r \approx 3,45 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

б) Если протон будет приближаться к свободному ядру гелия, то оно тоже начнет двигаться, так как на него будут действовать силы электрического поля протона. Скорость протона вследствие торможения полем ядра будет уменьшаться, скорость ядра станет увеличиваться, и в некоторый момент времени скорости частиц окажутся одинаковыми. Нетрудно сообразить, что в этот момент расстояние между частицами будет минимальным, скорость частиц относительно друг друга станет равна нулю. В следующий момент времени скорость ядра окажется больше скорости протона и они, продолжая двигаться в одну сторону, начнут удаляться друг от друга. Двигаясь замедленно, протон в некоторый момент остановится и затем начнет двигаться ускоренно в противоположную сторону. В результате соударения протон передает часть своей механической энергии ядру и улетает от него в бесконечность. Основное отличие данного случая от предыдущего состоит в том, что в момент наибольшего сближения частицы имеют некоторую скорость и здесь фактически происходит неупругий удар двух тел. Решение задач такого типа основано на использовании закона сохранения импульса и закона сохранения и превращения энергии.

Как и в первом случае, рассмотрим два состояния системы: первое — когда частицы удалены друг от друга на большое расстояние, второе — в момент наибольшего сближения, когда они имеют одинаковые скорости $\vec{v}_1$. В первом состоянии ядро покоится, протон имеет импульс $m\vec{v}_0$, во втором — импульс системы равен $m\vec{v}_1 + 4m\vec{v}_1$. По закону сохранения импульса

$$mv_0 = mv_1 + 4mv_1, \quad \text{откуда} \quad v_1 = \frac{v_0}{5}. \qquad (1)$$

Переходим теперь к составлению уравнения закона сохранения и превращения механической энергии. Кинетическая энергия системы протон — ядро в первом состоянии равна $W_1 = \frac{mv_0^2}{2}$, во втором $W_2 = \frac{5mv_1^2}{2}$. При переходе системы из первого состояния во второе силы поля совершают работу $A = -\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 r}$ (такую же, как и в первом случае!).

Согласно закону сохранения энергии

$$-\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{5mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) с учетом соотношения (1) получаем, что минимальное расстояние, на которое сближаются частицы при столкновении, равно:

$$r = \frac{5}{4}\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 mv_0^2}; \quad r = 4{,}3 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Пример 6. Небольшой металлический шарик массой m, подвешенный на нити длиной l, колеблется по закону математического маятника над бесконечной равномерно заряженной горизонтальной плоскостью с плотностью заряда σ. Определите период колебаний маятника при условии, что на шарике находится заряд $-q$.

Решение. Гармонические колебания шарика происходят в однородном электрическом поле, созданном равномерно заряженной плоскостью. Это поле действует на отрицательно заряженный шарик силой $\vec{F}$ и сообщает ему постоянное ускорение $\vec{a}$, направленное вертикально вниз. Поскольку шарик колеблется по законам математического маятника и его смещением по вертикали можно пренебречь, с достаточной степенью точности можно считать, что под действием поля сила натяжения нити возрастет на величину F и модуль создаваемого ею ускорения увеличится от g до $g+a$. Период колебаний такого заряженного математического маятника равен:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+a}}. \tag{1}$$

Модуль ускорения $\vec{a}$, вызванного постоянным электрическим полем, определяем из основного уравнения динамики материальной точки:

$$a = \frac{F}{m}.$$

Сила, действующая на шарик с зарядом q в электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$, равна $\vec{F} = q\vec{E}$. Или, поскольку нам задана поверхностная плотность зарядов σ на равномерно заряженной плоскости и колебания происходят в вакууме ($\varepsilon = 1$), согласно формуле (11.5) будем иметь:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad \text{и, следовательно,} \quad F = \frac{\sigma q}{2\varepsilon_0}.$$

С учетом последнего равенства основное уравнение динамики можно представить так:

$$a = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0 m}. \tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) все величины, кроме T и a, заданы. Решая их совместно относительно периода колебаний заряженного шарика, получим:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 m l}{2\varepsilon_0 g m + q\sigma}}.$$

Пример 7. Металлический шар радиусом $r_1 = 2$ см, заряженный до потенциала $\varphi_1 = 30$ В, соединили тонкой длинной проволокой с шаром емкостью $C_2 = 3$ пФ, на котором находится заряд $q_2 = 0{,}6$ нКл. а) Какова будет поверхностная плотность зарядов на шарах после перераспределения зарядов? б) Каким станет заряд на шарах, если первый шар поместить в центр проводящей оболочки радиусом $R = 3$ см, соединенной с землей? в) Каковы будут заряды на шарах, если ко второму шару подключить незаряженный плоский конденсатор емкостью $C_3 = 5$ пФ, одна из пластин которого заземлена?

Решение. а) Если заряженные тела имеют разный потенциал, то при соединении их проводником заряды будут переходить с одного тела на другое до тех пор, пока потенциалы тел не станут одинаковыми. Решение задач по электростатике, где рассматривается перераспределение электрических зарядов между телами или конденсаторами, удобно начинать с записи закона сохранения заряда и равенства потенциалов тел после того, как система приходит в равновесие.

При всяком перераспределении зарядов в изолированной системе, какой являются в данном случае заряженные шары, сумма зарядов остается неизменной. Поэтому если до соединения шаров их заряды равнялись q_1 и q_2, а после соединения q'_1 и q'_2, то согласно закону сохранения зарядов должно быть.

$$q_1 + q_2 = q'_1 + q'_2. \qquad (1)$$

При равновесии зарядов на шарах, соединенных проволокой, потенциалы шаров выравниваются:

$$\varphi'_1 = \varphi'_2. \qquad (2)$$

Записав исходные уравнения (1) и (2), нужно выразить заряды и потенциалы тел через заданные величины и затем установить связь между этими уравнениями с помощью формулы электроемкости (11.13).

Начальный заряд q_1 первого шара можно найти, зная его емкость и начальный потенциал:

$$q_1 = C_1\varphi_1. \qquad (3)$$

Потенциалы шаров можно выразить через их емкости и заряды с помощью формулы (11.13):

$$\varphi'_1 = \frac{q'_1}{C_1}, \quad \varphi'_2 = \frac{q'_2}{C_2}, \qquad (4)$$

где C_1 и C_2 — емкости шаров; q'_1 и q'_2 — заряды на шарах после перераспределения.

Согласно формуле (11.15) емкости шаров связаны с их радиусами формулами

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 r_1 \quad \text{и} \quad C_2 = 4\pi\varepsilon_0 r_2. \qquad (5)$$

Уравнения (1) — (4) позволяют определить заряды q'_1 и q'_2. Поверхностная плотность зарядов на шарах после перераспределения равна:

$$\sigma'_1 = \frac{q'_1}{4\pi r_1^2} \quad \text{и} \quad \sigma'_2 = \frac{q'_2}{4\pi r_2^2}. \qquad (6)$$

В составленной системе уравнений неизвестными величинами фактически являются q_1, q'_1, q'_2, σ'_1 и σ'_2. Исключая из уравнений заряды и подставляя числовые значения, получим:

$$\sigma_1' = \frac{\varepsilon_0(4\pi\varepsilon_0 r_1 \varphi_1 + q_2)}{(4\pi\varepsilon_0 r_1 + C_2) r_1}; \quad \sigma_1' = 56 \text{ нКл/м}^2.$$

Аналогично $\sigma_2' = 42$ нКл/м^2.

б) Если первый шар окружить заземленной металлической сферой, на ней появится индуцированный заряд, равный по модулю и противоположный по знаку заряду шара (см. пример 3, пункт б). Электрическим взаимодействием шаров мы при этом пренебрегаем, считая, что они находятся очень далеко друг от друга. Заряд самого шара при этом не остается таким, каким он был до внесения его в оболочку. Поскольку емкость $C_{1,\text{об}}$ системы шар — сфера станет больше, чем емкость C_1 одного (первого) шара, его потенциал уменьшится и на него перейдет часть заряда со второго шара.

В том, что емкость $C_{1,\text{об}}$ первого шара вместе со сферой действительно больше, чем C_1, убедиться очень легко. Поскольку она оказывается равной емкости сферического конденсатора, т. е.

$$C_{1,\text{об}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R r_1}{R - r_1}, \tag{7}$$

а $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 r_1$, то действительно $C_{1,\text{об}} > C_1$, так как $\frac{r_1 R}{R - r_1} > r_1$.

После перераспределения зарядов на шарах и появления индуцированных зарядов на сфере потенциалы шаров выравниваются. Обозначим их φ_1' и φ_2', причем $\varphi_1' = \varphi_2'$. Потенциал φ_1' на поверхности шара, заключенного в оболочку, складывается из потенциала $\varphi_\text{ш}$ поля, созданного самим шаром, и потенциала $\varphi_\text{об}$ поля, которое создавала бы сама оболочка в том месте, где находится шар, т. е. $\varphi_1' = \varphi_\text{ш} + \varphi_\text{об}$. Потенциал на поверхности оболочки при этом, разумеется, равен нулю, так как она заземлена.

Если после перетекания заряда на первом шаре оказался заряд q_1', то на оболочке появится заряд $-q_1'$, и, следовательно,

$$\varphi_\text{ш} = \frac{q_1'}{C_1}; \quad \varphi_\text{об} = -\frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R}.$$

Потенциал второго шара, если считать, что он достаточно удален от первого, равен:

$$\varphi_2' = \frac{q_2'}{C_2},$$

где q_2' — заряд этого шара. Учитывая все это, запишем:

$$\varphi_\text{ш} + \varphi_\text{об} = \varphi_2', \quad \text{или} \quad \frac{q_1'}{C_1} - \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q_2'}{C_2}. \tag{8}$$

Из уравнений (3), (4), (7) и (8) находим:

$$q_1' = \frac{C_{1,\text{об}}}{C_{1,\text{об}} + C_2}(C_1\varphi_1 + q_2); \quad q_1' = 0{,}46 \text{ нКл};$$

$$q_2' = \frac{C_2}{C_{1,\text{об}} + C_2}(C_1\varphi_1 + q_2); \quad q_2' = 0{,}20 \text{ нКл}.$$

в) При подключении ко второму шару незаряженного плоского конденсатора емкостью C_3, соединенного с землей, часть заряда шаров перейдет на пластину конденсатора и потенциалы на шарах и незаземленной пластине выравнятся. На заземленной пластине появится заряд, равный по модулю заряду первой пластины, но противоположный ему по знаку.

Согласно закону сохранения заряда

$$q_1 + q_2 = q_1' + q_2' + q_3', \tag{9}$$

где q_1', q_2', q_3' — заряды на шарах и конденсаторе после того, как система придет в равновесие. Разность потенциалов между обкладками конденсатора станет при этом равна разности потенциалов между шарами и землей, т. е. $U_1' = U_2' = U_3'$, или с учетом того, что потенциал земли равен нулю:

$$\varphi_1' = \varphi_2' = \varphi_3'. \tag{10}$$

Связь между зарядами тел и их потенциалами устанавливается посредством формулы электроемкости:

$$q_1' = C_1\varphi_1'; \quad q_2' = C_2\varphi_2'; \quad q_3' = C_3\varphi_3'. \tag{11}$$

Из уравнений (9), (10), (11) и (4), считая все емкости известными и учитывая числовые значения заданных величин, находим:

$$q_1' = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}(C_1\varphi_1 + q_2); \quad q_1' \approx 0{,}15 \text{ нКл};$$

$$q_2' = \frac{C_2}{C_1 + C_2 + C_3}(C_1\varphi_1 + q_2); \quad q_2' \approx 0{,}20 \text{ нКл};$$

$$q_3' = \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3}(C_1\varphi_1 + q_2); \quad q_3' \approx 0{,}34 \text{ нКл}.$$

Пример 8. Конденсатор выполнен в виде двух концентрических сфер, радиусы которых равны $r = 2$ см и $R = 6$ см. Внутренняя сфера испускает с каждого квадратного сантиметра поверхности $n = 10^{10}$ электронов в секунду с начальными скоростями $v_0 = 10^3$ м/с. Через какое время после начала испускания электронов заряд на конденсаторе перестанет возрастать? Заряд электрона и его массу считать известными.

Решение. Допустим, что в начальный момент времени, когда эмиссия электронов еще не началась, сферический конденсатор был не заряжен. Тогда при излучении электронов с поверхности внутренней сферы заряд на конденсаторе станет возрастать вследствие перераспределения электронов между обкладками.

Внутренняя сфера будет заряжаться положительно, внешняя — отрицательно. По мере накопления электронов на внешней сфере электрическое поле между обкладками будет увеличиваться. Это поле направлено от меньшей сферы к большей и тормозит движение электронов. Напряженность поля и заряд на конденсаторе увеличиваются до тех пор, пока между сферами не возникнет такая тормозящая разность потенциалов, что при данной начальной скорости $\vec{v}_0$ излучения электроны не смогут ее преодолеть.

Как только разность потенциалов достигнет значения, при котором работа сил поля окажется равной кинетической энергии испускаемых электронов, последние перестанут долетать до внешней обкладки конденсатора и перераспределение зарядов прекратится. Заряд конденсатора, достигнув некоторой величины q, будет оставаться постоянным.

Предположим, что спустя время t после начала эмиссии, вследствие перехода части электронов с внутренней сферы на внешнюю, между сферами возникла такая разность потенциалов U, что поле совершает над электронами работу, равную их начальной кинетической энергии. Тогда

$$A = W, \quad \text{или} \quad eU = \frac{mv_0^2}{2}, \tag{1}$$

где e — заряд, m — масса электрона.

Разность потенциалов U можно выразить через заряд q конденсатора и его емкость:

$$U = \frac{q}{C}. \tag{2}$$

Электроемкость воздушного сферического конденсатора, составленного из металлических сфер радиусами R и r, равна:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 rR}{R - r}. \tag{3}$$

Чтобы выразить заряд конденсатора через время t накопления заряда, необходимо учесть следующее: если заряд первой сферы в результате вылета электронов изменился на q, то так же изменится и заряд второй сферы. Так как вначале обе сферы были не заряжены, то заряд каждой из них, а следовательно, и всего конденсатора станет равным q. По условию задачи с элемента поверхности внутренней сферы $S_0 = 1$ см^2 за время $t_0 = 1$ с вылетает n электронов, поэтому при излучении электронов с поверхности сферы $S = 4\pi r^2$ в течение времени t конденсатор приобретает заряд

$$q = \frac{enSt}{S_0 t_0} = \frac{ne4\pi r^2 t}{S_0 t_0}. \tag{4}$$

Решая уравнения (1) — (4) относительно неизвестного времени t и подставляя числовые значения, получим:

$$t = \frac{\varepsilon_0 m v_0^2 S_0 t_0 R}{2e^2 nr(R-r)}; \quad t \approx 1{,}2 \cdot 10^{-10} \text{ с}.$$

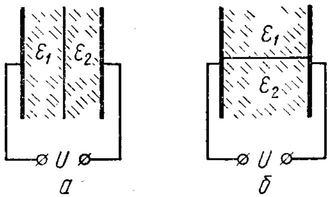

Рис. 11.8

Пример 9. Два одинаковых плоских конденсатора подключены к источникам напряжения U (рис. 11.8,*а,б*). Пространство между пластинами конденсаторов заполнено слоями диэлектриков одинаковой толщины с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. В одном конденсаторе слои расположены параллельно обкладкам, во втором — перпендикулярно. Во сколько раз отличаются электроемкости этих конденсаторов и напряженности полей в однородных диэлектриках? Чему равна поверхностная плотность связанных зарядов на границе раздела диэлектриков?

Решение. Если параллельно обкладкам плоского конденсатора ввести слои диэлектриков, заполняющих воздушную прослойку, то такой сложный конденсатор можно рассматривать как два конденсатора емкостями C_1 и C_2, соединенных последовательно плоскостью контакта диэлектриков. Обкладками первого конденсатора здесь служат граничные слои диэлектрика с проницаемостью ε_1, обкладками второго — такие же слои диэлектрика с проницаемостью ε_2. Как видно из чертежа, площади обкладок этих конденсаторов одинаковы и равны площади пластин S воздушного конденсатора. Расстояние между обкладками определяется толщиной внесенных слоев диэлектриков, в данном случае оно одинаково и равно половине расстояния d между пластинами.

Емкость двух последовательно соединенных конденсаторов равна:

$$C_{\text{пс}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Подставляя в эту формулу выражения для

$$C_1 = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{d} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{d},$$

для общей емкости получим:

$$C_{\text{пс}} = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon_1 \varepsilon_2 S}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d} = \frac{2\varepsilon_1 \varepsilon_2 C_0}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}, \tag{1}$$

где $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$ — емкость воздушного конденсатора до внесения диэлектриков.

Если слои диэлектриков расположены перпендикулярно пластинам, сложный конденсатор можно рассматривать как систему двух конденсаторов емкостями C_1' и C_2', соединенных между собой параллельно через сами пластины. В отличие от разобранного выше случая одинаковыми здесь будут не площади пластин, а расстояния между ними. Сами же площади определяются объемом внесенных слоев диэлектриков. В данном примере эти объемы равны, поэтому площади пластин имеют значение $S/2$. Емкость двух конденсаторов, соединенных параллельно, равна: $C_{пр} = C_1' + C_2'$. Но

$$C_1' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1 S}{2d}; \quad C_2' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2 S}{2d},$$

поэтому

$$C_{пр} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) S}{2d} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) C_0}{2}. \tag{2}$$

Из выражений для $C_{пс}$ и $C_{пр}$ видно, что емкости системы в первом и втором случаях отличаются друг от друга в число раз, равное

$$\frac{C_{пс}}{C_{пр}} = \frac{4\varepsilon_1 \varepsilon_2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}.$$

Чтобы установить, во сколько раз отличаются напряженности полей в слоях диэлектриков, нужно сначала найти значения E_1, E_2, E_1' и E_2' в каждом слое для одного и другого случая.

При последовательном соединении конденсаторов емкостями C_1 и C_2 подаваемое на них напряжение U равно сумме напряжений на первом и втором слоях диэлектриков:

$$U = U_1 + U_2.$$

Поскольку поля в диэлектриках однородные, то

$$U_1 = E_1 \frac{d}{2}; \quad U_2 = E_2 \frac{d}{2},$$

и, следовательно,

$$U = (E_1 + E_2) \frac{d}{2}. \tag{3}$$

При наложении на диэлектрики внешнего поля напряженностью E_0 напряженность в каждой среде уменьшится соответственно в ε_1 и ε_2 раз, т. е.

$$E_1 = \frac{E_0}{\varepsilon_1} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{E_0}{\varepsilon_2},$$

откуда

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2. \tag{4}$$

Из уравнений (3), (4) находим:

$$E_1 = \frac{2\varepsilon_2 U}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{2\varepsilon_1 U}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) d}.$$

Если слои диэлектриков перпендикулярны пластинам, то напряжение на каждом из образовавшихся конденсаторов емкостями C'_1 и C'_2 одинаково и равно U, поэтому

$$E'_1 = \frac{U}{d}; \quad E'_2 = \frac{U}{d}.$$

Напряженности полей в первой и второй среде при указанном расположении слоев диэлектриков относятся друг к другу как

$$\frac{E_1}{E'_1} = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \quad \text{и} \quad \frac{E_2}{E'_2} = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

При наложении на диэлектрик внешнего электрического поля происходит поляризация диэлектрика и на его поверхности, перпендикулярной силовым линиям поля, появляются связанные заряды. Рассмотрим первый слой диэлектрика (см. рис. 11.8, *а*) Он находится в электрическом поле, созданном пластинами конденсатора. Напряженность этого поля равна $E_0 = U/d$, поскольку на пластины подано напряжение U и расстояние между ними равно d. Напряженность поля в первой среде будет ослаблена в ε_1 раз и будет равна $E_1 = E_0/\varepsilon_1 = U/(\varepsilon_1 d)$. Это поле является результатом наложения двух полей: поля напряженностью $\vec{E}_0$ и поля напряженностью $\vec{E}_c$, создаваемого связанными зарядами и направленного навстречу полю пластин, т. е.

$$E_1 = E_0 - E_c, \text{ или иначе: } \frac{U}{\varepsilon_1 d} = \frac{U}{d} - E_c. \tag{5}$$

Напряженность E_c поля связанных зарядов, распределенных с поверхностной плотностью $+\sigma_1$ и $-\sigma_1$ на торцах первого слоя диэлектрика, можно рассматривать как напряженность поля, созданного двумя параллельными заряженными пластинами, поэтому $E_c = \sigma_1/\varepsilon_0$.

Подставив это выражение для E_c в уравнение (5), получим окончательную формулу для определения искомой плотности связанных зарядов:

$$\frac{U}{\varepsilon_1 d} = \frac{U}{d} - \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0},$$

отсюда

$$\sigma_1 = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) U}{\varepsilon_1 d}.$$

Аналогично для второго слоя диэлектрика будем иметь:

$$\sigma_2 = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - 1) U}{\varepsilon_2 d}.$$

Пример 10. а) Найдите разность потенциалов между обкладками конденсаторов, а также между точками *b* и *e* в схеме, изображенной на рисунке 11.9. б) Какой заряд пройдет между

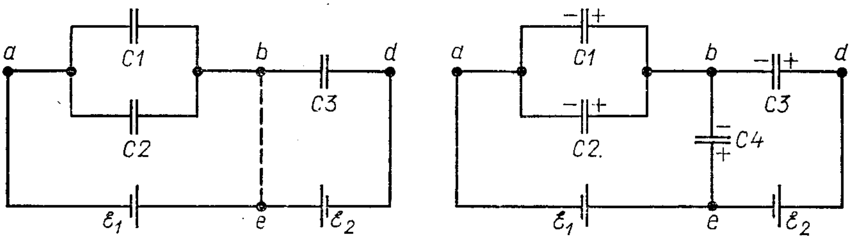

Рис. 11.9

точками b и e, если их соединить проводником? в) Какова будет разность потенциалов между этими точками, если к ним подключить конденсатор $C4$?

Решение. а) Предположим, что $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$, и обозначим разность потенциалов на обкладках конденсаторов через U_{ab} и U_3, тогда, учитывая полярность источников, запишем:

$$\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = U_{ab} + U_3, \tag{1}$$

поскольку напряжение на всей батарее конденсаторов между точками a и b равно разности $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2$.

Конденсаторы $C1$ и $C2$ соединены между собой параллельно, конденсатор $C3$ подключен к ним последовательно. Если на этих конденсаторах находятся соответственно заряды q_1, q_2 и q_3, то должно быть

$$q_1 + q_2 = q_3, \tag{2}$$

так как при указанном соединении конденсаторов заряд на участке ab равен заряду на участке bd. Величины, входящие в первые два уравнения, связаны между собой через емкости:

$$q_1 = C_1 U_{ab}; \quad q_2 = C_2 U_{ab}; \quad q_3 = C_3 U_3. \tag{3}$$

Решая уравнения (1) — (3) относительно U_{ab} и U_3 при заданных C_1, C_2, C_3, $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, находим напряжения на конденсаторах:

$$U_{ab} = \frac{C_3(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)}{C_1 + C_2 + C_3}; \quad U_3 = \frac{(C_1 + C_2)(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Разность потенциалов между точками b и e можно определить из уравнения (1). Для этого достаточно его представить в несколько ином виде, сгруппировав значения разностей потенциалов, относящихся к соответствующим участкам bde и ead:

$$U_{be} = \mathscr{E}_1 - U_{ab} = \mathscr{E}_2 + U_3. \tag{4}$$

Выражение, стоящее в левой части равенства (4) (так же как и в правой), представляет алгебраическую сумму напряжений на участках между точками b и e и является искомой разностью потенциалов U_{be}.

Подставляя в правую часть уравнения (4) вместо U_{ab} полученное для него выражение, найдем:

$$U_{be} = \frac{(C_1 + C_2)\,\mathscr{E}_1 + C_3\,\mathscr{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3}.$$

Точно такой же результат мы имели бы при подстановке в правую часть уравнения (4) выражения для U_3.

При расчете схем, составленных из конденсаторов и аккумуляторов, электроемкости источников напряжения, а следовательно, и заряды их считаются равными нулю. Записывая уравнения (1), (2), мы воспользовались этим допущением и учитывали только заряды конденсаторов. В заключение отметим, что полученный нами результат для U_{ab} и U_3 не зависит от чередования выделенных участков цепи. Если, например, поменять местами источник с ЭДС $\mathscr{E}_2$ и конденсатор *C3*, ответ к задаче не изменится.

б) Если точки b и e соединить проводником, то конденсаторы *C1* и *C2* окажутся подключенными параллельно первому аккумулятору, а конденсатор *C3* — второму. Когда точки b и e были разъединены, общий заряд внутренних пластин конденсаторов, не подключенных непосредственно к клеммам аккумуляторов, был равен нулю. При замыкании точек проводником на пластинах появится некоторый заряд — это и будет тот заряд, который пройдет через проводник между этими точками. Если предположить, что на внутренних обкладках конденсаторов *C1*, *C2* и *C3* находятся заряды q_1, q_2 и $-q_3$, то искомый заряд будет равен их алгебраической сумме:

$$q_x = q_1 + q_2 - q_3.$$

Поскольку же

$$q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)\,\mathscr{E}_1 \quad \text{и} \quad q_3 = C_3\,\mathscr{E}_2, \text{ то}$$

$$q_x = (C_1 + C_2)\,\mathscr{E}_1 - C_3\,\mathscr{E}_2.$$

в) Если между точками b и e подключить конденсатор *C4*, то заряды, находившиеся на конденсаторах *C1*, *C2* и *C3*, перераспределятся. Перераспределение зарядов произойдет и на пластинах, не связанных непосредственно с клеммами аккумуляторов. Допустим, они станут равны q_1, q_2, $-q_3$ и $-q_4$. Суммарный заряд на этих пластинах всегда равен нулю, поэтому заряды на пластинах конденсаторов в узле b должны удовлетворять условию

$$q_1 + q_2 - q_3 - q_4 = 0. \qquad (5)$$

Для контуров $abdea$ и $bdeb$ можно записать:

$$\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 = U_{ab} + U_3 \quad \text{и} \quad \mathscr{E}_2 = U_4 - U_3, \qquad (6)$$

где U_4 — напряжение на конденсаторе *C4*.

Связь между зарядами и напряжениями на конденсаторах,

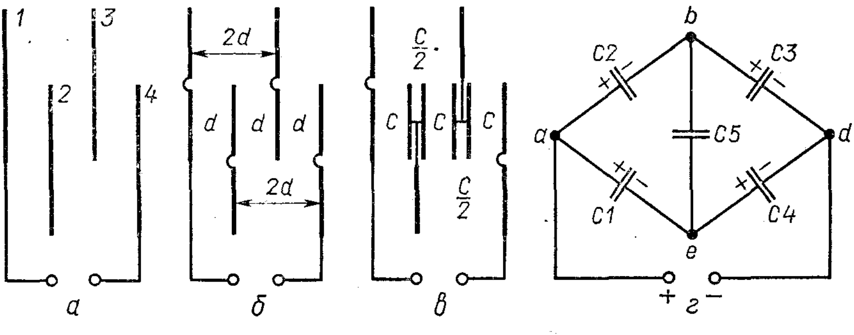

Рис. 11.10

входящими в уравнения (5) и (6), дается формулами электроемкости, из которых следует, что

$$q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)U_{ab}; \quad q_3 = C_3U_3; \quad q_4 = C_4U_4. \tag{7}$$

Исключая из составленной системы уравнений заряды и напряжения U_{ab} и U_3, находим напряжение U_4, равное разности потенциалов между точками b и e:

$$U_4 = U_{be} = \frac{(C_1 + C_2)\,\mathscr{E}_1 + C_3\,\mathscr{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4}.$$

Пример 11. Четыре тонкие металлические пластины площадью S каждая расположены на расстоянии d друг от друга, как указано на рисунке 11.10, *а*. Перекрывающиеся площади пластин равны $S/2$. Пренебрегая краевыми эффектами, определите емкость системы.

Решение. Чтобы рассчитать электроемкость заданной системы пластин, необходимо прежде всего заменить ее эквивалентной системой плоских конденсаторов, каким-то образом соединенных между собой. После этого задача сведется к расчету общей емкости батареи конденсаторов.

Нетрудно заметить, что каждую из четырех пластин можно представить как две пластины вдвое меньшей площади, соединенные между собой проводником, и заменить исходную схему схемой 11.10, *б*. При подключении аккумулятора к крайним пластинам источник будет совершать работу по переносу части электронов с одной крайней пластины на другую — заряды на проводниках разделятся. Пластины, подключенные к клеммам источника тока, получат заряды $+q_0$ и $-q_0$. Эти заряды распределятся по двум пластинам *1* и двум пластинам *4*.

На внутренних пластинах заряды тоже перераспределяются. Эти пластины оказываются в электрическом поле внешних пластин, поэтому в них начнется смещение электронов проводимости навстречу полю, и оно будет происходить до тех пор, пока результирующее поле внутри пластин не станет равным нулю. Так как заряды распределяются по поверхности проводников, то каждую из пластин, находящуюся между двумя другими пластинами, можно рассматривать как две пластины, соединенные между собой тонким проводником. Такая замена является эквивалентной, так как в конденсаторах заряды распределяются лишь на той поверхности пластины, которая обращена в сторону другой пластины данного конденсатора. Учитывая это, систему пластин можно заменить эквивалентной системой плоских конденсаторов (рис. 11.10, *в*): трех плоских конденсаторов емкостью $C = \varepsilon_0 S/(2d)$, соединенных с двумя конденсаторами емкостью $C/2 = \varepsilon_0 S/(4d)$. Ее, в свою очередь, можно изобразить иначе (рис. 11.10, *г*).

Обозначим электроемкости конденсаторов через C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, где $C_1 = C_3 = C_5 = C$ и $C_2 = C_4 = C/2$. В последней схеме нет ни последовательно, ни параллельно соединенных конденсаторов, поэтому для нахождения емкости C_0 всей батареи нужно воспользоваться общим методом расчета цепи. В том, что данное соединение из пяти конденсаторов нельзя представить как комбинацию последовательных и параллельных соединений, убедиться легко. При последовательном соединении двух элементов цепи между ними не должно быть узлов — этому условию ни одна пара конденсаторов не удовлетворяет. При параллельном соединении двух элементов они должны быть непосредственно подключены к одним и тем же двум точкам цепи и, стало быть, на каждом проводнике, соединяющем элементы, должно быть только по одному узлу. Этому условию ни одна пара конденсаторов тоже не удовлетворяет.

Если на батарею конденсаторов подать напряжение U_0, батарея получит заряд

$$q_0 = C_0 U_0. \tag{1}$$

Такой заряд будет разделен источником на пластинах конденсаторов, подключенных к источнику.

Предположим, что заряды на конденсаторах равны q_1, q_2, q_3, q_4 и q_5, и отметим полярность обкладок конденсаторов в соответствии со знаками полюсов батареи. Полярность конденсатора $C5$ установим при этом предположительно: пусть верхняя пластина имеет заряд $+q_5$, а нижняя заряд $-q_5$. В нашей схеме есть 4 узла — a, b, d и e. Учитывая знаки зарядов пластин конденсаторов, запишем уравнения для зарядов (узлы a, b и e):

$$q_0 = q_1 + q_2, \tag{2}$$

$$-q_2 + q_5 + q_3 = 0, \tag{3}$$

$$-q_1 + q_4 - q_5 = 0. \tag{4}$$

Таких уравнений нужно составлять на одно меньше числа узлов в схеме. Уравнение для последнего узла не будет независимым — оно является следствием уравнений (2) — (4).

Записав уравнения для зарядов, нужно составить уравнения для напряжений на конденсаторах. Так как работа электрических сил по перемещению заряда из одной точки электростатического поля в другую не зависит от формы пути, а зависит только от разности потенциалов между этими точками, то для контура *abda* получим:

$$U_0 - U_2 - U_3 = 0. \tag{5}$$

Для контура *abea*:

$$U_2 + U_5 - U_1 = 0. \tag{6}$$

Для контура *bdeb*:

$$U_3 - U_4 - U_5 = 0. \tag{7}$$

При составлении этих уравнений нужно обратить особое внимание на знаки перед слагаемыми; они определяются знаками зарядов пластин конденсаторов:

$$q_1 = CU_1, \quad q_2 = C/2U_2, \quad q_3 = CU_3, \quad q_4 = C/2U_4, \quad q_5 = CU_5. \tag{8}$$

Исключая из уравнений (1) — (8) заряды и напряжения и решая их относительно общей емкости системы, получим:

$$C_0 = \frac{11}{14} C = \frac{11\varepsilon_0 S}{28d}.$$

Пример 12. Плоский воздушный конденсатор с расстоянием между обкладками $d = 3$ см и площадью каждой из обкладок $S = 60$ см^2 присоединен к источнику постоянного напряжения $U = 2$ кВ. Параллельно пластинам конденсатора вводится металлическая пластинка толщиной $d_0 = 1$ см. а) Какую энергию расходует источник при внесении пластинки? На сколько изменяется при этом энергия конденсатора? б) Какую работу совершат силы поля и каково будет изменение энергии конденсатора, если пластинку вставлять в заряженный конденсатор, отключенный от источника?

Решение. а) При внесении незаряженной металлической пластинки в поле конденсатора пространство, занимаемое полем, уменьшается на объем пластинки, так как напряженность электрического поля внутри металла равна нулю. Емкость конденсатора с металлической пластинкой увеличивается по сравнению с первоначальной, как если бы его пластины сблизили. Это легко себе представить, предположив, что пластинка вводится вплотную к одной из обкладок. В таком случае мы как бы увеличиваем толщину обкладки конденсатора за счет сокращения воздушного промежутка.

Поскольку конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения, то увеличение электроемкости конденсатора, вызванное внесением металлической пластинки, приводит к тому, что заряды на конденсаторе изменятся и по цепи пройдет некоторый заряд Δq. Работа источника при прохождении через него заряда Δq (работа сторонних сил внутри источника) будет равна:

$$A_и = \Delta q U. \qquad (1)$$

Значение заряда, прошедшего через источник, а следовательно, и работу батареи можно определить по изменению (увеличению) заряда конденсатора. Если первоначальный заряд на конденсаторе был q_1, а после внесения пластинки он увеличился до q_2, то

$$\Delta q = q_2 - q_1. \qquad (2)$$

Заряды q_1 и q_2 можно выразить через напряжение на конденсаторе U, которое остается все время постоянным, и электроемкости — начальную C_1 и конечную C_2 (с металлической пластинкой):

$$q_1 = C_1 U; \quad q_2 = C_2 U. \qquad (3)$$

Электроемкость плоского конденсатора в первом и втором случаях равна соответственно:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_0}, \qquad (4)$$

поскольку во втором случае расстояние между обкладками уменьшилось на толщину пластинки.

В соотношениях (1) — (4) неизвестными величинами являются $A_и$, Δq, q_1, q_2, C_1 и C_2. Решая их относительно искомой работы источника и подставляя числовые значения, получим:

$$A_и = \frac{\varepsilon_0 S d_0 U^2}{d(d - d_0)}; \quad A_и = 7 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

Изменение энергии конденсатора (энергии его электрического поля) равно:

$$\Delta W = W_2 - W_1, \qquad (5)$$

где W_1 и W_2 — соответственно энергия конденсатора до и после перераспределения зарядов, т. е. до и после внесения пластинки.

Чтобы представить правую часть этого равенства в развернутом виде, нужно воспользоваться одной из формул для энергии конденсатора. Используя формулы (11.26) для конкретных расчетов, нужно брать ту из них, которая в правой части содержит лишь одну переменную величину. В нашей задаче такому условию удовлетворяет вторая формула, так как напряжение на конденсаторе, подключенном к источнику, при изменении емкости остается постоянным:

$$W_1 = \frac{C_1 U^2}{2}; \quad W_2 = \frac{C_2 U^2}{2}. \qquad (6)$$

Емкости C_1 и C_2, входящие в выражения для энергий, определяют по формулам (4).

Подставляя в соотношение (5) выражения для W_1 и W_2 с учетом формул (4), получим:

$$\Delta W = \frac{\varepsilon_0 S d_0 U^2}{2d(d-d_0)},$$

откуда после подстановки числовых значений заданных величин найдем: $\Delta W = 3{,}5 \cdot 10^{-6}$ Дж. Увеличение энергии конденсатора оказалось вдвое меньше работы источника. Рекомендуем самим читателям установить, на что израсходована вторая половина энергии.

б) Рассмотрим теперь второй случай, когда конденсатор заряжен и отключен от источника. При внесении в заряженный конденсатор металлической пластинки силы электрического поля начнут совершать работу по разделению зарядов внутри пластинки. В результате на одной стороне пластинки окажется положительный заряд, на второй — отрицательный. Значения их будут одинаковыми и равными заряду q конденсатора, так как лишь при этом условии поле внутри пластинки будет равно нулю. Если конденсатор отключен от источника, то в процессе разделения зарядов в пластинке и изменения емкости заряд на обкладках конденсатора остается одним и тем же. По мере увеличения разделенного заряда напряженность результирующего поля внутри пластинки уменьшается от значения E (равного значению напряженности в конденсаторе $C1$) до нуля.

Когда заряд на поверхностях пластинки достигает значений q и $-q$, силы поля на расстоянии d_0, равном толщине пластинки, совершат над зарядом работу

$$A_п = qE_{ср}d_0, \tag{1}$$

где $E_{ср}$ — среднее значение напряженности поля внутри пластинки. Легко показать, что напряженность поля внутри пластинки меняется с увеличением разделенного заряда по линейному закону и поэтому

$$E_{ср} = \frac{E}{2}. \tag{2}$$

Согласно формуле (11.5) напряженность поля в плоском воздушном конденсаторе равна:

$$E = \frac{q}{\varepsilon_0 S}. \tag{3}$$

Заряд на конденсаторе, а следовательно, и равный ему заряд на поверхности пластинки можно выразить через начальную емкость конденсатора и начальное напряжение на нем:

$$q = C_1 U = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U. \tag{4}$$

Исключая из выражений (1) — (4) неизвестные q, $E_{\text{ср}}$, E и подставляя числовые значения, получим для работы силы поля:

$$A_{\text{п}} = \frac{\varepsilon_0 S d_0 U^2}{2d^2}; \quad A_{\text{п}} \approx 1{,}17 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

Если до внесения пластинки конденсатор обладал энергией W_1, после внесения W_2, то изменение (уменьшение) энергии конденсатора

$$\Delta W = W_2 - W_1. \tag{5}$$

Как и в первом случае, правую часть равенства нужно представить в развернутом виде, выразив энергию конденсатора через заданные величины. Поскольку в этом примере неизменным остается заряд на конденсаторе, то, применив третью формулу (11.26), получим:

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1}; \quad W_2 = \frac{q^2}{2C_2}. \tag{6}$$

Входящий в выражения для энергии (6) заряд q определяют по формуле (4); емкости до и после внесения пластинки равны соответственно:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - d_0}. \tag{7}$$

Подставив в соотношение (5) выражения для W_1 и W_2 через заданные величины с учетом их числовых значений, получим:

$$\Delta W = -\frac{\varepsilon_0 S d_0 U^2}{2d^2}; \quad \Delta W \approx -1{,}17 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}.$$

Сравнивая выражения для изменения энергии и работы сил поля, мы видим, что $-\Delta W = A_{\text{п}}$, т. е. работа по разделению зарядов в пластинке (увеличение их потенциальной энергии) происходит за счет уменьшения энергии внешнего поля — поля конденсатора.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 11

11.1. С какой силой будут притягиваться два одинаковых свинцовых шарика диаметром 1 см, расположенные на расстоянии 1 м друг от друга, если у каждого атома первого шарика отнять по одному электрону и все эти электроны перенести на второй шарик?

11.2. На двух одинаковых каплях масла радиусом $8{,}22 \cdot 10^{-3}$ см находятся одинаковые одноименные заряды. Определите их модуль, если сила кулоновского отталкивания уравновешивает силу притяжения капель. Расстояние между каплями значительно больше их линейных размеров.

11.3. Два маленьких заряженных шарика, одинаковые по размеру, притягиваются друг к другу с некоторой силой. После того как шарики были приведены в соприкосновение и раздвинуты на расстояние в n раз большее, чем прежде, сила взаимодействия между ними уменьшилась в m раз. Каков был заряд первого шарика до соприкосновения, если второй шарик имел заряд q?

11.4. N заряженных шариков одинакового радиуса и массы подвешены на нитях одинаковой длины, закрепленных в одной точке. Опуская шарики в жидкий диэлектрик, заметили, что угол отклонения нитей от вертикали в воздухе и в диэлектрике остается одним и тем же. Зная плотность материала шариков ϱ_1 и диэлектрика ϱ_2, определите его диэлектрическую проницаемость.

11.5. Три одинаковых заряда, каждый из которых равен q, расположены в вершинах равностороннего треугольника. Где и какой заряд нужно поместить, чтобы вся система находилась в равновесии?

11.6. Четыре маленьких шарика соединены тонкими непроводящими нитями, так что в натянутом состоянии нити образуют ромб. Чему равен угол между нитями, если шарики, находящиеся в противоположных вершинах ромба, имеют заряды $Q_1 = Q_2 = Q$ и $q_1 = q_2 = q$?

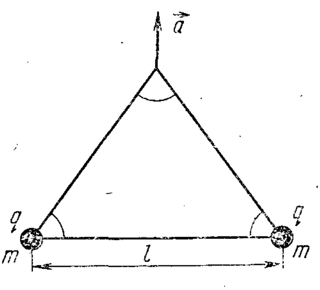

Рис. 11.11

11.7. Две частицы, имеющие массу m и заряд q, находятся в вершинах равностороннего треугольника, составленного из легких нитей длиной l (рис. 11.11). Систему поднимают вертикально вверх с ускорением $\vec{a}$, равным по модулю g. Определите натяжение нити, соединяющей частицы.

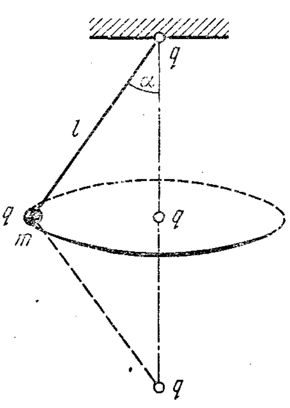

Рис. 11.12

11.8. Небольшой грузик, имеющий массу m и заряд q, вращается на непроводящей нити длиной l (рис. 11.12). Определите период обращения грузика и натяжение нити, если неподвижный точечный заряд q находится: а) в точке подвеса нити; б) в центре окружности, описываемой грузиком; в) на оси вращения на расстоянии l от грузика.

11.9. Две частицы массами m и M, имеющие заряды $-q$ и Q, движутся как одно целое вдоль силовой линии однородного электрического поля с напряженностью $\vec{E}$. Определите: а) расстояние x между частицами, при котором возможно такое движение; б) ускорение частиц.

11.10. Электроны влетают в пространство между двумя горизонтальными плоскими сетками длиной 5 см под углом 30° к их поверхности, а вылетают под углом 10°. Определите начальную энергию электронов, если напряженность электростатического поля между сетками 60 кВ/м. Решите задачу при условии, что сетки расположены вертикально и расстояние между ними равно 5 см.

11.11. Маленький шарик массой m, обладающий зарядом q, подвешен на легкой непроводящей нити длиной l. Систему поместили в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$, направленной вертикально вниз (горизонтально). Нить отклонили от положения равновесия в горизонтальное положение и затем отпустили. Определите: а) максимальное натяжение нити; б) период малых колебаний шарика около его положения равновесия.

11.12. На оси заряженного проволочного кольца по обе стороны от его центра находятся два одинаковых точечных заряда q. Если заряды поместить в точках, находящихся от центра кольца на расстояниях, равных радиусу, то система оказывается в равновесии. Чему равен заряд кольца? Будет ли равновесие устойчивым?

11.13. На вертикальной плоскости распределен заряд с поверхностной плотностью $4 \cdot 10^{-5}$ Кл/м^2. К плоскости прикреплена нить, на конце которой находится заряженный шарик массой 10^{-3} кг. При равновесии системы нить образует с плоскостью угол 13°. Определите заряд шарика.

11.14. Капля массой 10^{-13} кг, на которой находится заряд, равный 10 зарядам электрона, поднимается вертикально вверх с ускорением 2,2 м/с^2 между пластинами горизонтально расположенного плоского конденсатора. Определите поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора. Сопротивлением воздуха пренебречь.

11.15. Два маленьких шарика, имеющие заряды q и $-q$, соединены между собой легким непроводящим стержнем длиной l. Стержень расположен вдоль силовых линий однородного электрического поля, созданного большой заряженной плоскостью, по которой равномерно распределен заряд с поверхностной плотностью σ. Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть стержень на угол $\alpha = 180°$? Решите задачу при условии, что вначале стержень был расположен перпендикулярно силовым линиям поля.

11.16. Три тонкие металлические пластинки, расположенные параллельно друг другу, имеют заряды q, $2q$ и $-3q$. Расстояние между пластинками равно d, площадь каждой пластинки S. Определите разность потенциалов между крайними пластинками и силу, действующую на среднюю пластинку.

11.17. Через блок переброшена легкая проводящая струна длиной l. На концах струны находятся два металлических груза массами M и m. Предоставленная самой себе, система приходит в ускоренное движение. Определите разность потенциалов между грузами. Трением на блоке и размерами грузов пренебречь. Масса и заряд электрона соответственно равны $m_э$ и e.

11.18. Металлический диск радиусом R вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Определите напряженность электрического поля в диске и показания вольтметра, соединенного с контактами, один из которых касается диска в центре, а другой — с краю. Отношение заряда электрона к его массе равно γ.

11.19. Маленький шарик массой m, имеющий заряд q_1, скользит с высоты h по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол α. В вершине прямого угла, образованного высотой h и горизонтом, находится неподвижный точечный заряд q_2. Определите скорость шарика у основания наклонной плоскости. Трением пренебречь.

11.20. Какую работу нужно совершить, чтобы переместить точечный заряд -10^{-7} Кл внутрь металлической заряженной сферы радиусом 0,15 м, имеющей заряд $2/3 \cdot 10^{-7}$ Кл, из точки, находящейся на расстоянии 0,24 м от поверхности сферы? Чему будет равна работа по перенесению заряда с поверхности сферы в точку, удаленную от нее на 0,05 м? В обоих случаях считать, что заряд распределен по сфере равномерно.

11.21. Спутники Земли непрерывно облучаются космическими лучами, состоящими главным образом из протонов больших энергий. Средняя кинетическая энергия W_k протонов в космических лучах равна нескольким миллиардам электронвольт; интенсивность потока протонов, достигающих земной поверхности, составляет примерно 10^4 частиц/(м^2 · с). Оцените время, необходимое для того, чтобы космические протоны подняли потенциал спутника настолько, чтобы его заряд перестал возрастать. Чему будет равен при этом заряд спутника? При решении считать, что спутник имеет форму шара радиусом 2 м.

11.22. Два полых металлических шара, радиусы которых 0,05 и 0,15 м, находятся на расстоянии 2,40 м друг от друга. Первому шару сообщен заряд $4/3 \cdot 10^{-8}$ Кл, второму шару заряд $-4 \cdot 10^{-8}$ Кл. Определите потенциал в центре шаров и в середине отрезка, соединяющего их центры.

11.23. Внутри шарового металлического слоя, внутренний и внешний радиусы которого соответственно равны r и R, на расстоянии x от центра находится точечный заряд q. Чему равен потенциал в центре слоя? Как изменится этот потенциал, если слой заземлить?

11.24. Две проводящие концентрические сетки радиусами R и r имеют заряды соответственно Q и q. Пространство между сетками заполнено средой с проницаемостью ε. а) Определите напряженность и потенциал поля как функцию расстояния x, отсчитываемого от центра сфер, и постройте соответствующие графики. б) Найдите вид функций $E(x)$ и $\varphi(x)$ при условии, что заземлили внешнюю (внутреннюю) сетку. в) Какой заряд перейдет с одной сетки на другую, если их соединить между собой проводником?

11.25. Точечный заряд q находится между двумя заземленными проводящими концентрическими сферами радиусов r и R на расстоянии x от центра. Какие заряды индуцируются на сферах? Анализируя полученный ответ, найдите эти заряды при условии, что $r \to \infty$, $R \to \infty$, но $R - r = \text{const}$ (точечный заряд между двумя заземленными плоскостями).

11.26. Проводящий шар радиусом a имеет заряд q. а) Каков будет потенциал в центре шара, если на расстоянии $3a$ от центра шара поместить точечный заряд q? б) Какова напряженность поля на поверхности шара в точке, наиболее близкой к точечному заряду? в) С какой силой взаимодействуют шар и точечный заряд?

11.27. По кольцу радиусом R из тонкой проволоки равномерно распределен заряд q. Определите напряженность и потенциал поля в центре кольца и в точке, лежащей на его оси на расстоянии x от центра. Изобразите графики $E(x)$ и $\varphi(x)$.

11.28. Четыре одинаковых проводящих шара радиусом r каждый расположены в вершинах тетраэдра с ребром $a \gg r$. Одному из шаров сообщили заряд q и затем его на некоторое время поочередно соединяли с каждым из незаряженных шаров. Чему равно изменение потенциальной энергии системы после перераспределения зарядов? Какой станет энергия системы, если после перераспределения зарядов первый шар заземлить? Объясните, за счет чего произошло изменение энергии в обоих случаях.

11.29. Восемь бусинок, имеющих заряд q и массу m, находятся в вершинах куба с ребром l. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы их расположить в один ряд на расстоянии l друг от друга? Какова будет максимальная скорость бусинок, если их предоставить самим себе?

11.30. Две частицы, имеющие массу m и заряд q, летят из бесконечности навстречу друг другу со скоростями v_1 и $v_2 > v_1$. На какое минимальное расстояние x сблизятся частицы и как они будут двигаться после этого?

11.31. Между пластинами *1* и *2* конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения U, на расстоянии l от второй пластины находится сетка *3*. Пластина *2* испускает электроны с начальными скоростями v. Какое напряжение необходимо приложить между сеткой *3* и пластиной *2*, чтобы электроны не долетали до пластины *1*? Расстояние между пластинами конденсатора d, заряд электрона и его масса известны.

11.32. Катод и анод двухэлектродной лампы выполнены в виде плоского конденсатора и расположены вертикально в поле тяжести. Катод испускает электроны с ничтожно малыми начальными скоростями. Определите вертикальное смещение электронов и расстояние, которое они пролетают за время движения между электродами, если расстояние между электродами равно d, напряжение между катодом и анодом U, отношение заряда электрона к его массе γ.

11.33. Электроны в осциллографе, проходя разность потенциалов 600 В, разгоняются и влетают в середину плоского конденсатора параллельно его пластинам. К пластинам приложено напряжение 60 В; длина их 4 см, расстояние между ними 1 см. Определите, на сколько отклонится световое пятно на экране, если расстояние между точкой выхода электронов из конденсатора и экраном осциллографа равно 10 см. При каком минимальном напряжении на пластинах электроны не будут вылетать из конденсатора?

11.34. Диэлектрик плоского конденсатора состоит из слоя слюды толщиной 1 мм и слоя парафина толщиной 2 мм. Определите напряженность поля в каждом слое диэлектрика и разность потенциалов на них, если к конденсатору приложено напряжение 700 В. Диэлектрическая проницаемость слюды равна 6, парафина 2.

11.35. Шар наэлектризован так, что поверхностная плотность заряда равна σ. На расстоянии l от поверхности шара потенциал поля равен φ. Какова емкость шара?

11.36. Найдите емкость конденсатора, состоящего из двух шаров радиусом r, находящихся в среде с диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между центрами шаров $R \gg r$. При решении считать, что заряды на поверхности шаров распределены равномерно.

11.37. Определите емкость сферы радиусом $r = 0{,}10$ м, окруженной концентрической сферой радиусом $R = 0{,}15$ м. Каков будет потенциал первой сферы, если на нее поместить заряд $q = 2 \cdot 10^{-7}$ Кл, а поверхность второй сферы заземлить? Пространство между сферами заполнено парафином. Диэлектрическая проницаемость парафина 2.

11.38. Два металлических шара радиусами 6 и 3 см соединены тонкой проволокой. Шары заряжены до потенциала 1500 В. Как распределятся заряды на шарах, если: а) первый шар наполовину погрузить в керосин; б) в керосин погрузить оба шара наполовину; в) в керосин погрузить оба шара полностью; г) один шар погрузить в керосин, второй оставить в воздухе? Диэлектрическая проницаемость керосина равна 2,1.

11.39. Металлический шар радиусом r, на котором находится заряд q, окружен сферической сеткой радиусом R, соединенной с землей. Внутренний шар испускает электроны с ничтожно малыми начальными скоростями, которые летят в направлении сетки. Зная отношение заряда электрона к его массе γ, определите скорость электронов, вылетевших за пределы сетки.

11.40. N шаровых капель радиусом r заряжены до одинакового потенциала φ. Все капли соединяются в одну большую. Определите потенциал, плотность заряда на поверхности большой капли и изменение электрической энергии.

11.41. Шар радиусом 0,6 м, заряженный до потенциала 150 В, соединен тонкой проволокой с шаром, имеющим заряд $3 \cdot 10^{-3}$ Кл и обладающим электрической энергией $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ Дж, и с незаряженным шаром емкостью 5 пФ. Определите потенциал шаров, изменение заряда на каждом шаре и изменение их общей энергии.

11.42. К пластинам конденсатора, каждая из которых имеет площадь 10^{-2} м^2, приложена разность потенциалов 280 В. Напряженность поля в конденсаторе 56 кВ/м. Определите поверхностную плотность заряда, емкость конденсатора, его энергию и силу притяжения пластин.

11.43. Секундный математический маятник, состоящий из проводящей нити и металлического шарика массой m, совершает колебания с периодом T_1 в поле заряженного плоского конденсатора емкостью C. Определите заряд шарика, если известны заряд конденсатора Q и расстояние между его пластинами d. Задачу решите для горизонтального и вертикального расположения пластин конденсатора.

11.44. Конденсаторы соединили так, как показано на рисунке 11.13, *а, б, в, г*. Чему равна емкость батареи? Емкость каждого конденсатора в схеме *б* равна C.

11.45. Двенадцать одинаковых конденсаторов емкостью C каждый включены в ребра проволочного каркаса, имеющего форму октаэдра. 1) Какова будет емкость системы, если ее подключить к источнику напряжения вершинами октаэдра, лежащими на его оси симметрии? Емкостью соединительных проводов пренебречь. 2) Решите задачу при условии, что конденсаторы включены в ребра: а) тетраэдра; б) куба. Рассмотрите все возможные случаи подключения этих каркасов в цепь.

11.46. Плоский конденсатор с площадью каждой пластины S и расстоянием между пластинами d подключен к источнику постоянного напряжения U. Как изменится заряд

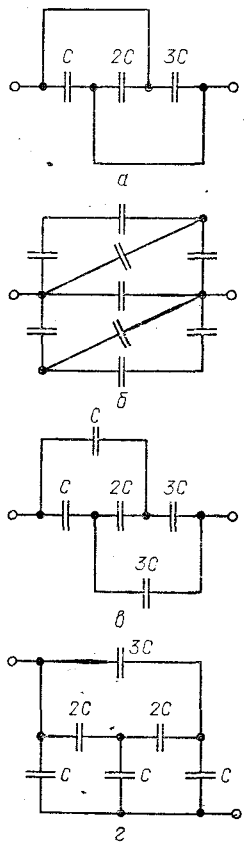

Рис. 11.13

на конденсаторе, если в него ввести пластинку толщиной $2/3\ d$ с диэлектрической проницаемостью ε?

11.47. Конденсатор, имеющий заряд q, площадь каждой пластины S и расстояние между пластинами d, погружают в керосин на $2/3$ его объема. Каким будет напряжение на погруженном конденсаторе?

11.48. Два конденсатора емкостями C_1 и C_2 поочередно подключили к источнику постоянного напряжения и затем отключили. Электростатическим вольтметром измерили напряжение сначала на первом конденсаторе, затем на втором. Оно оказалось равным соответственно U_1 и U_2. а) Каково было начальное напряжение на конденсаторах? б) Чему равна емкость вольтметра?

11.49. Два плоских конденсатора емкостями C_1 и C_2 соединили последовательно, наложили на них разность потенциалов U и отключили от источника. Какой будет разность потенциалов между пластинами конденсаторов, если их пересоединить параллельно? Какая энергия выделится при перезарядке конденсаторов? Решите задачу при условии, что конденсаторы подключались к источнику порознь и затем соединялись между собой: одноименно заряженными пластинами; разноименно заряженными.

11.50. Два одинаковых плоских конденсатора соединены последовательно и подключены к источнику постоянного напряжения U. Во сколько раз изменится напряженность поля в одном из конденсаторов, если в другой внести пластинку с проницаемостью ε так, чтобы диэлектрик заполнил все пространство между обкладками конденсатора? Какой заряд пройдет при этом через источник, если емкость одного воздушного конденсатора C?

11.51. Два плоских конденсатора с емкостями $2/3 \cdot 10^3$ и $5/3 \cdot 10^3$ пФ с изолирующим слоем из прессшпана толщиной 2 мм, соединенные последовательно, пробиваются при напряжении 5,6 кВ. Определите напряженность поля, при которой происходит пробой прессшпана.

11.52. Конденсатор емкостью C подключен к батарее с ЭДС $\mathcal{E}$. Вплотную с одной из обкладок конденсатора расположена тонкая металлическая пластинка. Какими станут заряды на обкладках конденсатора, если пластинку сдвинуть параллельно обкладкам в середину конденсатора, не снимая с нее заряда?

11.53. Три плоских конденсатора емкостями C, $2C$ и $3C$ заряжены до разности потенциалов U, $2U$ и $3U$ соответственно. Конденсаторы соединили: а) последовательно разноименно заряженными пластинами; б) параллельно одноименно заряженными пластинами. Определите заряды на конденсаторах.

