Л.Я. САВЕЛЬЕВ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ

ТЕОРИЯ

ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2

Министерство образования и науки РФ
Новосибирский государственный университет

Л.Я. Савельев

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Часть 2

Новосибирск 2005

ББК 22.171
УДК 519.21

Савельев Л.Я. Элементарная теория вероятностей, 2.
Учебное пособие. Новосибирский государственный университет.
Новосибирск, 2005. (190 с)

ISBN 5-94356-274-5

Первая часть книги посвящена теории. В ней сначала подробно описываются конечные вероятностные пространства. Чтобы читать ее, достаточно уметь оперировать с конечными суммами и произведениями. Переход к счетным пространствам требует знакомства с рядами. В непрерывных пространствах нужны интегралы. Теоретические выводы поясняются большим количеством примеров. Задачи с решениями составляют вторую часть книги. Там повторяются основные определения и формулы. Это позволяет при желании читать вторую часть независимо от первой.

Рецензент канд. физ.-мат. наук Н. И. Чернова

Содержание

Задачи

1. Конечные вероятностные модели

В этой главе рассматриваются некоторые задачи, связанные с *конечными вероятностными моделями.*

1.1. Свойства вероятности

Конечная вероятностная модель определяется конечным множеством U, элементы u которого называются *исходами*, и положительной нормированной функцией p на множестве U, которая называется *элементарной вероятностью*:

$$p\left(u\right) \geqslant 0, \qquad \sum p\left(u\right) = 1.$$

Каждая часть A множества исходов U называется *событием*. Сумма $P\left(A\right)$ элементарных вероятностей $p\left(u\right)$ исходов u, составляющих событие A называется *вероятностью события* A:

$$P\left(A\right) = \sum_{u \in A} p\left(u\right).$$

Конечная вероятностная модель описывает *опыт* с конечным множеством возможных *результатов*, реализация которых зависит от случая. Исходы описывают возможные результаты опыта.

События описывают *явления*, определяющиеся этими результатами. Элементарная вероятность исхода является *мерой реализуемости результата*, описываемого этим исходом. Вероятность события служит *мерой реализуемости явления*, описываемого этим событием.

Замечание. Для того, чтобы избежать громоздких оборотов, вместо *результат, описываемый исходом*, говорят *исход*; вместо *явление, описываемое событием, — событие*; вместо *мера реализуемости — вероятность.*

Таким образом, термины *исход*, *событие* и *вероятность* употребляются в двух смыслах: содержательном и формальном.

При вычислении вероятностей событий удобно использовать следующие правила:

Правило сложения:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \qquad (A \cap B = \varnothing).$$

Правило вычитания:

$$P(B-A) = P(B) - P(A) \qquad (A \subseteq B).$$

Правило дополнения:

$$P\left(A'\right) = 1 - P(A).$$

Правило объединения:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Правило неравенства:

$$P(A) \leqslant P(B) \qquad (A \subseteq B).$$

Среди конечных вероятностных моделей выделяются модель Лапласа и модель Бернулли.

1.1.1. Модель Лапласа

Классическая *модель Лапласа* для n равновероятностных исходов определяется множеством U из n элементов и элементарной вероятностью p со значением $p(u) = 1/n$ для каждого исхода u. В этой модели вероятность $P(A)$ каждого события A равна отношению числа исходов $n(A)$, составляющих событие A, к числу всех исходов $n(U)$:

$$P(A) = n(A)/n(U).$$

Модель Лапласа описывает опыты с *равновозможными* результатами.

Задача 1. *Игральная кость подбрасывается два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз появляется шестерка?*

Решение. Результат двукратного подбрасывания кости можно описать множеством U строк $u = u_1u_2$ длины 2, составленных из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Число таких строк равно $6^2 = 36$. Симметричность кости позволяет использовать модель Лапласа для $n = 36$ равновероятных исходов. Задача сводится к вычислению вероятности $P(C)$ события C, составленного из строк $u = u_1u_2$, для которых $u_1 = 6$ или $u_2 = 6$:

$$C = \{61, 62, 63, 64, 65, 66, 16, 26, 36, 46, 56\}.$$

1. Имеем:

$$P(C) = n(C)/n(U) = 11/36.$$

2. Дополнение $A = C'$ события C состоит из строк $u = u_1u_2$, для которых $u_1 \neq 6$ или $u_2 \neq 6$. Число таких строк равно $5^2 = 25$. Поэтому

$$P\left(C'\right) = P(A) = 5^2/6^2 = (5/6)^2.$$

По правилу дополнения

$$P(C) = P\left(A'\right) = 1 - (5/6)^2 = 11/36.$$

3. Событие C можно представить в виде объединения событий $A = \{61, 62, 63, 64, 65, 66\}$ и $B = \{16, 26, 36, 46, 56, 66\}$, описывающих появление шестерки соответственно при первом и втором подбрасываниях.