11.54. Незаряженный плоский конденсатор емкостью C_1 помещен в поле плоского конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения U_1. Расстояние между пластина-

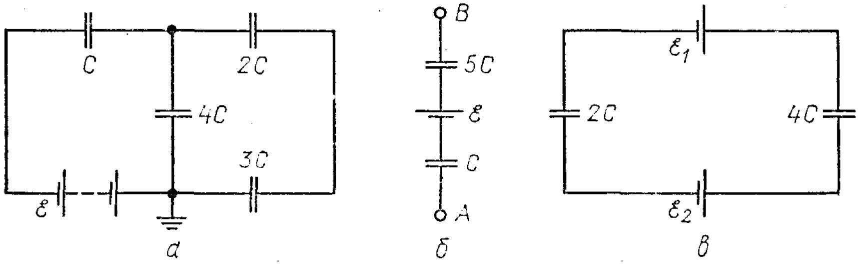

Рис. 11.14

ми первого конденсатора d, второго — d_0. Все пластины параллельны друг другу. Чему будет равен заряд первого конденсатора, если к нему подключить конденсатор емкостью C_2, заряженный до разности потенциалов U_2?

11.55. В схемах, изображенных на рисунке 11.14, *а, б, в*, найдите заряд на конденсаторах. В схеме рисунка 11.14, *б*

$$\varphi_А = 10 \text{ В}, \quad \varphi_Б = 5 \text{ В},$$

$$\mathscr{E} = 10 \text{ В}, \quad C = 0{,}8 \text{ мкФ}.$$

11.56. Какой заряд пройдет через сечения *1, 2* в схемах, представленных на рисунке 11.15, *а, б,* если батарею конденсаторов отключить от источника с ЭДС $\mathscr{E}$ и затем замкнуть ключ *К2*?

11.57. Как изменится электрический заряд на конденсаторах *C1 и C2* в схеме, показанной на рисунке 11.16, при включении между точками *A* и *B* конденсатора емкостью C? $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$; $C_1 = C_2/2 = C/3$.

11.58. Плоский конденсатор подключен к источнику с ЭДС $\mathscr{E}$. Расстояние между пластинами конденсатора $2d$, их площадь S. Конденсатор опускают в металлическую коробку с жидким диэлектриком проницаемостью ε. Пластины конденсатора параллельны стенкам коробки и отстоят от них на расстоянии, равном d и $3d$ (рис. 11.17, слева). Определите заряд, прошедший через источник при погружении конденсатора. Решите задачу при усло-

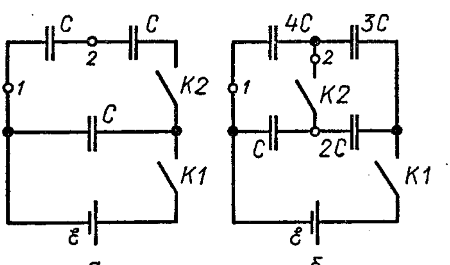

Рис. 11.15

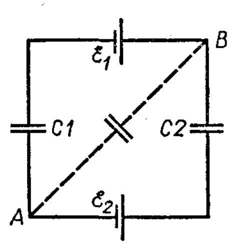

Рис. 11.16

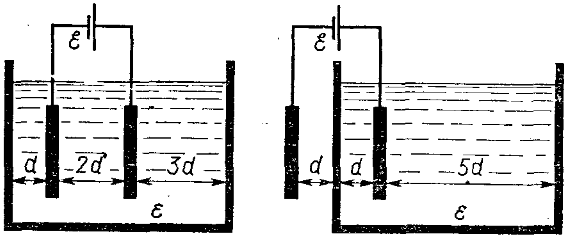

Рис. 11.17

вии, что в коробку опущена одна пластина (рис. 11.17, справа).

11.59. Верхняя пластина плоского конденсатора площадью S висит на пружине, жесткость которой k. Какую разность потенциалов нужно приложить к пластинам конденсатора, чтобы они сблизились до расстояния d_1? Начальное расстояние между пластинами равно d_0.

11.60. Тонкая стеклянная пластинка пробивается при напряженности поля $E = 500$ МВ/м. Какое давление испытывает пластинка перед пробоем? Чему равна плотность связанных зарядов, находящихся на поверхности диэлектрика перед пробоем? Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$.

11.61. Две прямоугольные металлические пластинки длиной a и шириной b расположены параллельно друг другу на расстоянии d. В пространство между пластинками был вставлен диэлектрик с электрической проницаемостью ε (рис. 11.18). Пластинки подключили к источнику ЭДС $\mathcal{E}$ и затем отключили. Определите силу, действующую на диэлектрик со стороны поля конденсатора в зависимости от расстояния x. Решите задачу при условии, что конденсатор не отключен от источника напряжения.

11.62. Проводящая сфера радиусом a заземлена через резистор. Какое количество теплоты выделится в резисторе, если на расстоянии b от центра сферы поместить точечный заряд q?

11.63. Какое количество теплоты выделится в цепи, изображен-

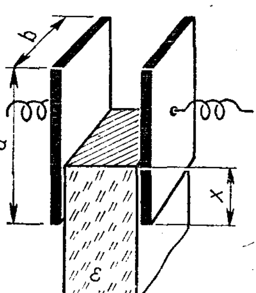

Рис. 11.18

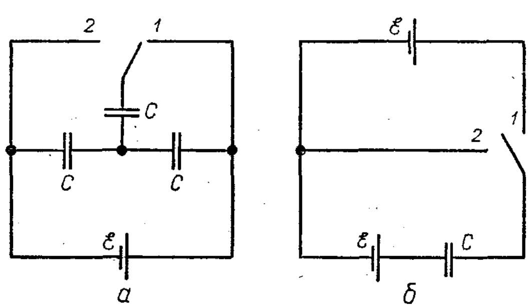

Рис. 11.19

ной на рисунке 11.19, *а, б* при переключении ключа из положения *1* в положение *2*?

11.64. Расстояние между пластинами плоского конденсатора, присоединенного к полюсам батареи с ЭДС 180 В, увеличивают с 5 до 12 мм. Площадь пластин конденсатора 174 см^2. Какая работа будет произведена источником? На сколько изменится при этом энергия конденсатора? Решите задачу при условии, что конденсатор зарядили и отключили от батареи.

11.65. Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых пластин площадью 625 см^2, подключенных к источнику постоянного напряжения так, что их потенциалы относительно земли все время равны $+5$ кВ и -5 кВ. Расстояние между пластинами 25 мм. Посредине между обкладками конденсатора параллельно им устанавливают тонкую металлическую пластину, соединенную с землей. Какую работу нужно совершить, чтобы передвинуть эту пластину на расстояние 5 мм к одной из обкладок?

11.66. Вычислите энергию слоистого конденсатора, рассмотренного в задаче 11.34, если площадь его обкладок будет равна 100 см^2.

11.67. Маленький шарик, масса которого ничтожно мала, имеет заряд q и находится на расстоянии R от очень большой проводящей пластины. Какую силу нужно приложить к шарику, чтобы он находился в равновесии? Чему равны напряженность и потенциал электрического поля в точках, лежащих на перпендикуляре, проведенном через шарик к поверхности пластины, и удаленных от шарика на расстояние R? Какова напряженность и потенциал поля в точках на поверхности пластины, удаленных от основания перпендикуляра на расстояние R?

11.68. Заряд q расположен на высоте h над проводящей плоскостью. Какую работу нужно совершить против сил поля, чтобы удалить этот заряд в бесконечность?

Глава 12

ПОСТОЯННЫЙ ТОК

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Средняя сила электрического тока по определению равна:

$$I = \frac{q}{t}, \qquad (12.1)$$

где q — заряд, прошедший через данное сечение за время t. Плотностью тока, проходящего через проводник с площадью поперечного сечения S, называется отношение

$$j = \frac{I}{S}. \qquad (12.2)$$

При равномерном движении потока заряженных частиц со скоростью $\vec{v}$ плотность тока

$$j = nqv,$$

где n — концентрация заряженных частиц в потоке; q — заряд одной частицы.

2. Если на участке электрической цепи, не содержащем ЭДС и имеющем сопротивление R, поддерживать постоянную разность потенциалов (напряжение) $\varphi_1 - \varphi_2 = U$, то согласно закону Ома по участку течет ток

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}. \tag{12.3}$$

За направление тока принимают направление движения положительных зарядов, отрицательные заряды движутся навстречу току.

Сопротивление однородного проводника длиной l с постоянным сечением S равно:

$$R = \varrho \frac{l}{S}, \tag{12.4}$$

где ϱ — удельное сопротивление материала.

Для большинства металлов вблизи 0° С существует температурный интервал, в пределах которого

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \alpha t), \tag{12.5}$$

где ϱ — удельное сопротивление при температуре t; ϱ_0 — при 0° С; α — температурный коэффициент сопротивления.

3. При последовательном соединении проводников конец предыдущего проводника соединяется с началом последующего и между проводниками ток не разветвляется.

Если n проводников сопротивлением R_1, R_2, ..., R_n соединены между собой последовательно, то через проводники течет одинаковый ток и напряжение U_0 на концах соединения равно сумме напряжений на отдельных проводниках:

$$\left.\begin{aligned} I_0 = I_1 = I_2 = \ldots = I_n, \\ U_0 = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \sum_{i=1}^{n} U. \end{aligned}\right\} \tag{12.6}$$

Добавляя к этим уравнениям формулу закона Ома $I_0 = \frac{U_0}{R_0}$ для всего участка и для отдельных резисторов $I_i = \frac{U_i}{R_i}$, мы получим исходную систему уравнений для расчета последовательной цепи. Из этой системы, в частности, следует, что общее сопротивление проводников, соединенных последовательно, равно:

$$R_0 = R_1 + R_2 + \ldots + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i. \qquad (12.6')$$

При последовательном соединении n проводников с одинаковым сопротивлением R_1 их общее сопротивление

$$R_0 = nR_1. \qquad (12.6'')$$

Если начала проводников соединены в одной точке (узле), а концы в другой, соединение проводников называют параллельным. При параллельном соединении

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= U_1 = U_2 = \ldots = U_n, \\ I_0 &= I_1 + I_2 + \ldots + I_n = \sum_{i=1}^{n} I_i. \end{aligned}\right\} \qquad (12.7)$$

Добавляя к этим уравнениям формулу закона Ома для всего участка и для каждого резистора, мы получим исходную систему уравнений для расчета параллельной цепи. Из этой системы, в частности, следует, что величина, обратная общему сопротивлению, при параллельном соединении проводников равна сумме обратных величин их сопротивлений:

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}. \qquad (12.7')$$

При параллельном соединении n проводников с одинаковым сопротивлением R_1 их общее сопротивление равно:

$$R_0 = \frac{R_1}{n}. \qquad (12.7'')$$

4. Если шкала амперметра содержит φ_0 одинаковых делений и рассчитана на максимальную силу тока I_0, то при отклонении стрелки амперметра на φ делений через него проходит ток

$$I = \frac{I_0}{\varphi_0}\varphi = C_I\varphi, \qquad (12.8)$$

где C_I — цена одного деления.

Чтобы расширить пределы измерения силы тока в n раз и измерять токи до значений $I > I_0$, параллельно амперметру нужно присоединить шунт с сопротивлением

$$R_{ш} = \frac{I_0 R_0}{I - I_0} = \frac{R_0}{n - 1}, \qquad (12.9)$$

где R_0 — внутреннее сопротивление амперметра.

Показание магнитоэлектрического вольтметра равно падению напряжения на сопротивлении прибора:

$$U_V = I_V R_0,$$

и в то же время

$$U_V = \frac{U_0}{\varphi_0}\varphi = C_V\varphi, \tag{12.10}$$

где U_0 — напряжение на зажимах прибора, при котором стрелка отклоняется на всю шкалу; C_V — цена деления шкалы вольтметра.

Чтобы расширить пределы измерения напряжения в n раз и измерять напряжения до значений $U > U_0$, последовательно вольтметру нужно присоединить резистор с сопротивлением

$$R_д = \frac{(U - U_0)}{U_0} R_0 = (n-1) R_0, \tag{12.11}$$

где R_0 — внутреннее сопротивление вольтметра.

5. Сила тока, текущего в замкнутой цепи, состоящей из проводников с общим сопротивлением R и элемента с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, равна:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \tag{12.12}$$

Напряжение на зажимах источника, замкнутого проводником с сопротивлением R, равно:

$$U = IR = \frac{\mathcal{E}R}{R + r} = \mathcal{E} - Ir. \tag{12.13}$$

Если $R = 0$, точнее, $R \ll r$ (случай короткого замыкания), то ток короткого замыкания и напряжение на зажимах источника равны:

$$I_{к.з} = \frac{\mathcal{E}}{r}; \quad U = 0.$$

Если $R = \infty$, точнее, $R \gg r$ (цепь разорвана), то

$$I = 0; \quad U = \mathcal{E}.$$

6. При последовательном соединении нескольких источников тока ЭДС всей батареи равна алгебраической сумме ЭДС отдельных источников:

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots + \mathcal{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i.$$

$$\mathcal{E}_0 = n\mathcal{E}, \text{ если } \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \ldots = \mathcal{E}_n = \mathcal{E}.$$

ЭДС источников, которые сами создавали бы ток того же направления, какое имеет ток, идущий в цепи, берут со знаком «плюс». ЭДС источников, которые давали бы ток противоположного направления, считают отрицательными.

Внутреннее сопротивление батареи

$$r_0 = r_1 + r_2 + \ldots + r_n = \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

Если источники с ЭДС $\mathscr{E}_i$ и внутренним сопротивлением r_i соединены между собой последовательно и замкнуты на резисторы с общим сопротивлением R, то сила тока, идущего в цепи, равна:

$$I = \frac{\Sigma \mathscr{E}_i}{R + \Sigma r_i}. \qquad (12.14)$$

При последовательном соединении одинаковых источников разноименными полюсами сила тока в цепи равна:

$$I = \frac{n\mathscr{E}_1}{R + nr_1}, \qquad (12.14')$$

где $\mathscr{E}_1$ и r_1 — соответственно ЭДС и внутреннее сопротивление одного элемента; n — число элементов.

Из формул (12.13) и (12.14) вытекает закон Ома для участка цепи, содержащей ЭДС:

$$I_{уч} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{уч}}{r_{уч}}. \qquad (12.15)$$

Напряжение на этом участке цепи равно:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \mathscr{E}_{уч} \mp I_{уч} r_{уч}, \qquad (12.15')$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы начала и конца участка в направлении тока через источник; $\mathscr{E}_{уч}$ — общая ЭДС участка; $I_{уч}$ и $r_{уч}$ — сила тока и полное сопротивление участка.

В формуле (12.15′) предполагается, что конец и начало участка (точки с потенциалами φ_2 и φ_1) примыкают соответственно к положительному и отрицательному полюсу источника.

Знак «минус» перед $I_{уч}$ берется в тех случаях, когда ток по участку течет от φ_1 к φ_2 (внутри источника от отрицательного полюса к положительному), знак «плюс» — когда ток идет от φ_2 к φ_1 (внутри источника от положительного полюса к отрицательному). Последнее возможно при условии, что рассматриваемый участок является элементом электрической цепи, которая на других участках содержит ЭДС, включенные навстречу ЭДС рассматриваемого участка.

При параллельном соединении нескольких источников тока батарею аккумуляторов можно заменить одним источником, который будет создавать во внешней цепи сопротивлением R такой же ток, как и данная батарея. Внутреннее сопротивление $r_э$ и ЭДС $\mathscr{E}_э$ эквивалентного элемента можно найти из формул

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r_э} &= \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}, \\ \frac{\mathscr{E}_э}{r_э} &= \frac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \frac{\mathscr{E}_2}{r_2} + \ldots + \frac{\mathscr{E}_n}{r_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathscr{E}_i}{r_i}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.16)$$

При составлении алгебраической суммы (12.16) правило знаков перед $\mathcal{E}_i$ сохраняется таким же, как и в случае последовательного соединения элементов.

Согласно закону Ома сила тока во внешнем участке цепи сопротивлением R при параллельном соединении источников равна:

$$I = \frac{\mathcal{E}_э}{R + r_э}.$$

При параллельном соединении n одинаковых источников одноименными полюсами сила тока во внешней цепи равна:

$$I = \frac{\mathcal{E}_1}{R + \frac{r_1}{n}} = \frac{n\mathcal{E}_1}{nR + r_1}. \qquad (12.17)$$

Если из n одинаковых элементов с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_1 составить m групп, соединенных между собой последовательно, и в каждую группу включить k источников, соединенных параллельно одноименными полюсами, то при подключении к батарее резистора сопротивлением R сила тока в нем будет равна:

$$I = \frac{m\mathcal{E}_1}{R + \frac{m}{k}r_1} = \frac{mn\mathcal{E}_1}{nR + m^2 r_1} = \frac{\mathcal{E}_1}{\frac{R}{m} + \frac{mr_1}{n}}, \qquad (12.18)$$

поскольку $n = km$.

Добавляя к знаменателю последнего равенства и вычитая из него выражение $2\sqrt{r_1 R/n}$, знаменатель можно привести к виду:

$$(\sqrt{mr_1/n} - \sqrt{R/m})^2 + 2\sqrt{r_1 R/n},$$

откуда следует, что при $m^2 r_1 = nR$ $(mr_1 = kR)$ он имеет наименьшее значение, равное второму слагаемому, и, значит, сила тока в цепи максимальна:

$$I_{\max} = \frac{m\mathcal{E}_1}{2R} = \frac{k\mathcal{E}_1}{2r_1}. \qquad (12.18')$$

Этот же результат можно получить из второго уравнения (12.18), считая в нем переменными величинами I и m. Беря производную от I по m и приравнивая ее к нулю, мы сначала получим значение m, при котором сила тока имеет наибольшее значение, а затем и выражение (12.18′).

7. Для разветвленных цепей имеют место правила Кирхгофа:

а) Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum I = 0, \qquad (12.19)$$

иначе, сумма токов, подходящих к узлу, равна сумме токов, выходящих из узла.

б) В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений (произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков контура) равна алгебраической сумме всех ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum IR = \sum \mathcal{E}. \tag{12.20}$$

8. При прохождении заряда q по участку цепи электрическое поле совершает над зарядом работу

$$A = qU = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t. \tag{12.21}$$

Первые две формулы справедливы для любого участка цепи сопротивлением R, на концах которого поддерживается разность потенциалов U, последние две — если на участке нет ЭДС.

Работа тока за единицу времени — мощность тока в этом случае равна:

$$P = IU = I^2R = \frac{U^2}{R}. \tag{12.22}$$

Если источник с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r замкнут на резистор сопротивлением R, то полная мощность, развиваемая источником, равна:

$$P_0 = I\mathcal{E} = I^2(R+r) = \frac{\mathcal{E}^2}{R+r}. \tag{12.23}$$

Во внешнем участке цепи при этом выделяется мощность

$$P = IU = \frac{U^2}{R} = I\mathcal{E} - I^2r = \frac{\mathcal{E}^2R}{(R+r)^2}, \tag{12.24}$$

где I — сила тока в цепи; U — напряжение на зажимах источника.

Как видно из анализа третьего уравнения (12.24) и графика зависимости $P = f(I)$ (рис. 12.1), при силе тока $I_1 = 0$ и $I_2 = \mathcal{E}/r$ мощность во внешней цепи не выделяется ($P = 0$); при силе тока $I = \mathcal{E}/(2r)$ она имеет наибольшее значение, равное $P_{max} = \mathcal{E}^2/(4r)$. Согласно закону Ома для полной цепи ток, соответствующий максимальной мощности во внешней цепи, идет в том случае, когда $R = r$.

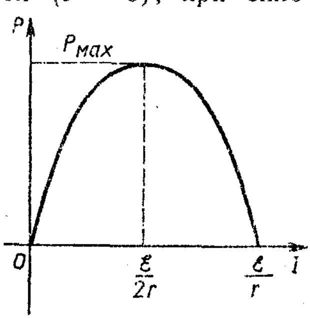

Рис. 12.1

Коэффициент полезного действия источника тока равен:

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{U}{\mathcal{E}} = \frac{R}{R+r}. \tag{12.25}$$

9. При прохождении тока I по участку цепи с сопротивлением R в нем за время t выделяется количество теплоты

$$Q = I^2Rt \text{ (закон Джоуля — Ленца)}. \qquad (12.26)$$

Если участок цепи не содержит источников тока, то количество теплоты, выделяющееся на этом участке, можно определять по формулам

$$Q = IUt \quad \text{и} \quad Q = \frac{U^2}{R}t, \qquad (12.27)$$

где U — напряжение, подводимое к участку.

10. В общем случае при движении электрических зарядов по замкнутой цепи за счет мощности, развиваемой источником, происходит увеличение внутренней энергии проводников, совершается механическая работа (сближение пластинок конденсатора, движение проводников в магнитном поле и т. д.), осуществляются химические реакции, сопутствующие току в жидкостях:

$$I\mathcal{E} = I^2R + N_{\text{мех}} + N_{\text{х}}. \qquad (12.28)$$

11. Явление выделения составных частей растворенных в жидкости веществ при прохождении через нее электрического тока называют электролизом. Растворы, проводящие ток, называют электролитами.

Если за время t через электролит прошел заряд q и к каждому электроду подошло N ионов массой m_1, то на катоде откладывается вещество массой $m = Nm_1$.

Масса иона равна:

$m_1 = \frac{M}{N_A}$, где M — молярная масса одноатомного вещества; N_A — постоянная Авогадро.

Число ионов $N = \frac{q}{q_и} = \frac{q}{ne}$, где $q_и$ — заряд иона; n — валентность вещества; e — заряд электрона. Учитывая все это, получим:

$$m = \frac{Mq}{eN_An}. \qquad (12.29)$$

Постоянное для всех веществ произведение $eN_A = F$ называется постоянной Фарадея, постоянное для данного вещества отношение

$$\frac{M}{nF} = k$$

называется электрохимическим эквивалентом вещества.

Учитывая это, формулу (12.29) можно переписать в виде:

$$m = \frac{M}{nF}q = kq = kIt \text{ (закон Фарадея)}, \qquad (12.29')$$

где I — сила тока в электролите.

При вычислении массы осевшего на катоде вещества в формулу (12.29′) подставляют полный ток в электролите, равный сумме токов положительных и отрицательных ионов. Объясняется это тем, что перемещение отрицательных зарядов к аноду эквивалентно току положительных зарядов к катоду, поскольку в целом электролит нейтрален. Если от катода к аноду ежесекундно уходит N отрицательных зарядов, то при этом у катода остается такое же количество положительных ионов, которые вместе с прибывшими за это время положительными ионами оседают на катоде. Результат получается такой, как если бы к катоду шел ток, равный удвоенному току положительных ионов. Он и равен суммарному току в электролите.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Задачи о движении электрических зарядов по проводникам и о явлениях, связанных с этим движением, удобно разделить на три типа: задачи на вычисление сопротивлений, сил токов или напряжений на каком-либо участке цепи; задачи на работу, мощность и тепловое действие тока и задачи на электролиз. Из задач первого типа можно выделить вспомогательную группу — задачи на вычисление сопротивлений отдельных проводников и различных соединений из них. С этой вспомогательной группы задач мы и начнем разбор.

2. Если в условии задачи указано, из какого материала изготовлен проводник, или приводятся сведения о его геометрических размерах или массе, то для нахождения неизвестной величины, от которой зависит сопротивление проводника, нужно воспользоваться формулой сопротивления и соотношением между массой, плотностью и объемом проводника. Следует при этом иметь в виду, что, пользуясь представлениями электронной теории, удельное сопротивление можно выразить через величины, характеризующие свойства и движение элементарных зарядов.

Задачи о температурной зависимости сопротивлений, как правило, не представляют большой трудности, их легко решать с помощью уравнений (12.4), (12.5) и тех указаний, которые были сделаны к задачам о линейном расширении тел.

При вычислении общего сопротивления какого-либо контура, составленного из нескольких проводников, необходимо прежде всего установить, есть ли в нем проводники, соединенные между собой последовательно или параллельно, или в схеме таких подключений нет.

В первом случае решение задачи целиком основано на использовании формул (12.6) и (12.7), во втором — приходится применять новые методы расчета, в которых формулы сопротивления играют фактически не главную, а вспомогательную роль.

Решение задач на вычисление сопротивлений сложных соединений нужно начинать с анализа схемы и отыскания в ней каких-нибудь двух проводников, соединенных друг с другом последовательно или параллельно. При этом все время надо следить за тем, чтобы в случае последовательного соединения ток между проводниками не разветвлялся, а в случае параллельного — их концы соединялись непосредственно. Если в схеме удается найти такие проводники, их сопротивление следует заменить одним эквивалентным сопротивлением, используя формулы (12.6) и (12.7), и получить упрощенную схему. В схемах, представляющих собой комбинацию последовательно и параллельно включенных проводников, этот прием нужно применять несколько раз и таким образом найти ее общее сопротивление.

Если в контуре не окажется ни последовательно, ни параллельно соединенных проводников, для вычисления общего сопротивления используют следующие два свойства электрической цепи:

1) Во всякой электрической цепи точки с одинаковым потенциалом можно соединить и разъединить. Режим тока от этого не нарушается, поскольку ток между такими точками не идет.

2) Работа по перемещению единичного заряда из одной точки однородной цепи в другую не зависит от сопротивлений проводников, по которым проходит заряд, а определяется только разностью потенциалов между этими точками.

Иными словами, какой бы мы ни выбрали путь движения заряда по однородной цепи, алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках этой цепи равна разности потенциалов между начальной и конечной точками:

$$\sum U_i = \sum R_i I_i = U_0,$$

где I_i и R_i — силы токов и сопротивления отдельных участков: Следует при этом помнить, что такое утверждение справедливо лишь в тех случаях, когда на заряды действуют только электрические силы и на участках нет ЭДС.

Установив, что в схеме нет последовательно и параллельно соединенных проводников, нужно попытаться найти точки с одинаковыми потенциалами. Точки с одинаковым потенциалом всегда есть в схемах, обладающих осью или плоскостью симметрии относительно точек подключения источника питания. Здесь следует различать два случая.

Если схема симметрична относительно оси (плоскости), проходящей через точки входа и выхода тока (имеется продольная плоскость симметрии), то точки одного потенциала находятся на концах симметричных резисторов, поскольку по ним идут одинаковые токи.

Если схема симметрична относительно оси (плоскости), перпендикулярной линии, на которой лежат точки входа и выхода тока — в схеме имеется поперечная ось (плоскость) симметрии, то одинаковым потенциалом обладают все точки, лежащие на пересечении этой оси (плоскости) с проводниками. Это почти очевидное обстоятельство вытекает из того, что работа электрических сил над зарядами не зависит от формы пути.

Найдя в схемах точки с одинаковым потенциалом, нужно соединить их (если они были разъединены) или разъединить (если точки были соединены), после чего, как правило, можно получить эквивалентную схему, составленную из последовательно и параллельно соединенных резисторов.

В общем случае, когда в схеме нет последовательно и параллельно соединенных проводников, нет точек с равным потенциалом, обычно поступают так. Проставляют токи на каждом резисторе и указывают их предполагаемое направление. Обозначив затем через I_0 суммарный ток, проходящий через данный контур (он равен току, подходящему к контуру), составляют уравнение токов для каждой точки разветвления (узла): сумма токов, подходящих к узлу, должна равняться сумме токов, исходящих из узла (первое правило Кирхгофа). Затем выбирают все возможные пути прохождения заряда между точками подключения контура и составляют для каждого из них уравнение падений напряжений вида

$$I_0 R_0 = \sum_{i=1}^{n} I_i R_i,$$

где R_0 — общее сопротивление всего контура, которое требуется найти. Эти уравнения составляются на основании того, что падение напряжения I_0R_0 на всем контуре равно алгебраической сумме падений напряжения на отдельных резисторах, соединяющих точки подключения контура. Если оказывается, что по какому-либо проводнику, входящему в рассматриваемую часть цепи, ток идет в направлении, противоположном начальному току участка, то падение напряжения на этом проводнике берут со знаком «минус»; в остальных случаях — со знаком «плюс». Так как неизвестным является R_0, то число уравнений токов и напряжений должно быть на одно больше числа токов, введенных в решение. Исключая из этих уравнений все токи, находят R_0.

3. При решении задач на определение силы тока, напряжения или сопротивления на каком-либо участке цепи надо:

а) начертить схему и указать на ней все элементы цепи: источники тока, резисторы и конденсаторы;

б) установить, какие элементы цепи включены последовательно, какие — параллельно;

в) расставить токи и напряжения на каждом участке цепи и записать для каждой точки разветвления (если они есть) уравнения токов и уравнения, связывающие напряжения на участках цепи. При составлении таких уравнений для схем, в которых нет ни последовательных, ни параллельных соединений, следует руководствоваться указаниями п. 2;

г) используя закон Ома (или формулу для напряжения на участке, содержащем ЭДС), установить связь между токами и напряжениями (ЭДС). В результате получится система уравнений, полностью отражающая условия задачи и позволяющая определить искомую величину. Если в схеме делают какие-либо переключения сопротивлений или источников, уравнения составляют для каждого режима работы цепи.

При расчетах шунтов или добавочных сопротивлений к гальванометру можно использовать готовые формулы (12.9) и (12.11).

Устанавливая зависимости между заданными и искомыми величинами, характеризующими элементы цепи и режим ее работы, нужно стараться не вводить в решение дополнительные величины, которые не даны и которые не требуется находить по условию задачи. Решение большинства задач на ток основано на применении закона Ома для полной цепи. Этот закон можно записать в обычном, наиболее распространенном виде $I = \mathscr{E}/(R+r)$ или в форме $U = \mathscr{E}R/(R+r)$. Первая формула определяет ток во внешнем участке цепи, вторая — напряжение на внешнем участке цепи. В общем случае эти выражения не эквивалентны друг другу, второе из них имеет известное ограничение — оно справедливо, если на участке нет ЭДС. Тем не менее очень часто расчеты значительно упрощаются, если использовать именно вторую формулу, а не первую. Обычно когда составляют простую цепь, то известными являются элементы цепи: ЭДС и сопротивления — и требуется найти на каком-либо участке ток или напряжение. При некотором навыке вторая из указанных формул позволяет легко и быстро находить напряжение на отдельных участках цепи, не используя токи. Для этого нужно сопротивления всех резисторов или их групп, соединенных последовательно с рассматриваемым участком сопротивлением $R_{уч}$, внести во внутреннее сопротивление источника и считать его равным не r, а $r + R_0$, где R_0 — общее сопротивление внешней цепи без сопротивления $R_{уч}$. Нетрудно заметить, что после этого участок, на котором требуется найти напряжение, оказывается подключенным к зажимам источника и согласно формуле (12.13) напряжение на нем будет равно:

$$U_{уч} = \frac{\mathscr{E}R_{уч}}{R_{уч} + r + R_0}.$$

Зная напряжение на участке, можно найти и силу тока в нем по закону Ома для участка цепи.

Большие затруднения обычно вызывают задачи на расчет цепей, содержащих несколько источников тока, соединенных между собой последовательно или параллельно.

В первом случае можно рекомендовать такую последовательность действий: найти общую ЭДС контура $\mathscr{E}_0$ (первая формула п. 6), найти общее сопротивление контура, найти силу тока в контуре I_0 по формуле (12.14) (она будет одинаковой на всех участках) и затем применить для рассматриваемого участка формулу разности потенциалов (12.15).

Во втором случае удобно поступать так: расставить токи, протекающие через элементы цепи (иногда направление токов можно предвидеть заранее; если же этого сделать не удается, то их направление ставится наугад), записать уравнение токов для узлов и после этого использовать формулу (12.15) для каждой из параллельных ветвей, содержащих ЭДС. Так как все ветви соединены параллельно, напряжение на них будет одинаковым. Чаще всего этими уравнениями условия задачи математически исчерпываются полностью.

При расчетах тока или напряжения на резисторе, подключенном к батарее параллельно соединенных аккумуляторов, можно использовать и готовую формулу (12.16) для эквивалентной ЭДС.

Указанная последовательность действий при решении всех задач рассматриваемой группы будет правильной всегда, но она не всегда обязательна. При достаточном навыке в решении задач на ток многие промежуточные выкладки можно опускать и записывать лишь наиболее важные соотношения, которые нужны непосредственно для определения искомой величины.

4. Задачи на работу, мощность и тепловое действие тока в свою очередь можно разбить на три группы. К первой группе относятся задачи на расчет электрической цепи, аналогичные тем, что рассматривались выше. Для их решения составляют те же уравнения закона Ома, но к ним добавляют формулы мощности (12.21) — (12.24). Если по условию задачи даны значения мощности, выделяемой в проводниках, и требуется найти силу тока, напряжение или сопротивление проводников, то эти формулы играют вспомогательную роль. Если же значение выделяемой мощности требуется определить, эти формулы можно рассматривать как основные расчетные соотношения и решение задачи начинать с их составления.

Особое внимание здесь нужно обратить на выбор исходной формулы мощности. Анализируя условия задачи, необходимо прежде всего установить, идет ли речь о мощности, выделяемой на участке цепи (формулы 12.22), или о мощности, развиваемой источником — полной мощности в цепи (формулы 12.23), или же о мощности во внешней цепи источника (формулы 12.24). В каждом из этих случаев нужно, в свою очередь, обратить внимание на то, какие из величин даны и какие требуется найти, и подобрать соответствующее расчетное соотношение. В большинстве случаев удачный выбор исходных формул позволяет достаточно быстро найти решение.

Решая задачи на мощность, выделяемую во внешней цепи, желательно помнить, что она будет максимальной, когда внешнее сопротивление цепи равно сопротивлению источника. Этим результатом можно пользоваться как готовым и значительно сократить вычисления.

Ко второй группе относятся задачи на тепловое действие тока. Основным расчетным соотношением в них является закон Джоуля — Ленца. Перед тем как приступать к составлению уравнений, необходимо установить, какую из формул (12.26) или (12.27) принять за исходную. Обе формулы можно применять в том случае, когда участок цепи не содержит источников тока; если же на участке имеются источники ЭДС, в качестве основной расчетной формулы надо взять формулу (12.26). Если в уравнении закона Джоуля — Ленца окажутся два и более неизвестных, к нему нужно добавить формулы калориметрии и формулы для определения общего сопротивления цепи.

Формулы $A = IUt$ и $Q = I^2Rt$, определяющие работу сил поля и количество теплоты, выделившейся на участке цепи, можно применять независимо от того, есть ли на этом участке источник ЭДС или нет. Если на участке нет источника ЭДС, эти формулы тождественны, работа сил поля в этом случае целиком идет на увеличение внутренней энергии проводника. Если же участок содержит источники тока, то величины A и Q, рассчитанные по этим формулам, будут разные. Какая величина будет больше — A или Q, зависит от направлений тока и знаков ЭДС на участке.

В задачах на сравнение количеств теплоты, выделяемой в разных проводниках, при выборе исходных уравнений можно руководствоваться следующим.

Если при переходе от одного участка цепи к другому или при подключении и выключении резисторов сила тока в проводниках остается одинаковой, удобно применять формулу (12.26) и составлять уравнение закона Джоуля — Ленца для каждого участка. Если же при переходе от участка к участку или подключении резисторов одинаковым оказывается напряжение на проводниках, удобнее воспользоваться формулой (12.27).

На задачи третьей группы следует обратить особое внимание, хотя их сравнительно мало. Эту группу составляют задачи о превращении электрической энергии в механическую, внутреннюю и химическую при работе электромашин постоянного тока. Решение таких задач основано на применении уравнения закона сохранения и превращения энергии (12.28).

Проанализировав условия и установив, на каких участках цепи электрическая энергия превращается во внутреннюю и механическую энергию, необходимо записать исходное уравнение (12.28) для каждого режима работы цепи. В простейших случаях этого достаточно, в более сложных задачах к основному уравнению приходится добавлять формулы законов постоянного тока и механики.

5. Решение задач на электролиз всегда удобно начинать с составления уравнения закона Фарадея (12.29′). В большинстве случаев все величины, входящие в это уравнение, кроме одной, заданы и нахождение неизвестного не представляет почти никакого труда. Если даны два вещества или более, уравнение

(12.29′) составляют для каждого из них. Для решения более сложных задач нужно воспользоваться вспомогательными формулами для нахождения m, q или I и, используя уравнение закона Фарадея, составить формулу, в которую входили бы величины, связанные с электролизом, но не входящие в основное уравнение. Ими могут быть, например, толщина слоя металла, выделившегося на катоде, скорость роста этого слоя, расход электроэнергии на единицу массы получаемого металла, отношение заряда иона к его массе. Эти формулы нет надобности запоминать, но знать о их существовании полезно. Они будут получены при разборе задач.

Если в задаче рассматривается выделение газа при электролизе, то следует иметь в виду, что масса газа входит и в формулу закона Фарадея, и в уравнение состояния идеального газа Менделеева — Клапейрона и через нее можно установить связь между всеми остальными величинами, входящими в эти формулы.

Пример 1. Электрическая лампочка накаливания потребляет силу тока $I = 0{,}2$ А. Диаметр вольфрамового волоска $d = 0{,}02$ мм, температура волоска при горении лампы $t = 2000°$С. Определите напряженность E электрического поля в волоске. Удельное сопротивление вольфрама $\varrho_0 = 5{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м, температурный коэффициент сопротивления $\alpha = 4{,}6 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Решение. Для решения задачи нужно использовать закон Ома для участка цепи и формулу сопротивления. Особенность задачи состоит в том, что надо найти связь между напряженностью — характеристикой электрического поля внутри проводника и силой тока — характеристикой движения зарядов, а также сечением и удельным сопротивлением проводника.

Допустим, что по проводнику, имеющему длину l и сечение S, течет ток I, тогда напряжение на концах проводника $U = IR$.

Так как $U = El$ и $R = \varrho \frac{l}{S}$, то, подставляя в закон Ома вместо U и R их выражения, получим:

$$E = \varrho \frac{I}{S}.$$

Из этой формулы, в частности, следует, что с увеличением температуры проводника при неизменной плотности тока напряженность поля в проводнике возрастает, поскольку с ростом температуры возрастает ϱ.

Вспомогательным соотношением служит формула зависимости сопротивления от температуры, позволяющая определить удельное сопротивление ϱ вольфрамового волоска в нагретом состоянии. При температуре накала t оно равно:

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \alpha t).$$

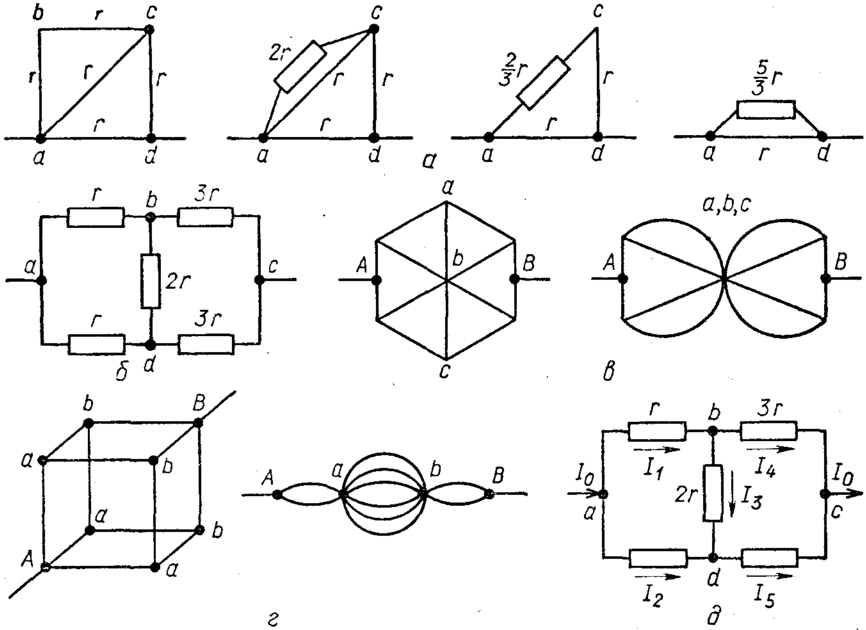

Рис. 12.2

С учетом этой зависимости формулу для напряженности электрического поля в раскаленном волоске можно окончательно переписать так:

$$E = \frac{I}{S}\varrho_0(1 + \alpha t).$$

Подставляя сюда числовые значения, получим $E = 360$ В/м.

Уравнение $E = \varrho\frac{I}{S}$, или $E = \varrho j$, называется законом Ома в дифференциальной форме. Закон Ома в дифференциальной форме обычно используется при расчете токов в безграничных средах.

Пример 2. Вычислите общее сопротивление цепи в схемах, показанных на рисунке 12.2, *а, б, в, г, д*. Сопротивление каждой стороны и диагонали квадрата, а также всех ребер куба равно r сопротивления симметричных резисторов (рис. 12.2,*д*) равны соответственно r и $3r$, $3r$ и r.

Р е ш е н и е. а) Рассматривая попарное соединение отдельных проводников в схеме, изображенной на рисунке 12.2, *а*, нетрудно установить, что два из них ab и bc соединены последовательно, так как между ними нет разветвлений тока. Кроме этой пары, в контуре больше нет двух проводников, которые были бы соединены последовательно или параллельно. Очень часто неправильно считают, что последовательно включены проводники ad и cd, не учитывая, что между ними есть токоподводящий провод и, следовательно, ток между проводниками может разветвляться.

Заменив эти два резистора одним эквивалентным резистором сопротивлением $r_1 = 2r$, мы видим, что он включен параллельно проводнику ac, поскольку их концы оказываются соединенными непосредственно. Находим общее сопротивление r_2 проводников сопротивлениями r_1 и r (контура $abca$ при подключении его в точках a и c):

$$r_2 = \frac{2rr}{2r + r} = \frac{2}{3} r.$$

Весь этот контур (сопротивлением r_2) соединен последовательно с проводником cd, и их общее сопротивление

$$r_3 = \frac{2}{3} r + r = \frac{5}{3} r.$$

После замены проводником с сопротивлением r_3 участка $abcd$ (включая проводник ac) схема оказывается предельно упрощенной, так как сразу же видно, что проводник с сопротивлением r_3 подключен параллельно к резистору ad. Их общее сопротивление, а следовательно, и искомое сопротивление всей цепи получается равным:

$$R_0 = \frac{5}{3} rr / \left(\frac{5}{3} r + r \right) = \frac{5}{8} r.$$

б) Рассмотрим теперь вторую схему (рис. 12.2, *б*). В ней на первый взгляд нет ни последовательных, ни параллельных соединений. Резисторы сопротивлением r и $3r$ нельзя считать соединенными последовательно, поскольку между ними включен проводник сопротивлением $2r$; проводники сопротивлением r и r (или $3r$ и $3r$) нельзя считать параллельными, так как точки b и d замкнуты проводником сопротивлением $2r$.

Нетрудно заметить, что в данной схеме проводники включены симметрично — в схеме есть продольная ось симметрии, проходящая через точки a и c. Поэтому для вычисления общего сопротивления контура нужно найти точки с одинаковыми потенциалами и, разъединив их (или соединив), свести задачу к типу предыдущей. Если ток подойдет к узлу a (или c), он разветвится на две равные части, поскольку условия его прохождения по каждой ветви до точки c будут идентичны. Потенциалы в точках b и d будут одинаковые, так как падение напряжения на проводниках сопротивлением r и r одинаково, и потенциал этих проводников в точке a один и тот же. Разность потенциалов между точками b и d равна нулю, по резистору сопротивлением $2r$ ток не идет, и, стало быть, не нарушая режима работы цепи, эти точки можно разъединить, выбросив проводник сопротивлением $2r$.

После такого упрощения схемы проводники сопротивлением r и $3r$ оказываются соединенными последовательно, а верхняя и нижняя ветви — параллельно. Общее сопротивление всей цепи равно:

$$R_0 = \frac{r + 3r}{2} = 2r.$$

Следует обратить внимание на то, что точки b и d можно разъединять, выбрасывая включенный между ними проводник, только в тех случаях, когда схема симметрична. Если же, например, в одной из ветвей поменять местами резисторы сопротивлением r и $3r$, то разность потенциалов между точками b и d не будет равна нулю; по проводнику $2r$ пойдет ток, и указанным методом расчета воспользоваться будет нельзя.

Схему рисунка 12.2, *б* часто изображают так, как показано на рисунке 12.3. Разумеется, общее сопротивление цепи остается при этом неизменным.

в) В шестиугольнике с перемычками (рис. 12.2, *в*) точки входа и выхода тока и проволочные сопротивления расположены симметрично оси ac — в схеме имеется поперечная ось симметрии, поэтому точки a, b и c имеют одинаковый потенциал и их можно соединить в одну, выбросив проводники ab и bc, по которым ток не идет. После этого схема упрощается, и ее сопротивление легко вычислить как комбинацию последовательно и параллельно соединенных проводников. Как видно из чертежа, это сопротивление, а следовательно, и сопротивление исходного контура, равно:

$$R_0 = \frac{2\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right)}{2} = r.$$

г) Перейдем теперь к определению сопротивления каркаса куба, составленного из проволочек с одинаковым сопротивлением r (рис. 12.2, *г*).

Если подвести напряжение к точкам A и B, то легко сообразить, что ток в них разветвляется на три равные части, поскольку условия его прохождения по каждой ветви из точки A в точку B идентичны. На проводниках Aa падение напряжения будет одинаковым, поэтому в трех вершинах куба a потенциалы тоже будут одинаковыми и равными φ_a.

Токи, идущие по проводникам Aa, в свою очередь разветвятся на равные части в вершинах куба и пойдут по проводникам ab. В точках b они сливаются и идут через проводники bB к узлу B. Так как проводники ab и токи в них одинаковы, то падение напря-

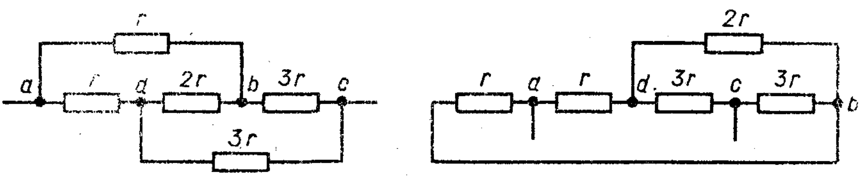

Рис. 12.3

жения на них будет одним и тем же и потенциалы в вершинах куба b будут равны φ_b.

Поскольку потенциалы во всех трех точках a, точно так же как и в точках b, одинаковы. эти точки можно соединить, вытянув каркас куба вдоль диагонали AB. В результате получится простая эквивалентная схема, представляющая комбинацию последовательно и параллельно соединенных резисторов. Сопротивление участка Aa равно $r/3$, участка ab — $r/6$, участка bB — $r/3$. Все три участка соединены между собой последовательно, и их общее сопротивление, а следовательно, и сопротивление каркаса куба, будет равно:

$$R_0 = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5}{6}r.$$

д) В схеме, представленной на рисунке 12.2, ∂, нет ни последовательно, ни параллельно соединенных проводников, нет в ней также и точек с равными потенциалами, поскольку она несимметрична. Для нахождения полного сопротивления цепи здесь нужно использовать общий метод расчета.

Допустим, что к узлу a подходит ток I_0 и разветвляется в нем на токи I_1 и I_2, т. е.

$$I_0 = I_1 + I_2. \qquad (1)$$

Предположим, что в точке b ток I_1 разветвляется на токи I_3 и I_4:

$$I_1 = I_3 + I_4. \qquad (2)$$

В точке d токи I_2 и I_3 сливаются в один ток I_5, который, дойдя до точки c, сливается с током I_4 в ток I_0, т. е.

$$I_5 = I_2 + I_3; \qquad (3)$$

$$I_0 = I_4 + I_5. \qquad (4)$$

Данная схема содержит 4 узла (точки a, b, c и d), и мы получили 4 уравнения токов. Эти уравнения содержат 6 неизвестных величин — все токи, введенные в решение.

Составление второй группы уравнений основано на том, что работа электрических сил по перемещению заряда q из точки a в точку c не зависит от формы пути (пройдет ли заряд q по контуру abc, adc, $abdc$ или $adbc$). Если через R_0 обозначить общее сопротивление цепи, то согласно сказанному должно быть:

для контура abc: $qU_0 = qU_1 + qU_4$,

или иначе: $I_0R_0 = I_1r + I_43r$. (5)

Аналогично для контура adc: $I_0R_0 = I_23r + I_5r$, (6)

для контура $abdc$: $I_0R_0 = I_1r + I_32r + I_5r$, (7)

так как падение напряжения на каждом сопротивлении численно равно работе по перемещению единичного заряда по этому сопротивлению и работы складываются алгебраически.

Составленных уравнений достаточно для определения сопротивления R_0, однако можно записать еще одно уравнение — для перемещения заряда по контуру $adbc$:

$$I_0R_0 = I_2 3r - I_3 2r + I_4 3r. \qquad (8)$$

В уравнениях (1) — (8) неизвестными являются все токи (их шесть) и общее сопротивление контура.

Решая относительно R_0 семь любых уравнений из восьми составленных, получим:

$$R_0 = 7/4r.$$

Пример 3. При подключении к гальванометру шунта сопротивлением $R_1 = 100$ Ом стрелка гальванометра отклоняется на всю шкалу при силе тока во внешней цепи $I_1 = 3$ А. При подключении к гальванометру резистора с сопротивлением $R_2 = 300$ Ом шкала прибора становится в четыре раза грубее, чем без добавочного сопротивления и шунта. Какой шунт надо взять, чтобы стрелка отклонялась на всю шкалу при силе тока во внешней цепи, равной $I_2 = 7{,}5$ А?

Решение. В задаче рассматривают три случая подключения к гальванометру разных резисторов: дважды в качестве шунта и один раз как добавочного сопротивления.

При включении шунта сопротивлением R_1 стрелка отклоняется на всю шкалу при силе тока в неразветвленной части цепи I_1. По гальванометру в этом случае проходит допустимый для него ток $I_г$. Обозначим внутреннее сопротивление гальванометра $R_г$, тогда

$$R_1 = \frac{R_г I_г}{I_1 - I_г}. \qquad (1)$$

При включении последовательно гальванометру резистора шкала прибора становится в n раз грубее. Ток в гальванометре, а стало быть, и падение напряжения на нем уменьшаются в n раз, и, следовательно, добавочное сопротивление должно удовлетворять условию

$$R_2 = (n-1)R_г. \qquad (2)$$

Чтобы стрелка отклонялась на всю шкалу при силе тока в цепи I_2, параллельно гальванометру нужно подключить резистор с таким сопротивлением R_3, чтобы через гальванометр проходил максимально допустимый ток $I_г$, т. е.

$$R_3 = \frac{R_г I_г}{I_2 - I_г}. \qquad (3)$$

Находя из уравнений (2) и (1) $R_г$ и $I_г$ подставляя их в формулу (3), получим:

$$R_3 = \frac{I_1R_1R_2}{I_1R_1 + I_2(R_2 - R_1) + (I_2 - I_1)nR_1}.$$

Подставляя сюда числовые значения, находим:

$$R_3 = 25 \text{ Ом}.$$

Пример 4. В двухпроводной линии электропередачи, на одном конце которой находится источник постоянного напряжения, а к другому подключен потребитель с сопротивлением R, повредилась изоляция. Вследствие повреждения сила тока через источник возросла в два раза, а через нагрузку упала в восемь раз. На каком расстоянии x от источника произошло повреждение изоляции, если сопротивление единицы длины провода равно ϱ, а длина линии L? Чему равно сопротивление $R_и$ изоляции в месте повреждения линии?

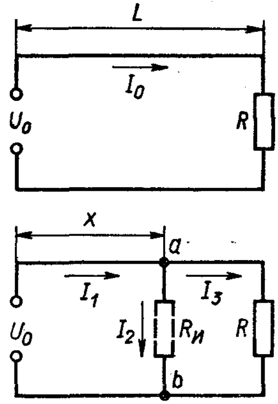

Рис. 12.4

Решение. Сделаем схематический чертеж (рис. 12.4) электрической цепи до и после повреждения изоляции. В случае нарушения изоляции проводников на расстоянии x от источника в месте повреждения начнется утечка зарядов из одного провода в другой. Режим работы цепи будет таким, как если бы в месте повреждения провода оказались соединенными между собой резистором сопротивлением $R_и$. Как видно из чертежа, это сопротивление оказывается включенным параллельно участку aRb. В результате сопротивление участка (вместе с $R_и$) и всей цепи уменьшится, сила тока в неразветвленной части цепи возрастет.

Если до нарушения изоляции в цепи шел ток I_0, а после нарушения на участках, отмеченных на чертеже, идут токи I_1, I_2 и I_3, то

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Чтобы упростить дальнейшие расчеты, эти токи сразу же выразим через ток I_0, используя условия задачи. Нетрудно заметить, что ток в источнике, а следовательно, и в линии до точки повреждения равен $I_1 = 2I_0$, ток через нагрузку $I_3 = I_0/8$, поэтому ток через изоляцию

$$I_2 = I_1 - I_3 = \frac{15}{8} I_0.$$

Допустим, что потребитель находится на расстоянии L от источника и сопротивление одного провода всей линии равно R_0. Предположим, что сопротивление провода от источника до точки a равно R_1, от точки a до потребителя — R_2 и напряжение на клеммах равно U_0.

Тогда согласно закону Ома для неповрежденной линии

$$U_0 = I_0 2R_0 + I_0 R, \tag{1}$$

поскольку общее сопротивление подводящих проводов равно $2R_0$.

Для поврежденной линии

$$U_0 = I_1 2R_1 + I_3 R_{ab}, \qquad (2)$$

где произведение I_3R_{ab} есть падение напряжения на участке aRb (без сопротивления изоляции); R_{ab} — сопротивление этого участка. Как видно из чертежа,

$$R_{ab} = 2(R_0 - R_1) + R. \qquad (3)$$

Для составления уравнения, в которое входило бы искомое сопротивление изоляции, надо рассмотреть отдельно участки aRb и $aR_иb$. Эти участки соединены между собой параллельно, напряжение на них одинаково, поэтому

$$I_2R_и = I_3[2(R_0 - R_1) + R]. \qquad (4)$$

Полученные уравнения нужно представить в развернутом виде, выразив входящие в них сопротивления через длину линии L, расстояние до места повреждения x и сопротивление ϱ единицы длины провода. Нетрудно заметить, что

$$R_0 = \varrho L, \quad R_1 = \varrho x. \qquad (5)$$

Из уравнений (1) — (5) с учетом выражений для сил токов I_1, I_2 и I_3 находим расстояние x от источника тока до места повреждения изоляции и ее сопротивление $R_и$:

$$x = \frac{7}{15}\left(L + \frac{R}{2\varrho}\right); \quad R_и = \frac{8}{225}(2\varrho L + R).$$

Пример 5. Плоский конденсатор с пластинами размером $16 \times \times 16$ см и расстоянием между ними $d = 4$ мм присоединен к полюсам батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 250$ В. В пространство между пластинами с постоянной скоростью $v = 3$ мм/с вдвигают стеклянную пластину толщиной 4 мм. Найдите силу тока в цепи. Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$.

Решение. Если увеличивать или уменьшать электроемкость конденсатора, подключенного к источнику постоянного напряжения, то заряд на конденсаторе будет возрастать или уменьшаться вследствие перехода электронов с одной обкладки конденсатора на другую. И в том и в другом случае по соединительным проводам идет ток. Среднюю силу тока можно найти, зная значение начального q_1 и конечного q_2 зарядов на конденсаторе и время t, в течение которого произошло изменение заряда:

$$I = \frac{q_1 - q_2}{t}. \qquad (1)$$

Причины изменения электроемкости могут быть разными: внесение (удаление) диэлектрика между обкладками конденсатора, сближение (раздвигание) пластин, изменение перекрывающейся площади пластин. Во всех случаях принципиальное решение задачи одинаковое: оно основано на использовании формулы (1).

До внесения стеклянной пластины в плоский конденсатор его электроемкость C_1 была равна:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d}, \qquad (2)$$

где l — длина; l^2 — площадь обкладки конденсатора (поскольку она квадратная).

Так как конденсатор подключен к источнику с электродвижущей силой $\mathcal{E}$, на конденсаторе находится заряд

$$q_1 = C_1 \mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 l^2 \mathcal{E}}{d}. \qquad (3)$$

При внесении стеклянной пластины с диэлектрической проницаемостью ε емкость конденсатора увеличивается и становится равной:

$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon l^2}{d}, \qquad (2')$$

так как по условию задачи диэлектрик заполняет все пространство между пластинами.

Заряд на конденсаторе при этом окажется равным:

$$q_2 = C_2 \mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon l^2 \mathcal{E}}{d}. \qquad (3')$$

Электрический ток в цепи проходит только в процессе изменения заряда конденсатора, вызванного движением стеклянной пластины, поэтому время этого изменения можно найти, зная скорость движения пластины и расстояние, которое она проходит, перекрывая пластины. Это расстояние равно высоте пластины, и, следовательно,

$$t = \frac{l}{v}. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1), (3), (3′) и (4) относительно I и подставляя числовые значения, получим:

$$I = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) l v \mathcal{E}}{d}; \quad I = 1{,}6 \cdot 10^{-9}\ \text{А}.$$

Пример 6. Найдите заряд на конденсаторе в схеме, изображенной на рисунке 12.5.

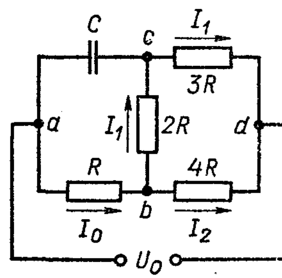

Рис. 12.5

Р е ш е н и е. Рассчитывая схемы, содержащие воздушный конденсатор, включенный в цепь постоянного напряжения, необходимо обратить внимание на то, что постоянный ток через конденсатор не проходит и в ветви, где он включен, тока нет. В предложенной схеме ток I_0, идущий от источника напряжения U_0, пойдет по резистору сопротивлением R и разветвится в точке b на токи I_1 и I_2, не заходя в ветвь aCc.

Чтобы определить заряд на конденсаторе, нужно найти разность потенциалов на его обкладках. Она, как видно из чертежа, равна разности потенциалов U_{ac} между точками a и c, равной в свою очередь сумме падений напряжений U_1 и U_2 на резисторах сопротивлением R и $2R$. К нахождению U_{ac} фактически и сводится вся задача.

Заряд на конденсаторе равен:

$$q = CU_{ac}, \tag{1}$$

где

$$U_{ac} = U_1 + U_2.$$

Эту сумму можно найти, используя правила расчета последовательной и параллельной цепи. Как видно из чертежа,

$$U_0 = U_1 + U_2 + U_3, \tag{2}$$

где U_3 — напряжение на резисторе сопротивлением $3R$.

Поскольку необходимо вычислить сумму $U_1 + U_2$ при заданном значении U_0, дальнейшие расчеты сводятся к отысканию падения напряжения U_3 на участке cd.

Применим закон Ома ко всей цепи:

$$I = \frac{U_0}{R + \frac{(2R + 3R)\,4R}{2R + 3R + 4R}} = \frac{9}{29}\,\frac{U_0}{R}. \tag{3}$$

Для параллельных ветвей bcd и $b4Rd$ можно записать:

$$U_2 + U_3 = U_4; \quad I_0 = I_1 + I_2,$$

где

$$U_2 = I_1 2R; \quad U_3 = I_1 3R; \quad U_4 = I_2 4R.$$

Исключив из этих уравнений токи I_1 и I_2, введенные в решение для составления вспомогательных связей, получим одно уравнение

$$U_3 = \frac{I_0 3R 4R}{2R + 3R + 4R} = \frac{4I_0}{3R}, \tag{4}$$

позволяющее вместе с уравнениями (1) — (3) определить заряд на конденсаторе.

Исключая из уравнений (3) и (4) силу тока, находим:

$$U_3 = \frac{12}{29}\,U_0.$$

Согласно уравнению (2) напряжение на конденсаторе равно:

$$U_{ac} = U_1 + U_2 = U_0 - U_3 = \frac{17}{29}\,U_0.$$

Подставляя это выражение в исходную формулу (1), получим:

$$q=\frac{17}{29}CU_0.$$

Пример 7. Плоский конденсатор емкостью C заполнен проводящим диэлектриком с проницаемостью ε и удельным сопротивлением ϱ. Расстояние между пластинами равно d. Через резистор сопротивлением R конденсатор подключен к источнику с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Определите напряженность электрического поля в диэлектрике.

Решение. Материалы, которые являются обычно диэлектриками, в той или иной степени обладают электропроводностью. Если к источнику постоянного тока подключить конденсатор, заполненный проводящим диэлектриком, в цепи пойдет электрический ток (ток утечки). Между пластинами конденсатора будет существовать электрическое поле, напряженность которого E можно определить, зная напряжение U_C на обкладках конденсатора и расстояние между ними. Так как конденсатор является проводником, то это напряжение не равно ЭДС подключенного источника: чтобы его найти, нужно знать сопротивление конденсатора.

Если плоский конденсатор с площадью обкладок S и расстоянием между ними d заполнен проводящим диэлектриком с проницаемостью ε и удельным сопротивлением ϱ, то емкость и сопротивление конденсатора равны соответственно:

$$C=\varepsilon_0\varepsilon\frac{S}{d}\quad \text{и}\quad R_C=\frac{\varrho d}{S}.$$

Эти формулы можно объединить в одну, исключив из них отношение S/d:

$$R_C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon\varrho}{C}. \tag{1}$$

Зная сопротивление конденсатора, можно найти напряжение U_C на конденсаторе при подключении его через резистор сопротивлением R к аккумулятору. Если R включить во внутреннее сопротивление источника, то напряжение на конденсаторе можно рассматривать как напряжение на зажимах источника с внутренним сопротивлением $R+r$ и согласно формуле (12.13) записать:

$$U_C=\frac{\mathcal{E}R_C}{R_C+R+r}. \tag{2}$$

Электрическое поле в конденсаторе считается однородным, поэтому

$$E=\frac{U_C}{d}. \tag{3}$$

Решая уравнения (1) — (3) относительно напряженности поля, находим:

$$E = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \varrho \mathcal{E}}{[\varepsilon_0 \varepsilon \varrho + (R + r) C] d}.$$

Пример 8. Амперметр и вольтметр, подключенные к аккумулятору последовательно, показывают соответственно $I_1 = 0{,}1$ А и $U_1 = 10$ В. Соединенные параллельно и подключенные к тому же источнику, они показывают соответственно $I_2 = 1$ А и $U_2 = 1$ В. Определите ток короткого замыкания.

Решение. В задаче рассматривают два режима работы аккумулятора. Первый, когда он замкнут двумя приборами, соединенными последовательно, при втором режиме приборы соединены параллельно. Зная показания приборов, нужно определить ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r источника, после чего, разделив одно на другое, найти ток короткого замыкания.

Предположим, что амперметр и вольтметр обладают внутренними сопротивлениями R_A и R_V, тогда при их последовательном соединении с аккумулятором все величины, характеризующие цепь и режим ее работы, будут связаны между собой формулой закона Ома для полной цепи:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_A + R_V + r}. \tag{1}$$

Кроме того, поскольку приборы включены последовательно и ток через вольтметр равен току через амперметр, их показания будут связаны формулой закона Ома для участка цепи:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_V}. \tag{2}$$

При параллельном соединении приборов показание вольтметра равно напряжению на зажимах источника, поэтому согласно формуле (12.13)

$$U_2 = \left(\mathcal{E} \frac{R_A R_V}{R_A + R_V}\right) \Big/ \left(\frac{R_A R_V}{R_A + R_V} + r\right). \tag{3}$$

С другой стороны, учитывая, что напряжение на амперметре равно напряжению на вольтметре, по закону Ома для участка цепи имеем:

$$I_2 = \frac{U_2}{R_A}. \tag{4}$$

Ток короткого замыкания

$$I_{\text{к.з}} = \frac{\mathcal{E}}{r}. \tag{5}$$

Уравнения (1) — (5) содержат пять неизвестных величин: R_A, R_V, $\mathscr{E}$, r и $I_{к.з}$.

Проводить вычисления до конца в общем виде в данной задаче нецелесообразно, так как ответ получится очень громоздким. Поэтому, прежде чем начинать алгебраические выкладки и исключать из уравнений неизвестные, следует обратить внимание на то, что формулы (2) и (4) позволяют сразу же найти сопротивление приборов, и тем самым считать их известными при решении оставшихся уравнений (1), (3), (5).

Подставляя в уравнения (2) и (4) числовые значения, получим:

$R_V = 100$ Ом; $R_A = 1$ Ом. Далее находим:

$$I_{к.з} = \frac{(R_V^2 + R_A R_V + R_A^2) I_1 U_2}{R_A R_V [I_1 (R_A + R_V) - U_2]}; \quad I_{к.з} \approx 1{,}01 \text{ А}.$$

Пример 9. В конце зарядки батареи аккумуляторов при силе тока $I_1 = 3$ А присоединенный к ней вольтметр показывал напряжение $U_1 = 4{,}25$ В. В начале разрядки батареи при силе тока $I_2 = 4$ А тот же вольтметр показывал напряжение $U_2 = 3{,}9$ В. Определите ЭДС и внутреннее сопротивление батареи. Током, проходящим по вольтметру, можно пренебречь.

Решение. При зарядке аккумулятора его положительный полюс соединяется с положительным полюсом генератора, отрицательный — с отрицательным. ЭДС генератора больше ЭДС аккумулятора, и ток через батарею идет в направлении, противоположном направлению тока, который батарея дает при разрядке.

Если ЭДС батареи $\mathscr{E}$, внутреннее сопротивление r и сила зарядного тока I_1, то вольтметр, подключенный к зажимам батареи, показывает напряжение

$$U_1 = \mathscr{E} + I_1 r \quad \text{(см. формулу 12.15}'). \qquad (1)$$

Если эта же батарея подключена после зарядки к такому резистору, что при силе тока в цепи I_2 вольтметр показывает на ее зажимах напряжение U_2, то

$$U_2 = \mathscr{E} - I_2 r. \qquad (2)$$

В отличие от предыдущего случая здесь источник расходует свою энергию, ток идет в сторону ЭДС, поэтому перед I_2 стоит знак «минус».

Из уравнений (1), (2) с учетом числовых значений сил токов и напряжений находим ЭДС и внутреннее сопротивление батареи:

$$\mathscr{E} = \frac{I_1 U_2 + I_2 U_1}{I_1 + I_2}; \quad \mathscr{E} = 4{,}1 \text{ В}; \quad r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2}; \; r = 0{,}05 \text{ Ом}.$$

Пример 10. Найдите разность потенциалов между точками A и C, B и D в схеме, изображенной на рисунке 12.6.

Решение. В задаче дано последовательное соединение четырех аккумуляторов и требуется определить напряжение на участ

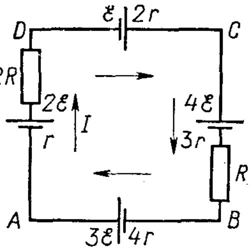

Рис. 12.6

ках, содержащих источники ЭДС. Решение задач этого типа основано на использовании закона Ома для участка цепи, содержащего источники ЭДС. Его начинают с нахождения общей ЭДС контура и силы тока в нем. Как видно из чертежа, источник с ЭДС $4\mathscr{E}$ включен навстречу остальным источникам, у которых суммарная ЭДС больше $4\mathscr{E}$. Общая, или, как ее называют, действующая, ЭДС контура в этом случае равна:

$$\mathscr{E}_0 = \mathscr{E} + 2\mathscr{E} + 3\mathscr{E} - 4\mathscr{E} = 2\mathscr{E},$$

и в цепи в направлении, указанном на чертеже, течет ток I:

$$I = \frac{2\mathscr{E}}{3R + 10r}. \qquad (1)$$

Напряжение на участке, содержащем ЭДС, в общем случае определяется по формуле (12.15). Между точками A и C его можно найти двумя способами: рассматривая или участок ABC, или участок ADC.

ЭДС участка ABC равна $\mathscr{E}_{ABC} = 4\mathscr{E} - 3\mathscr{E} = \mathscr{E}$, сопротивление $R_{ABC} = R + 7r$, и, следовательно, напряжение на этом участке равно:

$$U_{AC} = \mathscr{E} + I(R + 7r). \qquad (2)$$

Знак «плюс» здесь стоит потому, что ток по участку идет не в том направлении, в каком его давал бы источник ЭДС этого участка (участок «заряжается»).

Заменяя в уравнении (2) I его выражением (1), после несложных преобразований получаем:

$$U_{AC} = \frac{5R + 24r}{3R + 10r}\mathscr{E}.$$

Это же выражение можно получить иначе. ЭДС участка ADC равна $\mathscr{E}_{ADC} = 3\mathscr{E}$, его сопротивление $R_{ADC} = 2R + 3r$, направление тока совпадает с направлением действия ЭДС участка (участок «разряжается»), следовательно,

$$U_{AC} = 3\mathscr{E} - I(2R + 3r) = \frac{5R + 24r}{3R + 10r}\mathscr{E},$$

что совпадает с предыдущим результатом.

Аналогично находим напряжение между точками B и D. ЭДС на участке BAD и его сопротивление равны соответственно $5\mathscr{E}$ и $2R + 5r$, ток по участку идет в направлении действия ЭДС, поэтому

$$U_{BD} = 5\mathscr{E} - I(2R + 5r) = \frac{11R + 40r}{3R + 10r}\mathscr{E}.$$

На участке BCD ЭДС равна $3\mathscr{E}$, сопротивление $R+5r$, ток по участку идет против направления действия ЭДС, следовательно,

$$U_{BD}=3\mathscr{E}+I(R+5r)=\frac{11R+40r}{3R+10r}\,\mathscr{E},$$

что совпадает с напряжением, рассчитанным по контуру BAD.

Пример 11. Генератор постоянного тока с ЭДС $\mathscr{E}_1=12$ В и внутренним сопротивлением $r_1=0{,}2$ Ом заряжает батарею аккумуляторов с ЭДС $\mathscr{E}_2=10$ В и внутренним сопротивлением $r_2=0{,}6$ Ом. Параллельно батарее включена лампочка сопротивлением $R=3$ Ом. Определите силу тока в батарее аккумуляторов и лампочке.

Решение. В данном примере источники с разными ЭДС и лампочка соединены параллельно. Расчет такой цепи может быть основан на том очевидном факте, что напряжение на каждом элементе цепи одинаково и его можно выразить через ЭДС, сопротивления и токи участков (с помощью формулы 12.15′).

Учитывая, что в процессе зарядки аккумулятора его полюса соединяются с одноименными полюсами генератора, делаем схематический чертеж (рис. 12.7) и указываем на нем все элементы цепи и их характеристики.

Расставляем токи I_1, I_2, I в каждой ветви. Если нет полной уверенности в правильности выбора направления тока, ему можно приписывать направление тока, даваемого источником ЭДС данной ветви. Если при этом окажется, что направление тока выбрано правильно, то при вычислении значение тока получится положительным, если нет — отрицательным.

В нашем примере направление токов очевидно, поскольку аккумулятор заряжается, и уравнение токов для любого из двух узлов схемы дает:

$$I_1=I_2+I. \qquad (1)$$

Если пренебречь сопротивлением подводящих проводов, то напряжения на зажимах генератора $U_г$, батареи $U_б$ и лампочки $U_л$ можно считать одинаковыми:

$$U_г=U_б;\quad U_г=U_л.$$

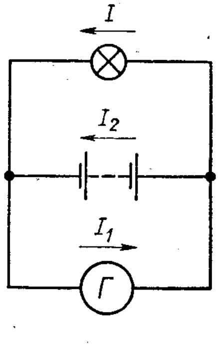

Рис. 12.7

В то же время, учитывая направление токов в параллельных ветвях, согласно формуле (12.15′) будем иметь:

$$U_г=\mathscr{E}_1-I_1r_1;\quad U_б=\mathscr{E}_2+I_2r_2;\quad U_л=IR,$$

поскольку мы предположили, что ток через аккумулятор идет противоположно направлению действия ЭДС.

Приравнивая попарно выражения, стоящие в правой части этих уравнений, получим:

$$\mathscr{E}_1-I_1r_1=\mathscr{E}_2+I_2r_2, \qquad (2)$$

$$\mathscr{E}_1-I_1r_1=IR. \qquad (3)$$

Задачи, аналогичные данной, встречаются сравнительно часто, и уравнения (1) — (3) носят поэтому довольно общий характер. Из них можно определить любые три величины, если остальные заданы. Решая эти уравнения относительно искомых токов и подставляя числовые значения, получаем:

$$I_2 = \frac{(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)R - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R}; \quad I_2 \approx 1{,}6 \text{ А};$$

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2)R}; \quad I \approx 3{,}6 \text{ А}.$$

Пример 12. Для получения в цепи силы тока $I_1 = 8$ А было взято минимальное количество одинаковых аккумуляторов, соединенных в смешанную батарею. Какой ток можно получить в цепи, соединив эти аккумуляторы последовательно? ЭДС одного аккумулятора $\mathcal{E}_1 = 2$ В, внутреннее сопротивление $r_1 = 0{,}2$ Ом.

Решение. Если n аккумуляторов соединить последовательно и замкнуть их на резистор сопротивлением R, то сила тока в цепи будет равна:

$$I = \frac{n\mathcal{E}_1}{R + nr_1}. \qquad (1)$$

Силу тока I можно найти, если будет известно число аккумуляторов в батарее. Для нахождения n в задаче дано дополнительное условие — при смешанном соединении этих аккумуляторов в том же резисторе можно получить максимальный ток I_1.

Если из n одинаковых аккумуляторов с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_1 составить m последовательно соединенных групп по k элементов в каждой группе, то через резистор будет идти ток

$$I_1 = \frac{mn\mathcal{E}_1}{nR + m^2 r_1},$$

и он будет наибольшим в том случае, когда $m^2 r_1 = nR$ (см. п. 5 введения к разделу).

Найдя из последнего равенства m и подставив его выражение в формулу закона Ома, для максимальной силы тока при смешанном соединении источников получим:

$$I_1 = \sqrt{\frac{n}{4Rr_1}}\,\mathcal{E}_1. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1), (2) относительно искомого тока, получаем:

$$I = \frac{4I_1^2 \mathcal{E}_1 r_1}{\mathcal{E}_1^2 + 4I_1^2 r_1^2}; \quad I \approx 7{,}2 \text{ А}.$$

Пример 13. Напряжение на шинах электростанции равно $U_0 = 10$ кВ, расстояние до потребителя $l = 500$ км. Станция должна передать потребителю мощность $P = 100$ кВт. Потери напряжения в проводах не должны превышать $z = 4\%$. Вычислите массу медных проводов на участке электростанция — потребитель. Плотность и удельное сопротивление меди равны соответственно $D = 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3 и $\varrho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м. Какой должна быть масса проводов, если напряжение увеличить в два раза?

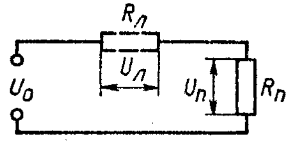

Рис. 12.8

Решение. Массу провода m_1 можно определить, зная материал провода, его сопротивление R и длину l линии. Действительно, если плотность материала провода равна D, удельное сопротивление ϱ, то

$$m_1 = D2lS, \quad R = \varrho \frac{2l}{S},$$

так как длина провода вдвое больше расстояния l. Исключив из этих формул площадь S сечения, получим:

$$m_1 = \frac{4D\varrho l^2}{R}. \tag{1}$$

В задаче все величины, входящие в равенство (1), кроме R, известны, поэтому дальнейшее решение сводится к нахождению сопротивления проводов.

Делаем чертеж (рис. 12.8), на котором отмечаем сопротивление $R_п$ потребителя, сопротивление $R_л$ проводов линии электропередачи, напряжения на этих резисторах $U_п$ и $U_л$, а также напряжение U_0 на шинах электростанции. Поскольку оба резистора соединены между собой последовательно, то

$$U_0 = U_п + U_л. \tag{2}$$

Используя закон Ома для участка цепи и условие, что потери напряжения не должны превышать $z\%$, для напряжения на проводах можно записать:

$$U_л = IR \quad \text{и} \quad U_л = \frac{z}{100\%} U_0. \tag{3}$$

Еще одним вспомогательным уравнением является формула мощности

$$P = IU_п. \tag{4}$$

Найдя R из уравнений (2) — (4) и подставив его выражение в (1), с учетом числовых значений будем иметь:

$$m_1 = \frac{4D\varrho l^2 P}{\left(1 - \frac{z}{100\%}\right) U_0^2}; \quad m_1 \approx 3{,}94 \cdot 10^6 \text{ кг}.$$

Из полученного выражения видно, что масса проводов обратно пропорциональна квадрату напряжения на шинах электростанции, поэтому при увеличении напряжения в 2 раза массу проводов линии передачи можно уменьшить в 4 раза, и, следовательно,

$$m_2 = m_1/4 \approx 9{,}85 \cdot 10^5 \text{ кг.}$$

Пример 14. Электроплитка, рассчитанная на напряжение U_0, при включении в сеть с этим напряжением потребляет мощность $P_1 = 250$ Вт. Какую мощность будут потреблять две такие плитки, включенные в сеть последовательно (параллельно), если номинальная мощность плитки $P_0 = 300$ Вт? Изменением сопротивления плиток вследствие нагревания пренебречь.

Решение. Если электроплитку, рассчитанную на напряжение U_0, включить в сеть с таким напряжением, то часть напряжения падает на внутреннем сопротивлении источника и подводящих проводах. Напряжение на самой плитке окажется меньше расчетного, и потребляемая ею мощность P_1 будет меньше номинальной: $P_1 < P_0$.

При включении в сеть двух плиток, соединенных последовательно или параллельно, суммарная мощность, потребляемая плитками, будет различной. В обоих случаях она не равна $2P_1$, поскольку из-за изменения внешнего сопротивления меняется напряжение, подводимое непосредственно к плиткам. Чтобы найти мощность, потребляемую двумя плитками при разных способах включения, нужно рассмотреть режимы работы цепи при различных нагрузках.

Если сопротивление подводящих проводов отнести к внутреннему сопротивлению источника и рассматривать две плитки, соединенные последовательно, как резистор сопротивлением $2R$, подключенный к зажимам источника, то согласно последней формуле (12.22) потребляемая ими мощность равна:

$$P_{\text{пс}} = \frac{U_0 2R}{(2R + r)^2}. \quad (1)$$

где r — сопротивление подводящих проводов и источника тока.

При параллельном соединении плиток их общее сопротивление становится равным $R/2$, и выделяемая в них суммарная мощность равна:

$$P_{\text{пр}} = \frac{U_0 2R}{(R + 2r)^2}. \quad (2)$$

Как видно из уравнений (1), (2), для нахождения $P_{\text{пс}}$ и $P_{\text{пр}}$ необходимо знать сопротивление плитки и сопротивление остальной цепи. Эти сопротивления можно определить, зная номинальную P_0 и фактически потребляемую мощность P_1 при включении одной плитки.

Если бы на плитку было подано расчетное напряжение U_0, она потребляла бы номинальную мощность

$$P_0 = U_0^2/R. \qquad (3)$$

Если же напряжение U_0 подается на резистор сопротивлением $R + r$, то в плитке будет выделяться мощность

$$P_1 = \frac{U_0^2 R}{(R + r)^2}. \qquad (4)$$

Исключая из уравнений (1) — (4) сопротивления и подставляя числовые значения P_1 и P_0, находим:

$$P_{пс} = 2P_0^2 P_1/(P_0 + \sqrt{P_0 P_1})^2; \quad P_{пс} \approx 136 \text{ Вт};$$

$$P_{пр} = 2P_0^2 P_1/(P_0 - \sqrt{P_0 P_1})^2; \quad P_{пр} \approx 420 \text{ Вт}.$$

Пример 15. Электропечь должна за время $\tau = 10$ мин выпаривать воду массой $m = 1$ кг, взятую при температуре $t_1 = 20°C$. Какой должна быть длина нихромовой проволоки сечением $S = 0{,}5$ мм^2, используемой в качестве нагревателя, если печь предназначена для напряжения $U = 120$ В и ее КПД равен $\eta = 80\%$? Удельное сопротивление нихрома $\varrho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м, удельные теплоемкость и теплота парообразования воды равны соответственно $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К) и $r = 2{,}26 \cdot 10^3$ кДж/кг.

Решение. Из условия задачи следует, что для расчета теплового действия тока в данном примере удобно применить формулу (12.25). Если спираль электропечи имеет сопротивление R и включается в сеть с напряжением U, то за время τ в спирали выделяется количество теплоты $U^2\tau/R$ и часть (η) этой энергии идет на нагревание воды:

$$Q = \eta \frac{U^2}{R} \tau. \qquad (1)$$

Температура спирали при этом не изменяется.

Чтобы нагреть воду массой m от температуры t_1 до температуры $t_2 = 100°C$ и затем обратить ее в пар, необходимо затратить количество теплоты, равное

$$Q = cm(t_2 - t_1) + rm. \qquad (2)$$

При изготовлении нагревателя сопротивлением R из проволоки сечением S длина ее l должна быть такой, чтобы

$$R = \varrho \frac{l}{S}. \qquad (3)$$

Подставляя в исходное уравнение вместо Q и R их выражения (2) и (3), получим:

$$m[c(t_2 - t_1) + r] = \eta \frac{U^2 S \tau}{\varrho l}.$$

Выразив отсюда длину проволоки и подставив числовые значения, найдем:

$$l=\frac{\eta U^2 S\tau}{\varrho m[c(t_2-t_1)+r]}; \quad l\approx 1{,}2 \text{ м.}$$

Пример 16. В цепь, состоящую из медного провода сечением $S=5$ мм^2, надо включить свинцовый предохранитель. Какое сечение должен иметь предохранитель, чтобы при нагревании провода более чем на $\Delta t=10°$C он расплавился? Начальная температура свинца $t=27°$C, температура плавления свинца $t_{пл}=327°$C.

Р е ш е н и е. Плавкие предохранители включают в цепь последовательно, и ток в них идет такой же, как и в проводах цепи. Размеры предохранителя можно подобрать так, что он будет перегорать, как только температура проводов превысит допустимую.

Основным расчетным соотношением, позволяющим вычислить сечение предохранителя, служит уравнение закона Джоуля — Ленца. В данной задаче им нужно воспользоваться дважды: применить уравнение к медному проводу и свинцовому предохранителю. Поскольку в проводе и предохранителе сила тока одна и та же, для расчета теплового действия тока удобнее взять формулу (12.26).

Допустим, что по проводам идет ток I, сопротивление медного провода R_1 и за время τ он нагревается на Δt_1, тогда на нагревание проводов будет израсходована электрическая энергия

$$Q_1=I^2R_1\tau.$$

Внутренняя энергия проводов возрастет при этом на величину

$$Q_1'=c_1m_1\Delta t_1,$$

где c_1 — удельная теплоемкость меди; m_1 — масса проводов. Если пренебречь потерями энергии на нагревание окружающей среды, то можно считать, что $Q_1=Q_1'$, т. е.

$$c_1m_1\Delta t_1=I^2R_1\tau. \tag{1}$$

Обозначим плотность меди D_1, удельное сопротивление ϱ_1, длину провода l_1 и сечение S_1, тогда масса провода и его сопротивление будут равны соответственно:

$$m_1=D_1S_1l_1; \quad R_1=\varrho_1\frac{l_1}{S_1}.$$

Подставляя эти выражения в формулу закона Джоуля — Ленца, после сокращения на l_1 получим:

$$c_1D_1S_1\Delta t_1=I^2\frac{\varrho_1\tau}{S_1}. \tag{1'}$$

Рассмотрим теперь предохранитель, обладающий массой m_2 и сопротивлением R_2. По предохранителю идет такой же ток I, что и по проводам, и за то же время τ в нем выделится количество теплоты

$$Q_2 = I^2 R_2 \tau,$$

которое идет на нагревание и плавление предохранителя:

$$Q_2' = c_2 m_2 \Delta t_2 + \lambda m_2.$$

Здесь c_2 и λ — удельная теплоемкость и удельная теплота плавления свинца; $\Delta t_2 = t_{пл} - t$ — разность конечной и начальной температур свинца. Так как $Q_2 = Q_2'$, то

$$m_2 (c_2 \Delta t_2 + \lambda) = I^2 R_2 \tau. \qquad (2)$$

Обозначим плотность свинца D_2, удельное сопротивление ϱ_2, длину предохранителя l_2 и сечение S_2, тогда масса и сопротивление предохранителя равны соответственно:

$$m_2 = D_2 S_2 l_2; \quad R_2 = \varrho_2 \frac{l_2}{S_2}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (2), получим:

$$D_2 S_2 (c_2 \Delta t_2 + \lambda) = I^2 \frac{\varrho_2 \tau}{S_2}. \qquad (2')$$

Разделив уравнение (2′) на (1′), после несложных преобразований и подстановки числовых значений найдем:

$$S_2 = S_1 \sqrt{\frac{D_1 c_1 \varrho_2 \Delta t_1}{D_2 \varrho_1 (c_2 \Delta t_2 + \lambda)}}; \quad S_2 \approx 3{,}9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 3{,}9 \text{ мм}^2.$$

Пример 17. При включении электромотора в сеть с напряжением $U = 120$ В напряжение на клеммах распределительного щита падает на $z = 20\%$. Сопротивление подводящих проводов вместе с сопротивлением генератора составляет $R = 14$ Ом. Какую полезную мощность развивает электромотор, если его КПД $\eta = 0{,}65$?

Решение. При работе электромотора, включенного в сеть постоянного тока, электрическая энергия превращается в механическую и внутреннюю энергию. С внутренней энергией связано нагревание проводников, составляющих электрическую цепь, с механической — вращение якоря электромотора.

Основное уравнение, характеризующее процесс перераспределения энергии,— уравнение закона сохранения и превращения энергии (12.26), отнесенной к единице времени.

Предположим, что мотор подключен непосредственно к распределительному щиту и сопротивление соединительных проводов в сумме с сопротивлением его обмотки мало по сравнению с сопротивлением R остальной линии. Если при включенном моторе по цепи идет ток I, то согласно закону сохранения энергии за счет мощности IU, развиваемой источником, происходит нагревание проводов (I^2R) и развивается механическая мощность ($N_{мех}$):

$$IU = I^2 R + N_{мех}. \qquad (1)$$

За счет механической мощности преодолевается трение и совершается полезная работа. Если КПД электромотора η, то полезная мощность равна:

$$N_п = \eta N_{мех}. \qquad (2)$$

По условию задачи напряжение на клеммах распределительного щита при включении мотора падает на z. Если рассматривать эти клеммы как зажимы источника, а всю проводку как его внутреннее сопротивление, то можно считать, что

$$U_з = \frac{z}{100\%} U, \qquad (3)$$

$$U_з = U - IR. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) найдем силу тока I в цепи и, подставив ее в формулу (1), с учетом выражения (2) после несложных преобразований и вычислений получим:

$$N_п = \frac{\eta z(100\% - z)U^2}{(100\%)^2 R}; \quad N_п \approx 110 \text{ Вт}.$$

Пример 18. При серебрении пластинки через раствор нитрата серебра *проходит ток плотностью* $j = 2$ кА/м^2. С какой средней скоростью растет толщина серебряного покрытия пластинки? Относительная атомная масса, валентность и плотность серебра равны соответственно $A_r = 108$, $n = 1$, $D = 1{,}05 \cdot 10^4$ кг/м^3.

Решение. При прохождении электрического тока через раствор нитрата серебра за время t на катоде откладывается серебро массой

$$m = \frac{M}{nF} It,$$

где F — постоянная Фарадея; I — сила тока в растворе; M — молярная масса серебра ($M = 0{,}108$ кг/моль).

Если слой серебра плотностью D осаждается равномерно по всей поверхности пластинки площадью S и толщина слоя по обе стороны пластинки h, то масса выделившегося серебра равна:

$$m = DSh.$$

С учетом этого формулу закона Фарадея можно переписать так:

$$DSh = \frac{M}{nF} It,$$

откуда

$$D\frac{h}{t} = \frac{M}{nF}\frac{I}{S}, \quad \text{или} \quad Dv = \frac{MI}{nF} j,$$

где $h/t = v$ — скорость роста толщины покрытия; j — плотность тока в растворе электролита. Последняя формула является основным расчетным соотношением в данной задаче. Из нее для средней скорости роста толщины покрытия получаем:

$$v = \frac{Mj}{nFD},$$

откуда после подстановки числовых значений будем иметь:

$$v = 2{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{м/с} = 0{,}25\ \text{мкм/с}.$$

Пример 19. Сколько электроэнергии нужно затратить для получения из подкисленной воды водорода, имеющего при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 100$ кПа объем $V = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\text{м}^3$, если электролиз ведется при напряжении $U = 5$ В, а КПД установки равен $\eta = 0{,}75$?

Решение. Согласно закону Фарадея масса m водорода, выделившегося при электролизе подкисленной воды при КПД установки η, равна:

$$m = \eta \frac{M}{2nF} q,$$

где M и n — молярная масса и валентность водорода; q — заряд, прошедший через подкисленную воду.

Если при электролизе на электроды подается напряжение U и их поляризацией можно пренебречь (ЭДС поляризации очень мала), то для получения газа массой m необходимо затратить электроэнергию, равную:

$$W = qU.$$

Учитывая это, формулу закона Фарадея можно представить в виде:

$$m = \eta \frac{M}{2nF} \frac{W}{U}. \tag{1}$$

Массу водорода, полученного при электролизе, можно выразить из уравнения Менделеева — Клапейрона через параметры состояния газа:

$$pV = \frac{m}{M} RT, \tag{2}$$

где M — молярная масса водорода. Уравнения (1) и (2) содержат две неизвестные величины: массу водорода и затраченную энергию, которую нам требуется определить.

Исключая из этих уравнений массу и подставляя числовые значения, находим:

$$W = \frac{2pVUnF}{\eta RT}; \quad W \approx 134\ \text{кДж}.$$

12.1. Сила тока в проводнике в течение времени t равномерно возрастает от 0 до I_1, затем в течение такого же промежутка времени остается постоянной и потом равномерно уменьшается до нуля за время t. Какой заряд прошел через проводник за время $3t$?

12.2. В электростатическом генераторе Ван-де-Граафа прорезиненная лента шириной 0,30 м движется со скоростью 20 м/с. Около нижнего шкива ленте сообщается такой поверхностный заряд, что по обеим сторонам ленты образуется электрическое поле с напряженностью 1,2 МВ/м. Чему равна сила тока, обусловленного механическим перемещением заряда?

12.3. По проводнику длиной l течет ток I. Чему равен суммарный импульс электронов в проводнике, если отношение заряда электрона к его массе равно γ?

12.4. По медному проводу течет ток плотностью $j = 10^4$ А/м^2. Найдите среднюю скорость упорядоченного движения электронов, полагая, что на каждый атом меди приходится один электрон проводимости.

12.5. К источнику постоянного напряжения через резистор сопротивлением R подключен конденсатор емкостью C с расстоянием между пластинами d. Воздух в пространстве между пластинами конденсатора ионизируется рентгеновскими лучами, вследствие чего в цепи идет ток и напряжение на резисторе оказывается равным U. Полагая, что заряд иона равен заряду электрона, определите, сколько пар ионов образуется за 1 с в 1 см^3 воздуха.

12.6. Через двухэлектродную лампу с плоскими электродами идет ток I при напряжении на лампе U. С какой силой действуют на анод ударяющие в него электроны? Отношение заряда электрона к его массе γ считать известным, начальной скоростью электронов пренебречь.

12.7. Две проволоки — медная и алюминиевая — имеют одинаковую массу. Длина медной проволоки в 10 раз больше длины алюминиевой. Во сколько раз отличаются их сопротивления? Плотность меди в 3,3 раза больше плотности алюминия, удельное сопротивление в 1,65 раза меньше.

12.8. Угольный стержень соединен последовательно с железным стержнем такого же сечения. При каком соотношении длин сопротивление этой системы не зависит от температуры? Температурные коэффициенты сопротивления угля и железа равны соответственно $8 \cdot 10^{-4}$ и $6 \cdot 10^{-3}$К$^{-1}$, их удельные сопротивления $4 \cdot 10^{-5}$ и $1,2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м. Какой заряд находится на границе раздела стержней при силе тока 10 А, идущего от угольного стержня к железному?

12.9. При 0°С один проводник имеет сопротивление в n раз больше другого. Температурные коэффициенты сопротивления проводников равны α_1 и α_2. Чему будут равны температурные коэффициенты сопротивления проводника, составленного из первых двух: а) при их последовательном соединении; б) при их параллельном соединении?

12.10. Разность потенциалов на концах проволоки длиной 5 м равна 4,2 В. Определите плотность тока в проволоке при температуре 120°С, если ее удельное сопротивление и температурный коэффициент сопротивления равны соответственно $2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м и $6 \cdot 10^{-3}$ $К^{-1}$.

12.11. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено средой с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ϱ. Чему равно сопротивление n таких конденсаторов, соединенных параллельно, если емкость одного конденсатора равна C?

12.12. Проволока имеет сопротивление 36 Ом. Когда ее разрезали на несколько равных частей и соединили эти части параллельно, то ее сопротивление стало 1 Ом. На сколько частей разрезали проволоку?

12.13. Вычислите сопротивление контуров, представленных на рисунке 12.9, *а, б, в*. Какой ток пойдет через резисторы в схеме *б,* если контур подключить к источнику постоянного напряжения U?

12.14. Как изменится сопротивление контура, изображенного на рисунке 12.10, если между точками a и b подключить резистор сопротивлением r?

12.15. Контур составлен из резисторов, как показано на рисунке 12.11. Чему будет равно его сопротивление, если источник напряжения подключить к точкам A и B, C и D, E и F?

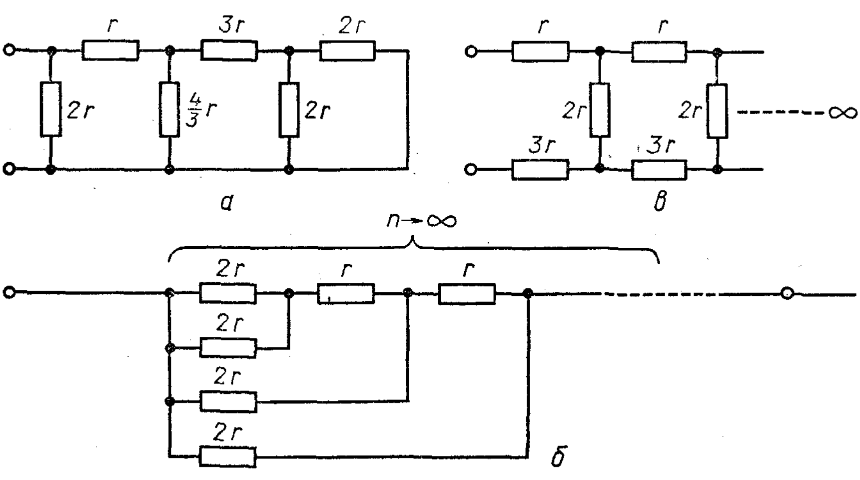

Рис. 12.9

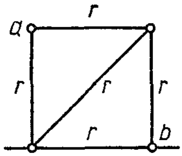

Рис. 12.10

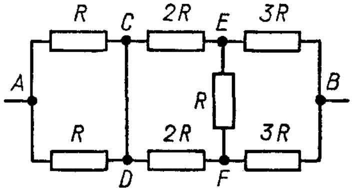

Рис. 12.11

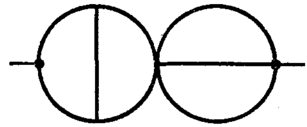

Рис. 12.12

12.16. Из проволоки, сопротивление которой равно 4,14 Ом, сделали два кольца с перемычками (рис. 12.12). Определите сопротивление контура.

12.17. N точек соединены попарно резисторами сопротивлением R. Чему равно общее сопротивление такой схемы?

12.18. На рисунке 12.13 изображен контур, состоящий из квадратов, каждая сторона которых имеет сопротивление r. Центральный квадрат представляет собой металлическую пластинку. Чему равно сопротивление контура при подключении его к источнику напряжения в точках: а) A,A; б) B,B; в) C,C; г) A,D?

12.19. Найдите общее сопротивление контуров (рис. 12.14, *а, б, в, г*), составленных из проводников одинаковых сопротивлений r. Контуры подключены к электрической цепи в точках A и B.

12.20. Из однородной проволоки сделаны каркасы в форме октаэдра и тетраэдра. Сопротивление каждого ребра r. Какое сопротивление будет показывать омметр, если его подключать к разным углам каркасов?

12.21. Из однородной проволоки сделали каркас в форме куба. Ребро куба имеет сопротивление r. Как велико сопротивление этого каркаса при подключении его в разных углах? Дайте все возможные ответы.

12.22. Двумерная бесконечная сетка с квадратными ячейками составлена из одинаковых проволок сопротивлением r. В каждом узле сетки соединяются концы четырех проводников. Каково будет показание омметра, если его подключить к концам одной из проволок?

12.23. Определите показания вольтметра с внутренним сопротивлением 150 Ом в схеме, показанной на рисунке 12.15 ($R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 9$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 7$ Ом).

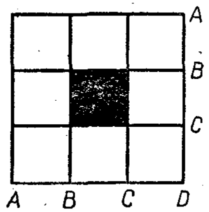

Рис. 12.13

12.24. Пять ламп и резистор включены последовательно. Для нормального накала всех нитей требуется сила тока 0,3 А. Напряжение накала одной из ламп 30 В, остальных 6 В. Чему равно сопротивление резистора, если напряжение источника питания 120 В? Как и какие резисторы нужно включить в цепь,

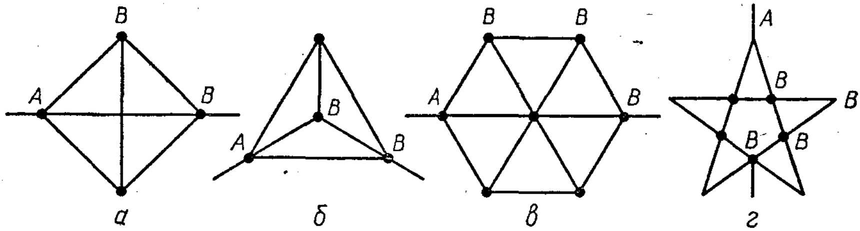

Рис. 12.14

чтобы все лампы работали в заданном режиме при соединении всех шестивольтовых ламп в параллельную группу?

12.25. Амперметр, включенный последовательно с резистором сопротивлением R, показывает силу тока I. Подключенный к этому резистору вольтметр показывает напряжение U. Чему равно внутреннее сопротивление вольтметра?

12.26. К потенциометру с сопротивлением R_0, имеющему длину обмотки l, приложено напряжение U. Между концом потенциометра и движком включен вольтметр с сопротивлением R_V. По какому закону будут изменяться показания вольтметра в зависимости от положения движка на потенциометре?

12.27. Чтобы определить место повреждения изоляции двухпроводной телефонной линии длиной 4 км, к одному ее концу присоединили батарею с ЭДС 15 В. При этом оказалось, что, если провода у другого конца разомкнуты, сила тока через батарею равна 1 А, а если замкнуты накоротко, то 1,8 А. Найдите место повреждения и сопротивление изоляции в месте повреждения. Сопротивление каждого провода линии равно 5 Ом.

12.28. Найдите сопротивления R_2 и R_3 в схеме, показанной на рисунке 12.16, если при подключении источника с напряжением 110 В падение напряжения на этих сопротивлениях равно соответственно 10 и 15 В. $R_1 = 10$ Ом, $R_4 = 15$ Ом. Какую силу тока покажет амперметр с ничтожно малым сопротивлением, если его подключить между точками A и B?

12.29. Какую силу тока покажет амперметр в схеме, показанной на рисунке 12.17? Сопротивлением амперметра пренебречь.

12.30. Определите силу тока на участке ab (рис. 12.18), если известно, что потенциал точки c равен 100 В, $R = 1$ кОм.

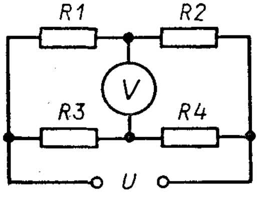

Рис. 12.15

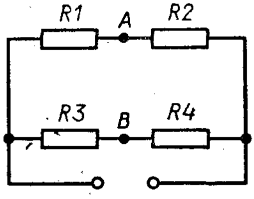

Рис. 12.16

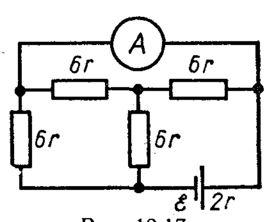

Рис. 12.17

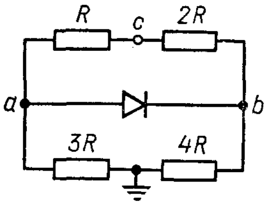

Рис. 12.18

12.31. Какое напряжение будет показывать вольтметр в схеме, изображенной на рисунке 12.19? Чему равна разность потенциалов между точками A и B? Сопротивление вольтметра $2r$.

12.32. Найдите напряжение на резисторе сопротивлением R (рис. 12.20).

12.33. Милливольтметр, соединенный последовательно с резистором сопротивлением 800 Ом, показывает напряжение 12 мВ. Сколько покажет тот же милливольтметр при том же внешнем напряжении, если его соединить последовательно с резистором сопротивлением 300 Ом? Сопротивление прибора 1,2 кОм.

12.34. Гальванометр с внутренним сопротивлением 50 Ом имеет цену деления шкалы 50 мкА. Как из этого прибора сделать вольтметр для измерения напряжений до 200 В или амперметр для измерения токов до 800 мА, если шкала прибора разбита на 100 делений?

12.35. Если к вольтметру присоединить некоторый резистор, пределы измерения прибора возрастают в m раз. Другой резистор увеличивает пределы измерения в n раз. Во сколько раз увеличится предел измерения вольтметра, если оба резистора соединить между собой параллельно и затем подключить к вольтметру последовательно?

12.36. К амперметру подсоединены два шунта по схеме, представленной на рисунке 12.21. Шкала амперметра содержит 100 делений. Если амперметр включить в цепь, пользуясь клеммами *1* и *2*, цена деления шкалы амперметра окажется равной 0,01 А/дел; если пользоваться клеммами *2*, *3*, цена деления равна 0,02 А/дел. Какую силу тока можно измерять амперметром, подключив его при помощи клемм *1*, *3*?

12.37. Как изменятся показания приборов в схеме, показанной на рисунке 12.22, если между точками a и b подключить резистор сопротивлением R? Сопротивлением источника и подводящих проводов пренебречь.

12.38. В схему (рис. 12.23) включены два микроамперметра и два одинаковых вольтметра. Микроамперметр $\mu A1$ показывает силу тока $I_1 = 200$ мкА, вольтметры показывают напряжения

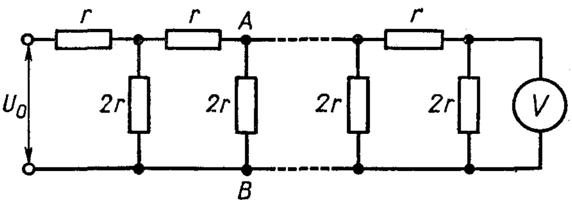

Рис. 12.19

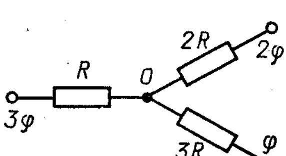

Рис. 12.20

$U_1 = 100$ В и $U_2 = 2$ В. Найдите показания микроамперметра $\mu A2$. Сопротивлением проводов пренебречь.

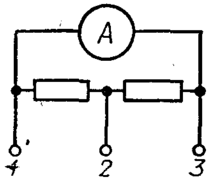

Рис. 12.21

12.39. Цепь, показанная на рисунке 12.24, собрана из одинаковых резисторов и вольтметров. Первый вольтметр показывает напряжение 10 В, третий 8 В. Каково показание второго вольтметра?

12.40. При подключении амперметра последовательно с резистором сопротивлением 20 Ом непосредственно к батарее стрелка амперметра отклоняется на всю шкалу. Если амперметр вместе с резистором подключить к батарее через потенциометр с сопротивлением 100 Ом так, чтобы параллельно амперметру и резистору была подсоединена часть потенциометра сопротивлением 60 Ом, то амперметр будет показывать силу тока, втрое меньшую. Чему равно сопротивление амперметра?

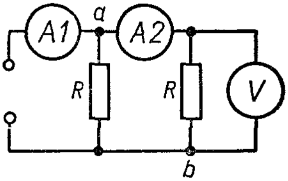

Рис. 12.22

12.41. Электрическая цепь питается от источника постоянного напряжения 220 В. Если к некоторому участку цепи подключить вольтметр с внутренним сопротивлением 3000 Ом, он покажет напряжение 98 В. Подключенный к этому же участку цепи вольтметр с внутренним сопротивлением 6000 Ом показывает напряжение 100 В. Определите сопротивление измеряемого участка и силу тока в магистрали до подключения вольтметров.

12.42. Плоский конденсатор емкостью C заполнен проводящим диэлектриком с электрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ϱ. Расстояние между обкладками конденсатора d. Конденсатор подключен к источнику постоянного напряжения, и в цепи идет ток I. Определите напряженность поля в диэлектрике, плотность связанных зарядов на границе сред в конденсаторе, силу электростатического взаимодействия между пластинами.

12.43. Какие заряды находятся на плоских электродах, опущенных в раствор медного купороса, если сила тока в цепи равна 0,5 А? Диэлектрическая проницаемость раствора 81, удельное сопротивление 0,5 Ом · м.

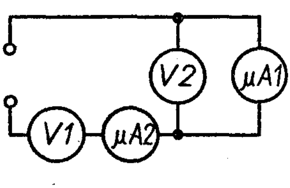

Рис. 12.23

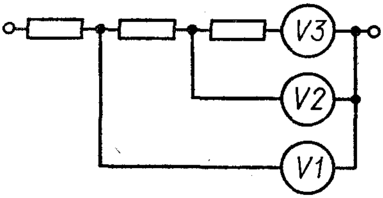

Рис. 12.24

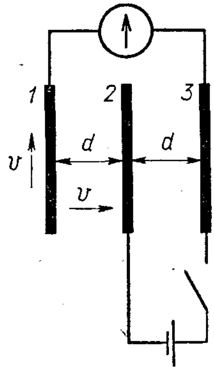

Рис. 12.25

12.44. Из вертикально расположенного плоского конденсатора равномерно вытекает заполняющий его керосин. Сила тока в проводах, соединяющих конденсатор с источником напряжения 100 В, равна $2 \cdot 10^{-5}$ мкА. Через сколько времени вытечет весь керосин? Пластины конденсатора квадратные, площадью 100 см^2, зазор между ними 1 мм. Диэлектрическая проницаемость керосина равна 2.

12.45. Три квадратные металлические пластинки площадью 10^{-3}м^2 каждая находятся в воздухе на расстоянии 10^{-3} м друг от друга (рис. 12.25). К крайним пластинкам подключен гальванометр с ничтожно малой емкостью. На пластинки *2* и *3* подали напряжение 200 В и затем источник отключили. Найдите максимальную силу тока, которую покажет гальванометр, если: а) пластинку *1* смещать вправо со скоростью $v = 1$ м/с; б) смещать пластинку *1* со скоростью v параллельно пластинке *2* так, чтобы расстояние между ними не изменялось.

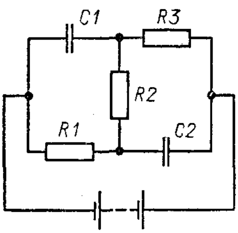

Рис. 12.26

12.46. Найдите ЭДС батареи в схеме, изображенной на рисунке 12.26, если заряд на конденсаторах *C2* и *C1* равен соответственно $3q$ и $2q$. Внутренним сопротивлением источника пренебречь. Емкости конденсаторов *C1* и *C2* равны соответственно C и $2C$, сопротивления резисторов *R1*, *R*2 и *R*3 равны R, $2R$ и $3R$.

12.47. Какой заряд пройдет через гальванометр в схеме, показанной на рисунке 12.27, если замкнуть ключ *K*? При каком соотношении между элементами схемы заряд через гальванометр при замыкании ключа проходить не будет?

12.48. При замыкании элемента на резистор сопротивлением 1,8 Ом сила тока в цепи равна 0,7 А, при замыкании на резистор сопротивлением 2,3 Ом — 0,56 А. Чему равен ток короткого замыкания?

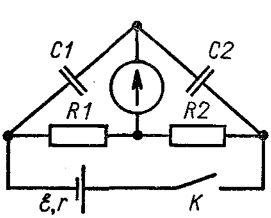

Рис. 12.27

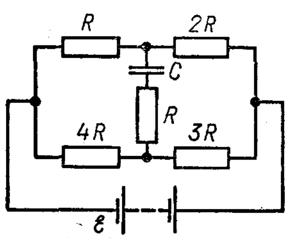

Рис. 12.28

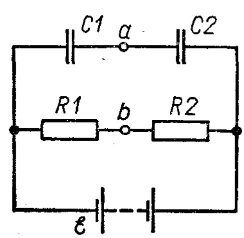

Рис. 12.29

12.49. Определите ЭДС батареи, если известно, что при увеличении внешнего сопротивления резистора, замыкающего элемент, в n раз разность потенциалов на зажимах источника увеличивается с U_1 до U_2.

12.50. Определите заряд на конденсаторе в схеме, показанной на рисунке 12.28.

12.51. Найдите разность потенциалов между точками a и b (рис. 12.29). Внутренним сопротивлением батареи пренебречь. Какой станет разность потенциалов между этими точками, если к ним подключить конденсатор емкостью C_3?

12.52. В цепи аккумулятора с ЭДС 10 В и внутренним сопротивлением 2 Ом сила тока равна 6 А. Найдите напряжение на зажимах источника.

12.53. Полностью разряженный аккумулятор емкостью 60 А · ч должен заряжаться от сети с напряжением 8 В в течение 50 ч. Его внутреннее сопротивление 1 Ом. Какова электродвижущая сила аккумулятора?

12.54. К батарее через резистор с переменным сопротивлением R подключен вольтметр. Если сопротивление R уменьшить втрое, показания вольтметра возрастут в два раза. Во сколько раз изменятся показания вольтметра, если сопротивление R уменьшить до нуля?

12.55. Два вольтметра, соединенные последовательно, при подключении к источнику напряжения показывают 6 и 3 В. Один вольтметр, подключенный к источнику, показывает 8 В. Чему равна ЭДС источника?

12.56. Батарея элементов замкнута двумя одинаковыми проводниками сопротивлением 4 Ом каждый, соединенными параллельно. Вольтметр, подключенный к зажимам батареи, показывает напряжение 6 В. Если один проводник отключить, показания вольтметра возрастут до 8 В. Определите ЭДС и внутреннее сопротивление батареи. Током, проходящим по вольтметру, пренебречь.

12.57. Амперметр, зашунтированный резистором сопротивлением 0,2 Ом и присоединенный к полюсам гальванического элемента с ЭДС 1 В и внутренним сопротивлением 0,1 Ом, показывает силу тока 5 А. Каким будет показание амперметра, если отключить шунт?

12.58. В цепь, состоящую из аккумулятора и резистора сопротивлением 10 Ом, включают вольтметр — сначала последовательно, а затем параллельно. Внутреннее сопротивление аккумулятора 0,1 Ом. Определите внутреннее сопротивление вольтметра, если его показания в обоих случаях оказались одинаковыми.

12.59. Аккумулятор замкнут на некоторое сопротивление. Если в цепь включить два амперметра, соединенные между собой параллельно, они покажут силы токов 2 и 3 А. Если амперметры включить в цепь последовательно, они показывают силу тока 4 А. Какая сила тока в цепи при отсутствии приборов?

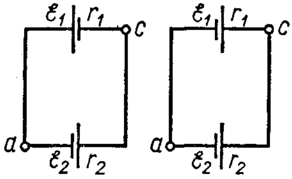

Рис. 12.30

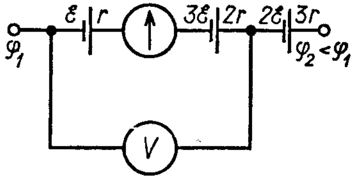

Рис. 12.31

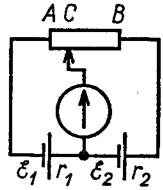

Рис. 12.32

12.60. К источнику напряжения с внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом подключены два резистора сопротивлением $R = 1$ Ом и $2R$, соединенные между собой параллельно. Каким должно быть внутреннее сопротивление амперметра, включенного в ветвь резистора меньшего сопротивления, чтобы погрешность измерений тока в этом резисторе не превышала $z = 4\%$?

12.61. К источнику с небольшим внутренним сопротивлением подключены последовательно два резистора сопротивлением 5 и 10 кОм. Каким должно быть внутреннее сопротивление вольтметра, чтобы при подключении его ко второму резистору погрешность измерений не превышала 2%?

12.62. «Черный ящик» имеет четыре вывода. Если между выводами *1* и *2* включить батарею с напряжением 2 В, напряжение между точками *3* и *4* оказывается равным 1 В (7 В). Если между точками *3* и *4* включить батарею с напряжением 2 В (10 В), то между точками *1* и *2* напряжение оказывается равным 2/3 В (3 В). Нарисуйте несколько возможных схем «черного ящика» для двух указанных случаев.

12.63. Определите разность потенциалов между точками a и c (рис 12.30) при условии, что $\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$. Каким будет ответ, если $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ и $r_1 = r_2$?

12.64. Определите силу тока через гальванометр и показания электростатического вольтметра в схеме, показанной на рисунке 12.31. Сопротивлением гальванометра пренебречь.

12.65. Две батареи, ЭДС которых равны 1,7 и 2,8 В, соединены разноименными полюсами. Чему равно отношение внутренних сопротивлений батарей, если разность потенциалов на зажимах источников равна 0,8 В? Сопротивлением проводов пренебречь.

12.66. В схеме, изображенной на рисунке 12.32, реохорд AB имеет сопротивление R и длину l. ЭДС батарей равны $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, их внутренние сопротивления r_1 и r_2. При каком расстоянии между точкой A и движком C ток через гальванометр проходить не будет?

12.67. N одинаковых аккумуляторов соединены последовательно, причем k из них включены навстречу другим. Какая сила тока установится в цепи, если батарею замкнуть на резистор сопротивлением R? ЭДС каждого элемента равна $\mathcal{E}$, внутреннее сопротивление r.

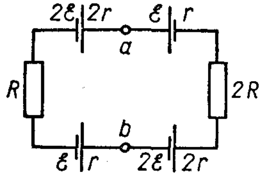

Рис. 12.33

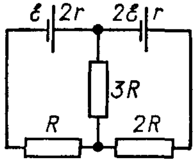

Рис. 12.34

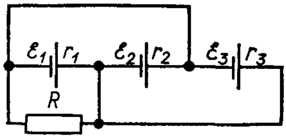

Рис. 12.35

12.68. Замкнутая цепь состоит из n одинаковых источников с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r, соединенных между собой последовательно разноименными полюсами. Чему равна разность потенциалов между двумя произвольными точками цепи? Решите задачу при условии, что источники имеют ЭДС $\mathscr{E}$, $2\mathscr{E}$, ..., $n\mathscr{E}$ и внутренние сопротивления r, $2r$, ..., nr соответственно. Зависит ли результат от того, в какой последовательности включены источники?

12.69. Определите разность потенциалов между точками a и b (рис. 12.33).

12.70. Определите силу тока в проводнике сопротивлением $3R$ (рис. 12.34).

12.71. Три гальванических элемента с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 1{,}3$ В, $\mathscr{E}_2 = 1{,}4$ В и $\mathscr{E}_3 = 1{,}5$ В и внутренним сопротивлением $r_1 = 0{,}1$ Ом, $r_2 = 0{,}2$ Ом и $r_3 = 0{,}3$ Ом вместе с резистором сопротивлением $R = 104/110$ Ом образуют электрическую цепь (рис. 12.35). Определите силу тока в резисторе и первом источнике.

12.72. При каких условиях сила тока в цепи, подключенной к батарее, составленной из последовательно соединенных одинаковых элементов, равна силе тока, даваемой батареей из тех же элементов, соединенных параллельно?

12.73. Батарея составлена из 12 элементов, имеющих ЭДС 1,08 В и внутреннее сопротивление 0,6 Ом. Батарея состоит из 4 групп, по три элемента в каждой. Элементы в группе соединены параллельно, а группы между собой — последовательно. Определите силу тока в каждом элементе, если батарею замкнуть резистором с сопротивлением 11,2 Ом.

12.74. Батарея из n элементов с ЭДС 1,84 В и внутренним сопротивлением 0,5 Ом состоит из нескольких групп, соединенных последовательно. В каждой группе содержится по 4 элемента, соединенных параллельно. Сопротивление внешней цепи 3 Ом. При этой группировке во внешнем участке цепи получается наибольшая сила тока. Определите эту силу тока и число элементов в батарее.

12.75. Из 16 элементов нужно составить такую батарею, чтобы при внешнем сопротивлении 4 Ом по нему проходил наибольший ток. Как нужно соединить элементы? Внутреннее сопротивление одного элемента 0,25 Ом.