Имеем:

$$P(A) = 6/36, \quad P(B) = 6/36, \quad P(AB) = P(\{66\}) = 1/36.$$

По правилу объединения,

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \\ = 6/36 + 6/36 - 1/36 = 11/36.$$

Задача 2. *В урне находятся 5 шаров, отличающихся только номерами 1, 2, 3, 4, 5. Вынимается наугад выбранный шар и отмечается его номер. Вынутый шар возвращается в урну. После тщательного перемешивания из нее вынимается наугад выбранный шар. Какова вероятность того, что вынимается не один и тот же шар?*

Решение. Результаты рассматриваемого опыта можно описать множеством U строк $u = u_1u_2$ длины 2, составленных из номеров 1, 2, 3, 4, 5. Число таких строк $5^2 = 25$. Условие о выборе наугад позволяет использовать модель Лапласа для $n = 25$ равновероятных исходов. Задача сводится к вычислению вероятности $P(A)$ события A, составленного из всех строк $u = u_1u_2$ с различными номерами $u_1 \neq u_2$. Дополнение A' события A состоит из строк $u = u_1u_2$ с одинаковыми номерами ($u_1 = u_2$):

$$A' = \{11, 22, 33, 44, 55\}.$$

По правилу дополнения,

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - n(A')/n(U) = 1 - 5/25 = 4/5.$$

Задача 3. *В урне находятся 5 шаров, отличающихся только номерами 1, 2, 3, 4, 5. Вынимается наугад выбранный шар. Вынутый шар не возвращается в урну. Вновь вынимается наугад* *выбранный шар. Какова вероятность того, что номера вынимаемых шаров нечетные или в сумме меньше пяти?*

Решение. Результаты рассматриваемого опыта можно описать множеством U строк $u = u_1u_2$ длины 2, составленных из неравных номеров u_1 и u_2 из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Число таких строк равно 20. Условие о выборе наугад позволяет использовать модель Лапласа для $n = 20$ равновероятных исходов. Задача сводится к вычислению вероятности $P(A \cup B)$ объединения $A \cup B$ событий A и B, составленных из строк $u = u_1u_2$ $(u_1 \neq u_2)$, для которых соответственно u_1 и u_2 нечетные или $u_1 + u_2 \leqslant 5$:

$$A = \{13, 15, 31, 35, 51, 53\}, \quad B = \{12, 13, 14, 21, 23, 31, 32, 41\},$$
$$AB = \{13, 31\}.$$

Имеем:

$$P(A) = 6/20, \qquad P(B) = 8/20, \qquad P(AB) = 2/20.$$

По правилу объединения,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 6/20 + 8/20 - 2/20 = 3/5.$$

Задача 4. *Подбрасываются красная и белая игральная кости. Какова наиболее вероятная сумма очков?*

Решение. По аналогии с задачей 1 результаты рассматриваемого опыта можно описать множеством U строк $u = u_1u_2$ длины 2, составленных из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, и использовать модель Лапласа для $n = 36$ равновероятных исходов. Задача сводится к вычислению вероятностей $P(A_s)$ событий A_s, составленных из строк $u = u_1u_2$, для которых $u_1 + u_2 = s$ $(s = 2, 3, \ldots, 12)$:

$$\begin{array}{lll}
A_2 = \{11\}, & A_6 = \{15, 24, 33, 42, 51\}, & A_{10} = \{46, 55, 64\}, \\
A_3 = \{12, 21\}, & A_7 = \{16, 25, 34, 43, 52, 61\}, & A_{11} = \{56, 65\}, \\
A_4 = \{13, 22, 31\}, & A_8 = \{26, 35, 44, 53, 62\}, & A_{12} = \{66\}. \\
A_5 = \{14, 23, 32, 41\}, & A_9 = \{36, 45, 54, 63\}, &
\end{array}$$

Искомые вероятности содержит следующая таблица:

s	2	3	4	5	6	7
$P(A_s)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36
s	8	9	10	11	12	
$P(A_s)$	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	

.