12.76. Сколько электронов проходит ежесекундно через волосок лампы накаливания, если при напряжении 220 В лампа потребляет мощность 150 Вт?

12.77. Линия имеет сопротивление 300 Ом. Какое напряжение должен давать генератор, чтобы при передаче потребителю мощности 25 кВт потери в линии не превышали 4% передаваемой мощности?

12.78. Какую мощность можно передать потребителю по медным проводам сечением 18 мм^2, имеющим общую длину 1,5 км, если напряжение на электростанции 230 В, а допустимые потери напряжения в проводах не должны превышать 10%?

12.79. Во сколько раз нужно повысить напряжение, даваемое генератором, чтобы потери мощности в подводящих проводах снизить в 100 раз? Мощность, отдаваемую генератором, считать постоянной.

12.80. Потери мощности в линии электропередачи составляют 5% мощности, получаемой потребителем. Во сколько раз нужно повысить напряжение на входе линии и как нужно изменить сопротивление потребителя, чтобы снизить потери в линии в 5 раз?

12.81. Чему равна сила тока в подводящих проводах при коротком замыкании, если на плитках с сопротивлением $R_1 = 200$ Ом и $R_2 = 500$ Ом выделяется при поочередном их включении одинаковая мощность $P = 200$ Вт?

12.82. Две лампы с номинальной мощностью — одна с $P_1 = 40$ Вт, другая с $P_2 = 60$ Вт, рассчитанные на одинаковое напряжение, включены последовательно в сеть с тем же напряжением. Какие мощности будут потреблять лампы? Какая из них будет гореть ярче?

12.83. Определите ЭДС и внутреннее сопротивление аккумулятора, если при силе тока $I_1 = 5$ А он отдает во внешнюю цепь мощность $P_1 = 9{,}5$ Вт; если же сопротивление внешней цепи $R_2 = 0{,}225$ Ом, отдаваемая мощность $R_2 = 14{,}4$ Вт.

12.84. Если к источнику напряжения с внутренним сопротивлением 2 Ом подключить резистор сопротивлением 4 Ом, то напряжение на его зажимах упадет до 6 В. Какую полную мощность развивает источник?

12.85. Элемент замыкают один раз резистором сопротивлением 4 Ом, другой — резистором сопротивлением 9 Ом. В том и другом случае во внешней цепи выделяется одинаковая мощность. При каком внешнем сопротивлении она будет наибольшей?

12.86. Сила тока, создаваемого элементом во внешней цепи, равна 3 А при напряжении на зажимах источника 2 В. Определите КПД элемента, если его внутреннее сопротивление 0,02 Ом.

12.87. При увеличении внешнего сопротивления с 3 до 10,5 Ом КПД источника увеличивается вдвое. Чему равно внутреннее сопротивление источника?

12.88. КПД аккумулятора с одним подключенным резистором равен 60%. Если этот резистор заменить другим, КПД аккумулятора станет равным 80%. Каким будет КПД аккумулятора, если оба резистора соединить с аккумулятором последовательно? параллельно?

12.89. При зарядке аккумулятора была затрачена энергия 0,8 кВт · ч. При разрядке на резистор сопротивлением 8 Ом ЭДС аккумулятора равномерно убывала с 22 до 18 В в течение 10 ч. Вычислите полезную емкость аккумулятора и его КПД. Внутренним сопротивлением аккумулятора пренебречь.

12.90. При замыкании на проводник сопротивлением 5 Ом сила тока, создаваемого батареей элементов, равна 1 А. Сила тока короткого замыкания батареи равна 6 А. Какую наибольшую полезную мощность может дать батарея?

12.91. Нагреватель кипятильника состоит из четырех секций, каждая из которых имеет сопротивление 1 Ом. Нагреватель питается от батареи с ЭДС 8 В и внутренним сопротивлением 1 Ом. Как нужно соединить секции нагревателя, чтобы вода в кипятильнике нагрелась как можно скорее? Каковы при этом полная мощность, расходуемая аккумулятором, и его КПД?

12.92. Сколько витков никелиновой проволоки надо намотать на фарфоровый цилиндр диаметром 1,5 см, чтобы сделать кипятильник, в котором за 10 мин закипает 1,2 л воды, взятой при начальной температуре 10°С? КПД установки 60%, диаметр проволоки 0,2 мм, напряжение на ней 100 В. Удельное сопротивление никелина $4{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом·м.

12.93. На изготовление кипятильника израсходована нихромовая проволока объемом $V = 10$ см^3. Сколько воды можно нагревать ежеминутно этим кипятильником от 10 до 100°С при плотности тока в кипятильнике $j = 3$ А/мм^2? КПД кипятильника $\eta = 70\%$. Удельное сопротивление нихрома $\varrho = 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

12.94. Электрический чайник с 0,6 л воды при 10 °С включили и забыли выключить. Через сколько времени после включения вся вода в чайнике выкипит? Сопротивление обмотки чайника 14,4 Ом, напряжение в сети 120 В, КПД чайника 60%.

12.95. Электрическая плитка включена в цепь генератора с ЭДС 110 В и внутренним сопротивлением 4 Ом. Амперметр, включенный последовательно с плиткой, показывает силу тока 2,5 А. Чему равен КПД плитки, если 1 л воды можно вскипятить за 0,5 ч? Начальная температура воды 4 °С.

12.96. Аккумулятор с ЭДС $\mathcal{E} = 2{,}2$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}1$ Ом замкнут медной проволокой, масса которой равна $m = 30{,}3$ г. Сопротивление проволоки подобрано так, что во внешней цепи выделяется наибольшая мощность. На сколько нагревается проволока в течение времени $t = 5$ мин? Удельная теплоемкость меди равна $c = 378$ Дж/(кг·К).

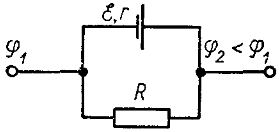

Рис. 12.36

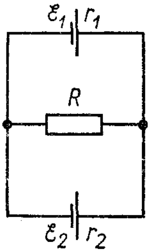

Рис 12.37

12.97. Батарея с ЭДС 4 В и внутренним сопротивлением 1 Ом входит в состав неизвестной цепи. К полюсам батареи присоединен вольтметр так, что его положительная клемма подключена к отрицательному полюсу батареи. Вольтметр при этом показывает напряжение 2 В. Какое количество теплоты выделяется во внутреннем сопротивлении батареи за 1/с? Решите задачу при условии, что положительная клемма вольтметра подключена к положительному полюсу батареи.

12.98. Какая мощность выделяется на участке цепи, показанном на рисунке 12.36?

12.99. При каком значении сопротивления R (рис. 12.37) выделяемая на резисторе мощность будет максимальной? Чему она равна?

12.100. Нагреватель в электрическом чайнике состоит из двух одинаковых секций. При включении одной секции вода закипает через 25 мин. Через сколько времени закипит вода, если обе секции включить последовательно? параллельно?

12.101. Электрическая кастрюля и чайник, потребляющие мощность $P_1 = 600$ Вт и $P_2 = 300$ Вт, включены в сеть параллельно, и вода в них закипает одновременно через $t = 20$ мин. Через сколько времени закипит вода в кастрюле и чайнике, если их включить в цепь последовательно?

12.102. Чему равно сопротивление подводящих проводов от генератора с напряжением 120 В, если при коротком замыкании предохранитель из свинцовой проволоки сечением 1 мм^2 и длиной 2 см плавится за 0,03 с? Удельная теплота плавления и удельное сопротивление свинца равны соответственно $2{,}52 \cdot 10^4$ Дж/кг и $2{,}1 \cdot 10^{-7}$ Ом·м.

12.103. При напряжении в сети $U_1 = 120$ В вода в электрическом чайнике закипает через $t_1 = 20$ мин, при напряжении $U_2 = 110$ В — через $t_2 = 28$ мин. Через сколько времени закипит вода, если напряжение в сети упадет до $U_3 = 100$ В? Потери энергии от чайника в окружающее пространство пропорциональны времени нагревания, начальная температура и масса воды во всех случаях одинаковы.

12.104. Электрическая печь имеет две обмотки, сопротивления которых отличаются друг от друга в n раз. При параллельном включении обмоток печь нагревается на ΔT выше комнатной температуры. Полагая, что теплоотдача прямо пропорциональна разности температур печи и окружающей среды, определите, на сколько нагревается печь при последовательном соединении секций и неизменном напряжении.

12.105. Для нормального накала нити электрической лампы необходимо напряжение U. На сколько нужно изменить напряжение, чтобы при уменьшении диаметра нити на $z\% \ll 110\%$ температура нити осталась прежней?

12.106. При силе тока 1,4 А проволока нагрелась на 55 °С, при силе тока 2,8 А — до 160 °С. До какой температуры нагреется проволока, если силу тока увеличить еще в два раза? Теплоотдача пропорциональна разности температур проволоки и окружающего воздуха, температура воздуха не меняется, изменением сопротивления проволоки вследствие нагревания пренебречь.

12.107. Генератор с ЭДС, равной U, заряжает аккумулятор с начальной ЭДС, равной $\mathscr{E}$. Чему равна полезная мощность, расходуемая на зарядку аккумулятора? Какая мощность расходуется на нагревание аккумулятора? Внутреннее сопротивление аккумулятора r, внутренним сопротивлением генератора пренебречь.

12.108. Один конец провода трамвайной линии находится под постоянным напряжением U. На каком расстоянии от этого конца линии находится трамвай, снабженный двумя одинаковыми двигателями, и с какой скоростью он движется, если при последовательном включении двигателей сила тока в линии равна I_1, при параллельном — I_2 и скорость трамвая при таком переключении не меняется? Сила трения между колесами трамвая и рельсами F, сопротивление единицы длины провода ϱ, полное сопротивление обмотки каждого из двигателей R.

12.109. Два плоских конденсатора, обкладки которых имеют размер 25×25 см и расстояние между которыми 1,8 мм, соединены между собой проводниками сопротивлением 54 Ом. В конденсаторы вставлены пластины из диэлектрика с проницаемостью, равной 5. Пластины выдвигаются из конденсатора с постоянной скоростью за 5 с, один раз одновременно, второй — поочередно. На сколько будут отличаться совершенные при этом механические работы, если начальная разность потенциалов на пластинах конденсаторов равнялась 500 В? Колебание тока в цепи не учитывать.

12.110. Какую ЭДС развивает генератор постоянного тока, если при сопротивлении цепи $R_1 = 300$ Ом на вращение ротора затрачивается мощность $P_1 = 50$ Вт? Потери мощности на трение составляют 4%. Какую мощность для поддержания того же числа оборотов необходимо затратить при сопротивлении цепи $R_2 = 60$ Ом?

12.111. Электромотор питается от источника с ЭДС 24 В. При силе тока в цепи 8 А мощность на валу мотора составляет 96 Вт. Чему будет равна сила тока в цепи, если затормозить якорь?

12.112. Какую максимальную мощность может развивать электромотор, включенный в сеть постоянного тока напряжением 120 В, если полное сопротивление цепи равно 20 Ом? Какая сила тока будет при этом в цепи?

12.113. Если электропоезд идет по горизонтальному участку пути с некоторой скоростью, то двигатели работают при силе тока I_0. При подъеме поезда вверх по небольшому уклону двигатели работают при силе тока I_1. Чему равен КПД двигателей, если при спуске с этого уклона с выключенными двигателями электропоезд идет с той же скоростью, что и при подъеме?

12.114. На горизонтальный вал мотора радиусом r равномерно наматывается нитка с грузом массой M на конце. Мотор питается от источника постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E}$, полное сопротивление цепи равно R, сила тока в цепи I. Чему равна скорость вращения вала мотора?

12.115. Требуется покрыть электролитическим способом металлическое изделие слоем серебра толщиной 20 мкм. Сколько времени потребуется для этого, если площадь поверхности изделия $2 \cdot 10^{-2}$ м^2, а сила тока равна 0,5 А? Плотность серебра $1{,}05 \cdot 10^4$ кг/м^3; электрохимический эквивалент — $1{,}118 \times 10^{-6}$ кг/Кл.

12.116. Алюминий получают из расплавленного криолита при силе тока $2 \cdot 10^4$ А и разности потенциалов на электродах 5 В. Через сколько времени будет выделена 1 т алюминия и сколько электрической энергии будет при этом израсходовано? Электрохимический эквивалент алюминия равен $9{,}3 \cdot 10^{-8}$ кг/Кл.

12.117. При какой плотности тока в растворе нитрата серебра толщина отложившегося слоя серебра растет со скоростью 1 мм/ч?

12.118. За какое время при силе тока 1 А разложится 1 г воды?

12.119. Минимальное напряжение на электродах, при котором может происходить электролиз воды, равно 1,47 В. Какая энергия выделяется при взрыве гремучего газа на каждый грамм прореагировавшего водорода?

12.120. Сколько молей и сколько атомов железа и хлора отложится в ванне с раствором хлорида железа при прохождении через электролит тока 1 А в течение 1 ч? Валентность железа 2, хлора 1.

12.121. Батарея из 12 элементов с ЭДС 1,85 В и внутренним сопротивлением 0,3 Ом каждый, соединенных последовательно, подключена к электродам ванн с нитратом серебра и хлоридом золота. Ванны соединены между собой последовательно и имеют сопротивления 12 и 18 Ом соответственно. Сколько золота и серебра выделится на катодах в течение 1 ч? Как изменится ответ, если ванны включить параллельно? Относительные атомные массы золота и серебра равны соответственно 197 и 108, их валентность 3 и 1.

12.122. При электролизе воды через ванну прошел заряд 5000 Кл. Какова температура выделившегося кислорода, если он занимает объем $2{,}5 \cdot 10^{-4}$ м^3 при давлении 127 кПа?

12.123. Сколько времени нужно производить электролиз подкисленной воды, чтобы полученным водородом наполнить при нормальных условиях воздушный шар с подъемной силой 1,96 кН? Сила тока при электролизе равна $I = 100$ А. Относительную молекулярную массу воздуха принять равной 29, массой оболочки пренебречь.

12.124. При какой силе тока из подкисленной воды выделится гремучий газ, занимающий объем $V = 1{,}73 \cdot 10^{-3}$ м^3 при температуре $T = 294$ К и давлении $p = 105$ кПа, если время работы установки $\tau = 30$ мин?

Глава 13

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1 При движении электрических зарядов в пространстве, окружающем эти заряды, возникает магнитное поле.

Опытом установлено (закон Ампера), что на прямой проводник с током, помещенный в однородное магнитное поле, действует распределенная по проводнику сила, модуль которой равен:

$$F = IlB\sin\alpha, \tag{13.1}$$

где I — сила тока в проводнике; l — длина проводника; B — модуль вектора индукции магнитного поля; α — угол между направлением индукции магнитного поля и проводником.

Вектор $\vec{F}$ всегда перпендикулярен плоскости, в которой лежат проводник и вектор $\vec{B}$.

Связь между направлениями вектора силы, тока и вектора индукции устанавливается правилом левой руки.

Согласно формуле (13.1) $\vec{B}$ — это физическая величина, численно равная максимальной силе, с которой магнитное поле может действовать на проводник единичной длины с током, помещенный в данную точку поля.

2. На виток с током, находящийся в однородном магнитном поле (рис. 13.1), действует вращающий момент пары сил поля, модуль которого равен $M = Fa\sin\varphi$, или с учетом выражения (13.1) для F:

$$M = ISB\sin\varphi, \tag{13.2}$$

где $S = la$ — площадь витка; φ — угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью к плоскости витка. Формула (13.2) носит общий характер и справедлива для плоской рамки любой формы.

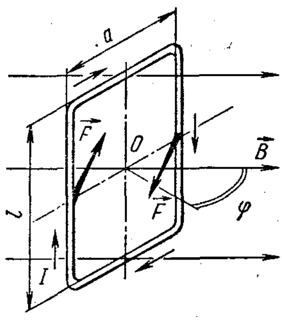

Рис. 13.1

Силовое действие магнитного поля на проводник с током вызвано действием

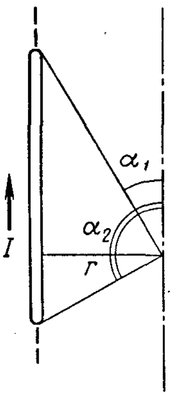

Рис. 13.2

сил поля на элементарные носители электричества, обусловливающие ток в проводнике. Если ток в проводнике вызван движением частиц, каждая из которых имеет заряд q и скорость $\vec{v}$, и в единичном объеме проводника содержится N частиц, то сила тока в проводнике равна:

$$I = \frac{Nq}{t}.$$

Подставив это выражение для силы тока в формулу (13.1), легко установить, что на каждую заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, со стороны поля действует сила (сила Лоренца), модуль которой равен:

$$F_Л = \frac{F}{N}, \quad \text{или} \quad F_Л = qvB\sin\alpha. \qquad (13.3)$$

В каждой точке траектории заряженной частицы сила Лоренца $\vec{F}_Л$ перпендикулярна векторам $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Связь между направлениями векторов $\vec{F}_Л$, $\vec{v}$ и $\vec{B}$ устанавливается правилом левой руки с учетом направления тока.

3. Если в прямом проводнике длиной l сила тока I, то в точке, удаленной от проводника на расстояние r (рис. 13.2), модуль вектора индукции магнитного поля равен:

$$B = \frac{\mu_0\mu I}{4\pi r}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2), \qquad (13.4)$$

где μ — магнитная проницаемость вещества — величина, показывающая, во сколько раз индукция магнитного поля, созданного током в данной среде, больше, чем индукция, созданная тем же током в вакууме; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{В \cdot с}{А \cdot м}$ — магнитная постоянная.

В центре кругового витка с током I модуль вектора индукции магнитного поля равен:

$$B = \frac{\mu_0\mu I}{2R}, \qquad (13.5)$$

где R — радиус витка.

Модуль вектора индукции магнитного поля в центре однослойной цилиндрической катушки (соленоида), радиус которой значительно меньше ее длины, равен:

$$B = \frac{\mu_0\mu n I}{l}. \qquad (13.6)$$

Здесь n — число витков; I — сила тока; l — длина соленоида, по которой распределена обмотка. Формулы (13.4) — (13.6) записаны в СИ.

4. Согласно соотношениям (13.1) и (13.4) на каждый элемент длиной l бесконечно длинных параллельных проводников с токами I_1 и I_2 действует сила

$$F = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l}{2\pi d}, \tag{13.7}$$

где d — расстояние между проводниками.

5. Поток вектора индукции однородного магнитного поля через плоскую поверхность площадью S равен:

$$\Phi = BS \cos \alpha, \tag{13.8}$$

где α — угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью к поверхности.

Магнитный поток, связанный с катушкой поперечного сечения S, имеющей n витков (поток сцепления), равен:

$$\Phi_c = n\Phi. \tag{13.8$'$}$$

6. При движении проводника (или контура) с током I в однородном магнитном поле силы поля совершают над проводником (контуром) работу

$$A = I\Phi, \tag{13.9}$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий поверхность, описанную проводником при плоскопараллельном перемещении (изменение магнитного потока через контур). Формула (13.9) вытекает из определения работы постоянной силы и закона Ампера (13.1) с учетом формулы (13.8).

7. При изменении магнитного потока, пронизывающего контур, в контуре возникает ЭДС индукции (наведенная ЭДС), модуль которой пропорционален скорости изменения магнитного потока (основной закон электромагнитной индукции):

$$\mathcal{E} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad \text{или} \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{13.10}$$

Возникновение ЭДС индукции в замкнутом контуре приводит к появлению индукционного тока. Согласно закону Ленца индукционный ток имеет такое направление, при котором создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшему индукционный ток. Математически это учтено знаком «минус» в формуле (13.10).

Из уравнения (13.10) следует:

1) При изменении магнитного потока, пронизывающего катушку, состоящую из n витков, в катушке возникает ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \tag{13.10$'$}$$

так как все витки соединены между собой последовательно.

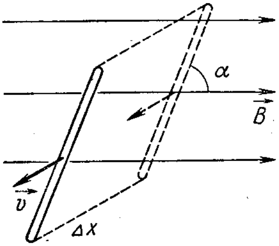

Рис. 13.3

2) Количество электричества, индуцированного в контуре сопротивлением R при изменении магнитного потока на $\Delta\Phi$, равно:

$$\Delta q = \frac{\Delta\Phi}{R}, \qquad (13.10'')$$

поскольку $\mathscr{E} = IR$ и $I\Delta t = \Delta q$.

3) Если при равномерном движении проводника длиной l в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ проводник перемещается на расстояние Δx за время Δt (рис. 13.3), то он описывает поверхность, через которую проходит магнитный поток, равный

$$\Delta\Phi = l\Delta x B \sin\alpha.$$

Подставляя это выражение в формулу закона электромагнитной индукции и учитывая, что $\Delta x/\Delta t = v$ — скорость движения проводника в направлении, перпендикулярном $\vec{B}$, для ЭДС, возникающей на концах проводника, получим:

$$\mathscr{E} = lvB\sin\alpha. \qquad (13.11)$$

Направление индукционного тока (а следовательно, и полярность возникающей ЭДС) определяют по правилу правой руки.

8. Явление возникновения ЭДС индукции в контуре при изменении магнитного потока, создаваемого током самого контура, называют самоиндукцией. При неизменной конфигурации контура сцепленный с контуром магнитный поток пропорционален току в контуре:

$$\Phi_c = LI, \qquad (13.12)$$

где L — индуктивность контура.

Как показывают формулы (13.6), (13.7) и (13.12), индуктивность длинного соленоида малого диаметра равна:

$$L = \frac{\mu_0\mu n^2 S}{l} = \mu_0\mu w^2 lS, \qquad (13.13)$$

где $w = \frac{n}{l}$ — число витков, приходящихся на единицу длины катушки; l — ее длина; S — площадь поперечного сечения; μ — магнитная проницаемость материала сердечника соленоида.

Если в процессе изменения силы тока контур не деформируется и магнитная проницаемость сердечника остается постоянной, ЭДС самоиндукции согласно формулам (13.10) и (13.12) равна:

$$\mathscr{E}_c = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta(LI)}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \qquad (13.14)$$

9. При равномерном вращении плоской рамки в однородном магнитном поле магнитный поток, пронизывающий рамку, изменяется с течением времени по закону $\Phi = nSB\cos\omega t$, где n — число витков; S — площадь рамки; B — модуль вектора индукции магнитного поля; ω — угловая скорость вращения рамки. За время Δt магнитный поток изменяется на величину

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = nSB[\cos\omega(t + \Delta t) - \cos\omega t].$$

Если Δt очень мало, то $\cos\omega(t + \Delta t) - \cos\omega t = (\omega\sin\omega t)\Delta t$, поскольку в этом случае можно считать, что

$$\cos(\omega\Delta t) \approx 1 \quad \text{и} \quad \sin(\omega\Delta t) \approx \omega\Delta t.$$

Учитывая это, для изменения магнитного потока получим:

$$\Delta\Phi = nSB\omega(\sin\omega t)\Delta t.$$

Согласно (13.10) ЭДС индукции, возбуждаемая в рамке при ее равномерном вращении в магнитном поле, изменяется с течением времени по закону

$$\mathcal{E} = nSB\omega\sin\omega t, \tag{13.15}$$

или

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m\sin\omega t,$$

где

$$\mathcal{E}_m = nSB\omega \text{ —} \tag{13.15'}$$

максимальное (амплитудное) значение электродвижущей силы.

Этот же результат можно получить иначе, дифференцируя исходное выражение для магнитного потока по времени, поскольку $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$.

10. Для преобразования механической энергии в электрическую применяются электрические машины — генераторы. В соответствии с законом сохранения и превращения энергии при работе генератора

$$N = P_{эл}, \quad \text{или} \quad N = I\mathcal{E}, \tag{13.16}$$

где $\mathcal{E}$ — ЭДС генератора; I — сила тока в цепи якоря.

Для генератора с постоянными магнитами значение $\mathcal{E}$ определяется формулой (13.15). Напряжение U на зажимах генератора равно $U = \mathcal{E} - IR$, где R — сопротивление якоря.

Для преобразования электрической энергии в механическую служат электрические машины — электродвигатели.

При работе электродвигателя электрическая мощность, развиваемая источником питания, расходуется частично на нагревание цепи, частично на вращение якоря. Если ЭДС источника питания U, сила тока в цепи I, сопротивление цепи R, то

$$IU = I^2R + N, \tag{13.17}$$

где N — механическая мощность, развиваемая двигателем. Эта мощность в свою очередь равна $N = M\omega = I\mathcal{E}$, где M — вращающий момент на валу мотора; ω — угловая скорость вращения якоря.

ЭДС индукции $\mathcal{E}$, возникающая в обмотке якоря, равна:

$$\mathcal{E} = U - IR. \qquad (13.18)$$

В случае работы шунтового двигателя под R в формулах (13.17) и (13.18) подразумевают сопротивление якоря, при работе сериесного — сопротивление всей цепи двигателя.

11. Если ЭДС в цепи меняется с течением времени по закону синуса (или косинуса), то при отсутствии в цепи емкости или индуктивности напряжение в цепи $U_R = \mathcal{E}$ и по тому же закону изменяется сила тока:

$$I = U_R/R = \mathcal{E}_m(\sin\omega t)/R = I_m \sin\omega t.$$

Сопротивление R электрической цепи, не имеющей емкости и индуктивности, называют активным сопротивлением.

Сопротивление R_C участка цепи, содержащего конденсатор, называют емкостным сопротивлением.

$$R_C = \frac{\mathcal{E}_m}{I_m} = \frac{1}{\omega C}. \qquad (13.19)$$

Сопротивление участка, содержащего индуктивность (индуктивное сопротивление), равно:

$$R_L = \omega L. \qquad (13.20)$$

Если три участка цепи, имеющие соответственно активное R, индуктивное R_L и емкостное R_C сопротивления, соединить последовательно, то полное сопротивление цепи переменному току будет равно:

$$Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \qquad (13.21)$$

Амплитудное значение силы тока в цепи равно:

$$I_m = \mathcal{E}_m/Z.$$

Сдвиг фаз между ЭДС и током определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\Big/R. \qquad (13.22)$$

12. При последовательном соединении резистора, конденсатора и катушки индуктивности среднее за период значение мощности, развиваемой источником переменного синусоидального тока, равно:

$$P = 0{,}5 I_m \mathcal{E}_m \cos\varphi. \qquad (13.23)$$

Согласно этой формуле на катушке индуктивности и конденсаторе мощность не выделяется, поскольку для них $\varphi = \pm\pi/2$.

Мощность, выделяемая на активном сопротивлении и, следовательно, во всей внешней цепи, равна:

$$P = 0{,}5 I_m U_m = 0{,}5 I_m^2 R, \qquad (13.24)$$

где U_m — амплитуда напряжения на резисторе.

Силу постоянного тока, при которой в цепи с активным сопротивлением выделяется та же мощность, что и при переменном токе, называют действующим значением данного переменного тока. Значение постоянного напряжения, соответствующего действующему значению тока, называют действующим значением напряжения. В случае синусоидального тока

$$I_{\text{д}} = I_m / \sqrt{2}, \; U_{\text{д}} = U_m / \sqrt{2}. \qquad (13.25)$$

13. Коэффициент трансформации равен:

$$k = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\mathscr{E}_1}{\mathscr{E}_2},$$

где n_1 — число витков в первичной обмотке трансформатора; n_2 — во вторичной; $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ — ЭДС самоиндукции и индукции, возникающие соответственно в первичной и вторичной обмотках.

Если падение напряжения в первичной цепи трансформатора ничтожно мало по сравнению с напряжением U_1, подаваемым на трансформатор, с достаточной степенью точности можно считать, что $\mathscr{E}_1 = U_1$. При этом же условии для вторичной цепи $\mathscr{E}_2 = U_2$ и, следовательно,

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{U_1}{U_2}. \qquad (13.26)$$

При большой силе тока во вторичной цепи падением напряжения на вторичной обмотке пренебречь нельзя. В этом случае $\mathscr{E}_2 = U_2 + I_2 r_2$ и

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{U_1}{U_2 + I_2 r_2},$$

где I_2 — сила тока во вторичной цепи; r_2 — ее сопротивление.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Расчетные задачи по элементарному курсу электромагнетизма можно разделить на три основные группы: а) задачи о силовом действии однородного магнитного поля на проводники с током и заряженные частицы; б) задачи на закон электромагнитной индукции и в) задачи на закон сохранения и превращения энергии в применении к процессам, протекающим при работе электрических машин. Многие из этих задач не требуют применения высшей математики и решаются сравнительно просто.

2. Задачи расчетного характера о силах, действующих на про-

водники с током в однородном магнитном поле, удобно решать по следующей схеме:

а) Сделать схематический чертеж, на котором указать контур с током и направление линий магнитной индукции поля. Отметить углы между направлением вектора индукции и отдельными элементами контура, если последний состоит из нескольких прямых проводников.

б) Используя правило левой руки, определить направление сил, действующих со стороны поля на каждый элемент контура, и проставить векторы этих сил на чертеже.

в) В простейших случаях задача состоит в том, чтобы найти одну из величин, входящих в выражение для сил, действующих на отдельные проводники контура, или вращающих моментов, создаваемых этими силами, зная остальные величины. Дальнейшее решение сводится к тому, чтобы записать уравнение (13.1) или (13.2) и выразить из него искомую величину через заданные.

Если в задаче рассматривают равновесие проводника или контура с током в магнитном поле, то, помимо силы Ампера, нужно указать и все остальные силы, приложенные к проводнику, и записать условие его равновесия $\Sigma \vec{F} = 0$ (или $\Sigma M = 0$ — для рамки с током). Затем с помощью формул (13.1) и (13.2) следует расшифровать значение сил (моментов), входящих в уравнение равновесия, поставить в него вместо F (M) их выражения. В результате получается окончательное уравнение для определения искомой величины.

3. Особое место в задачах первой группы занимают задачи о движении заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. Их решение в большинстве случаев основано на составлении основного уравнения динамики материальной точки с учетом сил, действующих на заряженную частицу со стороны магнитного и электрического полей.

Схема решения этих задач во многом сходна с предыдущей.

а) Нужно сделать чертеж, указать на нем линии индукции магнитного поля и линии напряженности электрического поля, проставить вектор начальной скорости частицы и отметить знак ее заряда.

б) Если скорость частицы направлена под углом к линии индукции магнитного поля, ее следует спроецировать на две оси, одна из которых должна быть направлена перпендикулярно вектору $\vec{B}$, вторая — параллельно ему.

в) Изобразить силы, действующие на заряженную частицу. Обычно во всех задачах, где нет специальных оговорок, действие силы тяжести на элементарные частицы не учитывают, поскольку эта сила ничтожно мала по сравнению с силами электромагнитного поля. При нахождении направления силы Лоренца следует обратить особое внимание на знак заряда частицы, так как в одном случае нужно воспользоваться правилом левой руки, в другом — правой. Очень удобно силу Лоренца определять по направлению тока и пользоваться только правилом левой руки. Если происходит движение положительно заряженных частиц, направление тока совпадает с направлением их скорости, если движутся отрицательные частицы, ток идет в сторону, противоположную их движению.

г) Указав силы, нужно попытаться определить вид траектории частицы. Иногда это удается сделать сравнительно просто, иногда нахождение вида траектории представляет основное содержание задачи.

Силы, действующие на заряженную частицу, следует спроецировать на оси, направленные вдоль линий индукции магнитного поля и перпендикулярно им. Затем необходимо составить основное уравнение динамики материальной точки для проекций на каждую ось.

Записав уравнения динамики, нужно подставить в них выражения сил, используя для этого формулы электростатики и формулу силы Лоренца. В большинстве задач после такой подстановки получаются уравнения, из которых искомую величину определяют непосредственно, в ряде случаев к уравнениям динамики приходится добавлять формулы кинематики.

4. Решая задачи на закон электромагнитной индукции, удобно пользоваться следующими рекомендациями.

а) Анализируя условие задачи, необходимо прежде всего установить причины изменения магнитного потока, связанного с контуром, и определить, какая из величин B, S или α, входящих в выражение для Φ, изменяется с течением времени. После этого нужно записать основное расчетное соотношение (13.10) или (13.10′). Если в задаче рассматривается поступательное движение прямого проводника, то ЭДС индукции определяют по формуле (13.11), вытекающей из закона электромагнитной индукции.

б) Затем выражение для Φ надо представить в развернутом виде. Для этого выбирают два момента времени t_1 и t_2 и для каждого из них определяют потоки Φ_1 и Φ_2, связанные с данным контуром. Изменение магнитного потока за время $\Delta t = t_2 - t_1$ в зависимости от условия задачи будет равно или $\Delta\Phi = (B_2 - B_1)\, S \cos\alpha$, если изменяется индукция магнитного поля, в котором находится контур, или $\Delta\Phi = BS\ (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$, если изменяется положение рамки в поле, или, наконец, $\Delta\Phi = B\Delta S\cos\alpha$, где ΔS — изменение площади контура, описанного в пространстве движущимся проводником.

в) Далее надо подставить выражение для $\Delta\Phi$ в исходную формулу закона электромагнитной индукции и, записав дополнительные условия, решить полученные уравнения совместно относительно искомой величины. Наибольшие затруднения возникают обычно при расчете электрических цепей, содержащих аккумуляторы, когда на одном из участков цепи возникает ЭДС индукции, вызванная движением проводника в магнитном поле. Решение таких задач нужно начинать с определения полярности и модуля этой ЭДС индукции, после чего задача сведется к расчету обычной цепи постоянного тока с несколькими источниками ЭДС, соединенными между собой последовательно или параллельно.

5. Решение задач о работе электрических машин постоянного тока основано на составлении уравнения закона сохранения и превращения энергии. В простейших случаях его достаточно для нахождения искомой величины; в более сложных задачах к уравнению энергетического баланса необходимо добавить вспомогательные уравнения, позволяющие представить в развернутом виде ту или иную величину, входящую в основное уравнение. Обычно для этого нужно использовать формулы (13.16), (13.17) и (13.18).

Пример 1. Контур в виде квадрата с диагональю, изготовленный из медной проволоки сечением $S = 1$ мм^2, подключен к источнику постоянного напряжения $U = 110$ В (рис. 13.4). Плоскость квадрата расположена параллельно линиям индукции магнитного поля; $B = 1{,}7 \cdot 10^{-2}$ Тл. Определите модуль и направление силы, действующей на контур со стороны поля. Удельное сопротивление меди $\varrho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м.

Решение. Чтобы найти силу, действующую со стороны магнитного поля на контур с током, нужно найти модуль и направление сил, действующих на отдельные элементы контура, и затем их сложить. По расположению элементов контура относительно поля в контуре можно выделить пять прямолинейных проводников ab, bc, ad, cd и ac. По этим проводникам протекают токи I_1 и I_2, значение которых можно определить из закона Ома для участка цепи. Так как напряжение подводится к точкам a и c, длина стороны квадрата равна l, площадь сечения проволоки и ее удельное сопротивление равны соответственно S и ϱ, то

$$I_1 = \frac{U}{R_{abc}} = \frac{US}{2\varrho l}; \quad I_2 = \frac{US}{\varrho l\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

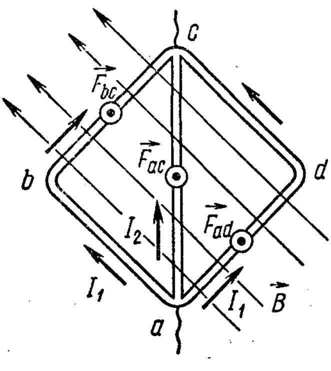

Рис. 13.4

Проводники ab и cd расположены параллельно линиям индукции, поэтому согласно закону Ампера $F_{ab} = 0$ и $F_{cd} = 0$, так как здесь $\sin\alpha = 0$. Проводники bc и ad перпендикулярны вектору B ($\alpha = 90°$ и $\sin\alpha = 1$), и на них действуют элементарные параллельные силы, равномерно распределенные по проводу, модуль равнодействующей этих сил

$$F_{bc} = F_{ad} = I_1 l B. \qquad (2)$$

Приложены эти силы в середине проводников и направлены перпендикулярно плоскости чертежа (к нам).

Проводник ac составляет с вектором индукции $\vec{B}$ угол $\alpha = 45°$, его длина $l\sqrt{2}$, следовательно, со стороны поля на него действует сила

$$F_{ac} = I_2 l \sqrt{2}\, B \sin 45°. \quad (3)$$

Направлена эта сила в ту же сторону, что и силы $\vec{F}_{bc}$ и $\vec{F}_{ad}$. Модуль результирующей трех параллельных сил равен:

$$F = 2F_{bc} + F_{ac} = 2(I_1 + I_2) lB, \quad (4)$$

точка ее приложения совпадает с центром контура.

Решая уравнения (1) — (4) относительно F, получим:

$$F = \frac{(2+\sqrt{2})\,USB}{2\varrho}; \quad F \approx 190 \text{ Н}.$$

Пример 2. Плоская рамка, состоящая из $n = 50$ витков тонкой проволоки, подвешена на бронзовой ленточке между полюсами электромагнита. При силе тока в рамке $I = 1$ А рамка повернулась на угол $\alpha_1 = 15°$. Определите модуль вектора индукции магнитного поля в том месте, где находится рамка, если известно, что при закручивании ленточки на угол $\varphi_0 = 1°$ возникает момент сил упругости $M_0 = 9{,}8 \cdot 10^{-6}$ Н · м. При отсутствии тока плоскость рамки составляла с направлением поля угол $\alpha_0 = 30°$, площадь рамки $S = 10$ см^2.

Решение. На рамку с током, подвешенную в магнитном поле, действуют два вращающих момента: момент M_1, созданный силами поля, и противодействующий ему момент сил упругости M_2, вызванный закручиванием упругого подвеса, на котором находится рамка. При равновесии рамки должно быть

$$M_1 = M_2. \quad (1)$$

Если по рамке проходит ток I, площадь рамки S, число витков n и при равновесии нормаль к плоскости рамки составляет угол α с вектором индукции $\vec{B}$, то

$$M_1 = nISB \sin\alpha. \quad (2)$$

По условию задачи момент сил упругости пропорционален углу закручивания подвеса:

$$M_2 = k\varphi,$$

где k — постоянный коэффициент, зависящий от геометрических размеров (формы, сечения) и материала подвеса. В данной задаче он определяется из условия, что при угле закручивания φ_0 возникает момент M_0, т. е. $M_0 = k\varphi_0$, и, стало быть,

$$M_2 = \frac{M_0}{\varphi_0}\varphi. \quad (3)$$

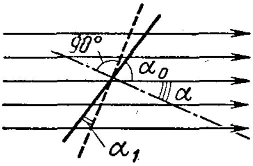

Рис. 13.5

В свободном состоянии рамки, до включения тока, плоскость рамки составляла с направлением линий индукции поля угол α_0 (рис. 13.5). Поэтому при переходе во второе равновесное положение рамка повернется на угол

$$\varphi = \alpha_1. \qquad (4)$$

На такой же угол закрутится нить, и нормаль к рамке будет составлять с направлением вектора $\vec{B}$ угол

$$\alpha = 90° - (\alpha_0 + \alpha_1). \qquad (5)$$

С учетом формул (2) — (5) уравнение равновесия (1) можно представить в окончательном виде так:

$$\frac{M_0}{\varphi_0}\alpha_1 = nISB\cos(\alpha_0 + \alpha_1).$$

Найдя отсюда модуль вектора индукции магнитного поля и подставив числовые значения, получим:

$$B = \frac{M_0\alpha_1}{nIS\varphi_0\cos(\alpha_0 + \alpha_1)}; \quad B \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}.$$

Пример 3. Электрон, прошедший ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ кВ, влетает в вакууме в однородное магнитное поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл перпендикулярно линиям индукции. Определите радиус окружности, описываемой электроном в поле. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-9}$ Кл, его масса $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг.

Решение. Заряженная частица, влетающая в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции, под действием силы Лоренца (всегда перпендикулярной вектору скорости) приобретает нормальное ускорение и начинает описывать окружность в плоскости, перпендикулярной направлению линий индукции поля.

Если в магнитное поле, линии индукции которого перпендикулярны плоскости чертежа (от нас), влетает электрон со скоростью $\vec{v}$ (рис. 13.6), то на него будет действовать сила $\vec{F}_л$, направление которой определяется правилом левой руки с учетом направления тока. Согласно формуле (13.3) модуль этой силы равен:

$$F_л = evB \qquad (1)$$

($\sin\alpha = 1$, так как $\vec{v} \perp \vec{B}$). При $\vec{B} = \text{const}$ модуль силы Лоренца будет оставаться постоянным, и если пренебречь действием силы тяжести, то можно считать, что

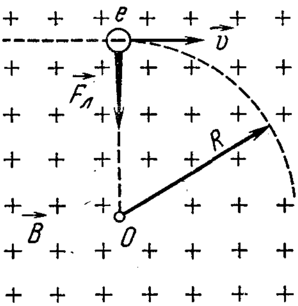

Рис. 13.6

электрон описывает окружность некоторого радиуса R. Согласно второму закону Ньютона

$$F_{Л}=\frac{mv^2}{R}. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) служат основными соотношениями при решении всех задач на движение заряженных частиц в однородном магнитном поле; записав их, следует составить вспомогательные уравнения, исходя из дополнительных условий задачи. В данном случае скорость электрона задана через ускоряющую разность потенциалов U. По закону сохранения и превращения энергии работа сил поля eU равна изменению кинетической энергии электрона. Пролетев между точками поля с разностью потенциалов U некоторое расстояние, электрон приобрел энергию

$$\frac{mv^2}{2}=eU \qquad (3)$$

(кинетической энергией в начале разгона пренебрегаем). Этим равенством условие задачи исчерпывается полностью. В системе уравнений (1) — (3) неизвестными являются R, $F_Л$ и v. Решая уравнения относительно искомого неизвестного R и подставляя числовые значения, получим:

$$R=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{m}{e}2U}; \quad R\approx 0{,}01 \text{ м}.$$

Пример 4. Протон влетает со скоростью $v=10^3$ м/с в однородное магнитное поле под углом $\alpha=60°$ к линиям индукции. Определите радиус и шаг спиральной линии, по которой будет двигаться протон, если модуль вектора индукции магнитного поля равен $B=10^{-3}$ Тл.

Р е ш е н и е. Если заряженная частица влетает в однородное магнитное поле так, что ее вектор скорости $\vec{v}$ направлен под углом α к вектору индукции $\vec{B}$ и действие всех сил, кроме силы Лоренца, ничтожно мало, частица начинает двигаться по винтовой линии. В этом нетрудно убедиться, разложив вектор скорости по направлению вектора $\vec{B}$ и направлению, ему перпендикулярному, на составляющие $\vec{v}_{\parallel}$ и $\vec{v}_{\perp}$ (рис. 13.7). Как видно из рисунка, модули составляющих равны: $v_{\parallel}=v\cos\alpha$, $v_{\perp}=v\sin\alpha$. При том направлении векторов $\vec{B}$ и $\vec{v}$, какое указано на рисунке, сила $\vec{F}_Л$ действует на протон перпендикулярно пло-

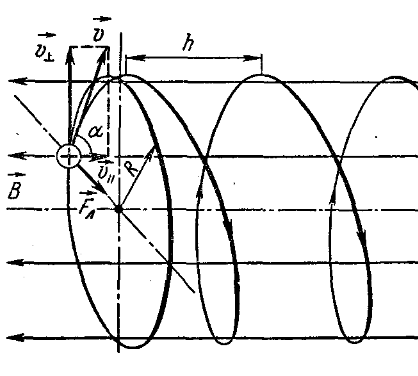

Рис. 13.7

скости чертежа (на нас) и непрерывно изменяет направление составляющей $\vec{v}_\perp$, сообщая частице в плоскости, перпендикулярной полю, нормальное ускорение $a_н$. В результате протон описывает в этой плоскости окружность некоторого радиуса R, поскольку $\vec{B} = \text{const}$ и $v_\perp = \text{const}$. Если масса и заряд протона равны соответственно m и q, то

$$F_Л = qv_\perp B = qvB \sin \alpha, \tag{1}$$

и в то же время по второму закону Ньютона

$$F_Л = \frac{mv_\perp^2}{R} = \frac{mv^2 \sin^2 \alpha}{R}. \tag{2}$$

Вдоль линий индукции поля на протон никакие силы не действуют, следовательно, в этом направлении он движется прямолинейно с неизменной скоростью $v \cos \alpha$. В результате наложения прямолинейного движения на круговое протон описывает в пространстве винтовую линию. Шаг этой линии — расстояние, на которое смещается частица вдоль поля за один оборот,— равен:

$$h = v_\parallel T = v \cos \alpha T, \tag{3}$$

где T — период обращения протона по кругу радиусом R. Этот период равен:

$$T = \frac{2\pi R}{v_\perp} = \frac{2\pi R}{v \sin \alpha}. \tag{4}$$

В уравнениях (1) — (4) неизвестными являются $F_Л$, R, h и T. Решая уравнения относительно искомых неизвестных R и h и подставляя числовые значения, получим:

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{qB}; \quad R \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad h = \frac{2\pi mv \cos \alpha}{qB}; \quad h \approx 3{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Пример 5. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 6 \cdot 10^{-2}$ Тл находится соленоид диаметром $d = 8$ см, имеющий $n = 80$ витков медной проволоки сечением $\sigma = 1$ мм^2. Соленоид поворачивают на угол $\alpha = 180°$ за время $\Delta t = 0{,}2$ с так, что его ось остается направленной вдоль линий индукции поля. Определите среднее значение электродвижущей силы, возникающей в соленоиде, и индукционный заряд, прошедший по соленоиду. Удельное сопротивление меди $\varrho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Решение. Изменить магнитный поток, пронизывающий контур, и возбудить в нем ЭДС индукции можно различными способами. Наиболее просто это сделать, повернув контур в магнитном поле так, чтобы изменился угол между нормалью к плоскости контура и направлением вектора $\vec{B}$. Этот случай и имеет место в данной задаче.

При изменении магнитного потока, пронизывающего соленоид, состоящий из n витков, на $\Delta\Phi$ за время Δt, в нем индуцируется ЭДС

$$\mathcal{E} = -n\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Если в исходном положении катушка была расположена так, что ось ее составляла с направлением поля угол α_1, то при повороте оси на угол α_2 магнитный поток, пронизывающий соленоид, изменится на величину

$$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = BS\cos(\alpha_1 + \alpha_2) - BS\cos\alpha_1,$$

где S — площадь поперечного сечения соленоида. По условию задачи ось катушки в исходном положении совпадала с направлением вектора $\vec{B}$ $(\alpha_1 = 0)$, а угол поворота $\alpha_2 = 180°$. Изменение магнитного потока в этом случае максимальное и равное

$$\Delta\Phi = -2BS. \qquad (2)$$

Подставляя выражение (2) в формулу (1) и учитывая, что сечение соленоида $S = \frac{\pi d^2}{4}$, получим ответ на первый вопрос задачи:

$$\mathcal{E} = \frac{\pi d^2 nB}{2\Delta t}; \quad \mathcal{E} \approx 0{,}24 \text{ В}.$$

Согласно формуле (13.10″) при изменении магнитного потока на $\Delta\Phi$ в соленоиде индуцируется заряд

$$q = n\frac{\Delta\Phi}{R}. \qquad (3)$$

Сопротивление обмотки соленоида

$$R = \frac{n\pi\varrho d}{\sigma}. \qquad (4)$$

Подставляя в формулу (3) вместо $\Delta\Phi$ и R их выражения (2) и (3), получим ответ на второй вопрос задачи:

$$q = \frac{\sigma dB}{2\varrho}; \quad q = 1{,}4 \text{ Кл}.$$

Индуцированный заряд не зависит от скорости изменения магнитного потока и количества витков в соленоиде.

Пример 6. В магнитном поле с индукцией $B = 10^{-2}$ Тл вращается стержень длиной $l = 0{,}2$ м с постоянной угловой скоростью $\omega = 100$ с$^{-1}$. Найдите ЭДС индукции, возникающую в стержне, если ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям индукции магнитного поля.

Р е ш е н и е. Появление сторонних сил внутри стержня, пересекающего линии индукции поля, и возникновение разности потенциалов на его концах вызвано действием силы Лоренца на заряды, находящиеся в проводнике. Если стержень вращается в однородном магнитном поле с постоянной угловой скоростью ω

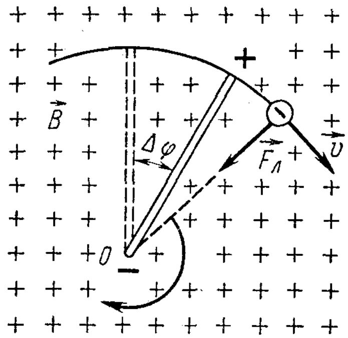

Рис. 13.8

и пересекает линии индукции под прямым углом (рис. 13.8), то под действием силы Лоренца $\vec{F}_Л$ электроны начнут смещаться вдоль стержня к одному из его концов. При том направлении поля и вращения, какое указано на рисунке, $\vec{F}_Л$ направлена к оси вращения и туда же смещаются электроны. Смещение электронов происходит до тех пор, пока напряженность электрического поля, возникающего внутри проводника, не достигнет такого значения, при котором силы электрического отталкивания уравновесят силы Лоренца.

В результате перемещения электронов на одном конце стержня оказывается их избыток, на другом — недостаток и между концами стержня возникает постоянная разность потенциалов, равная

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \tag{1}$$

где $\Delta\Phi$ — магнитный поток, проходящий через поверхность, описываемую стержнем за время Δt.

При вращении стержня под прямым углом к линиям индукции магнитного поля $\Delta\Phi = B\Delta S$, где ΔS — площадь сектора, описываемого стержнем.

За время Δt стержень поворачивается на угол $\Delta\varphi$ и площадь сектора получается равной:

$$\Delta S = \frac{\Delta\varphi l^2}{2} = \frac{\omega l^2 \Delta t}{2}, \text{ так как } \Delta\varphi = \omega\Delta t.$$

Учитывая это, для изменения магнитного потока найдем:

$$\Delta\Phi = \frac{B\omega l^2}{2}. \tag{2}$$

Из формул (1) и (2) получим:

$$\mathcal{E} = \frac{B\omega l^2}{2},$$

или, после подстановки числовых значений, $\mathcal{E} = 2 \cdot 10^{-2}$ В.

Пример 7. Две параллельные шины, подключенные к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E}_0$ и внутренним сопротивлением r, находятся в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Шины замкнуты проводником длиной l и сопротивлением R, который перемещается по шинам без нарушения контакта перпендикулярно линиям индукции поля со скоростью $\vec{v}$. Пренебрегая сопротивлением шин, определите напряжение на зажимах источника, мощность, выделяемую в проводнике, а также механическую мощность, подводимую к проводнику.

Р е ш е н и е. Допустим, что при том подключении аккумулятора к шинам и направлении магнитного поля, какое показано на рисунке 13.9, проводник перемещают равномерно слева направо. При своем движении проводник пересекает линии индукции поля и в нем возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_и$ — источник тока, включенный последовательно с аккумулятором. В зависимости от направления индукции поля и направления движения проводника $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_и$ действуют или в одну, или в противоположные стороны В первом случае ток в цепи усилится, во втором — ослабнет. В нашем примере, используя правило правой руки, нетрудно установить, что индукционный ток шел бы от b к a, уменьшая ток аккумулятора, т. е. ЭДС $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_и$ имеют противоположные знаки. Поскольку проводник ab движется перпендикулярно линиям индукции поля ($\alpha = 90°$), ЭДС индукции согласно формуле (13.11) равна:

$$\mathcal{E}_и = lvB. \qquad (1)$$

Дальнейшее решение сводится к расчету цепи постоянного тока, содержащей два последовательно включенных элемента с разными ЭДС. Пользуясь правилами такого расчета, находим общую ЭДС контура (предполагая, что $\mathcal{E}_0 > \mathcal{E}_и$)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_и, \qquad (2)$$

и силу тока в контуре

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \qquad (3)$$

Поскольку аккумулятор разряжается и ток через него идет в естественном направлении, для напряжения на его зажимах получаем:

$$U = \mathcal{E}_0 - Ir. \qquad (4)$$

Мощность, выделяемая в проводнике, равна:

$$P = I^2R. \qquad (5)$$

Так как по проводнику ab, движущемуся в магнитном поле. идет ток, то со стороны поля на него действует сила $\vec{F}_А$, направленная (согласно правилу левой руки) влево. По закону Ампера

$$F_А = IlB. \qquad (6)$$

Чтобы проводник двигался равномерно, к нему должна быть приложена сила $\vec{F}$, равная по модулю силе $\vec{F}_А$, но направленная в противоположную сторону — вправо. Механическая мощность в этом случае будет равна:

$$N = F_Аv. \qquad (7)$$

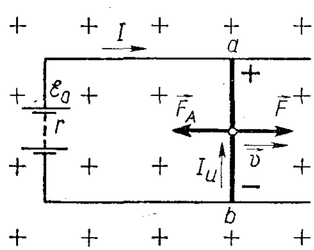

Рис 13.9

Исключая из уравнений (1) — (7) неизвестные $\mathscr{E}_и$, $\mathscr{E}$, I и F_A, получим для искомых величин окончательные выражения:

$$U = \frac{\mathscr{E}_0 R + lvBr}{R + r}; \quad P = \frac{(\mathscr{E}_0 - lvB)^2 R}{(R + r)^2}; \quad N = \frac{(\mathscr{E}_0 - lvB)\, lvB}{R + r}.$$

При решении задачи было сделано одно упрощающее допущение. Мы не учитывали действия магнитного поля, создаваемого током контура, и считали, что поле, в котором он находится, не изменяется. Такое предположение не влияет заметно на полученный результат только в том случае, если сила тока в контуре мала и индукция его магнитного поля значительно меньше индукции внешнего магнитного поля.

Пример 8. Электромотор, включенный в сеть постоянного тока с напряжением $U = 120$ В, при полном сопротивлении цепи $R = 20$ Ом, передает приводу мощность $N = 160$ Вт. Какую ЭДС разовьет этот мотор, если его использовать как генератор, вращая якорь с той же угловой скоростью, какую он имел, работая как двигатель?

Р е ш е н и е. При работе электрической машины в качестве мотора основным уравнением, связывающим параметры электрической цепи, служит уравнение закона сохранения и превращения энергии.

Если источник дает постоянное напряжение U, полное сопротивление цепи R и электромотор развивает механическую мощность N, то согласно формуле (13.17)

$$IU = I^2R + N, \tag{1}$$

где I — сила тока в цепи.

При перемещении контура с током I в магнитном поле силы поля совершают над проводником работу $A = I\Delta\Phi$.

Развиваемая при этом механическая мощность за время Δt равна $N = I\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Поскольку в контуре при изменении магнитного потока на $\Delta\Phi$ возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}_и = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, то должно быть

$$N = I\mathscr{E}_и. \tag{2}$$

ЭДС индукции в якоре пропорциональна скорости его вращения (13.15), поэтому если использовать электромашину как генератор, вращая якорь с той же угловой скоростью, что и при работе электромотора, то ЭДС генератора $\mathscr{E}$ будет равна ЭДС индукции в электромоторе:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_и. \tag{3}$$

Этим уравнением условия задачи исчерпываются полностью. Исключая из уравнений (1) — (3) неизвестные I и $\mathscr{E}_и$, получим для определения искомой величины уравнение

$$\mathscr{E}^2 - U\mathscr{E} + NR = 0,$$

из которого находим:

$$\mathscr{E} = \frac{U \pm \sqrt{U^2 - 4NR}}{2}.$$

Подставляя сюда числовые значения, будем иметь:

$$\mathscr{E}_1 = 80 \text{ В и } \mathscr{E}_2 = 40 \text{ В}.$$

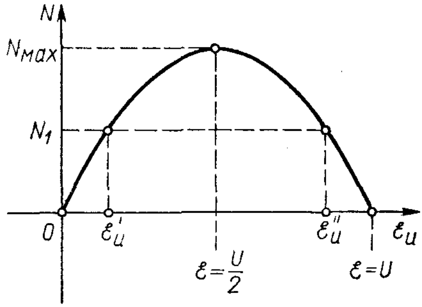

Рис. 13.10

Двузначность полученного результата объясняется следующим. Если исключить из уравнений (1) и (2) силу тока I, то после простых преобразований получается квадратное уравнение относительно ЭДС индукции якоря:

$$\mathscr{E}_и^2 - U\mathscr{E}_и + NR = 0,$$

которое при постоянных U и R можно рассматривать как зависимость механической мощности N от $\mathscr{E}_и$. Эта зависимость квадратичная, поэтому в общем случае одному значению N соответствуют два значения $\mathscr{E}_и$. График зависимости $N = f(\mathscr{E}_и)$ представлен на рисунке 13.10. Из анализа квадратного уравнения (или графика) следует, что $N = 0$, когда $\mathscr{E}_и = 0$ и $\mathscr{E}_и = U$ (и в том и в другом случае ток в цепи отсутствует).

Максимальную мощность мотор развивает при $\mathscr{E}_и = \frac{U}{2}$. Подставляя это значение $\mathscr{E}_и$ в исходное уравнение и решая его относительно N, получим:

$$N = N_{max} = \frac{\mathscr{E}_и^2}{R} = \frac{U^2}{4R}.$$

Пример 9. Сколько времени будет гореть неоновая лампочка в течение 1 мин при подключении ее в сеть переменного синусоидального тока с действующим значением напряжения $U_д = 120$ В и частотой $f = 50$ Гц, если лампочка зажигается и гаснет при напряжении $U = 84$ В?

Решение. При включении неоновой лампочки в сеть переменного тока напряжение на ее электродах меняется с течением времени по закону

$$U = U_m \sin(2\pi f t), \qquad (1)$$

где U_m — максимальное значение напряжения.

Максимальное значение синусоидального напряжения связано с действующим напряжением равенством

$$U_m = U_д \sqrt{2}. \qquad (2)$$

Так как лампочка зажигается и гаснет при напряжении $U_1 < U_m$, то за один полупериод она будет гореть в течение времени

$$\Delta t = t_2 - t_1, \tag{3}$$

где t_1 и t_2 — интервалы времени, прошедшего от начала периода T до момента вспышки и гашения. Всего за время $t_0 = 1$ мин лампочка горит в течение времени

$$t_x = 2ft_0\Delta t, \tag{4}$$

поскольку в интервале t_0 будет содержаться $2\frac{t_0}{T} = 2ft_0$ промежутков Δt.

В уравнении (1) после подстановки в него выражения (2) все величины, кроме t, будут известны, и из полученного уравнения можно определить значения t_1 и t_2. Подставляя числовые значения $U = U_{\text{заж}} = U_{\text{гаш}}$ и $U_{\text{д}}$, найдем $\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) = \frac{1}{2}$, откуда в пределах $\frac{T}{2}$

$$\frac{2\pi}{T}t_1 = \frac{\pi}{6}; \ t_1 = \frac{T}{12}; \ \frac{2\pi}{T}t_2 = \frac{5}{6}\pi; \ t_2 = \frac{5}{3}T.$$

Следовательно, за полупериод лампочка будет гореть в течение времени $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{T}{3} = \frac{1}{3f}$.

Подставляя это значение времени в уравнение (4), найдем время горения неоновой лампочки за одну минуту:

$$t_x = \frac{2}{3}t_0; \ t_x = 40 \text{ с}.$$

Пример 10. В сеть переменного синусоидального тока включены последовательно конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ и катушки индуктивности диаметром $D = 10$ см, состоящая из $n = 1000$ витков медной проволоки сечением $S = 1$ мм^2, вплотную прилегающих друг к другу. Какая средняя мощность выделяется на активном сопротивлении катушки индуктивности за 1 период колебания тока в цепи, если амплитудное значение напряжения в сети равно $U_m = 120$ В? При какой частоте тока эта мощность будет максимальной? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь. Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

Р е ш е н и е. Если в сеть синусоидального напряжения включены конденсатор, катушка индуктивности и резистор, то рассеивание мощности P происходит только на резисторе. В нашем примере резистором служит провод катушки индуктивности. Поскольку напряжение на нем совпадает по фазе с током и $\varphi = 0$, то согласно формуле (13.23)

$$P = \frac{I_m U_m}{2}, \tag{1}$$

где I_m — амплитудное значение силы тока в цепи.

По закону Ома

$$I = \frac{U}{Z}, \qquad (2)$$

где Z — полное сопротивление цепи переменному току.

Поскольку сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь, Z состоит из активного сопротивления катушки R, сопротивления конденсатора R_C и сопротивления катушки индуктивности R_L. Согласно формуле (13.21)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C}\right)^2}, \qquad (3)$$

где f — частота тока в городской сети, равная 50 Гц.

Активное сопротивление обмотки из медной проволоки длиной l_0 с удельным сопротивлением ϱ и сечением S равно:

$$R = \varrho \frac{l_0}{S} = \frac{\pi n \varrho D}{S}, \qquad (4)$$

где n — число витков; D — средний диаметр катушки. Учитывая, что длина катушки $l = nd = 2n\sqrt{\frac{S}{\pi}}$ и витки вплотную прилегают друг к другу, для ее индуктивности получим:

$$L = \frac{\pi \mu_0 n D^2}{8}\sqrt{\frac{\pi}{S}} \quad \text{(см. формулу 13.13).} \qquad (5)$$

Последовательно подставляя числовые значения в формулы (5), (4) и (3), находим:

$$L \approx 9 \cdot 10^{-3}\ \text{Гн};\ R = 5{,}34\ \text{Ом};\ Z = 5{,}36\ \text{Ом}.$$

После этого согласно (1) и (2) будем иметь:

$$P = \frac{U_m R}{2Z^2}; \quad P \approx 1{,}34\ \text{кВт}.$$

Из последней формулы видно, что мощность, выделяемая в резисторе, максимальна в том случае, когда полное сопротивление цепи минимально. Согласно формуле (3) $Z = Z_{\min} = R$, если выражение, стоящее в скобках, равно нулю. Это возможно при частоте

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}; \quad f \approx 5{,}6\ \text{кГц}.$$

Мощность, выделяемая на активном сопротивлении при такой частоте, равна:

$$P_m = \frac{U_m^2}{2R}; \quad P_m \approx 1{,}35 \text{ кВт}.$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ 13

13.1. Медный провод сечением S, согнутый в виде трех сторон квадрата, прикреплен своими концами к горизонтальной оси, вокруг которой он может свободно вращаться в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной вертикально вверх. На какой угол от вертикали отклонится плоскость контура при прохождении по нему тока I? Решите задачу при условии, что провод согнут в виде трех сторон правильного треугольника и шарнирно закреплен в одной из вершин.

13.2. Деревянный цилиндр массой 0,25 кг и длиной 0,10 м расположен на наклонной плоскости. На цилиндр намотано 10 витков тонкой проволоки так, что плоскость каждого витка проходит через ось цилиндра параллельно наклонной плоскости. Вся система находится в однородном магнитном поле с индукцией 0,5 Тл, вектор которой направлен вертикально вверх. Какой минимальный ток нужно пропустить через рамку, чтобы цилиндр не скатывался с наклонной плоскости? Трение скольжения между цилиндром и наклонной плоскостью велико.

13.3. Зеркальный гальванометр имеет рамку площадью 1,5 см^2, состоящую из 300 витков тонкой проволоки. Рамка подвешена на нити, в которой при закручивании нити на угол в 1 рад возникает момент силы упругости, равный 0,98 Н · м. Рамка находится в магнитном поле с индукцией 0,1 Тл, вектор которой направлен радиально к оси вращения рамки. Шкала гальванометра с делениями 1 мм расположена на расстоянии 1 м от зеркала. При какой силе тока в рамке гальванометра указатель на шкале сместится на 1 деление?

13.4. Плоскость медного диска радиусом R расположена перпендикулярно линиям магнитной индукции $\vec{B}$ (рис. 13.11). При пропускании тока I между скользящими контактами a и b диск начинает вращаться, делая за 1 с число оборотов, равное n. Определите вращающий момент, действующий на диск, и мощность, развиваемую таким двигателем.

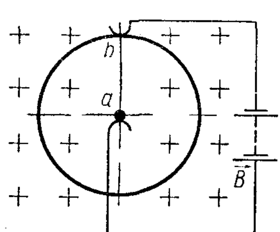

Рис 13.11

13.5. По проволочному кольцу радиусом R течет ток I. Кольцо находится в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной плоскости кольца. Чему равна сила натяжения кольца?

13.6. По проволоке, согнутой в виде правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом R, пропускается ток I. Найдите индукцию магнитного поля на оси многоугольника как функцию расстояния x от его центра и исследуйте полученное выражение. Рассмотрите случай, когда $n = 3$ и $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$; $n = 4$ и $x = R$; $n = \infty$, $x = R$.

13.7. Три длинных параллельных провода удалены друг от друга на одинаковое расстояние $r = 0{,}4$ м. По двум проводам идут токи в одном направлении, и $I_1 = I_2 = 10$ А. Ток в третьем проводе имеет противоположное направление; $I_3 = 20$ А. а) Найдите геометрическое место точек в пространстве, где индукция магнитного поля, создаваемого токами, равна нулю. б) Какую силу нужно приложить к каждому метру третьего провода, чтобы он находился в равновесии?

13.8. Квадратная рамка со стороной 0,1 м расположена около длинного провода, сила тока в котором равна 100 А. Две стороны рамки параллельны проводу и отстоят от него на расстоянии 0,2 м. Чему будет равен вращающий момент, действующий на рамку, если сила тока в рамке будет равна 10 А?

13.9. В центре витка радиусом 0,3 м находится компас, установленный в горизонтальной плоскости. При отсутствии тока в контуре магнитная стрелка лежит в плоскости витка. Когда сила тока в витке равна 5 А, стрелка поворачивается на угол 30°. Определите горизонтальную составляющую индукции магнитного поля Земли.

13.10. Предполагая, что электрон в атоме водорода движется по круговой орбите радиусом 5,3 нм, определите период обращения электрона вокруг ядра и индукцию магнитного поля, создаваемого движущимся электроном в центре его орбиты.

13.11. Протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $2 \cdot 10^{-5}$ Тл перпендикулярно линиям индукции магнитного поля. Сколько оборотов будет делать в магнитном поле протон за 1 с?

13.12. Для определения отношения заряда электрона к его массе пучок электронов разгоняют между катодом и анодом электроннолучевой трубки. При наложении магнитного поля на трубку так, чтобы линии индукции были направлены перпендикулярно пучку, светлое пятно на экране смещается на 5 см. Зная напряжение между анодом и катодом, равное 10 кВ, расстояние от анода до экрана 10 см и индукцию магнитного поля $5 \cdot 10^{-4}$ Тл, определите это отношение.

13.13. Частица, имеющая заряд электрона, влетает в однородное магнитное поле под углом 45° к линиям индукции и движется по винтовой линии с шагом 2 см. Определите импульс частицы, если индукция поля равна 10^{-2} Тл.

13.14. Электрон, движущийся со скоростью $\vec{v}$, попадает в однородные электрическое и магнитное поля, напряженность и индукция которых $\vec{E}$ и $\vec{B}$ взаимно перпендикулярны. Скорость электрона перпендикулярна векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Как будет двигаться электрон? При каком условии электрон будет двигаться равномерно и прямолинейно? Опишите движение первоначально покоившегося электрона.

13.15. В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью 10 $см^2$, расположенный перпендикулярно линиям индукции. Какая сила тока возникает в витке, если поле будет убывать с постоянной скоростью 10^{-2} Тл/с? Сопротивление витка 1 Ом. Чему равна напряженность электрического поля в витке?

13.16. Тонкий медный обруч массой m расположен в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Плоскость обруча перпендикулярна линиям индукции поля. Как нужно повернуть обруч, чтобы в нем индуцировался максимальный заряд, протекающий в одном направлении? Каков модуль этого заряда? Какое количество электричества пройдет по проводнику, если обруч, потянув в диаметрально противоположных точках, вытянуть в линию?

13.17. Самолет летит горизонтально со скоростью 800 км/ч. Чему равна разность потенциалов, возникающая на концах крыльев, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $5 \cdot 10^{-5}$ Тл? Размах крыльев равен 20 м. Чему равна максимальная ЭДС, которая может возникнуть при полете самолета? Горизонтальная составляющая поля Земли $2 \cdot 10^{-5}$ Тл.

13.18. Проводник длиной 10 см перемещают в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл так, что его ось составляет угол 60° с направлением вектора $\vec{B}$. Как нужно двигать проводник, чтобы разность потенциалов на концах проводника возрастала равномерно на 1 В за 1 с?

13.19. Плоскость прямоугольной проволочной рамки перпендикулярна линиям индукции однородного магнитного поля; $B = 0,1$ Тл. Одна сторона рамки bc подвижна и может скользить по другим. Между точками a и d включена лампочка сопротивлением 50 Ом. Какую силу нужно приложить к подвижной части рамки, имеющей длину 0,2 м, чтобы перемещать ее со скоростью 1 м/с, не нарушая контакта? Сопротивлением проволоки пренебречь.

13.20. Прямоугольную рамку, сделанную из проволоки сопротивлением $R = 1$ Ом, перемещают с постоянной скоростью через область однородного магнитного поля с индукцией $B = 0,5$ Тл (рис. 13.12) При какой скорости $\vec{v}$ в рамке выделится количество теплоты $Q = 10^{-3}$ Дж, если $l_1 = 0,10$ м, $l_2 = 0,05$ м и $l_3 > l_2$?

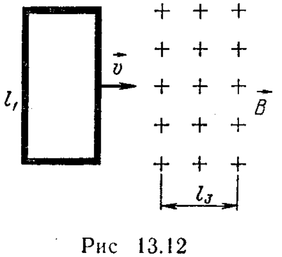

Рис 13.12

13.21. Две параллельные медные шины, расположенные вертикально на расстоянии 1 м друг от друга, замкнуты вверху на резистор сопротивлением 1 Ом и помещены в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл, перпендикулярной плоскости шин. Вдоль шин падает проводник массой 0,1 кг Пренебрегая сопротивлением шин и проводника, определите установившееся значение скорости падения. Трение не учитывать.

13.22. В условии предыдущей задачи шины замкнуты на конденсатор емкостью $1/9 \cdot 10^{-9}$ Ф Определите ускорение проводника.

13.23. Медный диск радиусом a вращается со скоростью f в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, направленной перпендикулярно плоскости диска. При помощи скользящих контактов, установленных на оси и ободе диска, он подключен к резистору сопротивлением R. Какой заряд проходит по цепи за время n оборотов? Какое количество теплоты выделится в резисторе за это время?

13.24. В однородное магнитное поле с индукцией 1 Тл помещен проводник длиной 0,1 м и сопротивлением 1 Ом. Проводник соединен гибкими проводами с источником тока, ЭДС которого 10 В и внутреннее сопротивление 0,1 Ом. Проводник перемещают перпендикулярно линиям индукции поля со скоростью 10 м/с. Определите наибольшую силу тока, который может проходить по проводнику, и напряжение на его концах. Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

13.25. Стержень OA сопротивлением R и длиной l скользит по полукольцу, сопротивление которого ничтожно мало (рис. 13.13). Контур помещен в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, ЭДС источника $\mathcal{E}$, внутреннее сопротивление r, угловая скорость вращения стержня ω. Найдите силу тока в стержне и разность потенциалов на его концах. При каком значении ω сила тока в стержне равна нулю?

13.26. Переменное магнитное поле, сосредоточенное вблизи оси кольца, создает в нем ЭДС индукции $\mathcal{E}$. Ось симметрии поля проходит через центр кольца перпендикулярно его плоскости. На кольце выбран участок, равный трети длины кольца, и к нему параллельно подключен проводник сопротивлением R, расположенный вне магнитного поля. Чему равна сила тока в этом проводнике, если сопротивление провода, из которого сделано кольцо, равно $2R$?

13.27. Из изолированной проволоки сделана петля в форме восьмерки, радиусы колец равны r и R. Определите разность потенциалов между точками соприкосновения провода, если петлю поместить в магнитное поле, индукция которого меняется с течением времени по закону $B = kt$, где k — постоянный коэффициент. Вектор индукции $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости петли.

13.28. Проволочная рамка, сила тока в которой равна 2 А, расположена в однородном магнитном поле

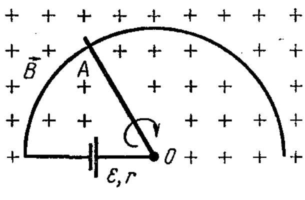

Рис. 13.13

перпендикулярно его линиям индукции. Какую работу против сил поля нужно совершить, чтобы повернуть рамку на 90° вокруг оси, проходящей через диаметр рамки? Площадь рамки 200 $см^2$, индукция магнитного поля 10^{-2} Тл. Каков будет ответ, если рамку повернуть на 180°?

13.29. Катушка имеет 1000 витков, длина катушки 40 см, сечение 10 $см^2$. С какой скоростью нужно менять силу тока в катушке, чтобы в ней возникала ЭДС самоиндукции 1 В?

13.30. В однослойной катушке с индуктивностью 50 мГн сила тока равна 5 А. Какое количество электричества индуцируется в катушке при выключении тока, если длина ее 100 см, а диаметр медной проволоки обмотки 0,6 мм? Удельное сопротивление меди $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

13.31. Катушку с ничтожно малым сопротивлением и индуктивностью 3 Гн подключают к источнику постоянного напряжения с ЭДС 1,5 В. Через сколько времени сила тока в катушке станет равной 50 А? Сопротивлением источника пренебречь.

13.32. ЭДС самоиндукции, возникающая в цепи с индуктивностью 2 Гн, изменяется с течением времени по закону $\mathscr{E} = 10 + 4t$ (величины выражены в единицах СИ). По какому закону изменяется сила тока в цепи?

13.33. Конденсатор емкостью C, заряженный до напряжения U, разряжается на катушку с индуктивностью L. Какое количество теплоты выделится в катушке к тому моменту, когда сила тока в ней достигнет наибольшего значения I?

13.34. Электродвигатель, включенный в сеть с напряжением 120 В, развивает полезную мощность 1,47 кВт. Используя мотор в качестве генератора, при той же скорости вращения якоря, что и в первом случае, можно получить ЭДС 80 В. Чему равно сопротивление цепи?

13.35. Электромотор постоянного тока, включенный в цепь батареи с ЭДС 24 В, при полном сопротивлении цепи 20 Ом и силе тока 0,2 А делает 600 об/мин. Какую ЭДС разовьет мотор, работая в качестве генератора при 1500 об/мин?

13.36. Электрический двигатель при напряжении 120 В развивает мощность 160 Вт, делая 100 об/мин. Каким будет максимальное число оборотов двигателя при этом напряжении, если сопротивление цепи якоря 20 Ом и двигатель развивает ту же мощность? Какое число оборотов разовьет такой двигатель при холостом ходе? Трение не учитывать.

13.37. Работая в качестве электродвигателя, мотор при напряжении 120 В делает 100 об/мин при силе тока 20 А. С какой скоростью нужно вращать якорь мотора, чтобы, работая как генератор, он давал напряжение 80 В? Какую механическую мощность нужно при этом подводить к генератору? Полное сопротивление цепи в обоих случаях равно 5 Ом.

13.38. Груз массой m, подвешенный на нити, намотанной на ось генератора с постоянным магнитом, опускается со скоростью $\vec{v}$. Генератор замкнут на резистор сопротивлением R. С какой скоростью будет подниматься вверх тот же груз, если генератор включить в цепь постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и сопротивлением R?

13.39. Плоский контур с индуктивностью L и сопротивлением R вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Площадь контура S. Определите силу тока в катушке. Какую мощность необходимо затрачивать, чтобы вращать контур?

13.40. Конденсатор, катушка индуктивности и резистор соединены между собой последовательно. Действующие напряжения на них равны соответственно U_C, U_L и U_R. Чему равно действующее напряжение на всем участке?

13.41. Лампу мощностью 60 Вт, рассчитанную на напряжение 120 В, нужно включить в сеть переменного тока напряжением 220 В. Конденсатор какой емкости нужно включить последовательно с лампой, чтобы она горела полным накалом? Катушкой какой индуктивности можно заменить конденсатор?

13.42. Участок цепи состоит из резистора и катушки индуктивности, соединенных между собой параллельно. Их сопротивления равны соответственно 60 и 80 Ом. К участку подводится синусоидальное напряжение с амплитудой 120 В. Чему равно сопротивление контура? Решите задачу при условии, что резистор заменен конденсатором, причем его емкостное сопротивление равно активному сопротивлению резистора.

13.43. На симметричный железный сердечник намотаны две катушки. При включении первой катушки в сеть переменного тока напряжение на клеммах второй катушки оказывается равным 13,6 В. Если включить в ту же сеть вторую катушку, то напряжение на клеммах первой будет равно 120 В. Чему равно отношение витков катушек? Считать, что магнитный поток, создаваемый каждой катушкой, не выходит из сердечника и распределяется между его разветвлениями на две равные части.

13.44. Трансформатор, содержащий в первичной обмотке 300 витков, включен в сеть с напряжением 220 В. Во вторичную цепь трансформатора, имеющую 165 витков, включен резистор сопротивлением 50 Ом. Найдите силу тока во вторичной цепи, если падение напряжения на ней равно 50 В.

13.45. Если на первичную обмотку ненагруженного трансформатора подать напряжение 220 В, то напряжение на вторичной обмотке будет равно 127 В. Активное сопротивление первичной обмотки равно 2 Ом, вторичной — 1 Ом. Каково будет напряжение на резисторе сопротивлением 10 Ом, если его подключить ко вторичной обмотке? Потери энергии в трансформаторе не учитывать.

ЧАСТЬ IV

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

ГЛАВА 14

ОТРАЖЕНИЕ СВЕТА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. При описании многих явлений, связанных с распространением световых волн, удобнее использовать более простое геометрическое представление, чем волна,— световой луч.

Световым лучом называют бесконечно узкий пучок электромагнитных волн, совпадающий с направлением распространения волны. Световая волна, падающая на поверхность раздела двух сред, частично отражается от нее, возвращаясь в первую среду, частично проходит во вторую.

Тела или системы тел, преобразующие ход лучей света, называют оптическими системами.

Если расходящийся пучок лучей, идущий от светящейся точки предмета, преобразуется оптической системой в сходящийся пучок, изображение точки, получающееся на месте пересечения преобразованных лучей, называют действительным.

Если расходящийся пучок лучей, идущий из светящейся точки предмета, преобразуется оптической системой так, что он остается расходящимся, изображение точки предмета, получающееся на месте пересечения продолжений преобразованных лучей, называют мнимым.

2. Всякая отражающая поверхность преобразует падающие на нее лучи так, что угол падения луча равен углу отражения и лучи, падающий и отраженный, лежат в одной плоскости с перпендикуляром, восставленным из точки падения.

Если лучи, падающие на плоскую поверхность раздела двух сред параллельным пучком, после отражения остаются параллельными, отражение называют зеркальным, а саму поверхность — плоским зеркалом.

Пучок лучей, падающий из светящейся точки A (рис. 14.1) на плоское зеркало, преобразуется зеркалом так, что: а) продолжения всех отраженных лучей будут пересекаться в точке A_1, являющейся мнимым изображением точки A. Глазу наблюдателя, расположенному в отраженном потоке, будет казаться, что лучи выходят не из точки A, а из точки A_1; б) расстояние от изображения до плоскости зеркала равно расстоянию от этой плоскости до предмета; в) изображение протяженного предмета в плоском зеркале равно по размерам самому предмету и расположено симметрично относительно плоскости зеркала.

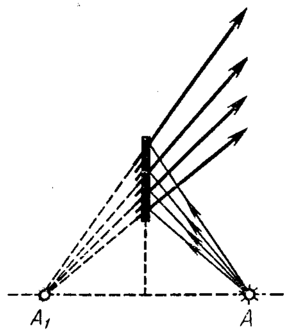

Рис. 14.1

3. Если зеркально отражающая поверхность представляет собой часть шаровой поверхности (рис. 14.2), то такое зеркало называют *сферическим*. Центр шара — точку C — называют *оптическим центром зеркала*, его радиус R — *радиусом зеркала*. Вершину шарового сегмента O называют *полюсом зеркала*, угол α, под которым этот сегмент виден из оптического центра,— *угловым отверстием* (*апертурой*) *зеркала*. Прямую, проходящую через оптический центр и полюс зеркала, называют *главной оптической осью*; всякую другую прямую, проходящую через оптический центр, называют *побочной оптической осью зеркала*.

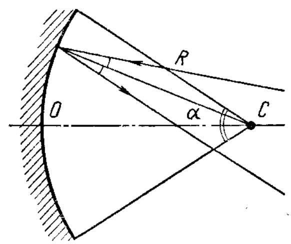

Рис. 14.2

Согласно законам отражения луч, падающий на сферическое зеркало, и луч отраженный составляют с радиусом зеркала одинаковые углы и лежат вместе с ним в одной плоскости.

4. Для вогнутых зеркал с большим радиусом кривизны (чем он больше, тем точнее) справедливо следующее:

а) Если на зеркало падает узкий пучок параллельных лучей, то после отражения все лучи пересекаются в одной точке, называемой *фокусом зеркала*. Фокус, лежащий на главной оптической оси, называется *главным*, фокус, лежащий на побочной оси,— *побочным*. Фокусы вогнутого зеркала являются действительными. Геометрическое место всех фокусов представляет часть сферической поверхности, называемой *фокальной поверхностью*. Радиус фокальной поверхности равен $\frac{R}{2}$. Расстояние от фокальной поверхности до поверхности зеркала называют *фокусным расстоянием*.

б) Фокусное расстояние F зеркала радиусом R равно:

$$F = \frac{R}{2}.$$

в) При построении изображений и расчетах высотой сферического сегмента зеркала можно пренебречь по сравнению с R.

г) Если светящаяся точка (небольшой по сравнению с R протяженный предмет) находится на расстоянии d от зеркала и ее изображение получается на расстоянии f от него, то

$$\frac{1}{F}=\frac{2}{R}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}. \tag{14.1}$$

В формуле (14.1) все расстояния от зеркала до мнимых точек берутся со знаком «минус», до действительных — со знаком «плюс». Это правило относится как к f, так и к d. Случай мнимого предмета может иметь место, когда сам предмет является изображением, полученным от другого зеркала или линзы. Фокусное расстояние вогнутого зеркала всегда положительно.

Если расстояния от предмета и изображения до главного фокуса равны соответственно l_0 и l, формулу зеркала можно представить в виде:

$$F^2=\frac{R^2}{4}=l_0 l. \tag{14.2}$$

д) При построении изображения светящейся точки в вогнутом зеркале из всего потока лучей, падающих на зеркало, используют два из следующих четырех:

1) луч, идущий от точки предмета параллельно какой-либо оптической оси; после отражения он проходит через фокус, лежащий на этой оси;

2) луч, проходящий через оптический центр зеркала; после отражения он идет по тому же направлению назад (поскольку угол падения, а следовательно, и угол отражения равны нулю);

3) луч, идущий от какой-либо точки предмета в направлении полюса зеркала; как и любой луч, он отразится от зеркала под углом, равным углу падения, который в этом случае можно построить сравнительно точно;

4) луч, проходящий через фокус, лежащий на какой-либо оси; после отражения он идет параллельно оптической оси, на которой лежит этот фокус.

Чаще всего при построении используют первые два луча.

Всякий произвольный луч, идущий из светящейся точки предмета, после отражения проходит через точку пересечения характерных лучей.

е) Если предмет высотой H_0 расположен перпендикулярно главной оптической оси и высота его изображения оказывается равной H, то линейное увеличение (уменьшение предмета), даваемое зеркалом, равно:

$$\Gamma=\frac{H}{H_0}=\frac{f}{d}=\frac{F}{d-F}. \tag{14.3}$$

5. Выпуклые зеркала с большим радиусом кривизны обладают следующими свойствами:

а) Если пучок параллельных лучей падает на зеркало, то после отражения лучи расходятся и идут так, что их продолжения пересекаются в одной точке, называемой фокусом. Фокусы выпуклого зеркала мнимые. Геометрическое место всех фокусов выпуклого зеркала — фокальная поверхность — представляет собой часть сферы радиусом $\frac{R}{2}$.

б) Формула выпуклого зеркала имеет вид:

$$-\frac{1}{F} = -\frac{2}{R} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \qquad (14.4)$$

Левую часть этого уравнения всегда берут со знаком «минус», поскольку фокус выпуклого зеркала мнимый. Перед остальными членами уравнения ставят знак «плюс» или «минус» в зависимости от того, является ли изображение или предмет действительным или мнимым.

Связь между l_0, l и F дается уравнением (14.2).

в) При построении изображения светящейся точки в выпуклом зеркале используются те же характерные лучи, что и в вогнутом:

1) луч, идущий от точки предмета параллельно какой-либо оптической оси; он отражается так, что его продолжение проходит через фокус, лежащий на этой оси;

2) луч, идущий на оптический центр зеркала; он отражается назад по тому же направлению (так как угол падения, а следовательно, и угол отражения равны нулю);

3) луч, идущий на полюс зеркала; он отражается под углом, равным углу падения (угол отражения в данном случае можно построить довольно точно);

4) луч, идущий в направлении фокуса, лежащего на какой-либо оптической оси; он после отражения идет параллельно этой оси.

г) Линейные размеры изображения, получаемого в выпуклом зеркале, можно определить по формуле

$$\Gamma = \frac{H}{H_0} = \frac{f}{d} = \frac{F}{d+F}.$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Задачи на законы отражения — это задачи на определение размеров и взаимного расположения изображений, предметов и зеркал. Их можно разделить на две основные группы: задачи, связанные с нахождением изображения в зеркале, и задачи на системы зеркал. И в той и в другой группе различают задачи, где требуется провести только графическое построение, и задачи расчетные.

В первой группе можно выделить отдельно задачи о плоском, вогнутом и выпуклом зеркалах.

Вторая группа задач фактически является комбинацией задач первой группы.

2. Решение почти всех задач по оптике, в том числе и расчетного

характера, начинают с выполнения построений. Для этого нужно изобразить зеркало, его главную оптическую ось, если речь идет о сферическом зеркале, и, отметив на ней фокус и центр, указать сам предмет, руководствуясь числовыми значениями заданных величин. На расположение предмета относительно характерных точек сферического зеркала следует обращать особое внимание, так как от этого зависят положение и размеры изображения.

В общем случае для построения изображения предмета достаточно найти изображение двух его крайних точек, поскольку мы рассматриваем только такие зеркала, в которых всякая прямая линия преобразуется в прямую. Изображение точек предмета строят при помощи двух характерных лучей.

Чаще всего учащиеся затрудняются построить изображения точек, лежащих на главной оптической оси. Чтобы найти их изображение, один луч берут проходящим через центр зеркала (он отразится по тому же направлению, что и падал), второй луч выбирают произвольно. Ход второго луча после отражения определяется так: нужно провести нормаль к поверхности зеркала в точку падения луча (она совпадает с радиусом зеркала) и, построив по углу падения угол отражения, провести сам луч. В том месте, где пересекутся оба отраженных луча, и находится искомое изображение точки. Графическое построение, безусловно, не является точным, поэтому, рисуя отраженные лучи, нужно заранее предвидеть, где они примерно должны пересечься, т. е. знать, где находится изображение относительно характерных точек зеркала.

Ход отраженного луча, падающего под произвольным углом на сферическое зеркало, можно определить и с помощью побочной оптической оси. Для этого параллельно падающему лучу надо начертить побочную оптическую ось, найти на ней побочный фокус (точку пересечения фокальной поверхности с осью) и через него провести отраженный луч.

Построив изображение предмета и обозначив расстояния от предмета и изображения до зеркала, можно перейти к составлению расчетных уравнений. Их записывают на основании формулы зеркала и формулы увеличения. Составляя уравнение, связывающее d, f и F, особое внимание нужно обратить на знаки перед ними, помня, что все расстояния до мнимых точек надо брать со знаком «минус».

Если в задаче даются дополнительные условия, то, записав основные уравнения, к ним следует добавить вспомогательные. Эти уравнения, как правило, связывают расстояния, входящие в основные уравнения, и могут быть легко получены из анализа чертежа.

Если в задаче рассматривают не одно, а два или более положений одного и того же предмета, строить изображения и составлять уравнения надо для каждого случая отдельно.

Записав основные и вспомогательные уравнения, решают их совместно относительно искомой величины.

3. Задачи, связанные с расчетами и построениями в системах зеркал, сравнительно трудны и требуют не только твердых знаний основного материала, но и определенных навыков решения. Принципиально они не отличаются от задач на одно зеркало. Как правило, в них требуется найти изображение предмета после двукратного отражения лучей сначала от одного (Z_1), а затем от другого (Z_2) зеркала. Особенность решения состоит лишь в том, что здесь ход лучей, падающих на второе зеркало после их отражения от первого, приходится отыскивать по промежуточному изображению, даваемому первым зеркалом. Все расчеты и построения основываются на том, что в силу обратимости хода лучей изображение, даваемое первым зеркалом, можно рассматривать как предмет для второго, изображение, даваемое вторым, как предмет для первого. Следует обратить особое внимание на некоторую формальность такого метода и учитывать, что промежуточный предмет — изображение для следующего зеркала может быть и действительным (в формуле зеркала d нужно брать со знаком «плюс»), и мнимым (d — со знаком «минус»).

Второй случай возможен, если изображение, даваемое первым зеркалом, получается за вторым зеркалом. При графическом отыскании мнимого предмета задача состоит в построении предмета по его изображению.

Из каких бы зеркал ни состояла оптическая система (плоское — плоское, вогнутое — вогнутое, выпуклое — выпуклое и т. д.), решение задач на отыскание изображений в системе зеркал имеет много общего, и его во всех случаях удобно проводить по следующей схеме:

а) Сделать чертеж и, указав на нем зеркала, главные оптические оси (они, как правило, совпадают), фокусы и центры, отметить расстояние L между зеркалами и расстояние d от предмета A_0 до первого зеркала. При этом нужно все время руководствоваться числовыми значениями заданных величин, так как лишь по ним можно сделать чертеж, соответствующий условиям задачи, и правильно расположить зеркала и предмет.

б) Построить точку A_1 — изображение предмета в первом зеркале Z_1 (как если бы второго зеркала Z_2 не было) и, найдя f_1 по формуле зеркала, определить расстояние d_2 между точкой A_1 и вторым зеркалом.

в) Независимо от того, каким будет изображение A_1 в первом зеркале — действительным или мнимым, точку A_1 можно рассматривать как предмет для второго зеркала.

Лучи, отраженные от Z_1 и дающие изображение A_1, могут падать при этом на второе зеркало так, как если бы они выходили из светящегося предмета, расположенного на месте изображения, действительного или мнимого. Точка A_1 должна находиться в этом случае перед вторым зеркалом, лучи от нее идут на Z_2 расходящимся пучком, и она фактически служит предметом для этого зеркала. A_1 здесь можно считать действительным предметом для

Z_2, удаленным от него на расстояние $d_2 = L \pm f_1$, и найти его изображение A_2 во втором зеркале обычным путем.

Может случиться, что изображение A_1 попадет за второе зеркало Z_2, тогда это изображение удобно рассматривать как мнимый предмет для Z_2, находящийся на расстоянии $d_2 = f_1 - L$. Нетрудно заметить, что в этом случае лучи, отраженные от Z_1, падают на Z_2 сходящимся пучком.

В зависимости от радиуса второго зеркала и положения точки A_1 относительно второго зеркала (расстояния d_2) лучи, идущие на Z_2 сходящимся пучком, могут отразиться от него или сходящимся, или расходящимся, или параллельным пучком. В первом случае отраженный поток даст действительную точку пересечения лучей и второе изображение (точка A_2) будет действительным. Положение изображения A_2 относительно второго зеркала здесь определяется по формуле (14.1) или (14.4) при условии, что предмет (точка A_1) мнимый (перед d_2 знак «минус») и изображение действительное (перед f_2 знак «плюс»).

Во втором случае точка пересечения лучей находится на их продолжении и искомое изображение A_2 оказывается мнимым. Это можно наблюдать только в выпуклом зеркале. Положение A_2 относительно второго зеркала определяется по формуле выпуклого зеркала, в которой все расстояния нужно взять отрицательными.

Если на второе зеркало падает пучок параллельных лучей (точка A_0 помещена в фокусе первого зеркала), изображение A_2 будет находиться или в фокусе этого зеркала, если оно сферическое, или в бесконечности, если зеркало плоское.

Увеличение, даваемое системой зеркал при двукратном отражении лучей, равно:

$$\Gamma = \frac{H_2}{H_0} = \frac{H_1 H_2}{H_0 H_1} = \frac{f_1 f_2}{d_1 d_2} = \Gamma_1 \Gamma_2 ,$$

где H_0 — высота предмета; H_1 — высота изображения, даваемого лучами, отраженными от первого зеркала; H_2 — высота изображения, даваемого этими лучами после отражения от второго зеркала; Γ_1 и Γ_2 — увеличение, даваемое каждым зеркалом.

Пример 1. Определите графически, при каких положениях глаза наблюдатель сможет видеть в плоском зеркале одновременно изображение точки A и отрезка прямой BC, расположенные относительно зеркала так, как показано на рисунке 14.3.

Решение. Чтобы видеть изображение какой-либо точки предмета в зеркале, необходимо, чтобы в отраженном потоке лучей, идущих из этой точки на зеркало, нашлись бы лучи, попадающие в глаз наблюдателя. В данном примере в глаз должны отразиться лучи, выходящие из точек A, B и C.

Лучи, идущие на зеркало из точки A, отражаются расходящимся пучком 1, 1′ и дают на своем продолжении точку A_1, являющуюся изображением предмета A в плоском зеркале.

Лучи, падающие на зеркало из крайних точек предмета BC, идут расходящимися пучками 2, $2'$ и 3, $3'$, давая соответственно мнимые изображения B_1 и C_1 концов предмета. От остальных точек предмета лучи будут располагаться в пространстве, ограниченном лучами 2, $3'$.

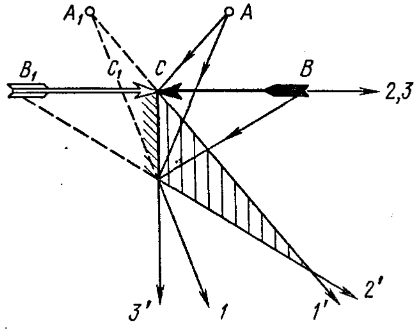

Рис. 14.3

Чтобы одновременно видеть изображение точки A и крайних точек предмета B и C, а следовательно, и весь предмет, глаз наблюдателя следует расположить так, чтобы в него могли попасть лучи, дающие изображения A_1, B_1 и C_1. Как видно из чертежа, пространство, в каждой точке которого встречаются лучи, удовлетворяющие такому условию, заключено внутри заштрихованного треугольника. В одной из точек этого пространства и должен находиться глаз.

Пример 2. Сколько изображений получается от светящейся точки, находящейся между двумя плоскими зеркалами, расположенными под углом 45° друг к другу?

Решение. Если между зеркалами 1 и 2 поместить светящуюся точку A_0 (рис. 14.4), выходящие из нее лучи будут

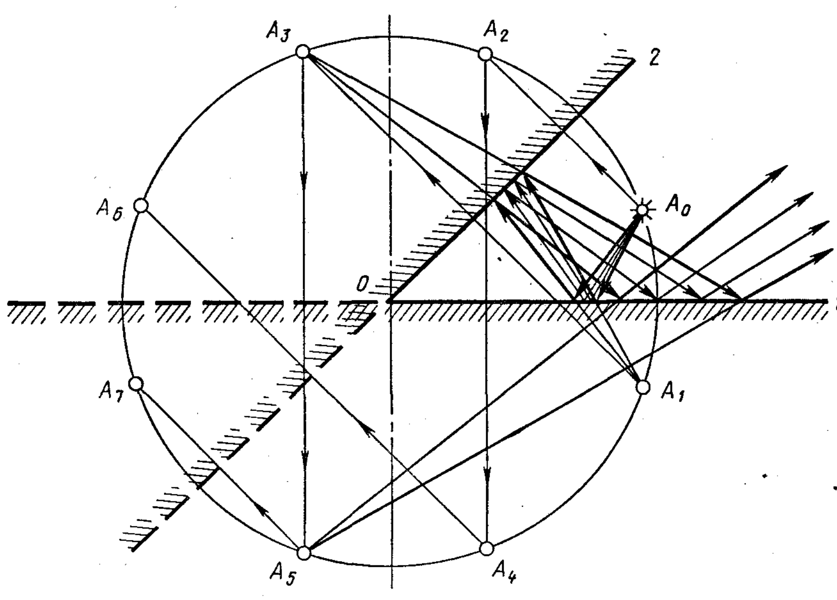

Рис. 14.4

попадать на зеркала, многократно отражаться от них расходящимися пучками, давая всякий раз на своем продолжении мнимые изображения.

Вычертить ход лучей и построить все изображения даже в таком простом случае, как наш, практически невозможно, поскольку чертеж получается очень громоздким. Однако для решения можно ограничиться схематическим построением, учитывая то, что мнимое изображение, даваемое одним зеркалом, можно считать предметом для второго.

Рассмотрим пучок лучей, падающих из точки A_0 на зеркало *1*. После отражения он идет к зеркалу *2* так, как если бы выходил из точки A_1, являющейся изображением предмета A_0 в первом зеркале. Кроме отраженного пучка, на второе зеркало падает пучок лучей, выходящих непосредственно из A_0 (на рисунке он не указан). Оба эти пучка отражаются так, что на их продолжении получатся точки A_2 и A_3, которые являются изображением точек A_0 и A_1 в зеркале *2*.

Лучи, отраженные от второго зеркала, вновь попадают на первое, отражаются от него, давая изображения A_4 и A_5, для которых предметами являлись точки A_2 и A_3. Для наглядности и удобства построений плоскости зеркал на чертеже продолжены за линию их пересечения.

Точки A_4 и A_5 можно рассматривать как предмет для второго зеркала. Их изображениями в этом зеркале служат симметричные точки A_6 и A_7, находящиеся по другую сторону зеркала *2*.

Нетрудно заметить, что при расположении зеркал под углом 45° друг к другу полученные изображения будут последними. Отраженные от второго зеркала лучи, на продолжении которых получаются точки A_6 и A_7, идут таким образом, что при своем отражении дают изображения, совпадающие с ранее полученными.

Всего в зеркалах, установленных под углом 45° друг к другу, получается семь изображений.

Точка A_0 и все ее изображения расположены по кругу радиусом OA_0 с центром в точке пересечения зеркал O. В этом легко убедиться, доказав равенства $|OA_0| = |OA_1| = \ldots = |OA_n|$.

На основании проведенных построений, обобщая полученный результат на случай, когда зеркала поставлены друг к другу под углом α (α есть целый делитель 360°), формулу для числа изображений предмета, помещенного между зеркалами, можно записать так:

$$n = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1.$$

Для $\alpha = 45^\circ$ эта формула дает:

$$n = \frac{360^\circ}{45^\circ} - 1 = 7.$$

При $\alpha = 180°$, когда зеркала развернуты и фактически представляют одно зеркало, $n = 1$. Если $\alpha = 0$ (зеркала расположены параллельно друг другу), изображений получается бесконечно много: $n = \infty$.

Пример 3. Изображение, даваемое вогнутым сферическим зеркалом, в Γ раз больше самого предмета. Если зеркало передвинуть на расстояние l вдоль главной оптической оси, изображение оказывается во столько же раз больше предмета, как и в первом случае. Определите радиус кривизны зеркала.

Решение. В задаче рассматривают два положения предмета, находящегося на разных расстояниях от вогнутого зеркала, причем оба раза изображения получаются увеличенными в одинаковое число раз. Легко догадаться, что это возможно лишь в том случае, когда предмет помещен между фокусом и центром зеркала (изображение увеличенное, действительное) и когда он находится между зеркалом и фокусом (изображение увеличенное, мнимое). Если предположить, что изображение было действительным в первом случае, то для получения такого же по размеру мнимого изображения зеркало нужно подвинуть ближе к предмету.

Делаем чертеж (рис. 14.5) и для каждого из двух положений предмета строим его изображения, указывая их высоты H_1 и H_2. Отмечаем расстояния от предмета и изображения до зеркала d_1, d_2, f_1, f_2, а также расстояние l.

Делая чертежи к условию задачи, в которой рассматривается несколько положений предмета относительно оптической системы, удобно один чертеж располагать под другим так, чтобы хорошо видеть, какие расстояния изменяются, какие нет.

Если искомый радиус зеркала равен R, то для первого положения предмета, когда изображение получается действительным, формула зеркала и формула увеличения дают:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} \quad \text{и} \quad \Gamma = \frac{f_1}{d_1}. \qquad (1)$$

Для второго случая — мнимого изображения:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} \quad \text{и} \quad \Gamma = \frac{f_2}{d_2}. \qquad (2)$$

Вспомогательное условие позволяет записать:

$$d_1 - d_2 = l. \qquad (3)$$

По условию задачи нам известно увеличение Γ и перемещение зеркала l. Требуется опреде-

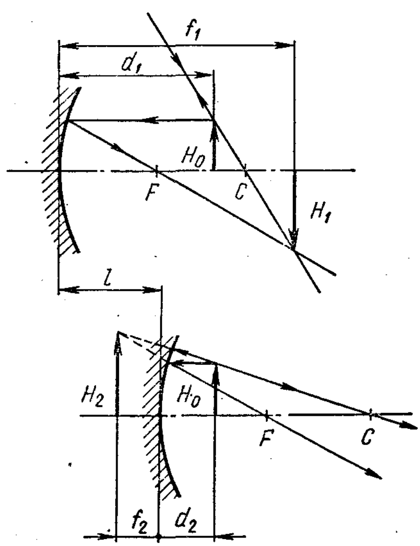

Рис. 14.5

лить радиус зеркала R. Исключая из уравнений (1) — (3) неизвестные величины d_1, d_2, f_1 и f_2 и решая их относительно R, находим:

$$R = \Gamma l.$$

Пример 4. Диаметр отверстия выпуклого сферического зеркала радиусом R равен D. С какого минимального расстояния человек может видеть себя во весь рост, если рост его равен H?

Решение. В любом, даже самом маленьком зеркале можно построить изображение очень большого предмета. Однако из этого не следует, что все изображение можно увидеть. Размеры той части предмета, изображение которой можно рассмотреть, не изменяя положения глаз, зависят от предельного угла зрения и размеров зеркала. Предельный угол зрения для каждого человека имеет определенное значение, однако во всех задачах предполагается, что видимая часть изображения определяется лишь размерами зеркала.

Чтобы в зеркале минимальных размеров было видно изображение предмета AB, нужно, чтобы в глаз наблюдателя попадали лучи, дающие изображение его концов A_1 и B_1. Это возможно при условии, что края зеркала лежат на прямой, соединяющей крайние точки изображения с глазом наблюдателя. Если размеры зеркала будут больше оптимальных, часть зеркала, выходящая за эти границы, будет лишней. Если же зеркало окажется меньше, то часть изображения увидеть невозможно. При заданных размерах выпуклого зеркала, расположенного на уровне глаз, человек может видеть себя во весь рост только с некоторого минимального расстояния, при котором лучи, дающие изображение головы и ног, попадают в глаз. Если к зеркалу подойти ближе, изображение человека станет больше, крайние точки выйдут за пределы оптимальных границ (рис. 14.6). Допустим, что человек (предмет AB высотой H) находится перед выпуклым зеркалом радиусом R и диаметром отверстия D на таком расстоянии d, что из точки A, где находится глаз, он видит себя во весь рост. Тогда мнимое изображение A_1B_1 человека высотой H_1 должно быть расположено от зеркала на таком расстоянии f, чтобы точки A, M, A_1 и A, N, B_1 лежали на прямых линиях.

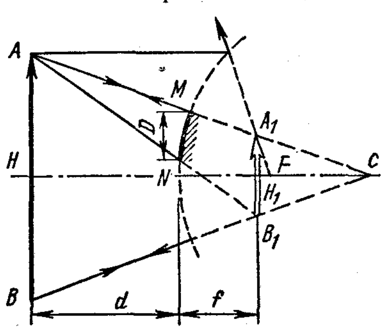

Рис. 14.6

Обратите внимание, как сделано построение изображения. Из точки B проведен только один луч, поскольку известно, что изображение предмета A_1B_1 перпендикулярно главной оптической оси. Чтобы узнать, как отразится луч, идущий параллельно этой оси, зеркало до-строили, так как любой луч, выходящий из A, после отражения попадает своим продолжением в A_1.

Сделав построение, можно записать основные уравнения для выпуклого зеркала, учитывая знаки отрезков:

$$-\frac{1}{F}=\frac{1}{d}-\frac{1}{f} \quad \text{и} \quad \frac{H_1}{H}=\frac{f}{d}. \tag{1}$$

Дополнительное уравнение составляем исходя из того, что треугольники AA_1B_1 и AMN подобны. (Малой кривизной зеркала MN пренебрегаем.) Поскольку высоты в этих треугольниках равны соответственно d и $d+f$, то

$$\frac{D}{H_1}=\frac{d}{d+f}. \tag{2}$$

Решая уравнения (1) — (2) относительно искомого расстояния d, находим:

$$d=\frac{H-2D}{D}F.$$

Пример 5. Радиус вогнутого сферического зеркала (рис. 14.7) равен $R=0{,}4$ м. На главной оптической оси зеркала помещен точечный источник света на расстоянии $d=0{,}3$ м от зеркала. На каком расстоянии от вогнутого зеркала нужно поставить плоское зеркало, чтобы лучи, отраженные от вогнутого, а затем от плоского зеркала, вернулись в точку, где находится источник?

Решение. По условию задачи светящаяся точка лежит между фокусом и центром, поэтому ее изображение A_1 будет расположено где-то за центром на некотором расстоянии f от зеркала Z_1.

Изображение A_1 получается в точке действительного пересечения лучей, отраженных от вогнутого зеркала, поэтому, если на их пути поставить плоское зеркало Z_2, лучи упадут на него сходящимся пучком, после отражения пойдут тоже сходящимся пучком и дадут на своем пересечении изображение A_2. Используя принцип обратимости лучей, точку A_1 можно рассматривать как мнимый предмет для плоского зеркала; ее изображение A_2 в этом случае будет действительным и расположенным относительно плоскости Z_2 симметрично A_1.

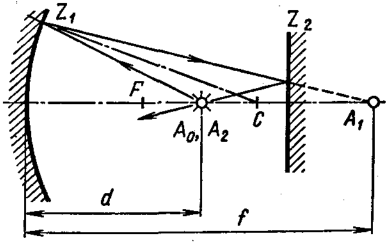

Рис. 14.7

Поскольку плоскость зеркала делит расстояние между предметом и его изображением пополам и по условию задачи изображение A_2 должно попасть в то место, где находится предмет, легко сообразить, что зеркало Z_2 нужно поставить посредине между светящейся точкой A_0 и ее промежуточным изображением A_1.

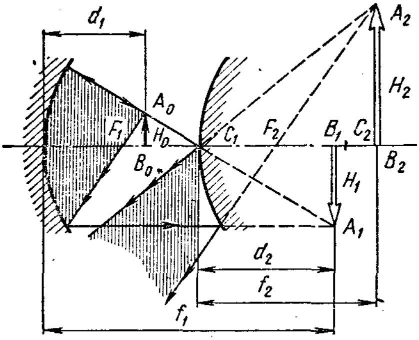

Рис. 14.8

Расстояние f определяется из формулы вогнутого зеркала:

$$\frac{2}{R}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}. \qquad (1)$$

Если плоское зеркало помещено между точками A_0 и A_1, то от вогнутого зеркала оно должно находиться на расстоянии

$$L=\frac{d+f}{2}. \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) — (2) совместно относительно L и подставляя числовые значения для d и R, получим:

$$L=\frac{d^2}{(2d-R)};\ L=45 \text{ см}.$$

Пример 6. В центре вогнутого сферического зеркала (рис. 14.8) с фокусным расстоянием $F_1=20$ см находится выпуклое зеркало с фокусным расстоянием $F_2=20$ см. Между фокусом и центром вогнутого зеркала на расстоянии $d_1=28$ см от его полюса поставлен предмет высотой $H_0=2$ см перпендикулярно главной оптической оси. Определите высоту и положение изображения в выпуклом зеркале, даваемого лучами, отраженными от вогнутого зеркала.

Р е ш е н и е. По условию задачи радиусы зеркал одинаковы и предмет A_0B_0 высотой H_0 расположен между фокусом и центром вогнутого зеркала. Изображение A_1B_1 предмета высотой H_1, даваемое первым зеркалом, должно находиться за его центром на расстоянии f_1 от этого зеркала.

Это изображение построено на рисунке лучами, проходящими через C_1 и F_1. Ход таких лучей после отражения от второго зеркала проследить особенно просто.

Построив изображение, записываем основные уравнения для первого зеркала: $\frac{1}{F_1}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}$ и $H_1=\frac{f_1}{d_1}H_0$.

Чтобы найти положение изображения A_1B_1 относительно второго зеркала, нужно вычислить f_1. Подставляя в первое из этих уравнений числовые значения F_1 и d_1, находим: $f_1=70$ см. Изображение получалось бы за вторым зеркалом на расстоянии

$$d_2=f_1-2F_1=30 \text{ см},$$

так как по условию задачи полюс второго зеркала находится в центре первого и, следовательно, расстояние между зеркалами равно $2F_1$. Изображение A_1B_1 попадает между фокусом и центром второго зеркала.

Для построения искомого изображения в выпуклом зеркале считаем A_1B_1 для него мнимым предметом. Из чертежа и проведенных расчетов видно, что лучи, дающие изображение точки A_1, падают на выпуклое зеркало сходящимся потоком. Определить их ход после отражения от второго зеркала можно по расположению изображения A_1B_1 относительно характерных точек выпуклого зеркала.

Учитывая обратимость хода лучей, нетрудно заметить, что, если какая-нибудь точка изображения, например A_1, оказалась между полюсом и фокусом выпуклого зеркала, отраженные от него лучи шли бы сходящимся пучком и давали действительное изображение точки A_1 — точку A_2. Лучи, вышедшие из точки A_2 как из действительного предмета, давали бы в этом случае в выпуклом зеркале мнимое изображение, лежащее между зеркалом и фокусом.

Если бы точка A_1 попала на фокальную поверхность второго зеркала, то сходящийся пучок лучей был бы при отражении преобразован зеркалом в параллельный.

И наконец, когда изображение A_1B_1 оказывается дальше F_2, сходящийся пучок преобразуется выпуклым зеркалом в расходящийся. Именно это мы и имеем в данной задаче. Так как $F_2 < d_2 < 2F_2$, расходящийся пучок лучей, отраженный от второго зеркала, дает в нем мнимое изображение A_2B_2 мнимого предмета A_1B_1. Построение этого изображения видно из чертежа. Его можно выполнить очень просто, если считать второе зеркало вогнутым с отражающей поверхностью с правой стороны. Этот прием очень удобен, и им можно всегда пользоваться как для построения, так и для расчетов изображения мнимого предмета в выпуклом зеркале.

Обратите внимание: при графическом построении изображения A_2B_2 мнимого предмета A_1B_1 мы по заданному изображению A_1B_1 строили предмет A_2B_2.

Зная расстояние от A_1B_1 до выпуклого зеркала и его радиус, составляем уравнение отрезков для определения искомого расстояния f_2 между изображением A_2B_2 и выпуклым зеркалом.

Поскольку и фокус, и предмет, и его изображение мнимые, то согласно формуле зеркала

$$-\frac{1}{F_2} = -\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}, \text{ или } \frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1},$$

откуда

$$f_2 = \frac{F_2 d_2}{d_2 - F_2}; \quad f_2 = 60 \text{ см}.$$

Высота мнимого изображения во втором зеркале будет равна $H_2 = \frac{f_2}{d_2} H_1$ или с учетом выражения для H_1:

$$H_2 = \frac{f_1 f_2}{d_1 d_2} H_0; \quad H_2 = 10 \text{ см}.$$

14.1. Солнечные лучи, падающие под некоторым углом на плоское горизонтальное зеркало, отражаясь, попадают на вертикальный экран. На зеркале стоит непрозрачная пластинка высотой H. Определите размеры тени на экране.

14.2. Человек высотой 1,6 м, стоящий на берегу озера, видит Луну в небе по направлению, составляющему угол 60° с горизонтом. На каком от себя расстоянии человек видит отражение Луны в озере?

14.3. Гладкий шар лежит в точке A у борта биллиардного стола (рис. 14.9). Под каким углом φ нужно ударить по шару, чтобы он после удара о два борта попал в среднюю лузу $Л$? Размеры стола указаны на чертеже. Удары шара о борта считать идеально упругими. Как нужно ударить по шару, чтобы он, ударившись о три борта стола, возвратился в точку A? Покажите, что время возвращения шара в точку A не зависит от направления вектора начальной скорости.

14.4. Точечный источник света находится между двумя плоскими зеркалами, образующими двугранный угол $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. На каком расстоянии друг от друга находятся изображения, даваемые лучами, идущими непосредственно от источника, если источник находится на расстоянии l от линии пересечения зеркал? Как будут двигаться эти изображения, если зеркала станут поворачиваться со скоростью f вокруг оси, проходящей через двугранный угол? Определите число изображений, даваемых зеркалами. Рассмотрите случай, когда n — целое число и когда n — любое число. При каком условии задача имеет определенное решение?

14.5. Два плоских зеркала поставлены под углом α друг к другу. На них падает луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной к ребру угла. Определите угол между направлением падающего луча и направлением луча, отраженного от обоих зеркал.

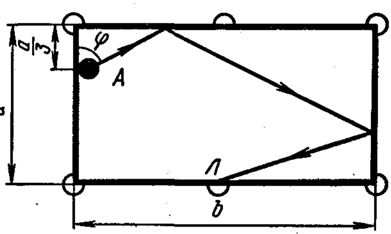

Рис. 14.9

14.6. Две свечи A и B расположены на расстоянии 0,3 м друг от друга. Два плоских зеркала — одно на расстоянии 0,2 м от A, другое на расстоянии 0,25 м от B — стоят так, что изображения A_1 и B_1 свечей совпадают. Определите значение угла α между зеркалами.

14.7. На рисунке 14.10 показан ход луча 1. Как пойдет после отражения луч 2?

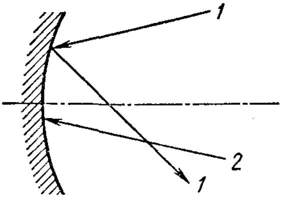

Рис. 14.10

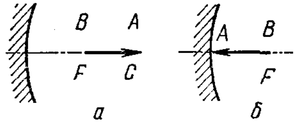

Рис. 14.11

14.8. На рисунке 14.11, *а, б* показано положение предмета *АВ* перед вогнутым зеркалом. Постройте изображение предмета.

14.9. На рисунке 14.12, *а, б* показано положение светящейся точки *А*, ее изображения A_1 и главной оптической оси зеркала. Постройте изображение точек *В* и *С*.

14.10. Предмет и его изображение отстоят от главного фокуса вогнутого сферического зеркала на расстояниях 8 и 72 см. Определите радиус зеркала и линейное увеличение предмета.

14.11. Точечный источник света находится на оси вогнутого (выпуклого) сферического зеркала. Расстояние между источником и центром зеркала равно l, расстояние между источником и его изображением равно L. Чему равен радиус зеркала?

14.12*. Сходящиеся лучи падают на вогнутое зеркало с радиусом 60 см так, что их продолжения пересекаются на оси зеркала на расстоянии 15 см за зеркалом. На каком расстоянии от него сойдутся эти лучи после отражения от зеркала?

14.13. На рисунке 14.13 показан ход луча *1*. Как шел луч *2* до отражения?

14.14. На рисунке 14.14 показано положение предмета *АВ* перед выпуклым зеркалом. Постройте изображение предмета.