Наиболее вероятно, что сумма числа очков окажется равной 7.

Задача 5. *Подбрасывается красная и белая игральная кости. Какова вероятность того, что сумма очков равна 1) 7 или 11; 2) 2 или 3 или 12; 3) любому другому возможному числу?*

Решение. Используем модель задачи 4. Дело сводится в вычислению вероятности событий

$$B = A_7 + A_{11}, \qquad \varPi = A_2 + A_3 + A_{12},$$
$$H = A_4 + A_5 + A_6 + A_8 + A_9 + A_{10}.$$

Применяя *правило сложения* и таблицу задачи 4, получаем

$$P(B) = P(A_7 + A_{11}) = P(A_7) + P(A_{11}) = 6/36 + 2/36 = 8/36,$$
$$P(\varPi) = P((A_2 + A_3) + A_{12}) = P(A_2 + A_3) + P(A_{12}) =$$
$$= P(A_2) + P(A_3) + P(A_{12}) = 1/36 + 2/36 + 1/36 = 4/36,$$
$$P(H) = 3/36 + 4/36/5/36 + 5/36 + 4/36/ + 3/36 = 6/9.$$

Замечание. Задача 5 имеет отношение к игре *крэпс*. Событие B описывает *выигрыш* в этой игре, $\varPi$ — *проигрыш*, H — *ничью.* В случае ничьей кости подбрасываются снова, и игра продолжается до тех пор, пока не повторится сумма очков, полученная при первом подбрасывании, либо не получится сумма 7. В первом случае игрок выигрывает, во втором — проигрывает.

1.1.2. Модель Бернулли

Модель Бернулли для n испытаний с вероятностью успеха a определяется множеством U строк $u = u_1 \ldots u_n$ длины n, составленных из *единиц* и *нулей*, и элементарной вероятностью p со значением

$$p(u) = a^{s(u)}(1-a)^{n-s(u)} \qquad (s(u) = u_1 + \cdots + u_n)$$

для каждого исхода u. Модель Бернулли описывает *опыты,* составленные из *последовательности нескольких одинаковых независимых испытаний*, каждое из которых имеет два возможных результата: *успех* или *неудача.*

Успех или неудачу при j-м испытании описывают события

$$У_j = \{u : u_j = 1\}, \qquad H_j = \{u : u_j = 0\} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

составленные из строк, у которых на j-м месте соответственно 1 или 0. Верна следующая

Формула успехов и неудач:

$$P\left(\bigcap_{i\in K} У_i \bigcap_{j\in L} H_j\right) = a^k (1-a)^l.$$

В этой формуле K и L обозначают *непересекающиеся* множества, составленные соответственно из k и l номеров $1, \ldots, n$. В частности,

$$P(У_j) = a, \qquad P(H_j) = 1 - a \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Пример 1. *При рождении $n = 2$ неидентичных близнецов каждый из них с вероятностью 0.52 оказывается мальчиком и с вероятностью $1 - a = 0.48$ — девочкой. Какова вероятность того, что близнецы оказываются одного пола?*

Предположим, что для описания неидентичных близнецов можно использовать модель Бернулли для $n = 2$ испытаний с вероятностью успеха $a = 0.52$. В этой модели задача сводится к вычислению вероятности $P(A)$ события $A = У_1 У_2 + H_1 H_2$, описывающего появление двух мальчиков или двух девочек. Используя правило сложения и формулу успехов и неудач, получаем:

$$P(A) = P(У_1У_2) + P(Н_1Н_2) = a^2 + (1-a)^2 = \\ = (0.52)^2 + (0.48)^2 \approx 0.51.$$

Пример 2. *Нажимая кнопку K, можно привести в действие устройство P, если и только если замкнуты одинаковые и независимые блокировки 1 и 2, или 3, или 4. Каждая из этих блокировок с вероятностью $a = 10^{-7}$ замыкается случайно. Какова вероятность случайной разблокировки системы (рис. 1)?*