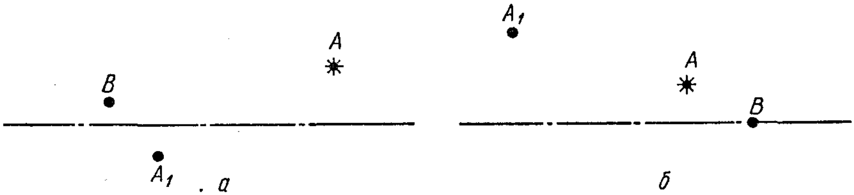

Рис. 14.12

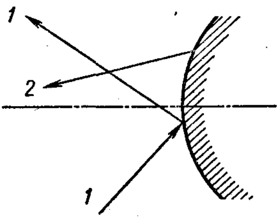

Рис. 14.13

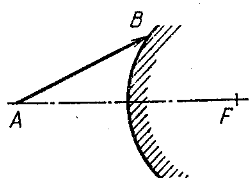

Рис. 14.14

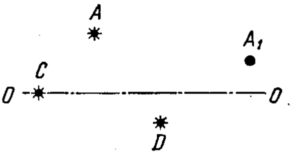

Рис. 14.15

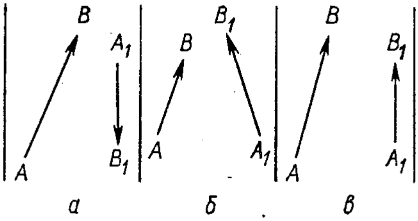

Рис. 14.16

14.15. На рисунке 14.15 показано положение главной оптической оси зеркала OO, точки A и ее изображения A_1. Определите построением положение изображения точек C и D.

14.16. На рис. 14.16, *а, б, в* показано положение предмета AB и его изображения A_1B_1, полученного в сферическом зеркале. Определите построением местоположение зеркала и его фокус.

14.17. Чему равен диаметр изображения Солнца в шариковом подшипнике диаметром 4 см и каковы его угловые размеры, если диаметр Солнца равен $1{,}4 \cdot 10^6$ км, а расстояние до него $1{,}5 \cdot 10^8$ км?

14.18. Сходящиеся лучи падают на выпуклое зеркало с радиусом кривизны 60 см так, что их продолжения пересекаются на оси зеркала в точке на расстоянии $l = 60$ см за зеркалом. На каком расстоянии от зеркала будут пересекаться продолжения этих лучей после отражения от зеркала? Решите задачу при условии, что

$$l = 45 \text{ см}, \quad l = 30 \text{ см} \quad \text{и} \quad l = 15 \text{ см}.$$

14.19. Человек, находящийся на расстоянии 2 м от вогнутого сферического зеркала, видит в нем изображение лица в полтора раза большим, чем в плоском зеркале, находящемся от лица на том же расстоянии. Чему равен радиус зеркала?

14.20. Два одинаковых вогнутых зеркала поставлены друг против друга так, что их фокусы совпадают. На расстоянии 50 см от первого зеркала на общей оси зеркал помещен точечный источник света. Где получится изображение источника после отражения лучей сначала от первого, затем от второго зеркала? Радиус каждого зеркала 80 см.

14.21. Два одинаковых сферических вогнутых зеркала стоят друг против друга так, что их центры совпадают. Найдите положения изображений источника, если он помещен в фокусе одного из зеркал.

14.22. Вогнутое и выпуклое зеркала, обращенные друг к другу, расположены таким образом, что их главные оси совпадают. Радиус каждого зеркала R, расстояние между ними $2R$. На каком расстоянии от вогнутого зеркала на главной оси нужно поместить светящуюся точку S, чтобы лучи, отраженные сначала вогнутым, а затем выпуклым зеркалом, вернулись обратно в точку S?

Глава 15

ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

1. Отношение скорости распространения света в вакууме к скорости распространения света в данной среде называют абсолютным показателем преломления данной среды:

$$n_1 = \frac{c_0}{c_1}.$$

Чем меньше скорость света в данной среде по сравнению со скоростью света в вакууме (чем больше n_1), тем оптически более плотной считается данная среда по сравнению с вакуумом.

Если луч света идет из среды с абсолютным показателем преломления n_1 в среду с абсолютным показателем преломления n_2, то показатель преломления второй среды относительно первой равен:

$$n = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2}. \qquad (15.1)$$

При этом: а) лучи падающий и преломленный лежат в одной плоскости с перпендикуляром, восставленным из точки падения;

$$\text{б)} \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (15.2)$$

где α — угол падения; β — угол преломления луча.

Если луч идет из среды оптически менее плотной в оптически более плотную, то $n_1 < n_2$ и согласно формуле (15.2) $\beta < \alpha$ (преломленный луч отклоняется от своего первоначального направления, приближаясь к перпендикуляру, восставленному из точки падения луча).

Если луч идет из оптически более плотной среды в менее плотную, то $n_1 > n_2$ и $\beta > \alpha$ (преломленный луч отклоняется от своего начального направления к границе раздела сред).

В частности, при падении лучей под предельным углом α_0 угол преломления $\beta = 90°$, и по закону преломления

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (15.3)$$

2. Если две среды с показателями преломления n_1 и n_2 разделены сферической поверхностью, то узкий пучок лучей, выходящий из светящейся точки A_0, расположенной в первой среде, преломившись на границе раздела сред, даст ее действительное или мнимое изображение A_1.

Пусть $n_2 > n_1$ и точка A_0 находится в первой среде на расстоянии d от преломляющей поверхности радиусом R, изображение

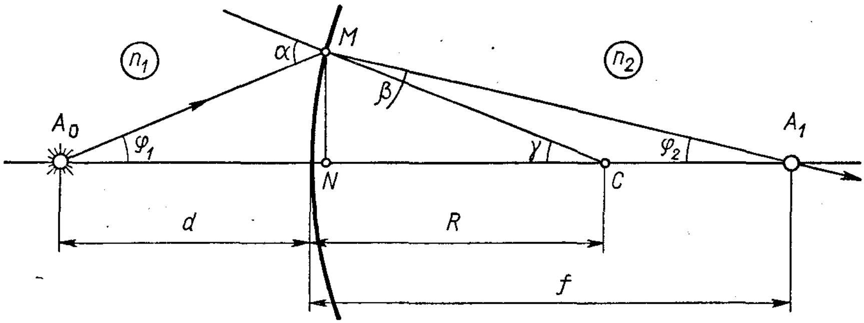

Рис. 15.1

A_1 получается на расстоянии f от этой поверхности во второй среде (рис. 15.1).

В случае параксиальных пучков углы φ_1, α, β, γ и φ_2 малы, поэтому должно быть

$$MN = d\varphi_1 = f\varphi_2 = R\gamma, \tag{1}$$

$$\alpha n_1 = \beta n_2. \tag{2}$$

Из треугольника A_0MC $\measuredangle M = 180° - \alpha = 180° - (\gamma + \varphi_1)$, т. е.

$$\alpha = \varphi_1 + \gamma. \tag{3}$$

Из треугольника A_0MA_1 $\measuredangle M = 180° - \alpha + \beta = 180° - (\varphi_1 + \varphi_2)$, т. е.

$$\alpha - \beta = \varphi_1 + \varphi_2. \tag{4}$$

Исключая из уравнений (1) — (4) углы, получим связь между d, f и R:

$$\frac{n_1}{d} - \frac{n_2}{f} = \frac{n_1 - n_2}{R}. \tag{15.4}$$

Расстояния d и f от преломляющей поверхности до действительных точек в этой формуле нужно брать со знаком «плюс», до мнимых — со знаком «минус». Радиус берется со знаком «плюс», если лучи, идущие от предмета, падают на выпуклую поверхность; со знаком «минус», если лучи падают на вогнутую поверхность.

Формула (15.4) является одной из основных формул геометрической оптики. Применяя ее последовательно для каждой преломляющей поверхности, можно найти положение изображения точки в любой оптической системе. Из этой формулы, в частности, вытекает:

а) если предмет находится в бесконечности ($d = \infty$), то точка A_1 является задним фокусом сферической преломляющей поверхности. Согласно (15.4) фокусное расстояние преломляющей поверхности равно:

$$F = f = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R; \qquad (15.4')$$

б) при $R = \infty$ (преломление происходит на плоской поверхности)

$$n_2 d = n_1 f. \qquad (15.4'')$$

3. Тонкие линзы — двояковыпуклые (радиусы сферических поверхностей $+R_1$ и $+R_2$), плоско-выпуклые ($R_1 = \infty$ и $+R_2$) и выпукло-вогнутые ($+R_1$ и $-R_2$ при $|R_1| < |R_2|$) — обладают следующими свойствами:

а) Лучи, падающие параллельным пучком на линзу, после преломления идут сходящимся пучком и пересекаются в одной точке, называемой фокусом. (Такие линзы поэтому называют собирающими.) Геометрическое место фокусов представляет собой плоскость, параллельную плоскости основания шаровых сегментов, ограничивающих линзу — плоскости линзы. Расстояние между фокальной плоскостью и плоскостью линзы называют фокусным расстоянием F; величину, обратную этому расстоянию,— оптической силой линзы $D = \frac{1}{F}$.

Фокус, расположенный со стороны лучей, падающих на линзу, называют передним, фокус, находящийся в пространстве преломленных лучей, называют задним. Точку линзы, через которую лучи проходят не преломляясь, называют оптическим центром. Прямые, проходящие через оптический центр, называют оптическими осями. Оптическую ось, проходящую через вершины сферических поверхностей, ограничивающих линзу, называют главной оптической осью. Остальные оси, как и лежащие на них фокусы, называют побочными.

б) Лучи, падающие на линзу параллельно какой-либо оптической оси, после преломления проходят через фокус, лежащий на этой оси.

в) Для тонкой собирающей линзы имеет место та же формула (14.1) $\left(\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}\right)$, что и для вогнутого зеркала, с теми же правилами знаков перед d и f.

г) При построении изображения светящейся точки (предмета) из всего потока лучей, падающих на линзу, выбирают два из следующих четырех характерных лучей:

1) луч, проходящий через оптический центр линзы. Этот луч проходит через линзу не преломляясь;

2) луч, идущий параллельно какой-либо оптической оси. После преломления этот луч должен пройти через фокус, лежащий на этой оптической оси (если светящаяся точка лежит на главной оптической оси, для построения изображения нужно провести побочную оптическую ось);

3) луч, проходящий через передний фокус линзы. В силу обратимости хода лучей такой луч после преломления должен идти параллельно главной оптической оси;

4) луч, проходящий через передний двойной фокус линзы. После преломления этот луч проходит через задний двойной фокус.

Ход этих четырех лучей проследить наиболее просто. Все остальные лучи, падающие на линзу из светящейся точки (предмета), проходят через линзу так, что попадают в ту же точку (изображение), где пересекаются лучи, с помощью которых сделано построение. Чаще всего при построении изображений используют первые два луча.

д) Линейное увеличение предмета, даваемое собирающей линзой, определяют по формуле:

$$\Gamma = \frac{H}{H_0} = \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F}.$$

Площадь S изображения предмета оказывается при этом увеличенной в число раз, равное

$$\Gamma_S = \frac{S}{S_0} = \frac{f^2}{d^2} = \Gamma^2, \tag{15.5}$$

где S_0 — площадь предмета.

4. Тонкие двояковогнутые (с радиусом сферических поверхностей $-R_1$ и $-R_2$), плоско-вогнутые ($R_1 = \infty$ и $-R_2$) и вогнуто-выпуклые линзы ($-R_1$ и $+R_2$ при $|R_1| < |R_2|$) обладают следующими основными свойствами:

а) Если лучи падают на линзу параллельным пучком, то после преломления они расходятся так, что их продолжения пересекаются в одной точке, называемой фокусом. Геометрическое место фокусов представляет собой плоскость, параллельную плоскости линзы. Все фокусы у рассеивающей линзы мнимые, оптические оси расположены так же, как у собирающих линз.

б) Если лучи падают на рассеивающую линзу параллельно какой-либо оптической оси, то после преломления они идут так, что своим продолжением попадают в фокус, лежащий на этой оси.

в) Для тонкой рассеивающей линзы имеют место те же формулы, что и для выпуклого зеркала, с теми же правилами знаков перед d и f:

$$-\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}; \quad \Gamma = \frac{H}{H_0} = \frac{f}{d} = \frac{F}{d+F}.$$

г) При построении изображения точки в рассеивающей линзе пользуются лучом, идущим параллельно какой-либо оптической оси (после преломления он своим продолжением проходит через фокус, лежащий на этой оси), и лучом, проходящим через оптический центр (он идет не преломляясь). Все остальные лучи, падающие на линзу из точки-предмета, проходят через линзу так, что их продолжение попадает в ту же точку (изображение), где пересекаются продолжения характерных лучей.

5. Если F — фокусное расстояние линзы, $n_л$ — показатель преломления материала, из которого изготовлена линза, $n_{ср}$ — показатель преломления среды, в которой находится линза, R_1 и R_2 — радиусы кривизны одной и другой поверхности линзы, то

$$\frac{1}{F}=\left(\frac{n_л}{n_{ср}}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R}\right). \quad (15.6)$$

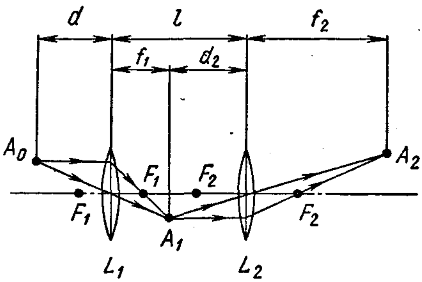

Рис. 15.2

Радиус кривизны выпуклой поверхности берут со знаком «плюс», вогнутой — со знаком «минус», для плоской — $R=\infty$.

Формулы $\pm\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}$ для собирающей и рассеивающей линзы, а также формула (15.6) справедливы лишь при условии, что по обе стороны линзы находится одна и та же среда. Если по обе стороны линзы находятся среды с разными показателями преломления, то положение изображения определяют с помощью формулы (15.4), применяя ее последовательно для каждой сферической поверхности.

6. Если две линзы (допустим, обе собирающие) с фокусными расстояниями F_1 и F_2 поставлены на расстоянии l друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают (рис. 15.2), то изображение предмета и фокусное расстояние системы можно найти следующим образом.

Пусть точка A_0 находится на расстоянии d от первого стекла, которое дает изображение A_1 на расстоянии f_1 от линзы, тогда

$$\frac{1}{F_1}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1}.$$

Рассматривая точку A_1 как предмет для второго стекла, удаленный от него на расстояние $d_2=l-f_1$, можно записать:

$$\frac{1}{F_2}=\frac{1}{l-f_1}+\frac{1}{f_2},$$

где f_2 — расстояние от второго стекла до изображения. Исключая из составленных уравнений f_1, получим зависимость между величинами d и f_2, характеризующими положение предмета и изображения, и величинами F_1, F_2 и l, характеризующими данную оптическую систему:

$$\frac{1}{F_2}=\frac{1}{f_2}+\frac{1}{l-\frac{F_1d}{d-F_1}}. \quad (15.7)$$

Чтобы определить фокусное расстояние системы, нужно положить в этом уравнении $d=\infty$, тогда можно считать, что $f_2=F$, и, стало быть,

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{F_1-l}+\frac{1}{F_2}. \qquad (15.8)$$

Если тонкие линзы сложены вплотную, то $l=0$ и

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}, \quad \text{или} \quad D=D_1+D_2. \qquad (15.9)$$

Формулы (15.6) — (15.9) справедливы для любых тонких линз — и собирающих и рассеивающих. Оптическую силу собирающих линз берут в них со знаком «плюс», рассеивающих — со знаком «минус». Правило знаков перед d и f здесь такое же, как и в случае одиночной линзы. Нетрудно заметить, что формулу (15.8) нельзя использовать для нахождения положения изображения предмета, поставленного перед системой, формулу (15.9) — можно. Во втором случае имеет место равенство:

$$\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}.$$

7. Если предмет находится на расстоянии d от невооруженного глаза с недостатком зрения, d_0 — расстояние, на котором мы хотели бы видеть предмет в очках без особого напряжения, $F_л$ — фокусное расстояние очковой линзы, $F_х$ — фокусное расстояние хрусталика глаза, $F_с$ — фокусное расстояние системы хрусталик — линза, δ — расстояние от сетчатки до хрусталика, то при расположении линзы вплотную к глазу

$$\frac{1}{F_х}=\frac{1}{d}+\frac{1}{\delta}; \quad \frac{1}{F_с}=\frac{1}{d_0}+\frac{1}{\delta}; \quad \frac{1}{F_с}=\frac{1}{F_л}+\frac{1}{F_х},$$

откуда

$$F_л=\frac{dd_0}{d-d_0}. \qquad (15.10)$$

В том случае, когда $d=25$ см, $d=d_0$, $F_л=\infty$, мы имеем плоскопараллельную пластинку (очков не нужно). Если $d<d_0$ (близорукий глаз), то $F_л<0$ (необходима рассеивающая линза). Если $d>d_0$ (дальнозоркий глаз), то $F_л>0$ (необходима собирающая линза).

Оптические приборы, вооружающие глаз, дают увеличение

$$\Gamma=\frac{h}{h_0}=\frac{\varphi}{\varphi_0}, \qquad (15.11)$$

где h и h_0 — линейные размеры изображения на сетчатке вооруженного и невооруженного глаза; φ и φ_0 — углы, под которыми глаз видит предмет через прибор и без него.

Если не учитывать расстояние между глазом и линзой, то линейное увеличение, даваемое лупой с фокусным расстоянием F, будет равно:

$$\Gamma = \frac{f}{F} + 1. \qquad (15.12)$$

В частном случае, когда предмет расположен так, что его изображение получается на расстоянии наилучшего зрения нормального глаза $d_0 = 25$ см, должно быть

$$f = d_0.$$

Увеличение, даваемое микроскопом, равно:

$$\Gamma = \frac{F_1(F_2 + d_0)}{F_2(d - F_1)}, \qquad (15.13)$$

где d — расстояние от предмета до объектива микроскопа; F_1 — фокусное расстояние объектива; F_2 — фокусное расстояние окуляра и d_0 — расстояние от мнимого изображения предмета до глаза наблюдателя.

Расстояние L между окуляром и объективом (длина тубуса микроскопа) может быть найдено из формулы

$$L = \frac{F_1 d}{d - F_1} + \frac{F_2 d_0}{d_0 + F_2}. \qquad (15.14)$$

Если известны длина тубуса и фокусные расстояния линз объектива и окуляра, увеличение, даваемое микроскопом (для нормального глаза), можно определить по приближенной формуле:

$$\Gamma \approx \frac{L d_0}{F_1 F_2}. \qquad (15.15)$$

Для наблюдения изображений удаленных предметов под углом зрения бо́льшим, чем угол, под которым предмет виден невооруженным глазом, применяют зрительные трубы.

Труба Кеплера состоит из двух собирающих линз: длиннофокусного объектива и короткофокусного окуляра. Окуляр помещают относительно объектива так, что его передний фокус находится вблизи заднего фокуса объектива. Уменьшенное изображение предмета, даваемое объективом, рассматривают в окуляр как в лупу.

Увеличение, даваемое трубкой Кеплера, равно:

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{F_1}{F_2}, \qquad (15.16)$$

где α — угол зрения на далекий предмет; β — угол, под которым видно его изображение.

В трубе Галилея объективом служит собирающая линза, а окуляром — рассеивающая. Окуляр располагают так, чтобы его задняя фокальная плоскость находилась вблизи задней фокальной плоскости объектива. Изображение предмета, даваемое объективом, попадает за фокус объектива и служит для окуляра мнимым предметом.

Фокусное расстояние окуляра подбирают так, чтобы падающий на него сходящийся пучок лучей был преобразован в слегка расходящийся и окончательное изображение предмета рассматривалось ненапряженным глазом. Увеличение, даваемое трубой Галилея, определяется по формуле (15.14).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ. ПРИМЕРЫ

1. Задачи на преломление света удобно разделить на три группы. К первой группе можно отнести задачи о преломлении света на плоской границе раздела двух сред, включая сюда задачи о прохождении лучей через плоскопараллельные пластинки и призмы. Ко второй — задачи на построение и расчеты изображений в одиночных линзах. В третью группу входят все задачи на оптические системы, состоящие из нескольких линз или линз и зеркал.

2. Задачи первой группы сравнительно просты. Их решают на основании формулы закона преломления с использованием тригонометрии и геометрии. При решении задачи нужно прежде всего сделать чертеж, где указать ход лучей, идущих из одной среды в другую. В точке падения луча на границу раздела сред, там, где он преломляется, следует провести нормаль и отметить углы падения и преломления, а также начальное направление луча. Перед тем как чертить преломленный луч, необходимо установить, переходит ли он из оптически менее плотной среды в более плотную или наоборот. В зависимости от этого луч отклоняется от своего начального направления или приближаясь к нормали в точке падения, или удаляясь от нее. Особого внимания заслуживает второй случай, так как здесь может наблюдаться явление полного отражения и луч вообще не войдет во вторую среду. (Чтобы не сделать ошибки и правильно изобразить дальнейший ход падающего луча, необходимо знать числовые значения относительного показателя преломления наиболее распространенных веществ и значения предельных углов.) После того как сделан чертеж, нужно записать формулу закона преломления для каждого перехода луча из одной среды в другую и составить вспомогательные уравнения, связывающие углы и расстояния, используемые в задаче. Затем остается решить полученную систему уравнений относительно неизвестной величины.

3. Задачи на построение изображения в одиночных линзах и расчеты, связанные с этим изображением, решаются почти так же, как и задачи на зеркала. Для каждого положения предмета нужно построить изображение, отметить характерные точки линзы (F и $2F$), расстояния от линзы до предмета и его изображения (d и f) и записать формулу линзы и формулу увеличения, связывающие расстояния d, f и F. Добавив к основным уравнениям вспомогательные (обычно они устанавливают дополнительные связи между расстоянием от линзы до предмета и изображения),

нужно решить полученную систему уравнений. Новым здесь является следующее:

а) При построении изображения чаще всего берут лучи, параллельные главной оптической оси (преломляясь в линзе, они проходят через главный фокус сами или своим продолжением), и лучи, идущие через оптический центр линзы (их направление не меняется).

б) Для определения хода лучей, падающих на линзу под произвольным углом (например, это могут быть лучи, идущие из светящихся точек, расположенных на главной оптической оси), используют побочные оптические оси. Проведя такую ось параллельно лучу, ход которого требуется проследить, необходимо найти на ней побочный фокус. Для этого проводят фокальную плоскость линзы и находят точку пересечения плоскости с данной осью, эта точка и является побочным фокусом.

В случае собирающей линзы луч, идущий параллельно данной оптической оси, после преломления должен пройти через побочный фокус; в случае рассеивающей — через побочный фокус проходит продолжение преломленного луча. При построении изображения в собирающих линзах используют только задний фокус линзы, в рассеивающих — передний.

в) К формулам собирающей и рассеивающей линзы добавляется формула (15.6), связывающая фокусное расстояние линзы с ее радиусами и показателями преломления материала линзы и среды. В задачах, требующих построения изображения в линзе с заданными радиусами кривизны, формула (15.6) является вспомогательной, она позволяет определить фокусное расстояние линзы. После того как F найдено, дальнейшее решение задачи проводят по уже известному плану (см. п. 3).

4. В заключение остановимся на решении задач третьей группы. Наиболее простые из них — это задачи на оптические системы, состоящие из тонких линз, сложенных вплотную. Если найти фокусное расстояние такой системы, все дальнейшее решение задачи ничем не будет отличаться от решения задач на одиночную линзу. Для нахождения фокусного расстояния применяют формулу (15.9). С ее написания и рекомендуется начинать решение задач этого типа.

Задачи на построение изображения в оптических системах, составленных из двух (или более) линз, отстоящих друг от друга на некотором расстоянии, весьма сходны с задачами на системы зеркал. Как и в случае зеркал, ход лучей через систему линз проще всего установить по промежуточным изображениям, даваемым отдельными линзами системы. Расчет размеров и положения окончательного изображения здесь также основан на принципе обратимости лучей, из которого следует, что изображение, даваемое первой линзой, можно рассматривать как предмет для второй, и т. д.

Решают задачи этой группы следующим образом. Надо сделать схематический чертеж в соответствии с условием задачи, отметить на нем линзы и предмет и указать характерные точки линз и заданные расстояния. После этого нужно построить изображение предмета в первой линзе, считая, что второй линзы нет. Используя формулу линзы и формулу увеличения (если требуется определить размеры изображения, даваемого системой), необходимо найти из них расстояние от этого изображения сначала до первой, а затем и до второй линзы. При этом нужно сразу же находить числовые значения этих расстояний, поскольку именно они позволяют судить о том, как то или иное изображение (предмет) расположено относительно второй линзы.

Считая первое изображение предметом для второй линзы, аналогично предыдущему находят построением и расчетом положение и размер второго изображения. Точно так же рассчитывают последующие изображения, если линз несколько.

При построениях и расчетах всякий раз следует различать случаи, когда на вторую линзу лучи падают расходящимся или сходящимся пучком. В первом случае изображение точки нужно рассматривать как действительный предмет для второй линзы, во втором — как мнимый. Последовательность действий и расчетные формулы здесь такие же, как и для зеркал. Главное, что требует особого внимания при составлении формул,— это правильный выбор знаков перед d и f. Если при составлении формул знаки были учтены, то в полученные выражения при числовых расчетах нужно подставлять модули входящих в них величин. При графическом построении мнимых предметов их нужно считать для соответствующей линзы изображением и по нему строить предмет — искомое изображение в системе.

В оптических системах, составленных из линзы и зеркала, независимо от того, сложены ли они вместе (линзы с посеребренной поверхностью) или отстоят на некотором расстоянии, преобразование светового потока происходит трижды. Лучи в этой системе идут следующим образом: от светящегося предмета они падают на линзу, преломляются в ней и идут на зеркало. Отражаясь от зеркала, они вновь падают на линзу и, вторично преломившись, дают окончательное изображение. Это изображение может быть и действительным и мнимым.

Порядок расчета в системах, состоящих из линз и зеркал, такой же, как и в системах, составленных только из линз. Если, например, вогнутое сферическое зеркало и собирающая линза с одинаковыми радиусами кривизны сложены вместе, фокусное расстояние F_c системы определяют при помощи формул

$$\frac{2}{R}=-\frac{1}{F_л}+\frac{1}{f} \quad \text{и} \quad \frac{1}{F_л}=-\frac{1}{f}+\frac{1}{F_c},$$

из которых следует, что оптическая сила системы равна:

$$\frac{1}{F_c}=\frac{2}{F_л}+\frac{2}{R}=\frac{2}{F_л}+\frac{1}{F_з}. \qquad (15.17)$$

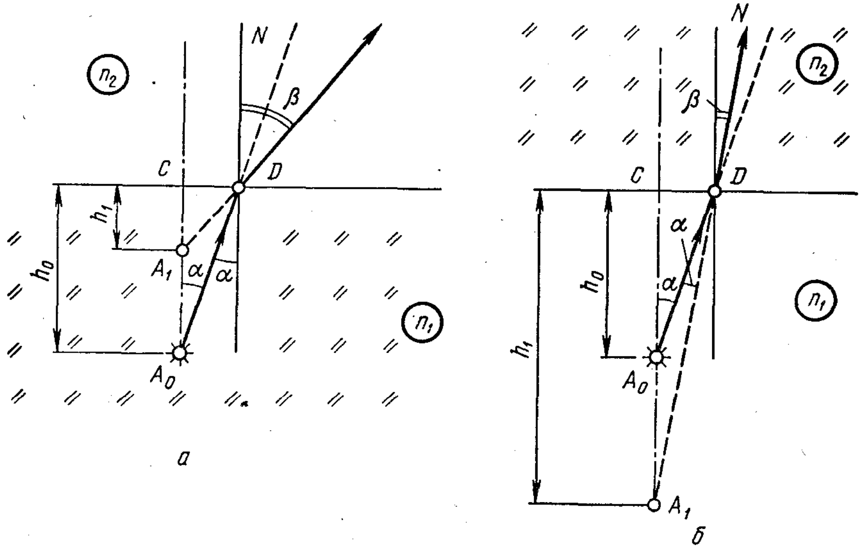

Рис. 15.3

В общем случае $F_л$ и $F_з$ в эту формулу входят со знаком «плюс» или «минус» в зависимости от того, являются ли линза или зеркало собирающими или рассеивающими.

При расчете изображений в такой системе d и f определяют из уравнения

$$\frac{1}{F_c} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \tag{15.18}$$

Для вычисления размеров изображения в оптических системах к уравнениям, составленным на основании формулы линзы (зеркала), добавляют формулу увеличения. В случае нескольких линз (линз и зеркал) полное увеличение, даваемое системой, равно произведению увеличений отдельных линз (зеркал):

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 \ldots \Gamma_n. \tag{15.19}$$

Пример 1. Светящуюся точку, находящуюся в среде с показателем преломления n_1, рассматривают невооруженным глазом из среды с показателем преломления n_2. Каково будет кажущееся расстояние точки от границы раздела сред, если точка находится от этой границы на расстоянии h_0, а глаз расположен так, что в него попадают лучи, падающие на границу раздела под небольшими углами?

Решение. Рассмотрим два случая: а) когда $n_1 > n_2$ (глаз расположен в оптически менее плотной среде) и б) когда $n_1 < n_2$ (глаз находится в среде оптически более плотной).

а) Допустим, что светящаяся точка A_0 (рис. 15. 3,a) находится в среде с показателем преломления n_1 и глаз наблюдателя расположен над предметом в среде с показателем преломления n_2 так, что в него попадают лучи, идущие под малыми углами к нормали N. Выберем из пучка лучей, попадающих в глаз наблюдателя, два луча A_0C и A_0D. Первый луч падает перпендикулярно границе раздела сред и идет во вторую среду не преломляясь. Второй луч, переходя во вторую оптически менее плотную среду, отклоняется от своего начального направления, удаляясь от нормали в точке D. Лучи, вышедшие из точки A_0, кажутся наблюдателю выходящими из точки A_1. Эта точка является мнимым изображением точки A_0; ее расстояние h_1 от границы раздела сред определяют следующим образом.

Обозначим угол падения луча в точке D через α, а угол преломления через β. Из чертежа видно, что в треугольниках A_0DC и A_1DC сторона CD общая. Поэтому можно записать, что

$$CD = h_0 \operatorname{tg} \alpha = h_1 \operatorname{tg} \beta, \text{ откуда}$$

$$h_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} h_0.$$

Поскольку лучи падают на границу раздела сред под небольшими углами, то вследствие малости углов α и β тангенсы этих углов можно заменить их синусами:

$$h_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} h_0.$$

Но по закону преломления $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}$, следовательно, $h_1 = \frac{n_2}{n_1} h_0$. Если, в частности, смотреть из воздуха ($n_2 = 1$) на предмет, находящийся в воде $\left(n_1 = \frac{4}{3}\right)$, то $h_1 = \frac{3}{4} h_0$.

б) Рассмотрим второй случай, когда луч A_0D от светящегося предмета идет в оптически более плотную среду. В точке D он отклонится от своего начального направления к нормали (рис. 15.3, *б*). Наблюдателю будет казаться, что лучи A_0C и A_0D вышли из точки A_1, которая служит изображением предмета A_0. Из треугольников A_0DC и A_1DC аналогично предыдущему находим расстояние h_1 от точки A_1 до границы раздела сред:

$$h_1 = \frac{n_2}{n_1} h_0.$$

Такие же результаты мы получили бы из формулы (15. 4″), положив в ней $d = h_0$ и $f = h_1$. В частном случае, если рассматривать из воды $\left(n_1 = \frac{4}{3}\right)$ предмет, находящийся в воздухе ($n_2 = 1$), то $h_1 = \frac{4}{3} h_0$.

Как показывают приведенные расчеты и построения, светящийся предмет A_0 будет казаться наблюдателю ближе к поверхности раздела ($h_1 < h_0$), если вторая среда оптически менее плотная ($n_1 > n_2$). Если же смотреть на светящуюся точку из среды оптически более плотной, то она будет казаться дальше, чем находится на самом деле, поскольку при $n_2 > n_1$ $h_1 > h_0$.

И наконец, следует отметить, что в общем случае лучи, идущие от светящейся точки предмета, после преломления на плоской границе раздела сред не пересекаются в одной точке на своем продолжении. Нет такой единственной точки A_1, которая являлась бы изображением точки A_0. Это легко заметить, рассматривая лучи, выходящие из A_0 и падающие на границу сред под разными углами. Изображение будет единственным только в тех случаях, когда из A_0 идет узкий пучок — гомоцентрический пучок лучей. Само изображение будет при этом всегда мнимым и будет находиться с предметом по одну сторону от преломляющей поверхности.

В тех случаях, когда гомоцентрический пучок падает нормально на границу сред, как, например, в нашем примере, точки A_1 и A_0 лежат на одном перпендикуляре, проведенном к преломляющей поверхности.

Пример 2. Плоскопараллельная пластинка толщиной d (рис. 15.4) с показателем преломления n_2 находится в среде с показателем преломления $n_1 < n_2$. Луч света из точки S падает на пластинку под углом α_1. Чему равен угол между падающим и преломленным лучом, вышедшим из пластинки? Каково боковое смещение луча, прошедшего через пластинку? На сколько ближе будет казаться точка S, если ее рассматривать через пластинку под малым углом к нормали N?

Р е ш е н и е. Так как по условию задачи $n_2 > n_1$, то, переходя из первой среды во вторую, луч приближается к нормали в точке падения A. При выходе из пластинки он отклоняется от нормали.

Отметив на чертеже углы падения и преломления α_1, α_2, α_3 и боковое смещение BC луча, записываем формулу закона преломления для каждого перехода луча из одной среды в другую в точках A и B:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}; \quad \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (1)$$

В этих уравнениях известен угол падения α_1 и все показатели преломления, поэтому, решая систему уравнений относительно α_3, получим ответ на первый вопрос за-

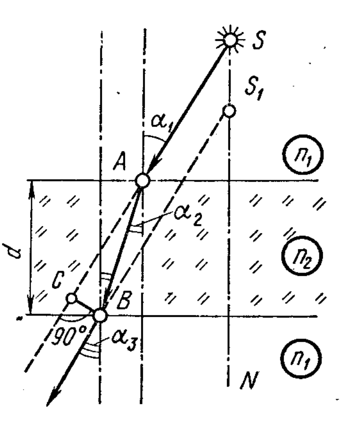

Рис. 15.4

дачи: $\alpha_3 = \alpha_1$. Равенство углов означает, что, пройдя через пластинку, луч выйдет из нее параллельно своему начальному направлению. (Этот вывод справедлив для любого числа пластин.)

Из треугольника ABC боковое смещение BC луча равно:

$$BC = AB \sin(\alpha_1 - \alpha_2),$$

но $AB = \frac{d}{\cos\alpha_2}$, следовательно,

$$BC = \frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)\, d}{\cos\alpha_2}. \qquad (2)$$

Исключая из уравнений (1), (2) угол α_2, после несложных преобразований для бокового смещения луча получим выражение

$$BC = d\sin\alpha_1 - \frac{n_1 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha_1}}\, d.$$

Пройдя через пластинку, рассматриваемый луч идет так, как если бы он вышел из точки S_1, которая служит изображением точки S в плоскопараллельной пластинке при малых углах α_1. Как видно из чертежа, расстояние $SS_1 = y = BC / \sin\alpha_1$. С учетом выражения для BC получим:

$$y = d - \frac{n_1 \cos\alpha_1}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\alpha_1}}\, d,$$

откуда вытекает, что при малых углах наблюдения плоскопараллельная пластинка дает смещение светящейся точки, равное

$$y = (1 - n_1 / n_2)\, d.$$

Этот же результат можно получить иначе, рассматривая точку A и ее изображение A_1 в плоскопараллельной пластинке. Согласно формуле (15.4″) или результату предыдущего примера $y = d - \frac{n_1}{n_2} d$, так как в данном случае $f = h_1 = \frac{n_1}{n_2} d$.

Пример 3. На дне водоема глубиной h находится точечный источник света (рис. 15.5). На поверхности воды плавает круглый диск так, что его центр находится над источником. При каком минимальном диаметре диска лучи от источника не будут выходить из воды?

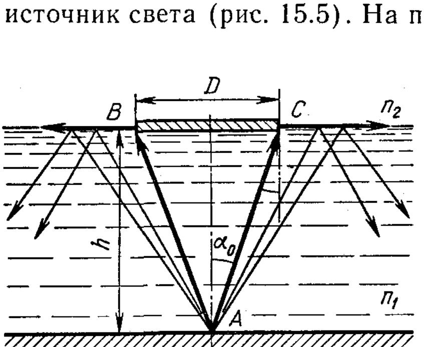

Рис. 15.5

Р е ш е н и е. Лучи, идущие из светящейся точки A, падают на границу раздела вода — воздух расходящимся пучком, переходя из оптически более плотной среды в менее плотную. Те лучи, которые падают на границу раздела под углом, большим предельного α_0, отразятся в воду, испытывая полное отражение, а в воздух выйдут лишь лучи, заключенные внутри конуса с диаметром основания D и вершиной в точке A. Если на воду положить непрозрачную пластинку диаметром D, то ни один луч в воздух не попадет. Диаметр пластинки легко определить, если найти α_0 с помощью законов преломления, поскольку глубина h, на которой находится источник, известна.

Для лучей, идущих из воды в воздух под предельным углом, можно записать:

$$\sin\alpha_0 = \frac{n_2}{n_1}, \qquad (1)$$

где n_1 — показатель преломления воды; n_2 — показатель преломления воздуха.

Диаметр пластинки служит основанием равнобедренного треугольника ABC, поэтому

$$D = 2h\operatorname{tg}\alpha_0. \qquad (2)$$

В уравнениях (1), (2) все величины, кроме D и α_0, известны. Решая их совместно относительно диаметра пластинки, получим:

$$D = \frac{2hn_2}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}.$$

Полагая в этой формуле показатель преломления воды $n_1 = 4/3$, воздуха $n_2 = 1$, находим:

$$D = \frac{6\sqrt{7}}{7}h.$$

Пример 4. Какую выдержку нужно делать, фотографируя погружение спортсмена в воду при прыжке с вышки высотой $H = 8$ м, если допустимая размытость изображения на негативе не должна превышать $h' = 0{,}4$ мм? Фотоаппарат установлен на расстоянии $d = 10$ м от места погружения, фокусное расстояние объектива $F = 10$ см (рис. 15.6).

Решение. При фотографировании какой-либо точки движущегося предмета ее изображение на пленке может получиться размытым — в виде линии. Изображение всего объекта оказывается в этом случае не резким, смазанным. Величина размытости зависит от скорости предмета и выдержки, которая была сделана при съемке. Если выдержка слишком велика, то за время, пока открыт затвор, фотографируемая точка сместится на значительное расстояние. Длина изображения ее следа h' на пленке окажется больше допустимой, и снимок получится некачественным. Чтобы h' не

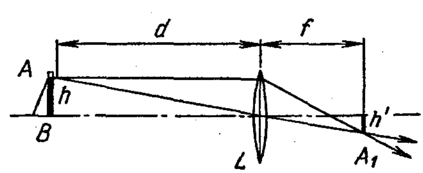

Рис. 15.6

превышало допустимых размеров, время экспозиции t нужно выбрать таким, чтобы след h, прочерченный движущейся точкой, за время t давал изображение, длина которого не больше h'.

Допустим, что одна из крайних точек предмета — спортсмена, свободно падающего с высоты H, попадает в поле зрения объектива и в некоторый момент времени находится в точке A, удаленной от фотоаппарата на расстояние d. Предположим далее, что за время t (при правильно подобранной выдержке) край предмета попадает в точку B, пройдя расстояние h с некоторой средней скоростью $v_{\text{ср}}$; тогда длина следа, прочерченного в пространстве каждой точкой предмета, будет равна:

$$h = v_{\text{ср}} t. \tag{1}$$

На пленке, помещенной вблизи фокальной плоскости объектива, где получается изображение предмета (поскольку d обычно берется много больше F), след h будет спроецирован линзой в уменьшенный отрезок h', длина которого равна:

$$h' = \frac{f}{d} h. \tag{2}$$

(Для простоты отрезок h поставлен перпендикулярно главной оптической оси.) Поскольку изображение действительное, связь между d и f дается формулой

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}. \tag{3}$$

Среднюю скорость движения предмета можно найти из условия, что в точку A предмет попадет, пролетев расстояние H. Так как время выдержки обычно мало и $h \ll H$, можно считать, что на пути h скорость предмета почти не меняется, т. е.

$$v_{\text{ср}} = v_A = \sqrt{2gH}\,. \tag{4}$$

Уравнения (1) — (4) содержат неизвестные величины h, $v_{\text{ср}}$, f и t. Решая их относительно t и подставляя числовые значения, получим:

$$t = \frac{(d - F)\,h'}{F\sqrt{2gH}}; \quad t \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

Пример 5. На расстоянии $d_1 = 1$ м от собирающей линзы параллельно ее плоскости поставлен подсвечиваемый предмет. При таком расположении линзы и предмета площадь изображения на экране равна $S_1 = 400$ см^2. Если линзу передвинуть на $l = 30$ см от предмета, площадь резкого изображения становится равной 9/16 площади предмета. Определите площадь S_0 и оптическую силу D линзы.

Р е ш е н и е. Если в первом положении линза находилась от предмета на расстоянии d_1, от экрана — на расстоянии f_1 и площадь изображения равнялась S_1, то

$$D = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} \qquad (1)$$

и

$$\frac{S_1}{S_0} = \frac{f_1^2}{d_1^2}. \qquad (2)$$

Во втором положении линзы, когда ее сместили на расстояние l от предмета и передвинули экран так, что на нем снова получилось четкое изображение, предмет и экран оказались удаленными от линзы на расстояние d_2 и f_2. Площадь изображения уменьшилась и стала равной $S_2 = 9/16\ S_0$. Для этого положения:

$$D = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} \qquad (3)$$

и

$$\frac{S_2}{S_0} = \frac{f_2^2}{d_2^2}. \qquad (4)$$

К основным уравнениям (1) — (4) следует добавить вспомогательное соотношение

$$d_2 = d_1 + l. \qquad (5)$$

Подставляя выражение для d_2 в уравнения (3), (4) и исключая затем f_2, найдем:

$$D = \frac{\sqrt{S_0/S_2} + 1}{d_1 + l}; \quad D = 1{,}2 \text{ дптр}.$$

Считая D известной величиной, из уравнений (1), (2) получим:

$$S_0 = S_1(Dd_1 - 1)^2; \quad S_0 = 250 \text{ см}^2.$$

Пример 6. Если точечный источник света поместить на расстоянии d_1 (рис. 15.7) от рассеивающей линзы диаметром D_0, вставленной в оправу, то на экране, находящемся на расстоянии l за линзой, получится светлое пятно диаметром D_1. Каков будет диаметр пятна на экране, если источник поместить в фокусе линзы?

Решение. Допустим, что в первом положении светящаяся точка A_0 находится от рассеивающей линзы на расстоянии $d_1 > F$. Лучи, вышедшие из точки A_0, падают на линзу расходящимся пучком, преломляются в ней и, рассеявшись, дают на экране светлое пятно диаметром D_1. Как видно из чертежа, лучи, образующие это пятно, идут на экран так, словно они выходят из светящейся точки A_1, являющейся изображением предмета A_0.

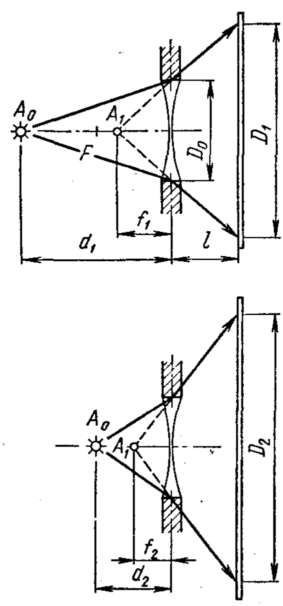

Рис. 15.7

Во втором положении, когда светящаяся точка A_0 находится в фокусе линзы, диаметр светлого пятна на экране увеличивается, поскольку здесь лучи падают на линзу под бóльшим углом. Они освещают экран так, как если бы шли из точки A_1, являющейся изображением точки A_0. Обратите внимание: изображение предмета, расположенного в фокальной плоскости рассеивающей линзы, находится посредине между этой плоскостью и линзой.

Диаметр светлого пятна D_2, которое получается при внесении источника в фокус линзы, легко найти, зная фокусное расстояние линзы F. Для его определения рассмотрим первое положение системы.

Если f_1 — расстояние от мнимого изображения A_1 до рассеивающей линзы, то

$$-\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников можно записать:

$$\frac{D_1}{D_0}=\frac{f_1+l}{f_1}. \qquad (2)$$

Для второго положения источника формула рассеивающей линзы дает:

$$f_2=\frac{F}{2}, \qquad (3)$$

так как $d_2=F$.

Аналогично равенству (2) мы находим:

$$\frac{D_2}{D_1}=\frac{f_2+l}{f_2}. \qquad (4)$$

Решая уравнения (1) — (4) относительно D_2, получим:

$$D_2=2D_1-\frac{2l+d_1}{d_1}D_0.$$

Пример 7. Воздушная полость в стекле имеет форму плоско-выпуклой линзы. Найдите фокусное расстояние этой линзы, если известно, что фокусное расстояние стеклянной линзы, совпадающей по форме с полостью, равно в воздухе F_0.

Р е ш е н и е. Согласно формуле (15.5) плоско-выпуклая линза ($R_1=\infty$, $R_2=R$) может быть и собирающей и рассеивающей в зависимости от того, что больше, показатель преломления материала линзы или показатель преломления среды, в которой находится линза. В первом случае, когда воздушная линза находится в стекле ($n_л=1$, $n_{ср}=n$), ее оптическая сила равна:

$$\frac{1}{F_1}=\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{1}{R}. \qquad (1)$$

Во втором случае, когда стеклянная линза находится в воздухе ($n_л = n$, $n_{ср} = 1$),

$$\frac{1}{F_0} = (n-1)\frac{1}{R}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) находим:

$$F_1 = -nF_0.$$

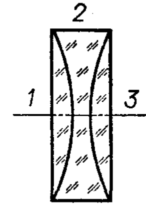

Рис. 15.8

Пример 8. Из плоскопараллельной стеклянной пластинки изготовили три линзы (рис. 15.8). Фокусное расстояние линз *1* и *2*, сложенных вместе, равно $-F'$, фокусное расстояние линз *2* и *3* равно $-F''$. Определите фокусное расстояние каждой линзы.

Решение. Как видно из рисунка, первая и третья линзы плоско-выпуклые, их оптические силы равны $1/F_1$ и $1/F_3$, вторая линза двояковогнутая, ее оптическая сила равна $-1/F_2$.

Если три линзы сложены вместе и образуют плоскопараллельную пластинку, оптическая сила системы равна нулю, так как обе поверхности у нее плоские ($R_1 = \infty$ и $R_2 = \infty$). Для этого случая формула (15.9) дает:

$$\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} = 0. \qquad (1)$$

Согласно условию задачи, если сложить первую линзу со второй, фокусное расстояние системы будет равно $-F'$, следовательно,

$$\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_2} = -\frac{1}{F'}. \qquad (2)$$

При сложении второй линзы с третьей фокусное расстояние оптической системы оказывается равным $-F''$, следовательно,

$$-\frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} = -\frac{1}{F''}. \qquad (3)$$

Решая уравнения (1) — (3) совместно, находим:

$$F_1 = F''; \quad F_2 = \frac{F'F''}{F' + F''}; \quad F_3 = F'.$$

Пример 9. Две тонкие собирающие линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 20$ см и $F_2 = 15$ см, сложенные вплотную, дают четкое изображение предмета на экране, если предмет находится на расстоянии $d = 15$ см от первой линзы. На сколько нужно передвинуть экран, чтобы на нем получилось четкое изображение предмета, если вторую линзу отодвинуть от первой на расстояние $l = 5$ см?

Решение. Если перед оптической системой, состоящей из двух тонких линз, сложенных вместе, расположить предмет на таком расстоянии d, чтобы его действительное изображение четко проецировалось на экран, удаленный от линз на расстояние f_1, то должно выполняться равенство:

$$\frac{1}{F_c}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1}. \qquad (1)$$

В этом уравнении $\frac{1}{F_c}$ представляет оптическую силу двух собирающих линз с фокусными расстояниями F_1 и F_2, сложенных вплотную, поэтому

$$\frac{1}{F_c}=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) находим:

$$f_1=\frac{F_1F_2d}{(F_1+F_2)\,d-F_1F_2}; \quad f_1=20 \text{ см}.$$

Если, не меняя положения предмета, вторую линзу отодвинуть на расстояние l, фокусное расстояние системы изменится, и при том же положении предмета четкое изображение получится на расстоянии f_2 от второй линзы. Чтобы это изображение попало на экран, экран придется передвинуть на некоторое расстояние x, которое нам и требуется определить. Предположим, что экран нужно приблизить ко второму стеклу, тогда должно быть

$$x=f_1-f_2-l. \qquad (3)$$

Для определения f_2 найдем прежде всего изображение предмета в первой линзе, как если бы второй не было. Из формулы $\frac{1}{F_1}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f_1'}$, подставляя числовые значения, сразу находим $f_1'=-60$ см. Знак «минус» указывает на то, что в первой линзе изображение предмета будет мнимым и его можно рассматривать как действительный предмет для второго стекла, удаленный от него на расстояние $d_2=|f_1'|+l=65$ см. Считая полученное изображение предметом для второй линзы, можно записать $\frac{1}{F_2}=\frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}$, откуда расстояние f_2 от второй линзы до окончательного изображения получается равным $f_2=\frac{F_2d_2}{d_2-F_2}=19{,}5$ см.

В соответствии с формулой (3) для x получаем: $x=-4{,}5$ см. Знак «минус» показывает, что наше предположение о направлении смещения экрана было неправильным и его нужно отодвинуть от второй линзы, а не придвинуть к ней.

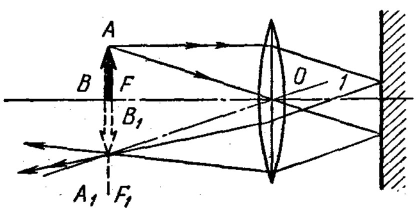

Рис. 15.9

Полученное нами значение для f_2 можно было бы сразу найти и по формуле (15.7).

Пример 10. В фокусе собирающей линзы (рис. 15.9) расположен предмет AB высотой H. По другую сторону линзы перпендикулярно главной оптической оси находится плоское зеркало. Где получится изображение предмета и каков размер этого изображения?

Решение. Выберем из пучка лучей, падающих на линзу из точки A предмета, два луча: проходящий через оптический центр (он отмечен одной стрелкой) и идущий параллельно главной оптической оси (он отмечен двумя стрелками). Точка A расположена в фокальной плоскости линзы, поэтому все лучи, выходящие из этой точки и попадающие на линзу, после преломления пойдут параллельным пучком. Падая на плоское зеркало, такой пучок отразится и пойдет на линзу также параллельным пучком, под тем же углом, под которым он падал на зеркало.

Чтобы проследить ход пучка после вторичного преломления в линзе, проведем побочную оптическую ось I, параллельную отраженным лучам, и найдем на ней побочный фокус F_1. Преломившись в линзе, лучи должны пройти через точку F_1 и дать в ней действительное изображение точки A. Как видно из чертежа, в прямоугольных треугольниках AOB и A_1OB_1 сторона OB общая и $\measuredangle AOB = \measuredangle A_1OB_1$, поэтому эти треугольники равны, и, следовательно, размер изображения равен размеру предмета.

Таким образом, изображение получается действительным, обратным, равным по размерам предмету и находится в той же фокальной плоскости, в которой расположен предмет. Этот результат, как нетрудно заметить, не зависит от положения зеркала, лишь бы оно стояло перпендикулярно главной оптической оси.

Пример 11. Плоская поверхность плоско-вогнутой линзы с фокусным расстоянием F посеребрена. На расстоянии d_1 от вогнутой поверхности линзы расположен точечный источник света (рис. 15.10). Где будет находиться изображение источника?

Решение. Допустим, что на плоско-вогнутую линзу с фокусным расстоянием F падает пучок лучей, выходящий из точки A_0, расположенной на главной оптической оси на расстоянии d_1 от линзы. Выберем из этого потока два луча: идущий на оптический центр и произвольный луч A_0B — и проследим их ход в данной системе.

Первый луч пройдет через линзу не преломляясь, упадет на посеребренную поверхность и отразится назад по тому же направлению. Второй луч, преломившись в линзе, падает на посеребренную поверхность зеркала так, как если бы он выходил из точки A_1, являющейся мнимым изображением предмета A_0. Графически положение точки A_1 находится с по-

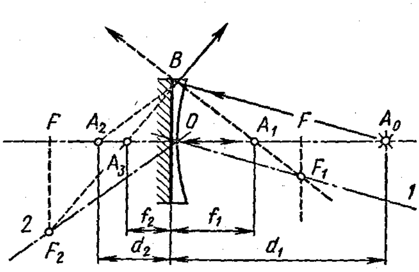

Рис. 15.10

мощью побочной оптической оси *1*, проведенной параллельно лучу A_0B. После преломления луч должен своим продолжением попасть в побочный фокус F_1. Там, где продолжение луча пересекается с главной оптической осью, и находится точка A_1. Аналитически расстояние f_1 от точки A_1 до линзы определяется из уравнения

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_1}. \qquad (1)$$

Пройдя через линзу, луч A_0B сразу же отразится от зеркальной поверхности под тем же углом, под которым он падал. Направление отраженного луча таково, как если бы он выходил из точки A_2, являющейся изображением точки A_1 в плоском зеркале. Нетрудно заметить, что точка A_2 лежит слева от линзы на расстоянии

$$d_2=f_1. \qquad (2)$$

Далее отраженный луч еще раз преломится в линзе и даст окончательное изображение A_3 в точке пересечения его продолжения с продолжением луча A_0O. Ход этого луча построен с помощью побочной оси *2*.

Чтобы найти расстояние f_2 от точки A_3 до линзы, нужно использовать еще раз формулу рассеивающей линзы, рассматривая промежуточное изображение A_2 в зеркале как действительный предмет для рассеивающей линзы. Лучи будут падать на линзу расходящимся пучком так, как если бы в точке A_2 был расположен действительный источник:

$$-\frac{1}{F}=\frac{1}{d_2}-\frac{1}{f_2}. \qquad (3)$$

Из уравнений (1)—(3) находим:

$$f_2=\frac{d_1F}{2d_1+F}.$$

Из построения видно, что при любом положении A_0 ее окончательное изображение — точка A_3 — будет всегда мнимым, поскольку промежуточное изображение A_2 всегда оказывается за линзой. Полученный нами результат сразу же вытекает из формул для посеребренной линзы (15.17) и (15.18). Полагая в них $F_л=-F$, $F_з=\infty$, будем иметь:

$$-\frac{2}{F}=\frac{1}{d_1}-\frac{1}{f_2}, \quad \text{откуда} \quad f_2=\frac{d_1F}{2d_1+F}.$$

Пример 12. Наблюдатель с нормальным зрением рассматривает Луну в телескоп, объектив и окуляр которого имеют фокусные расстояния, соответственно равные $F_{об}=2$ см и $F_{ок}=5$ см. На сколько нужно раздвинуть трубу, чтобы получить изображение Луны на экране на расстоянии $f_2'=25$ см от окуляра? Какова будет при этом величина изображения Луны, если невооруженным глазом ее видно под углом $\alpha=30'$?

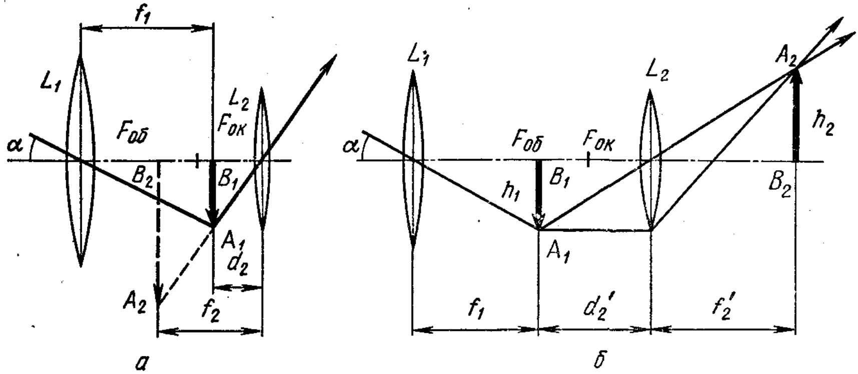

Рис. 15.11

Р е ш е н и е. Если лучи, идущие от удаленного предмета, попадают в трубу Кеплера, то в зависимости от расстояния между ее объективом и окуляром окончательное изображение объекта может получиться или мнимым, или действительным. В первом случае изображение можно увидеть глазом, во втором — спроецировать на экран. Если линзы объектива L_1 и окуляра L_2 установлены так, что изображение Луны рассматривают нормальным глазом с расстояния наилучшего зрения, то ее промежуточное изображение A_1B_1 практически находится в фокальной плоскости объектива (при $d_1 \gg F_{об}$, $f_1 \approx F_{об}$). Оно будет действительным, перевернутым и сильно уменьшенным (рис. 15.11, *а*). Для простоты построения изображения трубу удобно расположить так, чтобы весь предмет лежал по одну сторону от главной оптической оси, как показано на рисунке. Для построения промежуточного изображения удаленных предметов в зрительных трубах достаточно использовать лишь луч, проходящий через оптический центр объектива, учитывая, что положение в этом случае всегда известно — практически оно лежит в его фокальной плоскости.

Промежуточное изображение, даваемое объективом, можно рассматривать как предмет для окуляра, поскольку от этого изображения, например от точки A_1, лучи идут на вторую линзу расходящимся пучком, как если бы они выходили из действительного источника.

Чтобы окончательное изображение Луны A_2B_2 оказалось мнимым и находилось на расстоянии наилучшего зрения $f_2 = 25$ см, окуляр нужно расположить так, чтобы A_1B_1 попадало между $F_{ок}$ и L_2. Расстояние d_2 между окуляром и изображением A_1B_1 должно при этом удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{F_{ок}} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}. \qquad (1)$$

Для проецирования изображения Луны на экран линзу окуляра нужно сместить от промежуточного изображения A_1B_1 так, чтобы оно попало между фокусом и двойным фокусом окуляра (рис. 15.11, *б*).

Если резкое изображение A_2B_2 проецируется на экран, отстоящий от линзы L_2 на расстоянии f_2', окуляр нужно отодвинуть от объектива настолько, чтобы предмет A_1B_1 находился от линзы L_2 на расстоянии d_2', удовлетворящем уравнению

$$\frac{1}{F_{ок}}=\frac{1}{d_2'}+\frac{1}{f_2'}. \tag{2}$$

Как видно из чертежа, окуляр для этого необходимо передвинуть вправо от начального положения на расстояние

$$x=d_2'-d_2. \tag{3}$$

Линейные размеры изображения Луны на экране можно определить из формулы увеличения линзы, зная угол α, под которым Луну видно невооруженным глазом, и фокусное расстояние объектива $F_{об}$:

$$h_2=\frac{f_2'}{d_2'}h_1.$$

Но $h_1=F_{об}\operatorname{tg}\alpha\approx F_{об}\alpha$ (поскольку угол α очень мал), поэтому высота изображения Луны на экране будет равна:

$$h_2\approx\frac{f_2'}{d_2'}F_{об}\alpha. \tag{4}$$

Решая уравнения (1) — (4) совместно относительно неизвестных величин d_2 и d_2' и подставляя числовые значения, получим:

$$d_2=\frac{f_2F_{ок}}{f_2+F_{ок}};\quad d_2=4{,}16\ \text{см};\quad d_2'=\frac{f_2'F_{ок}}{f_2'-F_{ок}};\quad d_2'=6{,}25\ \text{см}.$$

После этого будем иметь: $x=6{,}25$ см $-$ $4{,}16$ см ≈ 2 см; $h_2=7$ см.

Пример 13. Зритель с нормальным зрением смотрит через театральный бинокль на сцену, находящуюся от него на значительном расстоянии. Оптическая сила объектива $\frac{1}{F_{об}}=5$ дптр, окуляра $\frac{1}{F_{ок}}=-25$ дптр. На каком расстоянии должны быть расположены объектив и окуляр бинокля, чтобы зритель четко видел сцену? На сколько нужно сместить окуляр, чтобы сцену можно было рассматривать глазом, аккомодированным на бесконечность?

Решение. Чтобы зритель с нормальным зрением хорошо видел в театральный бинокль действие, происходящее на сцене, необходимо, чтобы окончательное изображение предмета, даваемое системой линз трубы Галилея, получалось на расстоянии наилучшего зрения. Так как сцена находится на очень большом расстоянии от зрителя ($d_1 \gg \gg F_{об}$), то изображение A_1B_1, даваемое объективом L_1, получается на ничтожно малом расстоянии от фокальной плоскости линзы ($f_1 \approx F_{об}$) (рис. 15.12).

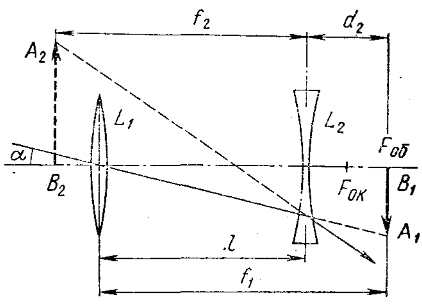

Рис. 15.12

В трубе Галилея рассеивающая линза окуляра ставится перед фокальной плоскостью объектива, поэтому лучи, которые давали бы изображение A_1B_1, падают на линзу L сходящимся пучком и A_1B_1 можно рассматривать как мнимый предмет для окуляра, отстоящий от него на расстоянии

$$d_2 = F_{об} - l_1, \qquad (1)$$

где l_1 — расстояние между линзами бинокля.

После преломления в окуляре лучи, идущие в точку A_1, пойдут расходящимся пучком и на своем продолжении дадут окончательное мнимое изображение A_2. Из всего пучка лучей, идущих от предмета на объектив, на чертеже указан лишь один, поскольку положение изображения известно.

Расстояние d_2, а следовательно, и расстояние l_1 должны быть при этом подобраны так, чтобы изображение сцены A_2B_2 получалось в окуляре на расстоянии $f_2 = 25$ см. Изображение мнимого предмета A_1B_1 в окуляре является мнимым, поэтому формула рассеивающей линзы для этого случая дает

$$-\frac{1}{F_{ок}} = -\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1), (2) находим:

$$d_2 = \frac{f_2 F_{ок}}{f_2 - F_{ок}}; \quad d_2 = 4{,}76 \text{ см}; \quad l_1 = F_{об} - d_2 = 15{,}24 \text{ см}.$$

Чтобы видеть сцену глазом, аккомодированным на бесконечность, линзы бинокля необходимо установить таким образом, чтобы изображение A_2B_2 получилось не на расстоянии наилучшего зрения, а очень далеко. Этого можно добиться, изменяя расстояние l между объективом и окуляром. Полагая в уравнении (2) $f_2 = \infty$, получим: $d_2 = F_{ок}$, и согласно формуле (1) будем иметь:

$$l_2 = F_{об} - F_{ок} = 16 \text{ см}.$$

В этом случае фокальные плоскости объектива и окуляра должны быть совмещены. По сравнению с первым расположением линзы нужно раздвинуть на расстояние

$$\Delta l = l_2 - l_1 = 0{,}76 \text{ см}.$$

Пример 14. В микроскопе фокусное расстояние объектива равно $F_{об} = 5,4$ мм, окуляра $F_{ок} = 20$ мм. Каково будет увеличение предмета, находящегося от объектива на расстоянии $d_1 = 5,6$ мм, если его рассматривать глазом с нормальным зрением? Какова будет при этом длина тубуса?

Решение. Если предмет AB поместить на расстоянии d_1 от объектива микроскопа (между $F_{об}$ и $2F_{об}$, ближе к $F_{об}$), его изображение A_1B_1 будет находиться от объектива на расстоянии f_1, удовлетворяющем уравнению

$$\frac{1}{F_{об}} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1}. \tag{1}$$

Изображение предмета будет увеличено при этом в

$$\Gamma = \frac{f_1}{d_1} \text{ раз.} \tag{2}$$

Окуляр располагают относительно изображения A_1B_1 так, чтобы оно рассматривалось через него как через лупу. Окончательное изображение A_2B_2 будет мнимым и будет отстоять от окуляра на расстоянии наилучшего зрения нормального глаза $f_2 = 25$ см, если расстояние d_2 от окуляра до промежуточного изображения — предмета A_1B_1 подобрано так, что оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{F_{ок}} = \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2}. \tag{3}$$

Увеличение изображения A_1B_1, даваемое окуляром, при этом окажется равным:

$$\Gamma = \frac{f_2}{d_2}. \tag{4}$$

Полное увеличение оптической системы, состоящей из двух линз, равно произведению увеличений, даваемых каждой линзой в отдельности, поэтому увеличение микроскопа равно произведению увеличений объектива и окуляра:

$$\Gamma = \Gamma_{об}\Gamma_{ок}. \tag{5}$$

Расстояние между линзами — длина тубуса микроскопа — равно:

$$l = f_1 + d_2. \tag{6}$$

Составленная система уравнений является основной системой для расчета увеличения микроскопа. В данной задаче Γ_1, Γ_2, Γ, d_2 и f_1 неизвестны, величины $F_{об}$, $F_{ок}$, d_1 и f_2 заданы. Решая уравнения (1) — (6) относительно искомых неизвестных — увеличения микроскопа и длины тубуса, после подстановки числовых значений получим:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_{об}(f_2 + F_{ок})}{F_{ок}(d_1 - F_{об})}; \quad \Gamma = 365; \quad l = \frac{d_1 F_{об}}{d_1 - F_{об}} + \frac{f_2 F_{ок}}{f_2 + F_{ок}}; \quad l = 17 \text{ см.}$$

15.1. Показатели преломления алмаза и стекла равны соответственно 2,42 и 1,5. Каково должно быть отношение толщин слоев этих веществ, чтобы время распространения света в них было одинаковым?

15.2. На границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 падает луч света. Определите угол падения, если известно, что отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу.

15.3. На поверхность слоя тетрахлорметана толщиной 4 см налит слой воды толщиной 2 см. Показатели преломления CCl_4 и воды равны соответственно 1,46 и 1,33. На какой глубине будет казаться расположенным дно сосуда, в который налиты жидкости, если смотреть на поверхность воды под малым углом к нормали?

15.4. Стеклянная пластинка толщиной 3,2 мм имеет на передней и задней сторонах риски. Чему равен показатель преломления стекла, если при наведении микроскопа с верхней риски на нижнюю его тубус пришлось опустить на 2 мм? Углы, которые получаются между падающим лучом и осью микроскопа, можно считать малыми.

15.5. Найдите построением и аналитически положение изображения точечного источника света, расположенного на расстоянии 4 см от передней поверхности плоскопараллельной пластинки с показателем преломления 1,5 и толщиной 3 см, задняя сторона которой посеребрена.

15.6. Перед вогнутым зеркалом с оптической силой $D = 2$ дптр на главной оптической оси находится точечный источник света, удаленный от вершины зеркала на расстояние $d = 102$ см. Между зеркалом и источником поставили плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления $n = 1{,}5$. Какова должна быть толщина x пластинки, чтобы изображение совпало с самим источником?

15.7. В водоем на некоторую глубину помещают источник белого света. Показатель преломления воды для красных лучей 1,328, для фиолетовых 1,335. Вычислите отношение радиусов кругов, в пределах которых возможен выход красных и фиолетовых лучей в воздух.

15.8. На шар радиусом R, изготовленный из материала с меньшим показателем преломления n_2, чем показатель преломления n_1 окружающей среды, падает пучок параллельных лучей. Определите радиус светового пучка, который может проникнуть в шар.

15.9. Луч света входит в стеклянную призму под углом 2α и выходит под углом $\beta = \alpha$. Преломляющий угол призмы равен $\alpha/2$. Определите угол отклонения луча от его первоначального направления и показатель преломления материала призмы.

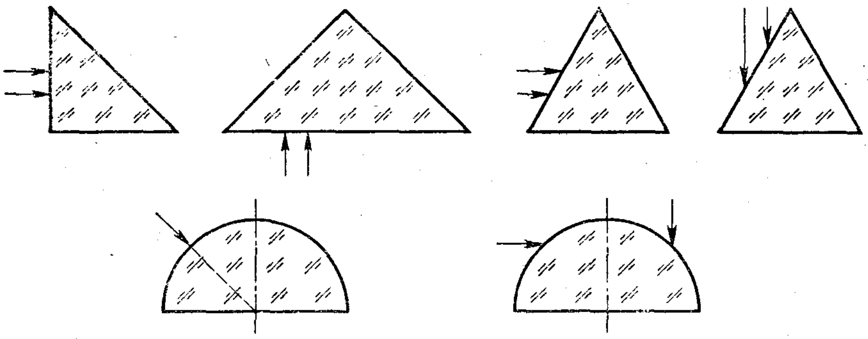

Рис. 15.13

15.10. Лучи света падают на стеклянную призму (рис. 15.13). Каков дальнейший ход падающих лучей?

15.11. Равнобедренная стеклянная призма с малыми преломляющими углами α помещена в параллельный пучок лучей, падающих нормально на ее основание (рис. 15.14). Коэффициент преломления стекла 1,57, размер основания $2a = 50$ см. Найдите значение преломляющего угла, если в середине экрана, расположенного на расстоянии 1 м от призмы, образуется темная полоса шириной 1 см.

15.12. Светящаяся точка находится в воздухе на расстоянии $d = 0{,}60$ м от выпуклой поверхности стекла радиусом $R = 7{,}5$ см. а) Определите расстояние между изображениями точки, которые образуются лучами, отраженными и преломленными поверхностью. Коэффициент преломления стекла $n = 1{,}50$. б) Решите задачу при условии, что поверхность стекла вогнутая.

15.13. На дне аквариума, имеющего форму шара радиусом R, находится рыбка. Где увидит рыбку наблюдатель, смотрящий на нее сверху, если показатель преломления воды равен n? Стенки сосуда очень тонкие.

15.14. На рисунке 15.15 показан ход луча *1*. Как идет луч *2*?

15.15. На рисунке 15.16, *а, б* показано положение предмета AB, а на рисунке 15.16, *в* — положение предмета и непрозрачного экрана перед собирающей линзой. Постройте изображения предметов.

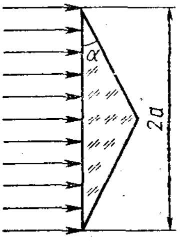

Рис. 15.14

15.16. На рисунке 15.17, *а, б* показано положение главной оптической оси, оптического центра O, светящейся точки A_0 и ее изображения A_1. Определите фокусное расстояние линзы.

15.17. На рисунке 15.18, *а, б* показано положение главной оптической оси, точки A и ее изображения A_1. Определите положение линзы и ее фокуса. Постройте изображение точек B и C.

15.18. На рисунке 15.19, *а, б, в, г* показано положение предмета A_0B_0 и его изображения A_1B_1 в линзе. Постройте линзу и изображение точки C.

15.19. Точечный источник света находится на оси тонкой собирающей (рассеивающей) линзы. Расстояние между источником и ближайшим к нему фокусом равно l, расстояние между источником и его изображением L. Определите фокусное расстояние линзы.

15.20. Линза дает прямое, в Г раз увеличенное изображение предмета, находящегося на расстоянии d от линзы. Чему равна оптическая сила линзы?

15.21. Изображение предмета получено на расстоянии 10 см от линзы в ее фокальной плоскости. Высота изображения 2 см. Определите положение предмета и его размеры.

15.22. Светящийся диск радиусом 3 см расположен перпендикулярно оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием 5 см. Линза вставлена в оправу. Расстояние от предмета до линзы 20 см, диаметр линзы 3 см. Чему равен диаметр светлого пятна на экране, установленном в фокусе линзы?

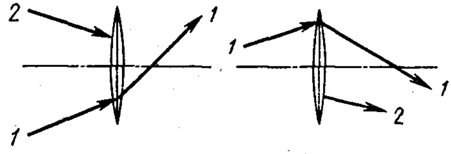

Рис. 15.15

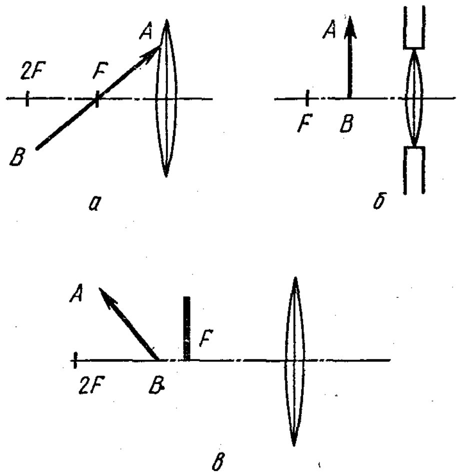

Рис. 15.16

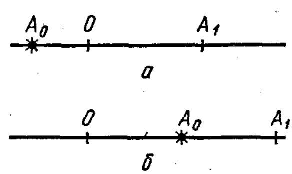

Рис. 15.17

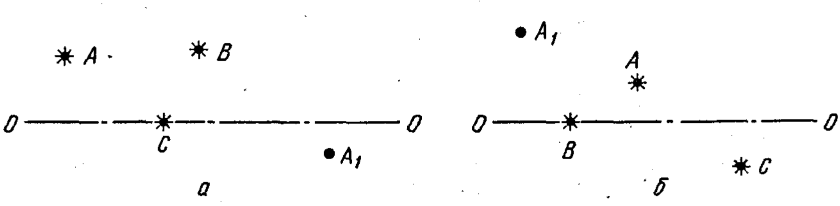

Рис. 15.18

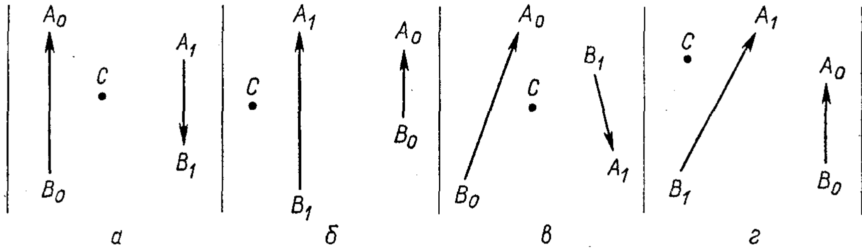

Рис. 15.19

15.23. Расстояние между источником света и экраном равно L. Линза, помещенная между ними, дает на экране четкое изображение источника при двух положениях, расстояние между которыми равно l. Определите фокусное расстояние линзы.

15.24. Тонкая собирающая линза дает изображение предмета на экране высотой H_1 и H_2 при двух положениях линзы между предметом и экраном и неизменном между ними расстоянии. Чему равна высота предмета?

15.25. Наблюдатель рассматривает через короткофокусную линзу удаленное здание, держа ее на расстоянии 55 см от глаза. Каково фокусное расстояние линзы, если при перемещении ее к глазу на 25 см видимые размеры изображения увеличиваются вдвое?

15.26. Из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием 5 см вырезана по диаметру ее центральная часть шириной 1 см. Обе части линзы после этого были сдвинуты в плоскости линзы до соприкосновения. На главной оптической оси неразрезанной линзы на расстоянии 15 см от линзы находится точечный источник света S. а) Определите расстояние между изображениями источника, которые получатся в этой системе. б) Решите задачу при условии, что линза была разрезана по диаметру на две части и обе половинки раздвинуты на расстояние 1 см.

15.27. Объектив кинопроекционного аппарата имеет фокусное расстояние 5 см. Размер кадра на пленке 18×24 мм. Изображение кадра проецируется на экран размером 100×120 см. На каком расстоянии от экрана следует расположить аппарат, чтобы на экране получить максимальный размер изображения всего кадра? Какая часть экрана по площади будет при этом занята изображением?

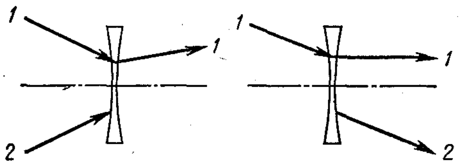

Рис. 15.20

15.28. Изображение предмета на матовом стекле фотоаппарата с расстояния 15 м получилось высотой 60,6 мм, а с расстояния 9 м — высотой 101,6 мм. Найдите фокусное расстояние линзы объектива.

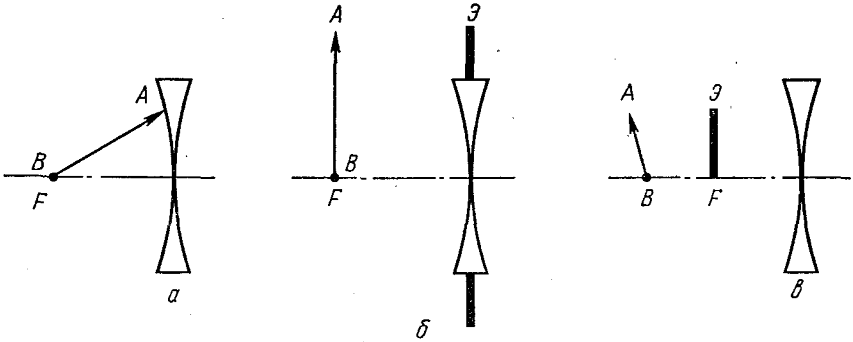

Рис. 15.21

15.29. Расстояние от предмета до переднего фокуса линзы втрое меньше, чем расстояние от его изображения до заднего фокуса. На сколько изменится расстояние между предметом и его изображением, если предмет приблизить к линзе на расстояние l? Фокусное расстояние линзы F.

15.30. На некотором расстоянии от тонкой собирающей линзы помещен предмет и на экране получено его изображение. При этом линейное увеличение оказалось равным Γ_1. Затем предмет приблизили к линзе на расстояние l. Перемещая экран, на нем снова получили четкое изображение и измерили линейное увеличение, оно оказалось равным Γ_2. Определите фокусное расстояние линзы.

15.31. Источник света находится на расстоянии 1,5 м от экрана, на котором с помощью собирающей линзы получают увеличенное изображение источника. Затем экран отодвигают на 3 м и снова получают увеличенное изображение источника. Чему равны фокусное расстояние линзы и размер источника, если размер изображения в первом случае 18 мм, а во втором 96 мм?

15.32. На рисунке 15.20 изображен ход луча *1*. Как шел луч *2*?

15.33. На рисунке 15.21, *а* показано расположение предмета AB, а на рисунках 15.21, *б, в* — положение предмета и непрозрачного экрана *Э*. Постройте изображения предметов.

15.34. На рисунке 15.22 показаны главная оптическая ось OO, светящаяся точка A и ее изображение A_1. Определите положение линзы и ее фокуса. Постройте изображение точки C.

15.35. Предмет, поставленный перпендикулярно главной оптической оси двояковогнутого сферического стекла, дал мнимое изображение, размеры которого в 2 раза меньше размеров предмета. Если предмет отодвинуть на 100 см от линзы, изображение уменьшится втрое. Где находился предмет вначале и каково фокусное расстояние линзы?

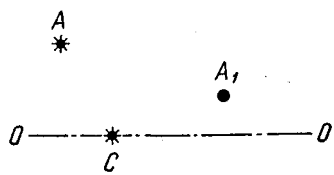

Рис. 15.22

15.36. Цилиндрический пучок лучей падает на рассеивающую линзу параллельно главной оптической оси, имея диаметр 5 см. Пройдя через линзу, пучок дает на экране пятно диаметром 7 см. Каков будет диаметр светлого пятна, если рассеивающую линзу заменить собирающей с тем же фокусным расстоянием?

15.37. Собирающая линза дает четкое изображение предмета на экране. Между линзой и экраном на расстоянии 15 см от экрана помещают рассеивающую линзу, вследствие чего изображение удаляется и оказывается на расстоянии 25 см от рассеивающей линзы. Чему равно фокусное расстояние рассеивающей линзы?

15.38. Оптическая сила тонкой линзы в воздухе и в жидкости с неизвестным показателем преломления равна соответственно D_0 и D_1. Чему равен показатель преломления жидкости, если у стекла линзы он равен n?

15.39. В куске стекла с показателем преломления n имеется воздушная полость в виде двояковыпуклой (двояковогнутой) тонкой линзы с радиусами кривизны поверхностей R. На оптической оси этой линзы внутри куска стекла на расстоянии d от линзы находится песчинка. На каком расстоянии от линзы получается изображение песчинки?

15.40. Тонкая двояковыпуклая линза с радиусами кривизны 17,0 см изготовлена из стекла с показателем преломления 1,5. Линза находится на границе раздела двух сред с показателями преломления 1,33 и 1,4. Чему равно расстояние между фокальными плоскостями линзы?

15.41. Тонкая плоско-вогнутая (плоско-выпуклая) линза опущена в воду в горизонтальном положении вогнутой поверхностью вниз. Радиус вогнутой поверхности равен 15 см. На оси линзы, на расстоянии 15 см от нее, под водой находится светящаяся точка. Где будет находиться изображение этой точки? На сколько сместится это изображение, если линзу перевернуть?

15.42. На экране в плоскости главного фокуса двояковыпуклой линзы получают изображение Солнца. Диаметр изображения оказывается равным 7 мм. Определите радиус сферических поверхностей линзы, если невооруженным глазом диаметр Солнца виден под углом 32′. Показатель преломления стекла 1,63.

15.43. Лупа, ограниченная сферическими поверхностями, радиусы которых равны 6 и 8 см, дает увеличение в 4,75 раза. На каком расстоянии от линзы находится предмет? Показатель преломления стекла 1,6.

15.44. На плоско-вогнутую линзу, изготовленную из стекла с показателем преломления 1,7, падает цилиндрический пучок лучей, параллельных главной оптической оси. Диаметр пучка равен 5 см. За линзой на расстоянии 20 см поставлен экран, где получается светлое пятно диаметром 15 см. Определите радиус сферической поверхности линзы.

15.45. Две тонкие плоско-выпуклые линзы, фокусные расстояния которых в воздухе равны F, помещены в оправу так, что их выпуклые поверхности соприкасаются. Определите фокусное расстояние системы в воде с показателем преломления n. Считать, что внутрь оправы вода не попадает. Как изменится ответ, если вода попадет между линзами?

15.46. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями 40 и 80 см установлены на расстоянии 20 см друг от друга так, что их главные оптические оси совпадают. Предмет помещен на расстоянии 60 см от первого стекла. Где будет находиться его изображение? Решите задачу графически и аналитически. Что будет происходить с изображением, если линзы сдвигать? раздвигать?

15.47. Источник света находится на расстоянии 30 см от собирающей линзы с фокусным расстоянием 20 см. По другую сторону линзы на расстоянии 40 см расположена рассеивающая линза с фокусным расстоянием —12 см. Где находится изображение источника?

15.48. Две собирающие линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 установлены на расстоянии l друг от друга. а) На каком расстоянии от первой линзы нужно поставить предмет высотой H_0, чтобы получить прямое изображение высотой H? б) Рассмотрите случай, когда обе линзы рассеивающие, и установите, при каких значениях l задача имеет решение.

15.49. На систему, состоящую из двух линз с равными по абсолютному значению фокусными расстояниями, одна из которых собирающая, другая рассеивающая, падает свет от бесконечно удаленного источника и собирается в точке на некотором расстоянии от второй линзы. Если линзы поменять местами, изображение сместится на 20 см. Определите фокусное расстояние линз.

15.50. Три линзы с фокусными расстояниями F, F и $-F$ расположены на одной оси друг за другом так, что расстояния между ними равны F. Источник света находится на расстоянии $2F$ перед собирающей линзой. Найдите его изображение. Где будет находиться изображение, если предмет поместить на расстоянии $2F$ от рассеивающей линзы? Каков будет ответ, если рассеивающая линза будет находиться между собирающими?

15.51. К вогнутому зеркалу приложена вплотную небольшая собирающая линза с той же кривизной, что и зеркало. Без линзы действительное изображение предмета получается на расстоянии 50 см, с линзой — на расстоянии 10 см от зеркала. Найдите главное фокусное расстояние линзы.

15.52. Одна сторона двояковогнутой симметричной стеклянной линзы посеребрена. Показатель преломления стекла равен 1,6, радиус кривизны поверхности линзы 20 см. На расстоянии 50 см от линзы находится предмет высотой 5 см. Определите высоту изображения, даваемого оптической системой.

15.53. Человек с нормальным зрением рассматривает свой зрачок в плоском зеркале. Во сколько раз изменятся угловые размеры изображения зрачка, если его рассматривать через лупу с оптической силой 10 дптр? На какое расстояние нужно при этом передвинуть зеркало, чтобы изображение было отчетливым? Каким будет увеличение зрачка при аккомодации глаза на бесконечность?

15.54. Чему равен предел зрения невооруженного глаза дальнозоркого человека, если, надев очки с оптической силой 2,5 дптр, человек может отчетливо видеть предметы, находящиеся на расстоянии не менее 0,2 м?

15.55. Максимальное расстояние, на котором близорукий человек достаточно хорошо различает мелкие детали без чрезмерного утомления глаз, равно 15 см. Какой оптической силы очки должен носить такой человек, чтобы ему было удобно читать? Расстоянием между линзой и глазом пренебречь.

15.56. На каком максимальном расстоянии от выпуклого зеркала радиусом 16 см близорукий человек без очков будет четко видеть изображение далеких предметов в этом зеркале, если обычно он пользуется очками с оптической силой —5 дптр? С какого расстояния он четко увидит свое изображение в зеркале?

15.57. Фотоаппарат с оптической силой объектива 5 дптр наведен на предмет, находящийся на расстоянии 4 м. До какого диаметра нужно задиафрагмировать объектив, чтобы размытость изображения предметов, находящихся на расстоянии 5 м от аппарата, не превышала 0,2 мм?

15.58. Поверхность Земли фотографируют со спутника, запущенного на высоту 100 км. Объектив фотокамеры имеет фокусное расстояние 10 см. Минимальный размер видимых деталей изображения на пленке (разрешающая способность пленки) 10^{-2} мм. Определите: а) минимальные размеры предметов, находящихся на Земле, которые будут видны на пленке; б) время экспозиции, при котором орбитальное движение спутника не влияет на качество изображения.

15.59. В зрительную трубу с фокусными расстояниями объектива и окуляра, равными 50 и 10 см, рассматривают удаленный предмет, который виден невооруженным глазом под углом 30′. Под каким углом виден этот предмет в трубу, если труба установлена так, что далекие предметы наблюдаются через нее глазом, аккомодированным на бесконечность?

15.60. Объектив и окуляр зрительной трубы Галилея имеют фокусные расстояния, соответственно равные 57 и —4 см. На расстоянии 12 см от окуляра расположен экран. При каком расстоянии между объективом и окуляром на экране получится четкое изображение Солнца? Каков будет диаметр этого изображения, если угловой диаметр Солнца равен 30′?

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1.2. $\approx 1{,}15$ км. **1.3.** 9,7 км/ч; 8,3 км/ч; 8,6 км/ч. **1.4.** $v_1 = \dfrac{s_1 v_0}{s_1 + v_0 t}$.
1.5. 48 км/ч (48 км/ч); 0 (46 км/ч). **1.6.** 25 км/ч. **1.7.** 340 м/с; 10 м/с. **1.8.** 1,5 м/с; 0,5 м/с. **1.9.** 1 ч 50 мин. **1.10.** Решение. $s = (v_л + v)\,t_1$ (1); $s = (v_л - v)\,t_2$ (2); $s = \sqrt{v_л^2 - v^2}\,\dfrac{t_3}{2}$ (3); $\dfrac{t_1 + t_2}{t_3} = n$ (4). Из (1) — (4)

$$v_л = nv/\sqrt{n^2 - 1} = 4{,}8 \text{ км/ч}.$$

1.11. 30 км/ч; на юго-восток. **1.12.** $\dfrac{2}{3}\dfrac{l}{v}$; $\dfrac{2}{3}l$. **1.13.** $(l_1 - l_2)\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$

1.14. $\dfrac{\sqrt{s^2 - l^2}}{v} + \dfrac{l\sqrt{v^2 - u^2}}{uv}$. **1.15.** Под углом $\alpha = \arcsin\dfrac{v_0 - u}{v_1}\cdot\dfrac{l}{s}$ к начальному направлению на катер. Относительно воды минимальная скорость равна $(v_0 - u)\,l/s$, относительно берега — $\left(\sqrt{u^2(s^2 - l^2) + v_0^2 l^2}\right)/s$. **1.16.** $v_2 b/[(v_1 \sin\alpha + v_2\cos\alpha)\,a]$; $v_2 b/[(v_2\cos\alpha - v_1\sin\alpha)\,a]$. **1.17.** 585 м/с. **1.18.** ≈ 1с. **1.19.** 7,94 м/с; 18 м/с. **1.20.** 25 см. **1.21.** 5,9 м/с. **1.22.** $(a_1 \pm a_2)\,t^2/4$. **1.27.** $\pi v_1 t_1/4$; $3\pi v_1 t_1/16$; $5\pi v_1/48$. **1.30.** 30,6 м. **1.31.** 5,2 м; 2,45 м/с. **1.32.** 4,9 м; 6,12 м; 9,8 м; 4,9 м; 3,7 м; 0; 0; 4,9 м/с; 9,8 м/с; 0. **1.33.** $\sqrt{2gh}$; $(2 + \sqrt{2})\sqrt{h/g}$; $2\sqrt{gh}$. **1.34.** 28,5 м. **1.35.** $\left(2\sqrt{v_0^2 - 2gh}\right)/g$. **1.36.** $\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}\right)/g$; $\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$. **1.37.** $v_1 t + gt^2/2$. **1.38.** б) $\vec r = v_0 t\vec i + 0{,}5gt^2\vec j$; в) $\vec v = v_0\vec i + gt\vec j$; г) $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{v_0}{gt}\right)$. $\vec v_{ср} = v_0\vec i + \dfrac{gt}{2}\vec j$. **1.39.** 19,6 м; $\approx 63{,}5°$. **1.40.** $h_0 - \dfrac{v_0^2}{2g}\operatorname{tg}^2\alpha$. **1.41.** 47 км/ч. **1.42.** 8,5 м; 3,7 м. **1.43.** 76°. **1.44.** $gt^2/8$; $0{,}5gt^2\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. **1.45.** $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{4h}{l}$; $v_0 = \sqrt{g\,(l^2/8h + 2h)}$. **1.46.** $\approx 11{,}5$ м; $\approx 3{,}1$ с. **1.47.** 19,2 м/с; $\varphi = \operatorname{arctg}\left\{\dfrac{\left[H - h + \sqrt{(H-h)^2 + s^2}\right]}{s}\right\}$. **1.48.** Решение. $s = v_0 t\cos\alpha$ (1); $h = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}$ (2); $v = \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + (v_0\sin\alpha - gt)^2}$ (3); $H = \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$. (4)

Из (1) — (4) $s = \left(\sqrt{v_0^2 - 2gH}\right)\left[\sqrt{2H} + \sqrt{2(H-h)}\right]/\sqrt{g} = 23{,}7$ м; $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 15{,}3$ м/с. **1.49.** $\approx 59°$; ≈ 63 м. **1.50.** а) $x_1 = \dfrac{4v^2}{g}\sin\alpha$; б) $x_2 = 4x_1$; в) $x_3 = \dfrac{2v^2(\sin\alpha - \cos\alpha)^3}{g\cos^2\alpha}$. **1.51.** Решение. Выберем оси координат Ox и Oy вдоль наклонной плоскости и по нормали к ней. Тогда, спроецировав на эти оси векторы скорости $\vec v_0$ и ускорения $\vec g$, получим: $l_1 = v_0 t\sin\alpha + 0{,}5gt^2\sin\alpha$; $0 = v_0 t\cos\alpha - 0{,}5gt^2\cos\alpha$, откуда $t = 2v_0/g$ и $l_1 = 8h\sin\alpha$. В момент второго удара $v_y = v_0\cos\alpha$; $v_x = v_0\sin\alpha + gt\sin\alpha = 3v_0\sin\alpha$, и, следовательно, аналогично предыдущему $l_2 = 2l_1$; $l_3 = 3l_1$ и $l_n = nl_1$;

$$L = \sum_{i=1}^{n} l_i = l_1(1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2}l_1, \quad \text{отсюда } n = \sqrt{\frac{2L}{l_1} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{L}{h\sin\alpha}} - 1\right) = 5.$$

1.52. $s = 2v_0 t\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $v = 2v_0\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; $t = \dfrac{v_0}{2g}\left[(\sin\alpha + \sin\beta + \sqrt{(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + 4\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}\right]$.

1.53. $x = \frac{u_0}{v}s + \frac{k}{4v}s^2$; $x_1 = \frac{u_0}{v}y + \frac{k}{2v}y^2$ и $x_2 = \left(\frac{u_0}{v} + \frac{ks}{2v}\right)y - \frac{k}{2v}y^2$; $\cos\alpha = \frac{u_0}{v} \pm \frac{k}{v}s$, где α — угол между скоростью лодки относительно воды и берегом. **1.54.** $\omega\left(R - \frac{\omega h}{2\pi}t\right)$. **1.55.** $\frac{2f}{n}$; $\frac{2f}{n}\left(\frac{k-1}{k}\right)$. **1.56.** 12,56 м/с или 37,68 м/с. **1.57.** 840 км/ч; на запад. **1.58.** 0,4 м/с; 8 $с^{-1}$; 1 $с^{-2}$. **1.59.** 2 с; 2,8 с. **1.60.** 12,5 м/$с^2$. **1.61.** $\approx 6{,}2$ м/$с^2$; $\approx 7{,}6$ м/$с^2$; 9,8 м $\leqslant R \leqslant$ 78,4 м. **1.62.** $3v$; $2v/R$; $4v^2/R$. **1.63.** $\frac{\omega_1 R \pm \omega_2 r}{R - r}$; $\frac{\omega_1 R \mp \omega_2 r}{2}$. **1.64.** $v/(2l\cos\alpha)$.

1.65. а) $\frac{v_1 \mp \sqrt{v_2^2 - v_1^2\cos^2\alpha}}{2}$; б) $\frac{v_1 \pm \sqrt{v_2^2 - v_1^2\cos^2\alpha}}{2l}$;

в) $\frac{v_2^2 + v_1^2\sin^2\alpha \pm 2v_1\sqrt{v_2^2 - v_1^2\cos^2\alpha}}{4l}$.

1.66. 4 м/с; 0; 2,8 м/с; 2,8 м/с; 5,6 м/$с^2$; 4 м/$с^2$; 6,3 м/$с^2$; 2,8 м/$с^2$.

2.1. 353 м. **2.2.** 8,6 с. **2.3.** 2,45 кг. **2.4.** 98 Н; 115 Н. **2.5.** 15 м. **2.6.** 17,5 м. **2.7.** $2\mu\tau\sqrt{2gh}$. **2.8.** 3,3 Н; 4,9 Н. **2.9.** а) $\frac{NmgF}{(N-1)mg - F}$; б) $\frac{NF}{N-1}$. **2.10.** $\sqrt{8l/(5g)}$. **2.11.** $\approx 1{,}67$ кН; 0,56 кН. **2.12.** $g/6$; 4,1 Н; 8,2 Н; 5,2 Н. **2.13.** 134 Н; 104 Н. **2.14.** ≈ 59 Н. **2.15.** а) 0,015; 6,55 Н; 2,35 Н; б) 0,76 м/$с^2$; 0,28 м/с; 3,58 м; в) 7,95 м/$с^2$. **2.16.** 0,3 кг; 1,77 Н; 3,54 Н. **2.17.** $4h/3$; $7h/6$. **2.18.** 2,45 с. **2.19.** $\frac{3g^2 - a^2}{2g}M$. **2.20.** $\operatorname{ctg}\varphi_1 = \operatorname{ctg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\alpha + \frac{g}{a\cos\alpha}$. **2.21.** $\operatorname{tg}\alpha - \frac{L}{gt^2\cos\alpha}$. **2.22.** $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1}\operatorname{tg}\alpha$. **2.23.** $\approx 1{,}4$ с. **2.24.** 1,78 м/$с^2$.

2.25. а) $a = \frac{F}{m}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \mu\sin\frac{\alpha}{2}\right) - \mu g = 1$ м/$с^2$;

б) $a_{max} = \frac{F}{m}\sqrt{1 + \mu^2} - \mu g \approx 1{,}1$ м/$с^2$, $\beta \approx 17°$.

2.26. а) Нить установится по нормали к траектории движения тележки; б) отклонится вперед от нормали, займет вертикальное положение, отклонится вперед от нормали. **2.27.** $\mu Mg\cos\alpha$. **2.28.** ≈ 2330 Н. **2.29.** $v_т + \frac{mg(v_1 + v_т)\sin\alpha}{F - mg\sin\alpha} \approx$ $\approx 2{,}5$ км/ч. **2.30.** а) $\frac{M}{m} = \operatorname{tg}\alpha$; $M > m\operatorname{tg}\alpha$; б) $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha} < \frac{M}{m} < \frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha}$; в) $\frac{mM}{m + M}g\left[(1 - \mu_1)\sin\alpha + (1 + \mu_1)\cos\alpha\right]\sqrt{2}$.

2.31. $2\sqrt{2}\,mg\sin\alpha$; $2\sqrt{2}\,g\sin\alpha$. **2.32.** $\frac{l - x}{l}m(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)$. **2.33.** $\frac{m + M}{M}g\sin\alpha$; $\frac{m}{M}\operatorname{tg}\alpha$. **2.34.** $a_1 = \sqrt{2}g/4$; $a_2 = 3a_1/2$; $\mu = 0{,}5$. **2.35.** $\frac{(M - m)g\sin\alpha - 2\mu g(2m + M)\cos\alpha}{M + m}$; $\frac{m}{M} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 2\mu}{\operatorname{tg}\alpha + 4\mu}$. **2.36.** $\frac{\sqrt{H(2R - H)}}{R - H}g$.

2.37. $\frac{3H}{2\pi R}mg$. **2.38.** Решение. Уравнения второго закона Ньютона для кубика и клина дают: $N_1\cos\alpha-\mu N_2=Ma_1$; $N_2-Mg-N_1\sin\alpha=0$; $mg-2N_1\sin\alpha=ma_2$. Поскольку клин не отрывается от кубиков, $a_1=a_2\operatorname{tg}\alpha$. Решая уравнения совместно, находим:

$$a_1=\frac{m\operatorname{ctg}\alpha-2\mu M-\mu m}{m\operatorname{ctg}^2\alpha+2M-\mu m\operatorname{ctg}\alpha}g.$$

2.39. Решение. Предположим, что больший груз опускается, а остальные два поднимаются; тогда $T-mg=ma_1$; $2T-2mg=2ma_2$; $3mg-T=3ma_3$; $a_2=\frac{a_3-a_1}{2}$. Решая уравнения совместно, находим: $a_1=a_2=0{,}2g$; $a_3=0{,}6g$.

2.40. а) 27,4 Н; 13,7 Н; 27,4 Н; 54,8 Н; б) $\frac{16}{7}$ кг. **2.41.** $\frac{\mu+\operatorname{tg}\alpha}{1-\mu\operatorname{tg}\alpha}Mg$.

2.42. $a_1=2{,}45$ м/с^2; $a_2=7{,}35$ м/с^2. **2.43.** $\mu=0{,}2$; $a_1=3g/7$; $a_2=0{,}35g$; $a_3=0{,}485g$. **2.44.** а) $a_1=a_2=a_3=a_4=\frac{F}{2(m+M)}$ при $F\leqslant F_0$;

$$\left.\begin{aligned}a_1=a_2&=\frac{F-2\mu mg}{2m}\\ a_3=a_4&=\frac{\mu mg}{M}\end{aligned}\right\}\quad \text{при } F\geqslant F_0, \text{ где } F_0=2\mu mg\frac{M+m}{M};$$

б) $a_1=a_2=a_3=a_4=\frac{F}{2(m+M)}$ при $F\leqslant F_1$;

$$\left.\begin{aligned}a_1=a_2=a_3&=\frac{\mu mg}{(2m+M)}\\ a_4&=\frac{F-\mu mg}{M}\end{aligned}\right\}\quad \text{при } F\geqslant F_1, \text{ где } F_1=\frac{2\mu(m+M)mg}{(2m+M)}.$$

2.45. $\frac{(M-m)(Mg-mg-F)}{(M+m)^2}$; $\frac{(M-m)(Mg-mg-F)t}{M+m}$.

2.46. а) $0{,}5g$; $0{,}33g$; б) $0{,}5g$; $0{,}55g$. **2.47.** а) $4Mg$; б) $11\ Mg$; $2{,}25\ Mg$; в) $\frac{2-3\mu}{3+2\mu}6Mg$. **2.48.** Решение. $mg-\mu Mg=(m+M)a$ (1). а) Если переносное ускорение системы $\vec{a}_1$, относительное $\vec{a}_0$, то уравнение второго закона Ньютона для груза имеет вид: $T-mg=m(a_1-a_0)$ (2); для бруска: $T-\mu N=Ma_0$ (3) и $N-Mg=Ma_1$ (4). Модуль полного ускорения груза $a_г=a_1-a_0$ (5), бруска $a_б=\sqrt{a_0^2+a_1^2}$ (6).

Из уравнений (1) — (6) находим: $a_г\approx1{,}46$ м/с^2; $a_б\approx2{,}3$ м/с^2; $T=11{,}2$ Н; б) $a_г\approx2{,}66$ м/с^2; $a_б\approx2{,}24$ м/с^2; $T\approx7$ Н. **2.49.** $m(g+a)/3$.

2.50. а) $t\sqrt{(a+g)/g}$; б) $t\sqrt{\frac{g+a}{g-a}}$. **2.51.** Решение. Выбрав оси координат вдоль наклонной плоскости и по нормали к ней, получим: $mg\sin\alpha-\mu N=ma_1\cos\alpha$ (1) и $N-mg\cos\alpha=ma_1\sin\alpha$ (2), откуда $a_1=\frac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}g=4{,}4$ м/с^2; ($mg\sin\alpha+\mu N=ma_2\cos\alpha$ (1); $N-mg\cos\alpha=ma_2\sin\alpha$ (2), откуда $a_2=\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}g=7{,}1$ м/с^2); $\approx3{,}3$ м/с^2.

2.52. $a=\dfrac{0{,}5\,(1-\mu^2)\sin 2\alpha+\mu\cos 2\alpha}{1-\mu\sin 2\alpha+(1+\mu^2)\sin^2\alpha}\,g;\qquad x=\dfrac{(1-\mu^2)\sin 2\alpha-4\mu\cos^2\alpha}{2\mu}.$

2.53. а) 1,96 Н; б) $\sqrt{3}$. **2.54.** $0{,}58\sqrt{gh}$. **2.55.** 3,7 м. **2.56.** $(n-1)R_3$. **2.57.** Уменьшить в 2,4 раза. **2.58.** 255 кг. **2.59.** ≈ 265 м/с^2. **2.60.** $\approx 0{,}04\,\dfrac{GM^2}{R^2}$; $\approx 0{,}05\,\dfrac{GM^2}{R^2}$. **2.61.** $\dfrac{16}{9}\pi^2 G\varrho_1\varrho_2\dfrac{r^6}{L^2}$; $\dfrac{16}{9}\pi^2 G\varrho_1^2\dfrac{r^6}{L^2}$. **2.62.** mg_0r/R_3. **2.63.** $4\pi G\varrho rm/3$.

2.64. $F=\sqrt{4^2+(1+4t)^2}$ (все величины выражены в единицах СИ); $\approx 6{,}5$ Н. **2.65.** ≈ 70 Н. **2.66.** $\dfrac{m_2l}{m_1+m_2}$; $\dfrac{m_1l}{m_1+m_2}$; $\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}\omega^2l$. Грузы начнут двигаться в сторону смещения их общего центра тяжести — от оси вращения. **2.67.** 0,25 м; 13,25 Н; 1,25 м; 61,2 Н. **2.68.** ≈ 100 Н. **2.69.** $0{,}14\sqrt{zRg/100\%}$

2.70. ≈ 175 м. **2.71.** $N=1{,}77-0{,}69\cos\alpha$ (все величины выражены в единицах СИ). **2.72.** 16,5 с. **2.73.** $\sqrt{3\sqrt{5}\,g/(2l)}$. **2.74.** 7,2 км/с; 2 ч. **2.75.** $\approx 42\,500$ км; 2,6 км/с. **2.76.** 27,4 сут. **2.77.** $\approx 5{,}9\cdot 10^{26}$ кг. **2.78.** $1{,}4\cdot 10^3$ кг/м^3. **2.79.** Решение. $N_1=mg$; $mg-N_2=\dfrac{m4\pi^2R}{T^2}$; $N_2=\dfrac{N_1}{2}$; $g=\dfrac{4}{3}\pi G\varrho R$. Решая уравнения совместно, получим: $\varrho=\dfrac{6\pi}{GT^2}=3{,}6\cdot 10^3$ кг/м^3. **2.80.** $m\left(G\dfrac{M}{R^2}-\dfrac{4\pi^2R}{T^2}\right)$; $m\sqrt{G^2\dfrac{M^2}{R^4}+\dfrac{4\pi^4R^2}{T^4}-G\dfrac{2\pi^2M}{RT^2}}$. **2.81.** Решение. Проецируя силы, действующие на тело, на горизонтальную и вертикальную оси координат, получим: $N\cos\alpha-\mu N\sin\alpha=m\omega^2R\cos\alpha$ и $\mu N\cos\alpha+N\sin\alpha=mg$. Отсюда

$$\mu=\frac{g\cos\alpha-0{,}5\omega^2R\sin 2\alpha}{g\sin\alpha+\omega^2R\cos^2\alpha}.$$

Для второго случая

$$\mu=\frac{g\cos\alpha_1+0{,}5\omega^2R\sin\alpha_1}{g\sin\alpha_1-\omega^2R\cos^2\alpha_1}.$$

2.82. $\dfrac{2\,(kl+mg\operatorname{ctg}\alpha)}{2k-m\omega^2}$. **2.83.** $\varphi=\arccos\,[3g/(5\omega^2l)]$.

2.84. $\dfrac{(g+a)(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)}{\omega^2\sin\alpha\,(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}$. **2.85.** $\pi v/(\mu g)$; $s\geqslant\dfrac{2v^2}{\mu g}$. **2.86.** 72 км/ч; 76°40′.

2.87. $\sqrt{gr/(Rh)}$; mgr/h. **2.88.** 3,1 м/с. **2.89.** $\sqrt{\dfrac{\mu+\operatorname{tg}\alpha}{\mu\,(1-\mu\operatorname{tg}\alpha)}}$.

2.90. $\sqrt{\dfrac{F}{6\pi mR}}$. **2.91.** а) $\dfrac{g\operatorname{tg}\alpha}{\omega^2}$; б) $\dfrac{mg}{\cos\alpha}$. **2.92.** $\approx 5{,}1$ Н. **2.93.** а) $\dfrac{mu-Ft}{m+M}$; б) $\dfrac{l\,(2Mu^2+Fl)}{2\,(m+M)\,u^2}$. **2.94.** $0{,}5\operatorname{tg}\alpha$. **2.95.** 0,026 Н · с; 105° к начальному направлению. **2.96.** $2m\,(u+v\cos\alpha)$; $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\,[2\operatorname{ctg}\alpha+u/(v\sin\alpha)]$.

2.97. $2v^2/(9\mu g)$. **2.98.** $\dfrac{Mv\pm mu}{M+m}$; $\dfrac{\sqrt{(Mv)^2+(mu)^2}}{M+m}$. **2.99.** $\operatorname{tg}\beta=2\operatorname{tg}\alpha$.

2.100. 0,83 м/с. 1,16 м/с. **2.101.** $\dfrac{v_1\pm\sqrt{v_1^2-v_0^2}}{g}$. **2.102.** $2\,(n+1)\,s$.

2.103. ≈ 10 км. **2.104.** $\dfrac{m^2+M^2}{m^2}\dfrac{l}{v}$. **2.105.** Решение. $h=v_0t+at^2/2$ (1); $m\sqrt{2gh}=(2M+m)v_0$ (2); $mg=(2M+m)a$ (3).

Из (1) — (3) $t=(\sqrt{2(m+M)/m}-1)\sqrt{2h/g}$.

2.106. $\dfrac{(mv-M\sqrt{2gh})^2}{2gm^2}$. **2.107.** $\dfrac{mu_2+Mu_1}{M-m}$; $\dfrac{mu_1+Mu_2}{M-m}$.

2.108. $mu\sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{1}{M+im}$. **2.109.** $\dfrac{\sqrt{(2Mv)^2+(mu)^2}}{M}$; $\dfrac{\sqrt{[2(M-m)v]^2+(mu)^2}}{M+m}$;

$\dfrac{2\sqrt{[(M\pm m)u]^2+(mv)^2}}{M+m}$. **2.110.** $\sqrt{gl\sin\alpha+\left(\dfrac{m}{M}u\sin\alpha+\sqrt{gl\sin\alpha}\right)^2}$.

2.111. $\sqrt{2gH+2\dfrac{m}{M}u\sqrt{gH}\sin\alpha+\left(\dfrac{mu}{M}\right)^2}$. **2.112.** Решение. Дальность прыжка равна: $l=(u\cos\alpha-v_1)2u\sin\alpha/g$ (1). Согласно закону сохранения импульса $(M+m)v=Mv_1-m(u\cos\alpha-v_1)$ (2).

Из (1) — (2) $l=\dfrac{[Mu\cos\alpha-(M+m)v]\,2u\sin\alpha}{(M+m)g}\approx 1{,}1$ м.

б) Из условия $l'=0$ следует, что

$$\cos\alpha=\frac{(M+m)v+\sqrt{(M+m)^2v^2+8M^2u^2}}{4Mu};\ \alpha\approx 43^\circ.$$

2.113. $\alpha_1=\operatorname{arctg}\dfrac{m}{2\mu M}$; $u_1=\sqrt{\dfrac{2gl\mu M^2}{m^2\cos^2\alpha+2\mu M^2\sin 2\alpha}}$; $\alpha_2=\operatorname{arctg}\dfrac{m}{2\mu(m+M)}$;

$u_2=\sqrt{\dfrac{2gl\mu(m+M)^2}{m^2\cos^2\alpha+2\mu M(m+M)\sin 2\alpha}}$. $\alpha_3=0{,}5\operatorname{arctg}\dfrac{4\mu M^2}{m^2}$;

$a_4=0{,}5\operatorname{arctg}\dfrac{4\mu(M+m)M}{m^2}$. **2.114.** $\dfrac{ml}{m+M}$; $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{m+M}{M}\dfrac{h}{l}\right)$.

2.115. $\dfrac{l}{v}$; $\dfrac{v}{2}$; 0; mg. **2.116.** $\dfrac{Ml+(M+m)h}{M+m}$. **2.117.** а) $\dfrac{Mv+m(v\mp u)}{(M+m)u}l$;

б) $l\sqrt{\left(\dfrac{m}{m+M}\right)^2+\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}$; $\dfrac{m+M}{m}v$.

3.1. 29,4 Дж. **3.2.** $m(gh+v\Delta v)$. **3.3.** $mgh+\dfrac{(mg)^2}{2k}$. **3.4.** $\dfrac{\mu^2mg^2}{k}\left(M+\dfrac{m}{2}\right)$.

3.5. Решение. $A=3A_1=3F_1^2/(2k)$; $F_1=F/(2\cos 30^\circ)$; $F_0=ks$. Решая уравнения совместно, находим: $A=3F^2s_0/(8F_0\cos^2 30^\circ)=1{,}22$ Дж. **3.6.** 1,5 Fa.

3.7. 535 кВт; 1070 кВт. **3.8.** $\dfrac{(N_1+N_2)v_1v_2}{N_1v_2+N_2v_1+\mu mgv_1v_2}$. **3.9.** 9 км/ч. **3.10.** 65,6 кВт.

3.11. Решение. Согласно второму закону Ньютона $mg=Ma=M\dfrac{v}{t}$; $N_{\max}=mgv$, откуда $t=MN_{\max}/(m^2g^2)=0{,}78$ с; $A=N_{\text{ср}}t=\dfrac{N_{\max}}{2}t=141$ Дж.

3.12. $mgv\sin\alpha+mgh/t$; $mgv\sin\alpha$. **3.13.** 9,6 кН. **3.14.** $\alpha=\operatorname{arctg}\mu^{-1}$;

$N/(mg\sqrt{1+\mu^2})$. **3.15.** 4,2 МВт. **3.16.** $mg\,(0{,}5L+D)+0{,}5\,MgD$. **3.17.** 3,5 Дж. **3.18.** 25,5 м. **3.19.** 20,4 м; 10,2 м. **3.20.** 1,85 кДж. **3.21.** $mg\,\dfrac{h+\mu l}{s}$.

3.22. $2\mu mgl$. **3.23.** $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\mu}{\operatorname{tg}\alpha+\mu}h$. **3.24.** 2,1 м/с; 1,1 с. **3.25.** 12 Н; 24 Дж; 5,6 Н; 0. **3.26.** 324 Дж; 263 Дж; 216 Вт. **3.27.** $\approx 0{,}86\sqrt{gl}$; $\approx 0{,}51\sqrt{gl}$. **3.28.** $7g/3$. **3.29.** 1,25 кН. **3.30.** $0{,}5\left(l+\dfrac{v^2}{\mu g}\right)$. **3.31.** 2,5 м. **3.32.** $\sqrt{2gh+mg^2/k}$; $\dfrac{mg+\sqrt{(mg)^2+2kmgh}}{k}$. **3.33.** $s=\dfrac{F_0\,(l_0-l_1)^2}{x_0mg}=100$ м; 50 м.

3.34. $m\sqrt{g^2+\dfrac{kv^2}{m+M}}$. **3.35.** а) $7mgl/12$; б) $\sqrt{2gl}$. **3.36.** 1,2 м; 208 Дж.

3.37. $\cos\beta=1-\dfrac{1}{2gl}\left(\dfrac{mv\cos\alpha}{m+M}\right)^2$. **3.38.** $\dfrac{m}{M}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi-2\alpha}{8}\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi+2\alpha}{8}\right)$.

3.39. Решение. Модуль скорости в момент удара определяется из уравнения

$$mg\sqrt{l_2^2-l_1^2}=\frac{mv_0^2}{2}. \qquad (1)$$

При отражении вектор $\vec{v}_0$ направлен под углом α к горизонту, его проекция на касательную к траектории

$$v_1=v_0\cos 2\alpha=\frac{l_2^2-2l_1^2}{l_2^2}v_0. \qquad (2)$$

Высоту подъема шарика после отклонения можно найти из уравнения

$$\frac{mv_1^2}{2}+mg\,(l_2-\sqrt{l_2^2-l_1^2})=mgh\ (3);\quad \cos\varphi=\frac{l_2-h}{l_2}\ (4).$$

Из (1) — (4) $\cos\varphi=\dfrac{4l_1^2}{l_2^2}\sqrt{\left(\dfrac{l_2^2-l_1^2}{l_2^2}\right)^3}$; $h=\dfrac{l_1\,(l_2^2-2l_1^2)}{l_2^2}$.

3.40. ≈ 120 м/с. **3.41.** Решение. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{kx^2}{2}=\frac{(m+M)\,v_2^2}{2}+(m+M)\,gx.$$

По закону сохранения импульса $mv=(m+M)\,v_2$;

$$x=\frac{1}{k}\left[(m+M)\,g+\sqrt{(m+M)^2g^2+\frac{km^2v^2}{m+M}}\right]=0{,}082\ \text{м}.$$

3.42. а) $\dfrac{m_2}{m_1+m_2}2\pi R$; б) $\pi R\sqrt{\dfrac{m_1m_2}{(m_1+m_2)\,W_p}}$. **3.43.** 18 mg/k; 4,5 mg/k.

3.44. 20 м/с; 10 м/с; 0. **3.45.** $\dfrac{(\sqrt{mM_1M_2\,(M_1+M_2)}-mM_1)\,v}{M_1(M_1+M_2)}$; $\dfrac{(\sqrt{mM_1M_2\,(M_1+M_2)}-mM_2)\,v}{M_1\,(M_1+M_2)}$. **3.46.** $4\sqrt{3}\,v/7$; $v/7$; $\sqrt{3}\,v/6$; $\sqrt{3}\,v/3$.

3.47. $m\sqrt{3}$. **3.48.** $\dfrac{4W_k}{v_1^2+v_2^2}$; $\dfrac{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}{2\,(v_1^2+v_2^2)}W_k$. **3.49.** $v\sqrt{3}/3$; $2v\sqrt{3}/3$.

3.50. а) 6,85 кН; б) 16,2 кН. **3.51.** $\dfrac{1}{2g}\left(\dfrac{Mv}{m}\right)^2$. **3.52.** $\approx 9{,}2\cdot10^{-3}$ м; $1{,}6\cdot10^{-3}$ м. **3.53.** $\dfrac{Mv^2}{2g\,(m+M)}$; $\dfrac{9Mv^2}{2g\,(m+M)}$. **3.54.** ≈ 595 Дж; $\approx 0{,}3$ кВт.

3.55. Решение. Поскольку шнур абсолютно упругий, взаимодействие тел в момент натяжения нити происходит по законам упругого удара. Скорость шара в начале взаимодействия определяется из уравнения

$$v_1^2 = v_0^2 - 2gl. \qquad (1)$$

Для абсолютно упругого удара законы сохранения дают:

$$2Mv_1 = 2Mv_2 + Mu \quad (2); \quad 2Mv_1^2 = 2Mv_2^2 + Mu^2 \qquad (3).$$

Если тела встречаются на расстоянии x от точки бросания спустя время t после начала движения шара, то $t = t_1 + t_2$ (4); $l = \frac{v_0 + v_1}{2} t_1$ (5); $l - x = v_2 t_2 + \frac{g t_2^2}{2}$ (6); $x = u t_2 - \frac{g t_2^2}{2}$ (7). Из (1) — (7).

$$t = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gl}}{g} + \frac{l}{\sqrt{v_0^2 - 2gl}}; \quad x = \left[\frac{4}{3} - \frac{gl}{2(v_0^2 - 2gl)}\right] l.$$

3.56. 0,25 м/с. **3.57.** $\approx 2{,}1$ км/с. **3.58.** 60°; 1,56 Н; $\approx 39°50'$. **3.59.** $\arccos \frac{3}{4}$. **3.60.** а) 60°; б) 30°. **3.61.** $6mg$. **3.62.** $\sqrt{5gl}$. **3.63.** $2\sqrt{5gl}$; $3mg$. **3.64.** $N = 0{,}98(2 + 3\cos\alpha)$ (все величины выражены в единицах СИ). $a = g\sqrt{5 + 8\cos\alpha + 3\cos^2\alpha}$. **3.65.** $4mg$; $0{,}24\ l$. **3.66.** $mg(3h - 5R)/R$; 0; $5mg$. **3.67.** $\frac{2R}{3} + \frac{1}{3g}\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2$; $\frac{m+M}{m}\sqrt{gR}$. **3.68.** $\frac{Rl}{4hb}$; $g\frac{l}{b}$. **3.69.** 0; $\sqrt{3gl/5}$; $\sqrt{12gl/5}$; $\sqrt{2gl}$. **3.70.** Решение. По закону сохранения энергии $\frac{mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2} = \frac{mgl}{4}(1 - \sin\alpha)$ (1); $v = u\sin\alpha$ (2). Из (1) — (2) $v = \sqrt{\frac{2gl(1-\sin\alpha)\sin^2\alpha}{1 + 4\sin^2\alpha}}$. При $\sin d = \frac{1}{2}$ $v = v_{\max} = \frac{\sqrt{2gl}}{4}$; $u_{\max} = \frac{\sqrt{2gl}}{2}$.
3.71. $\sqrt{\frac{4m + 5M}{M} gR}$; $\frac{mM(2m + 3M)g}{(m+M)^2}$. **3.72.** $2g(l + \pi r)v^2$.

4.1. 455 Н; 525 Н; 29,4 Н; 0. **4.2.** 0,75. **4.3.** 312 Н; 127 Н. **4.4.** 0,25. **4.5.** 1 м. **4.6.** $\frac{2\cos\alpha - 1}{\sin\alpha} m$; $\frac{(2\cos 2\alpha - \cos\alpha)}{\sin\alpha} mg$. **4.7.** $8{,}15 \cdot 10^{-2}$ Н; радиус, проведенный к меньшему грузу, составляет с вертикалью угол 56°20′. **4.8.** $(N-1)\left(l + \frac{N\mu mg}{2k}\right)$. **4.9.** $\frac{1 + \mu + \mu^2}{1 + \mu^2} 2mg = 21{,}6$ Н. **4.10.** $\mu = \operatorname{ctg}\alpha$; $\beta = \pi/2 - \alpha$. **4.11.** $F_{\min} = \frac{mg}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{3}} - 3\sin\alpha\right)$, где $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{9}$. **4.12.** $\mu = 1$. **4.13.** $a \leqslant l \leqslant a\sqrt{1 + \mu^2}$. **4.14.** $7mg\sin\frac{\alpha}{2}$; $\left(3 + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right)mg$. **4.15.** 295 Н; 0,375. **4.16.** $4mg\operatorname{tg}\alpha$. **4.17.** $\sin\alpha = \frac{k_2 - k_1}{2k_1k_2} qg$; на расстоянии $x = \frac{k_2 l}{2k_1}$ от середины стержня. **4.18.** 1,2 кН. **4.19.** $\approx 2{,}6$ м. **4.20.** 600 Н; 100 Н. **4.21.** $\frac{(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)mg}{\mu\sin\beta + \cos\beta}$; $\beta = \arccos\left[\left(1 + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\mu}\right)\frac{r}{R}\cos\alpha\right] - \alpha$.

4.22. $\operatorname{arctg}\left(\frac{2h}{l}-\frac{1}{\mu}\right)$; $\frac{mgl}{2h}\sqrt{1+\left(\frac{2h}{l}-\frac{1}{\mu}\right)^2}$. **4.23.** 6. Если не учитывать кривизну поверхности Земли, то на бесконечно большое. **4.24.** $\frac{m}{M}\operatorname{tg}\alpha$; $[M\sin^2\alpha+0{,}5(M-m)\cos^2\alpha]g$. **4.25.** Коэффициент трения между бревнами должен быть не меньше 0,27, а между бревнами и землей не меньше 0,1. **4.26.** $2m(R-r)/R$. **4.27.** На расстоянии 1 и 1,5 см от катетов. **4.28.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$. **4.29.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{15}}{30}\cdot\frac{M-m}{M+m}\right)$; $\frac{\sqrt{15}}{30}(M-m)g$. **4.30.** 0,495 Н; 0,99 Н; 0,099 Н. **4.31.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **4.32.** Центр тяжести сместится к основанию треугольника на 0,67 см. **4.33.** 9°36′. **4.34.** $r<R$; $\varphi=\operatorname{arctg}\mu$. **4.35.** $0{,}5\mu MgL\alpha$; $0{,}25\mu Mg$. **4.36.** $\frac{mR}{m+M}$; $\frac{MR}{m+M}$; $\frac{MR\sqrt{2}}{m+M}$.

5.1. $2\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)\sqrt{\frac{2h}{g}}$. **5.2.** 0,55 м; нет. **5.3.** а) $3{,}3\cdot10^{-4}$ с; $1{,}66\times10^{-4}$ с; б) 0,3 м/с; 0,6 м/с; ≈1630 м/с^2; ≈500 м/с^2. **5.4.** $\approx1{,}12$ м; ≈15 с; $\approx0{,}115\pi$; $\approx0{,}47$ м/с; $\approx0{,}195$ м/с^2. **5.5.** 1,2 Н; $1{,}8\cdot10^{-2}$ Дж; 0,8 Н. **5.6.** 8×10^{-3} рад; $\approx5\cdot10^{-3}$ Дж. **5.7.** 12,6 кН. **5.8.** 0,40 м. **5.9.** $2\pi\sqrt{m/(k_1-k_2)}$; $k_1(x_1+x_2)/(k_1-k_2)$. **5.10.** $x=5\cdot10^{-2}\sin 14t$ (здесь и в уравнении для силы величины выражены в единицах СИ); 27 с$^{-1}$; $F=0{,}98(1+\sin 14t)$; 0,3 м. **5.11.** $T_1/T_2=\frac{k_1+k_2}{\sqrt{k_1k_2}}$. **5.12.** $2\pi\sqrt{\frac{m}{3\varrho gS}}$. **5.13.** $\approx1{,}22$ с. **5.14.** а) $x_1=\frac{2mg}{3k}\times\sin\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}t\right)$; $x_2=x_1/2$; б) $T=2\pi\sqrt{m/k}$; $x_m=0{,}25v\sqrt{m/k}$. **5.15.** 1,4 с; 1,6 с. **5.16.** $\frac{t}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}$. **5.17.** На 7500. **5.18.** $\frac{4t}{5\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$. **5.19.** 6,28 см/с; 40 см/с^2. **5.20.** $36gt^2/\pi^2$; $\pi x_m\sqrt{3}/(12t)$; $\pi^2x_m/(72t^2)$. **5.21.** $2\pi\sqrt{l/(g+a)}$. **5.22.** Увеличится в 1,16 раза. **5.23.** $T_1=1{,}96$ с; нет; $T_2=2\pi\sqrt{l/\sqrt{g^2+(v^2/R)^2}}$. **5.24.** В обоих случаях $T=2\pi\sqrt{l/(g\cos\alpha)}$. **5.25.** Относительно ракеты будет покоится. **5.26.** Р е ш е н и е. $\frac{t}{t_м}=\frac{T_м}{T}$ (1); $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (2); $T_м=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$ (3); $h=\frac{at^2}{2}$ (4). Из (1) — (4) $h=\frac{agt_м^2}{2(g+a)}=352$ м. **5.27.** $\approx1{,}7$ h.

6.1. $1{,}42\cdot10^5$ кПа. **6.2.** 63 Па. **6.3.** 2 м/с. **6.4.** $\approx79{,}5$ кН. **6.5.** 5,3 кПа. **6.6.** 730 Н. **6.7.** $\frac{sS\varrho gl}{S-s}$; $\varrho gS\sqrt{S/\pi}$. **6.8.** $\frac{MR^2-(m+M)r^2}{\pi\varrho R^2(R^2-r^2)}$; $\frac{MR^2-(2m+M)r^2}{\pi\varrho R^2(R^2-r^2)}$. **6.9.** $\pi\varrho hR^2-m$. **6.10.** $Q=\frac{\pi}{3}p_а(r^2+rx+x^2)+mg=20{,}6$ Н, где $x=r+\frac{p_а}{\varrho g}\frac{R-r}{L}\approx0{,}98$ см; 28,7 Н. **6.11.** 18,6 см.

6.12. 6,4 мм; 11,2 мм. **6.13.** $\approx 0{,}8$ см; 103 кПа. **6.14.** $\frac{\varrho_2 kh}{\varrho_1 + \varrho_2}$. **6.15.** Понизится приблизительно на 11 мм. **6.16.** 90 кПа; 115 кПа. **6.17.** $\varrho(g \pm a)l/2$; $\varrho g l^3/2$; $\varrho(g \pm a)l^3/2$; $\varrho(g \pm a)l^3/4$; $\varrho(g \pm a)l/2$. **6.18.** Решение. $F = m\omega^2 x/2$ (1); $m = \varrho x S$ (2); $F = \varrho g h S$ (3).

Из (1) — (3) $h = \frac{\omega^2}{2g}x^2$ $\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{\omega^2}{2g}[(l-x)^2 - x^2] = \frac{\omega^2}{2g}(l^2 - 2lx)$. **6.19.** 10 кДж. **6.20.** $\frac{n-1}{n}$. **6.21.** 0,736 V. **6.22.** $\frac{n-1}{n}\varrho$. **6.23.** 2 г/см^3. **6.24.** Пробку. Уменьшить в 6,35 раза. **6.25.** 4,38 кг; 39,2 Н. **6.26.** 860 см^3; понизится на 1,73 мм. **6.27.** 30,8 см. **6.28.** 0,54. **6.29.** Уменьшится на 4 мм. **6.30.** $\frac{4\mu p_0 + (1+3\mu)\varrho_0 g a}{(1-\mu) g a}$.

6.31. $\frac{lD^2 - (H+l)d^2}{lD^2}\varrho_в$. **6.32.** $\frac{1}{3}(\varrho - \varrho_0)gh(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2) + (p_0 + \varrho_0 g H)S_2$. **6.33.** $\frac{\varrho_2 P_1 - \varrho_1 P_2}{\varrho_2 - \varrho_1}$; $\frac{\varrho_2 P_1 - \varrho_1 P_2}{P_1 - P_2}$. **6.34.** 440,6 г. **6.35.** $\varphi = \arccos\left(\frac{h}{l}\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}\right)$; $l \leqslant h\sqrt{\varrho_0/\varrho_1}$. **6.36.** 77 м^3. **6.37.** $\frac{4}{3}\pi r^3(\varrho_1 - \varrho_2)\omega^2 R$. **6.38.** $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\varrho g S/m}$. **6.39.** $2\pi\sqrt{\frac{(\varrho_1 + \varrho_2)l}{2(\varrho_1 - \varrho_2)g}}$. **6.40.** 4 м; 1 м; $3{,}3 \cdot 10^{-2}$ Дж. **6.41.** Если палочка вся выходит из воды, то $H = \frac{2\varrho_2 - 3\varrho_1}{\varrho_1}l$. Если палочка не полностью выходит из воды, то $H = \frac{\sqrt{(\varrho_2 - \varrho_1)(2\varrho_2 - \varrho_1)} - \varrho_1}{\varrho_2}2l$. **6.42.** $A = \frac{(S\sqrt[3]{V} - V)\varrho g V}{8S} = 6{,}7 \cdot 10^{-4}$ Дж. **6.43.** 3,8 см/мин. **6.44.** 15 кг. **6.45.** 20,6 Н. **6.46.** Решение. $\vec{F}t = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ (1); $v_1 = v_2 = v$ (2); $m = \varrho S v t$ (3); $|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = v\sqrt{2}$ (4).

Из (1) — (4) $F = \left(\frac{m}{t}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{\varrho S}$. **6.47.** 34,8 кВт. **6.48.** $\frac{\varrho g H V}{t} + \frac{\varrho V^3}{2S^2 t^3} = 103$ кВт. **6.49.** 4,5 кВт. **6.50.** $\sqrt{2g\left(H + \frac{\varrho_2}{\varrho_1}h\right)}$. **6.51.** $h/2$; h; $\varrho g S h^2/2$. **6.52.** $S_1 S_2\sqrt{2gh/(S_2^2 - S_1^2)}$. **6.53.** $m = 0{,}25\pi\varrho t\sqrt{2gl/(d_2^4 - d_1^4)} \approx 0{,}45$ кг.

7.1. 33,4°С. **7.2.** 6°С. **7.3.** ≈ 4°С. **7.4.** $\frac{(C + c_в M)(\Theta - t_1)}{(c_л - c_а)(t_2 - \Theta)} - \frac{m c_а}{c_л - c_а}$; $\frac{m c_л}{c_л - c_а} - \frac{(C + c_в M)(\Theta - t_1)}{(c_л - c_а)(t_2 - \Theta)}$. **7.5.** 78 г. **7.6.** 261 г. **7.7.** 58,5 кДж/кг. **7.8.** $\frac{4\varrho_ж c_ж t + \varrho_л \lambda}{3\varrho_л \lambda}R$. **7.9.** ≈ 106 см^3. **7.10.** 4,7 кг. **7.11.** 0°С; 400 г воды и 300 г льда. **7.12.** $\left[M - \frac{\varrho_л}{\varrho_с}\left(\frac{\varrho - \varrho_в}{\varrho_в - \varrho_л}\right)m\right]\lambda$. **7.13.** Решение. $mc_2\Delta t + \lambda_2 m = mc_1\Delta t + \lambda_1 m$, отсюда $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = (c_1 - c_2)\Delta t$. **7.14.** 207 г льда

и 493 г воды. **7.15.** $1{,}77 \cdot 10^8$ Па. **7.16.** 112,5 г. **7.17.** 0°C; 28 г; 72 г; 100 г льда при -4°C. **7.18.** 1,08 кг. **7.19.** ≈ 1 ч. **7.20.** 32 кН. **7.21.** $\dfrac{\eta q m v}{\eta q m + M g v \tau \alpha}$. **7.22.** 280 МДж. **7.23.** $1{,}68 \cdot 10^{-2}$ Дж. **7.24.** 10,3°C. **7.25.** $\approx 8{,}1$ кг. **7.26.** 88%. **7.27.** 8,3 кг/ч. **7.28.** 83,1 км. **7.29.** $\dfrac{mM(v_1 - v_2)^2}{2(m+M)}$. **7.30.** 24,1°C.
7.31. $\approx 2{,}4$ км/с; $(m_1 + m_2)\sqrt{\dfrac{\lambda + r + c_л 10°C + c_в 100°C}{m_1 m_2}}$. **7.32.** $1 - \left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^2 - \dfrac{m}{M}\left(1 - \dfrac{v_2}{v_1}\right)^2$. **7.33.** 160°C; 402 Дж. **7.34.** Решение. Согласно закону сохранения импульса и закону сохранения энергии $mv = (m + M_2) v_1$ (1); $(m + M_2) v_1 = (m + M_1 + M_2) v_2$ (2); $(m + M_2) v_1^2/2 = (m + M_1 + M_2) v_2^2/2 + Q$ (3). Из (1) — (3) $Q \approx \dfrac{M_1 (mv)^2}{2M_2(M_1 + M_2)}$.

8.1. 540°C. **8.2.** 54 м. **8.3.** $n[1 - (\beta \pm \alpha) t]$. **8.4.** 4,3 с. **8.5.** $1{,}8 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$; 8,8°C. **8.6.** 2,18 см. **8.7.** 460 Дж/(кг · К). **8.8.** До 182°C. **8.9.** 267 Н. **8.10.** $\dfrac{3t_2 - t_1}{2}$. **8.11.** 490 см^3. **8.12.** $\beta + \dfrac{P_2 - P_1}{(P_1 - P_0)t}$.
8.13. $\dfrac{\varrho_{0ж}(c_ж M_ж + c_к M_к) V}{Q M_ж} - \dfrac{\varrho_{0ж} M_к}{\varrho_{0к} M_ж} \beta_к$. **8.14.** На 0,8%.
8.15. $\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{P_2(1 - \beta_ж t_2) - P_1(1 + \beta_ж t_1)}{P_1(1 + \beta_ж t_1) t_2 - P_2(1 + \beta_ж t_2) t_1}\right]$. **8.16.** Решение. При изменении температуры на $t_2 - t_1 = 30$ °C сила натяжения изменяется на $\Delta F = \Delta\varrho_к g V + \varrho_к g \Delta V$ (1); $\Delta\varrho_к \approx -\varrho_{ок}\beta(t_2 - t_1)$ (2); $\Delta V = V 3\alpha (t_2 - t_1)$ (3); $V = \dfrac{m}{\varrho_{1c}} = \dfrac{m}{\varrho_{0c}}(1 + 3\alpha t_1)$ (4). Из (1) — (4) $\Delta F = \dfrac{\varrho_{0к}}{\varrho_{0c}} mg(3\alpha - \beta)(t_2 - t_1) \approx \approx 2{,}94 \cdot 10^{-3}$ Н. **8.17.** $\alpha_1 m_2 g \sqrt[3]{m_1/\varrho_1}$.

9.1 9 л и $4 \cdot 10^5$ Па; 21 л и $1{,}6 \cdot 10^6$ Па. **9.2.** $\left(\sqrt{\left(\dfrac{p}{\Delta p}\right)^2 + 1} - \dfrac{p}{\Delta p}\right) l$. **9.3.** 72,3 м. **9.4.** 150 г. **9.5.** $0{,}5(H + l - \sqrt{H^2 + l^2})$. **9.6.** 5 см. **9.7.** $\dfrac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}\varrho g h$. **9.8.** $\dfrac{3p_0 + 2\varrho g l}{9p_0} l$. **9.9.** $\approx 0{,}10$ кг. **9.10.** $\lg k \left[\lg\left(\dfrac{v_0 + V}{V}\right)\right]^{-1}$; $\dfrac{k-1}{k}\left(\dfrac{p_1 V}{p_0 v_0}\right)$. **9.11.** 30 м. **9.12.** $\dfrac{(\varrho_0 - \varrho_1) g H^2}{2[2p_0 + (\varrho_0 - \varrho_1) g H]}$.
9.13. $\dfrac{\sqrt{(pV)^2 + (mal)^2} - pV}{2ma}$. **9.14.** $(\sqrt{4h_0^2 + 4h_0 l + 9l^2} - 2h_0 - l)/4$; $(\sqrt{4h_0^2 - 12h_0 l + l^2} + 2h_0 - 3l)/4$. **9.15.** $\dfrac{3F - p_0 S - \varrho g l S}{F - p_0 S + \varrho g l S} g$. **9.16.** 10^5 Па. **9.17.** 122 °C. **9.18.** 70 °C. **9.19.** $T_2 = \dfrac{2p_0 - \varrho g l}{2p_0 + \varrho g l} T_1$. **9.20.** В 1,2 раза. **9.21.** $\dfrac{p_1 T_2}{p_2 T_1}$. **9.22.** 530. **9.23.** 14 мин. **9.24.** 550 л. **9.25.** $(5p_0 + 4\varrho g l) T_1/p_0$. **9.26.** ≈ 375 К. **9.27.** 755 мм рт. ст. **9.28.** а) $\dfrac{\Delta T}{T} l$; б) 0. **9.29.** $(4p + 3\varrho g H) T/p$. **9.30.** $9T_1/8$; 1,5h; T_1. **9.31.** 54 м^3.

9.32. 0,22; $6{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг; $2{,}7 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$. **9.33.** C_4H_{10}. **9.34.** $2{,}5 \cdot 10^{24}$. **9.35.** 10 г. **9.36.** 0,195 кг. **9.37.** 0,71. **9.38.** ≈ 420 К. **9.39.** $\dfrac{M}{RT}\left[pV\left(\dfrac{V}{V+v_0}\right)^n + p_0v_0n - pV\right]$. **9.40.** $2T_2/(T_1+T_2)$. **9.41.** $2T_0$; $Mg + p_0S/2$. **9.42.** $H\sqrt{2T_2/T_1}$. **9.43.** $\sqrt{2\nu RT/(ml^2)}$. **9.44.** Решение. $\Delta P_1 = (\varrho_0 - \varrho_1)gV$ (1); $\varrho_0 = \dfrac{p_0M}{RT_0}$ (2); $\varrho_1 = \dfrac{p_0M}{R(T+\Delta T)}$ (3); $\Delta P_2 = (\varrho_0 - \varrho_2)gV$ (4); $\varrho_2 = \dfrac{p_1M}{RT_1}$ (5). Из (1) — (5) $\Delta P_2 = \dfrac{(T_0+\Delta T)(p_0T_1 - p_1T_0)}{p_0T_1\Delta T}\Delta P_1 \approx 5{,}9 \cdot 10^{-2}$ Н. **9.45.** 333. **9.46.** Решение. $\Delta m = m_1 - m_2$ (1); $m_2 = \dfrac{M_1}{M_2}m$ (2); $pV = \dfrac{m_1}{M_1}RT$ (3). Из (1) — (3) $\Delta m = \dfrac{pVM_1}{RT} - \dfrac{M_1}{M_2}m \approx 27{,}5$ г. **9.47.** 670 Н. **9.48.** Решение. Шар будет находиться во взвешенном состоянии, когда $m_в = m_г + m_0$ (1); $p_1V = \dfrac{m_г}{M_г}RT_1$ (2); $p_2V = \dfrac{m_в}{M_в}RT_2$ (3); $p_2 = p_0 - \dfrac{H}{l}\Delta p$ (4); $T_2 = T_1 - \dfrac{H}{l}\Delta T$ (5). Из (1) — (2)

$$m_г = \frac{M_гp_1V}{RT_1} = 195 \text{ г}; \ m_в = 495 \text{ г}.$$

Из (3) — (5) $H = \dfrac{M_вp_0V - m_вRT_1}{M_в\Delta pV - m_вR\Delta T}l = 4670$ м. **9.49.** 7,65 м/с. **9.50.** $\dfrac{9m^2RT}{M_вt^2pS} + pS$.
9.51. 1,04 кг/м^3. **9.52.** 3,5 г и 5,75 г. **9.61.** 400 К; 13,3 МПа. **9.62.** 625 Дж. **9.63.** 39,2 Дж. **9.64.** Решение. $-\Delta W = A_0 - A_г$ (1); $\Delta W = m_1g\Delta V/S$ (2); $A_0 = p_0\Delta V$ (3); $A_г = \dfrac{m}{M}R(T_2 - T_1)$ (4); $p_1V_1 = \dfrac{m}{M}RT_1$ (5), где $p_1 = p_0 + m_1g/S$ (6).

Из (1) — (4) $\quad T_1 = T_2 + \dfrac{(m_1g + p_0S)M\Delta W}{mRm_1g} = 324$ К.

Из (5) — (6) $\quad V_1 = \dfrac{mRT_1}{M(p_0 + m_1g/S)} \approx 0{,}031$ м^3.

9.65. 8,3 Дж. **9.66.** Решение. $Q = \Delta U + A$ (1); $\Delta U = c_Vm\Delta T$ (2); $A = \dfrac{m}{M}R\Delta T$ (3).

Из (1) — (3) $\Delta U = c_VMA/R = 3$ кДж; $Q = (c_VM/R + 1)A = 4{,}23$ кДж. **9.67.** $4{,}8 \cdot 10^{-2}$ м^3. **9.68.** В $\approx 2{,}1$ раза; 380 Дж. **9.69.** 298 К. **9.70.** $(T_1 - T_2)(T_1 - T_0)R/T_1$. **9.71.** $R(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2})^2$. **9.72.** $0{,}5\alpha(V_2^2 - V_1^2)$; $0{,}5C_m\alpha(V_2^2 - V_1^2)/R$. **9.73.** $\dfrac{\eta P\tau - (C + cm)\Delta T}{r + RT/M}$. **9.74.** T/k. **9.75.** а) 274 кВт · ч; б) ≈ 200 кВт · ч.

9.76. Решение. Если производительность холодильника m/τ_0, то при замерзании воды и охлаждении полученного льда массой m выделяется количество теплоты $Q_1 = [c_вm(T_1 - T_0) + \lambda m + c_лm(T_0 - T_2)]\dfrac{\tau}{\tau_0}$ (1), где T_1 и T_2 — начальная температура воды и конечная температура льда. Для изохорического нагревания воздуха массой m_0 на ΔT нужно затратить количество теплоты $Q_2 = c_V m_0 \Delta T$ (2); $pV = \frac{m_0}{M} RT_1$ (3).

Считая холодильник идеальной тепловой машиной, можно записать:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (4).$$

Из (1) — (4) $\Delta T = \dfrac{mR\tau\,[c_в (T_1 - T_0) + \lambda + c_л (T_0 - T_2)]}{c_V MpV\tau_0}$.

10.1. $8{,}7 \cdot 10^{13}$. **10.2.** 107 кПа. **10.3.** 7,7 см. **10.4.** 1,23 Па. **10.5.** 6,1 м. **10.6.** Решение. При температуре T_1 пар будет насыщающим с давлением $p_1 = p_{н.п}$, поэтому $p_1 V_1 = \frac{m_а}{M_а} RT_1$ (1); $h_1 = \frac{V_1}{S}$ (2), где V_1 — объем, занимаемый азотом. Из (1) — (2) $h_1 = 0{,}68$ м. При температуре T_2 пар будет ненасыщающим, поэтому $p_1' V_1' = \frac{m_а}{M_а} RT_2$ (3); $p_1' V_2' = \frac{m_в}{M_в} RT_2$ (4); $V_1' + V_2' = V = HS$ (5).

Из (3) — (5) $h_1' = \dfrac{V_1'}{S} = \dfrac{m_а M_в H}{m_а M_в + m_в M_а} = 0{,}3$ м; $\Delta h = h_1 - h_1' = 0{,}38$ м.

10.7. 4,52 м. **10.8.** 103 кПа. **10.9.** 210 кПа; 194 кПа. **10.10.** 1,9 МПа; 2,4 МПа; 2,15 МПа. **10.11.** 925 г; 805 г. **10.12.** 22 кПа. **10.13.** 3,7 нм; 12. **10.14.** Решение. $Q = \Delta U + A$ (1). Пар находится под давлением $p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па, следовательно, его температура 373 К. При конденсации пара массой m_0

$$\Delta U = rm_0 \ (2); \quad pV = \frac{m_0}{M} RT \ (3).$$

При конденсации всего пара внешнее давление совершит работу

$$A = pV \ (4).$$

Вода, получившаяся при плавлении льда, может нагреться не свыше 373 К, поэтому $Q = \lambda m + cm\Delta T$ (5). Из (1) — (5) $m = \dfrac{(Mr + RT)\,pV}{(\lambda + c\Delta T)\,RT} = 1{,}9$ кг.

10.15. $\approx 0{,}56$ м. **10.16.** 14,2 кДж. **10.17.** 1373 К. **10.18.** ≈ 160 Дж. **10.19.** $\approx 0{,}51$ кг. **10.20.** 1,76 г. **10.21.** $\approx 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ кг/м^3; 48,5%. **10.22.** 27%. **10.23.** $\approx 0{,}38$ Н. **10.24.** 89 кПа. **10.25.** Увеличить до 1,37 дм^3. **10.26.** Решение. Плотность сухого воздуха $\varrho_1 = M_1 p/(RT)$ (1); плотность влажного воздуха $\varrho_2 = \varrho' + \varrho''$ (2). Плотность паров во влажном воздухе $\varrho' = M_2 p_2/(RT)$ (3); $\varrho' = \varphi\varrho$ (4). Давление влажного воздуха $p = p_1 + p_2$ (5). Плотность воздуха (без паров) $\varrho'' = M_1 p_1/(RT)$ (6).

Из (1) — (6) $\dfrac{\varrho_2}{\varrho_1} = 1 - \dfrac{(M_1 - M_2)\,\varphi\varrho RT}{M_1 M_2 p} \approx 0{,}99$. **10.27.** 60%; 100%.

11.1. $6{,}9 \cdot 10^{16}$ Н. **11.2.** $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. **11.3.** $\dfrac{2n^2 + m \pm 2n\sqrt{n^2 + m}}{m} q$. **11.4.** $\varrho_1/(\varrho_1 - \varrho_2)$. **11.5.** В центре треугольника; $q\sqrt{3}/3$. **11.6.** $2\,\mathrm{arctg}\,(Q/q)^{2/3}$. **11.7.** $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} mg$. **11.8.** а) $2\pi\sqrt{l\cos\alpha/g}$; $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} + \dfrac{mg}{\cos\alpha}$;

б) $2\pi l \sin\alpha \sqrt{\dfrac{2\pi\varepsilon_0 ml \sin 2\alpha}{4\pi\varepsilon_0 mgl^2 \sin^2\alpha - q^2\cos\alpha}}$; $mg/\cos\alpha$;

в) $2\pi l \sin\alpha \sqrt{\dfrac{2\pi\varepsilon_0 ml \cos\alpha}{2\pi\varepsilon_0 mgl^2 - q^2\cos\alpha}}$; $\dfrac{mg}{\cos\alpha} - \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2\sin^2\alpha}$. **11.9.** а) $x = \sqrt{\dfrac{qQ(m+M)}{4\pi\varepsilon_0 E(mQ+Mq)}}$; б) $a = \dfrac{(Q-q)E}{M+m}$. **11.10.** $8\cdot 10^{-16}$ Дж; $1{,}9\cdot 10^{-15}$ Дж.

11.11. а) $3(mg+qE)$; $3\sqrt{(mg)^2+(qE)^2} - 2qE$; б) $2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{mg+qE}}$; $2\pi\sqrt{\dfrac{ml}{\sqrt{(mg)^2+(qE)^2}}}$. **11.12.** $q\sqrt{2}/2$; равновесие неустойчивое.

11.13. 10^{-9} Кл. **11.14.** $6{,}6\cdot 10^{-6}$ Кл/м². **11.15.** $q\sigma l/\varepsilon_0$; $q\sigma l/2\varepsilon_0$.

11.16. $\dfrac{4qd}{\varepsilon_0 S}$; $\dfrac{4q^2}{\varepsilon_0 S}$. **11.17.** $\dfrac{m_э g}{e}\left(\dfrac{M-m}{M+m}\right)l$. **11.18.** $\omega^2 R/\gamma$; $0{,}5(\omega R)^2/\gamma$.

11.19. $\sqrt{2gh + 2(1-\operatorname{tg}\alpha)q_1q_2/(mh)}$. **11.20.** $2{,}5\cdot 10^{-3}$ Дж; 10^{-2} Дж. **11.21.** $\approx 10^5$ лет; $\approx 0{,}2$ Кл. **11.22.** 2,26 кВ; $-2{,}35$ кВ; -185 В. **11.23.** $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{R}\right)$; $\Delta\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. **11.24.** а) $E_1(x) = \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$; $\varphi_1(x) = \dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 x}(R \leqslant x \leqslant \infty)$; $E_2(x) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon x^2}$; $\varphi_2(x) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[Q + q\left(\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon} + \dfrac{R}{\varepsilon x}\right)\right](r \leqslant x \leqslant R)$; $E_3 = 0$; $\varphi_3(x) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[Q + q\left(\dfrac{\varepsilon-1}{\varepsilon} + \dfrac{R}{\varepsilon r}\right)\right](0 \leqslant x \leqslant r)$;

б) $E_1 = 0$; $\varphi_1 = 0$; $E_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon x^2}$; $\varphi_2(x) = \dfrac{q(R-x)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon Rx}$; $E_3 = 0$; $\varphi_3 = \dfrac{q(R-r)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon rR}$.

$E_1' = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\left[\dfrac{R-r}{R+(\varepsilon-1)r}\right]$; $\varphi_1' = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}\left[\dfrac{R-r}{R+(\varepsilon-1)r}\right]$; $E_2' = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 x^2[R+(\varepsilon-1)r]}$, $\varphi_2' = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left\{1 - \left(\dfrac{r}{R}\right)\left[\dfrac{R-(\varepsilon-1)x}{R+(\varepsilon-1)r}\right]\right\}$;

$E_3' = 0$; $\varphi_3' = 0$; в) $\Delta q = -q$. **11.25.** $\dfrac{r(x-R)}{x(R-r)}q$; $\dfrac{R(r-x)}{x(R-r)}q$; $\dfrac{x-R}{R-r}q$; $\dfrac{r-x}{R-r}q$. **11.26.** а) $\dfrac{q}{3\pi\varepsilon_0 a}$; б) $\dfrac{q}{12\varepsilon_0 a^2}$; в) $\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\dfrac{4^4-3^4}{3^3\cdot 4^3}\right)$. **11.27.** $E = 0$; $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$; $E(x) = \dfrac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$; $\varphi(x) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$. **11.28.** $\dfrac{21}{64}\,\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$; $\dfrac{7}{32}\,\dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \dfrac{7}{2}\,\dfrac{r}{a}\right)$. **11.29.** $\dfrac{2{,}25q^2}{\pi\varepsilon_0 l}$; $\approx \dfrac{1{,}2q}{\sqrt{\pi\varepsilon_0 lm}}$. **11.30.** $\dfrac{q^2}{\pi\varepsilon_0 m(v_1+v_2)^2}$.

11.31. $\dfrac{l}{d}U - \dfrac{mv^2}{2e}$. **11.32.** $\dfrac{gd^2}{\gamma U}$; $d\sqrt{1+\left(\dfrac{gd}{\gamma U}\right)^2}$. **11.33.** 2,4 см; 75 В.

11.34. 100 кВ/м; 300 кВ/м; 100 В; 600 В. **11.35.** $\dfrac{2\pi\varepsilon_0\varphi}{\sigma}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{4\sigma l}{\varepsilon_0\varphi}}\right)$.

11.36. $\dfrac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r(R-r)}{R-2r}$. **11.37.** Решение. $C = \dfrac{q}{U}$ (1); $U = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R}$ (2).

Из (1) — (2) $C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r R}{R - r}$, $C = 67$ пкф; $\varphi_1 = U = \frac{q(R + r)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R r}$, $\varphi_1 \approx 3$ кВ. **11.38.** а) 11,25 нКл и 3,75 нКл; б) 10 нКл и 5 нКл; в) 10 нКл и 5 нКл; г) 12 нКл и 3 нКл. **11.39.** $\sqrt{\frac{2\gamma q(R - r)}{Rr}}$. **11.40.** $\varphi\sqrt[3]{N^2}$; $\frac{\varphi}{4\pi r}\sqrt[3]{N}$; $\frac{N}{2}(\sqrt[3]{N^2} - 1)r\varphi^2$. **11.41.** -207 В; $2{,}4 \cdot 10^{-8}$ Кл; $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл; 10^{-9} Кл; $1{,}66 \cdot 10^{-5}$ Дж. **11.42.** $4{,}95 \cdot 10^{-7}$ Кл/м^2; ≈ 35 пФ; $6{,}95 \cdot 10^{-7}$ Дж; $1{,}4 \cdot 10^{-4}$ Н. **11.43.** $\pm mgCd(T_0^2 - T_1^2)/(QT_1^2)$; $mgCd\sqrt{T_0^4 - T_1^4}/(QT_1^2)$. **11.44.** а) 6 C; б) 11/5 C; в) 1,5 C; г) 31/14 C. **11.45.** 1) 2 C; 2) а) 2 C; б) 6/5 C; 12/7 C; 4/3 C. **11.46.** $\frac{2\varepsilon_0(\varepsilon - 1)SU}{(\varepsilon + 2)d}$. **11.47.** $\frac{2qd}{3\varepsilon_0 S}$ или $\frac{3qd}{5\varepsilon_0 S}$.

11.48. а) $\frac{C_1(U_1 - U_2) + C_2U_2}{C_1(U_1 - U_2) + C_2U_1}U_1$; б) $\frac{C_1C_2(U_2 - U_1)}{(C_1 + C_2)U_1 - C_1U_2}$. **11.49.** $\frac{2C_1C_2U}{(C_1 + C_2)^2}$; $\frac{C_1C_2(C_1 - C_2)^2U^2}{2(C_1 + C_2)^3}$ или 0 и $\frac{C_1C_2U^2}{2(C_1 + C_2)}$; U; 0; $\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}U$; $\frac{2C_1C_2U^2}{C_1 + C_2}$.

11.50. $\frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1}$; $\frac{(\varepsilon - 1)CU}{2(\varepsilon + 1)}$. **11.51.** 2 МВ/м. **11.52.** 0,5 $C\mathscr{E}$; $-1{,}5$ $C\mathscr{E}$. **11.53.** а) $\frac{25}{11}CU$; $\frac{8}{11}CU$; $\frac{63}{11}CU$; б) $\frac{7}{3}CU$; $\frac{14}{3}CU$; $7CU$. **11.54.** $\frac{C_1C_2(U_1 - U_2d/d_0)}{C_1 + C_2}$.
11.55. а) $\frac{26}{31}C\mathscr{E}$; $\frac{20}{31}C\mathscr{E}$; $\frac{6}{31}C\mathscr{E}$; б) $3{,}3 \cdot 10^{-6}$ Кл; в) $\frac{C_1C_2(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)}{C_1 + C_2}$.
11.56. а) $2C\mathscr{E}/3$; б) $4C\mathscr{E}/21$; $10C\mathscr{E}/21$. **11.57.** $C(2\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1)/18$; $C(2\mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1)/9$.

11.58. $\frac{\varepsilon_0(3\varepsilon - 5)S\mathscr{E}}{4d}$; $\frac{\varepsilon_0(6\varepsilon - 5)S\mathscr{E}}{2(6\varepsilon + 5)d}$. **11.59.** $\sqrt{\frac{2k(d_0 - d_1)d_1^2}{\varepsilon_0 S}}$. **11.60.** Решение. $p = F/S = qE/2S = \varepsilon_0\varepsilon E^2/2$; $p = 7{,}75$ МПа. $E = E_0 - E_{св}$ (1); $E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ (2); $E_{св} = \frac{\sigma_{св}}{\varepsilon_0}$ (3); $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}$ (4).

Из (1) — (4) $\sigma_{св} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E \approx 0{,}026$ Кл/м^2. **11.61.** $\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)ab^2\mathscr{E}^2}{2[a + (\varepsilon - 1)x]^2d}$; $\frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)b\mathscr{E}^2}{2d}$. **11.62.** $\frac{aq^2}{8\pi\varepsilon_0 b^2}$. **11.63.** а) $C\mathscr{E}^2/3$; б) $2C\mathscr{E}^2$. **11.64.** $5{,}8 \cdot 10^{-7}$ Дж; $2{,}9 \cdot 10^{-7}$ Дж; $1{,}2 \cdot 10^{-7}$ Дж. **11.65.** $\approx 1{,}5 \cdot 10^{-5}$ Дж. **11.66.** $1{,}9 \cdot 10^{-5}$ Дж. **11.67.** $\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R^2}$; $\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$; 0; $\frac{2q}{9\pi\varepsilon_0 R^2}$; $\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}$; $\frac{q\sqrt{2}}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$; 0. **11.68.** $q^2/(8\pi\varepsilon_0 h)$.

12.1. $2I_1t$. **12.2.** $\approx 0{,}13$ мА. **12.3.** Il/γ. **12.4.** Решение. $I = q/t = Ne/t$ (1); $N = \frac{m}{M}N_A$ (2); $m = DlS$ (3); $v = l/t$ (4); $j = I/S$ (5).

Из (1) — (5) $v = \frac{Mj}{eDN_A}$; $v \approx 0{,}74$ мкм/с.

12.5. $\frac{\varepsilon_0 U}{eRCd^2}$. **12.6.** $I\sqrt{2U/\gamma}$. **12.7.** В 200 раз. **12.8.** $l_ж \approx 44l_у$; $2\varepsilon_0 I(\varrho_у - \varrho_ж) \approx 3{,}5 \cdot 10^{-15}$ Кл. **12.9.** $\frac{n\alpha_1 + \alpha_2}{n + 1}$; $\frac{\alpha_1 + n\alpha_2}{n + 1}$. **12.10.** $\approx 4{,}3$ А/мм^2. **12.11.** $\frac{\varepsilon_0\varepsilon\varrho}{nC}$. **12.12.** 6.

12.13. а) r; б) r; в) $\approx 5{,}46\,r$; $\frac{U}{2r}$, $\frac{U}{4r}$, ..., $\frac{U}{2^n r}$. **12.14.** Уменьшится в 1,25 раза. **12.15.** $3R$; 0; $12R/17$. **12.16.** 0,6 Ом. **12.17.** $2R/N$. **12.18.** а) 1,6 r; б) 0,975 r; в) 0,775r; г) 1,98r. **12.19.** а) $2r/3$; $8r/15$; б) $r/2$; в) $4r/5$; $3r/4$; $11r/20$; г) $5r/6$; $19r/30$; $6r/5$; $31r/30$. **12.20.** $r/2$, $r/2$, $5r/12$ (октаэдр); $r/2$ (тетраэдр). **12.21.** $5r/6$; $7r/12$; $3r/4$.

12.22. $r/2$. **12.23.** $\approx 1{,}1$ В. **12.24.** 220 Ом; 70 Ом и 33 Ом. **12.25.** $\frac{RU}{IR-U}$. **12.26.** $\frac{R_V U l (l-x)}{l^2 R_V + l R_V x - R_0 x^2}$. **12.27.** 2 км; 10 Ом. **12.28.** 2 Ом; 20/9 Ом; 43,2 А. **12.29.** $5\mathcal{E}/(36r)$. **12.30.** 4 А. **12.31.** $U_0/(n+1)$; $U_0/4$. **12.32.** $5/11\varphi$.

12.33. 16 мВ. **12.34.** 40 кОм; 0,31 Ом. **12.35.** $\frac{mn-1}{m+n+2}$. **12.36.** 2/3 А. **12.37.** Сила тока в амперметре $A1$ увеличится в 1,5 раза, показания остальных приборов не изменятся. **12.38.** 196 мкА. **12.39.** 8,64 В. **12.40.** 10 Ом.

12.41. ≈ 269 Ом; $\approx 0{,}44$ А. **12.42.** $\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \varrho I}{Cd}$; $\frac{\varepsilon_0^2(\varepsilon-1)\varrho I}{\varepsilon Cd}$; $\frac{(\varepsilon_0\varepsilon\varrho I)^2}{2Cd}$. **12.43.** $\pm 1{,}8 \cdot 10^{-10}$ Кл. **12.44.** 7,4 мин. **12.45.** а) $\approx 0{,}9$ мкА; б) $2{,}8 \cdot 10^{-2}$ мкА. **12.46.** 2,5 q/C. **12.47.** $\frac{(R_1C_1 - R_2C_2)\,\mathcal{E}}{R_1+R_2+r}$, если $R_1C_1 = R_2C_2$. **12.48.** 7 А. **12.49.** $\frac{(n-1)\,U_1U_2}{nU_1 - U_2}$.

12.50. $5C\,\mathcal{E}/21$ **12.51.** $\left(\frac{R_1}{R_1+R_2} - \frac{C_2}{C_1+C_2}\right)\mathcal{E}$; $\frac{(R_1C_1 - R_2C_2)\,\mathcal{E}}{(C_1+C_2+C_3)(R_1+R_2)}$. **12.52.** 2 В или 22 В. **12.53.** 6,8 В. **12.54.** В 4 раза. **12.55.** 9,6 В. **12.56.** 12 В; 2 Ом. **12.57.** 6 А. **12.58.** 1 кОм. **12.59.** 5,5 А. **12.60.** $\frac{zR\,(2R+3r)}{(100\% - z)(2R+r)} \approx 0{,}07$ Ом. **12.61.** 163 кОм. **12.63.** $\frac{\mathcal{E}_1 r_2 \pm \mathcal{E}_2 r_1}{r_1+r_2}$; 0; $\mathcal{E}$. **12.64.** $\frac{\mathcal{E}}{r} + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{6r}$; $\frac{2\mathcal{E}+\varphi_2-\varphi_1}{2}$.

12.65. 1,25. **12.66.** $\frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_1 R - \mathcal{E}_2 r_1}{(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)\,R}\,l$. **12.67.** $\frac{(N-2k)\,\mathcal{E}}{R+Nr}$. **12.68.** 0; 0; нет. **12.69.** $\frac{5R+12r}{3R+6r}\,\mathcal{E}$. **12.70.** $\frac{3\mathcal{E}r}{11R^2+14rR+2r^2}$. **12.71.** 0,6 А; $\approx 7{,}3$ А. **12.72.** Если $R=r$. **12.73.** 0,12 А. **12.74.** 7,36 А; 96. **12.75.** Последовательно. **12.76.** $4{,}25 \cdot 10^{18}$. **12.77.** 14 кВ. **12.78.** 3,36 кВт. **12.79.** В 10 раз. **12.80.** В ≈ 5 раз. **12.81.** 1,63 А. **12.82.** 14,4 Вт; 9,6 Вт. **12.83.** ≈ 2 В; $\approx 0{,}03$ Ом. **12.84.** 13,5 Вт. **12.85.** 6 Ом. **12.86.** 97%. **12.87.** 7 Ом. **12.88.** 85%; 52%. **12.89.** 25 А · ч; 62,5%. **12.90.** 9 Вт. **12.91.** 32 Вт; 50%. **12.92.** 13. **12.93** ≈ 10 г. **12.94.** 44 мин. **12.95.** 89%. **12.96.** ≈ 320 °C. **12.97.** 36 Дж; 4 Дж. **12.98.** $\frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2}{R} + \frac{2\mathcal{E}(\varphi_1-\varphi_2)+\mathcal{E}^2}{r}$. **12.99.** $\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$; $\frac{(\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1)^2}{4r_1r_2(r_1+r_2)}$. **12.100.** 50 мин; 12,5 мин. **12.101.** 3 ч; 45 мин. **12.102.** 0,56 Ом.

12.103. $\frac{(U_1^2 - U_2^2)\,t_1t_2}{U_1^2 t_1 - U_2^2 t_2 + U_3^2(t_2-t_1)} = 44$ мм. **12.104.** $\frac{n\Delta T}{(n+1)^2}$.

12.105. $zU/200\%$. **12.106.** 820 °C. **12.107.** $\frac{(U-\mathcal{E})\,\mathcal{E}}{r}$; $\frac{(U-\mathcal{E})^2}{r}$.

12.108. $\frac{2(I_2 - I_1)U - (I_2^2 - 4I_1^2)R}{2(I_2^2 - I_1^2)\varrho}$; $\frac{I_1U - I_1^2(2R + \varrho x)}{F}$. **12.109.** 5,6 · 10^{-9} Дж. **12.110.** 120 В; 250 Вт. **12.111.** 16 А. **12.112.** 180 Вт; 3 А. **12.113.** $\frac{I_1^2 - I_1I_0}{I_1^2 - 2I_0^2}$. **12.114.** $\frac{I(\mathscr{E} - IR)}{2\pi rMg}$. **12.115.** 2 ч 5 мин. **12.116.** 149 ч; 14,9 МВт · ч. **12.117.** 2600 А/м^2. **12.118.** 3 ч. **12.119.** ≈ 144 кДж. **12.120.** 1,8 × 10^{-2}; 1,1 · 10^{22}; 3,7 · 10^{-2}; 2,2 · 10^{22}. **12.121.** 2,66 г; 1,62 г; 4,75 г; 2,01 г. **12.122.** 299 К. **12.123.** ≈ 165 сут. **12.124.** 5,3 А.

13.1. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{IB}{2\varrho gS}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3IB}{4\varrho gS}$. **13.2.** 2,45 А. **13.3.** 2,2 мкА. **13.4.** $IBR^2/2$; $n\pi IBR^2$. **13.5.** IBR. **13.6.** $B_n = \frac{\mu_0 nIR^2 \sin\frac{2\pi}{n}}{4\pi\left(x^2 + R^2\cos^2\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{x^2 + R^2}}$; $B_3 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{7}}\frac{\mu_0 I}{R}$; $B_4 = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\mu_0 I}{R}$; $B_\infty = \frac{\mu_0 IR^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$. **13.7.** б) 10^{-4} Н/м. **13.8.** 9,7 · 10^{-6} Н · м. **13.9.** 1,8 · 10^{-5} Тл. **13.10.** 1,5 · 10^{-16} с; 12,5 Тл. **13.11.** 300 об/с. **13.12.** 1,76 · 10^{11} Кл/кг. **13.13.** 7,2 · 10^{-24} кг · м/с. **13.14.** Если $E = vB$. **13.15.** 10^{-5} А; 89 мкВ/м. **13.16.** $\frac{mB}{\varrho D}$; $\frac{mB}{2\varrho D}$. **13.17.** 0,22 В; 0,24 В. **13.18.** С ускорением $a = 11{,}8\ g$. **13.19.** 8 · 10^{-6} Н. **13.20.** 4 м/с. **13.21.** 98 м/с. **13.22.** 9,8 м/с^2. **13.23.** $q = \pi a^2 nB/R$; $Q = \pi^2 a^4 nfB^2/R$. **13.24.** 10 А; 9 В. **13.25.** $\frac{2\mathscr{E} \pm \omega Bl}{2(R + r)}$; $\frac{\omega Brl^2 - 2\mathscr{E}R}{2(R + r)}$; $\frac{2\mathscr{E}}{Bl^2}$. **13.26.** 0. **13.27.** πkrR. **13.28.** 4 · 10^{-4} Дж; 8 · 10^{-4} Дж; **13.29.** 318 А/с. **13.30.** 6 × 10^{-3} Кл. **13.31.** 100 с. **13.32.** $I = I_0 + 5t + t^2$ (величины выражены в единицах СИ). **13.33.** $\frac{CU^2 - LI^2}{2}$. **13.34.** 2,2 Ом. **13.35.** 50 В. **13.36.** 200 об/мин; 300 об/мин. **13.37.** 400 об/мин; 1,3 кВт. **13.38.** $\frac{\mathscr{E}\sqrt{v} - v\sqrt{mgR}}{\sqrt{mgR}}$. **13.39.** $\frac{\omega SB\sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2L^2}}$; $\frac{(\omega SB)^2 R}{2(R^2 + \omega^2L^2)}$. **13.40.** $\sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$. **13.41.** $C = P/(2\pi fU_R\sqrt{U^2 - U_R^2})$; $C = 8{,}6$ мкФ; $L = 1{,}17$ Гн. **13.42.** 48 Ом; 240 Ом. **13.43.** 3. **13.44.** 1,4 А. **13.45.** ≈110 В.

14.1. 2 *Н*. **14.2.** 0,92 м. **14.3.** $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{9b}{8a}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. **14.4.** $x = l\sqrt{2\left(1 - \cos\frac{4\pi}{n}\right)}$, где n — целое число. Будут двигаться по окружности радиусом l со скоростью $v = 4\pi fl$. Если n — целое число, то число изображений $k = n - 1$. Если $n = 2i \pm \xi$, где i — целое число, а $\xi < 1$, то число изображений $k = 2i$. **14.5.** 2α. **14.6.** ≈ 143°. **14.10.** 48 см; 3. **14.11.** $\frac{2IL}{L \pm l}$;

$\dfrac{2lL}{L+l}$. **14.12.** 10 см. **14.17.** $\approx 10^{-2}$ см. **14.18.** -60 см; -90 см; ∞; 30 см. **14.19.** 6 м. **14.20.** На расстоянии 30 см от второго зеркала. **14.21.** $f = \dfrac{2n-1}{n} F$. При $n = 2k - 1$ f — расстояние до первого зеркала, при $n = 2k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ f — расстояние до второго зеркала. **14.22.** $\approx 0{,}67\ R$.

15.1. 0,62. **15.2.** $\operatorname{arctg} \dfrac{n_2}{n_1}$. **15.3.** 3,56 см. **15.4.** 1,6. **15.5.** На расстоянии 12 см от источника. **15.6.** $x = 6$ см. **15.7.** 0,98. **15.8.** $n_2 R / n_1$. **15.9.** $\gamma = 2{,}5\alpha$; $n = 2 \cos \dfrac{\alpha}{2} \sqrt{\left(2 \cos \alpha + \cos \dfrac{\alpha}{2}\right)^2 + 1}$. **15.11.** $\approx 3°$. **15.12.** а) $\dfrac{(nd - nR - R) Rd}{(2d - R)(R + nd)} \approx 26{,}5$ см; б) 14,0 см. **15.13.** На расстоянии $\dfrac{nR}{2-n}$ от центра шара. **15.19.** $\sqrt{Ll} \pm l$. **15.20.** $\dfrac{\Gamma - 1}{\Gamma d}$. **15.21.** 5 см; 1 см. **15.22.** 2,25 см. **15.23.** $\dfrac{L^2 - l^2}{4L}$. **15.24.** $\sqrt{H_1 H_2}$. **15.25.** 5 см. **15.26.** а) 1,5 см; б) 1,5 см. **15.27.** $\approx 2{,}5$ м; 90%. **15.28.** 13,2 см.

15.29. $\dfrac{3l + 2\sqrt{3}F}{3l - \sqrt{3}F} l$. **15.30.** $\dfrac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 - \Gamma_2} l$. **15.31.** 32 см; 0,8 см. **15.35.** 50 см; -100 см; **15.36.** 3 см. **15.37.** $-37{,}5$ см. **15.38.** $\dfrac{nD_0}{D_0 - (n-1) D_1}$. **15.39.** $\dfrac{nRd}{\pm d \pm nd - nR}$.

15.40. 171,6 см. **15.41.** 10 см; 8 см; 10 см, $\approx 1{,}85$ см. **15.42.** 1,22 м. **15.43.** 7,8 см. **15.44.** -7 см. **15.45.** $nF/2$; $\dfrac{(n_c - 1) nF}{2(n_c - n)}$. **15.46.** На расстоянии 44,5 см от второй линзы. **15.47.** На расстоянии 30 см перед собирающей линзой. **15.48.** а) $\dfrac{(H_0 - H) F_2 + Hl}{H(l - F_1 - F_2)} F_1$; б) $\dfrac{(H_0 - H) F_2 - Hl}{H_0(l + F_1 + F_2)} F_1$ при $l < \dfrac{H_0 - H}{H} F_2$. **15.49.** 10 см. **15.50.** На расстоянии $F/3$ от рассеивающей линзы; на расстоянии 2,5 F от собирающей линзы; на расстоянии $0{,}6F$ от собирающей линзы. **15.51.** 25 см. **15.52.** ≈ 5 мм. **15.53.** 3,5; 8,93 см; 2,5. **15.54.** 40 см. **15.55.** $-2{,}66$ дптр. **15.56.** 12 см; ≈ 15 см. **15.57.** $\approx 1{,}9$ см. **15.58.** а) 10 м; б) $\approx 1{,}25$ мс. **15.59.** 2,5°. **15.60.** 54 см; 2 см.

ОГЛАВЛЕНИЕ

НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЖИДКИХ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Величина / Вещество	Плотность ρ, кг · м$^{-3}$	Удельная теплоемкость c, Дж · кг$^{-1}$ · К$^{-1}$	Удельная теплота парообразования r, Дж · кг$^{-1}$	Удельная теплота плавления λ, Дж · кг$^{-1}$
Вода	10^3	$4{,}18 \cdot 10^3$	$2{,}25 \cdot 10^6$	–
Ртуть	$1{,}36 \cdot 10^3$	$1{,}4 \cdot 10^2$	$2{,}8 \cdot 10^5$	–
Спирт	$8 \cdot 10^2$	$2{,}42 \cdot 10^3$	$8{,}53 \cdot 10^6$	–
Алюминий	$2{,}7 \cdot 10^3$	$9 \cdot 10^2$	–	$3{,}2 \cdot 10^5$
Железо (сталь)	$7{,}8 \cdot 10^3$	$4{,}6 \cdot 10^2$	–	$2{,}7 \cdot 10^5$
Лед	$9 \cdot 10^2$	$2{,}1 \cdot 10^3$	–	$3{,}3 \cdot 10^5$
Медь	$8{,}9 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^2$	–	$1{,}8 \cdot 10^5$

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ

При $x \ll 1$ $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$, $\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x$

Если $x \approx y$, то $\sqrt{xy} \approx 0{,}5\,(x+y)$,

если $x \ll 1$ и $y \ll 1$, то $\dfrac{1 \pm x}{1 \pm y} \approx 1 \pm (x-y)$

ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Наименование	Символ	Значение в СИ	Наименование	Символ	Значение в СИ
Гравитационная постоянная	G	$6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2 · кг$^{-2}$	Масса покоя электрона	m_e	$9{,}109 \cdot 10^{-31}$ кг
			Масса покоя протона	m_p	$1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг
Объем моля идеального газа при нормальных условиях	V_m	$22{,}41 \cdot 10^{-3}$ м^3·моль$^{-1}$	Заряд электрона	e	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$	Постоянная Фарадея	F	$9{,}65 \cdot 10^4$ Кл · моль$^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	$8{,}314$ Дж · моль$^{-1}$· К$^{-1}$	Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф · м$^{-1}$

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Средний радиус Земли $6{,}37 \cdot 10^6$ м

Средняя плотность Земли 5500 кг · м$^{-3}$

Среднее расстояние от Земли до Луны $3{,}84 \cdot 10^8$ м

Среднее расстояние от Земли до Солнца $1{,}495 \cdot 10^{11}$ м