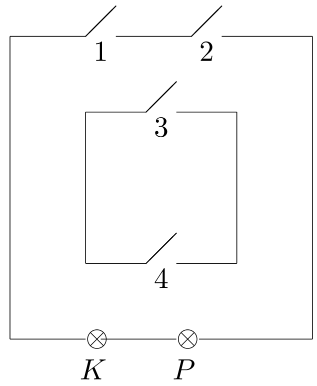


Рис. 1

Используем модель Бернулли для $n = 4$ испытаний с вероятностью $a = 10^{-7}$. Задача сводится к вычислению вероятности объединения $A \cup B \cup C$ событий $A = У_1У_2$, $B = У_3$, $C = У_4$, описывающих замыкание блокировок 1 и 2, 3, 4 соответственно.

Используя правило объединения и формулу успехов и неудач, получаем:

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC) = 2a - a^2.$$

Заметим, что

$$A(B \cup C) = \{1111, 1110, 1101\}, \quad P(A(B \cup C)) = a^4 + 2a^3(1-a).$$

Еще раз используя *правило объединения*, находим

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P(A(B \cup C)) =$$
$$= a^2 + 2a - a^2 - a^4 - 2a^3(1-a) = 2a - 2a^3 + a^4 < 10^{-6}.$$

Можно считать, что случайная разблокировка системы *практически невозможна.*

Пример 3. *На реактивном двигателе вместо одного установлено два воспламенителя 1 и 2. На воспламенителе 1 вместо одного установлено два электрозапала 3 и 4, на воспламенителе 2 — электрозапалы 5 и 6. Каждый из этих элементов системы запуска двигателя независимо от других с вероятностью $a = 10^{-3}$ выходит из строя. Какова вероятность запуска двигателя?*

Используем модель Бернулли для $n = 6$ испытаний с вероятностью успеха $a = 10^{-3}$. Задача сводится к вычислению вероятности объединения $A \cup B \cup C \cup D$ событий: $A = H_1H_3$, $B = H_1H_4$, $C = H_2H_5$, $D = H_2H_6$, описывающих рабочее состояние воспламенителей и соответствующих электрозапалов.

Последовательно применяя правило объединения, убеждаемся в том, что

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4,$$

где

$$S_1 = P(A) + P(B) + P(C) + P(D),$$
$$S_2 = P(AB) + P(AC) + P(AD) + P(BC) + P(BD) + P(CD),$$
$$S_3 = P(ABC) + P(ABD) + P(ACD) + P(BCD),$$
$$S_4 = P(ABCD).$$

Используя формулу успехов и неудач, получаем:

$$P(A \cup B \cup C \cup D) = 4(1-a)^2 - \left(2(1-a)^3 + 4(1-a)^4\right) +$$
$$+ 4(1-a)^5 - (1-a)^6 = 1 - a^2 - 2a^3 + a^4 + 2a^5 - a^6 \approx 1 - 10^{-6}.$$

Можно считать, что запуск двигателя *практически достоверен.*

А. Задача о первом успехе. *Какова вероятность того, что в последовательности n одинаковых и независимых испытаний, каждое из которых с вероятностью a оканчивается успехом и с вероятностью $1-a$ — неудачей, первый успех появляется при k-м испытании?*

Решение. В модели Бернулли для n испытаний с вероятностью успеха a задача сводится к вычислению вероятности события $A = У_k \bigcap\limits_{j<k} H_j$, описывающего успех при k-м и неудачи при всех предыдущих испытаниях ($1 \leqslant k \leqslant n$). По формуле успехов и неудач

$$P(A) = a(1-a)^{k-1}.$$

Пример 1. *Симметричная монета подбрасывается $n = 10$ раз. Какова вероятность того, что первый герб появится при $k = 10$-м подбрасывании?*

Ответ: $(1-1/2)^{10-1} \cdot 1/2 \approx 0.001$.

Пример 2. *В одинаковых и независимых условиях производятся $n = 3$ выстрела, при каждом из которых с вероятностью $a = 0.8$ поражается цель, а с вероятностью $1 - a = 0.2$ — нет. Какова вероятность того, что цель поражается впервые при $k = 3$-м выстреле?*

Ответ: $0.2^2 \cdot 0.8 = 0.032$.

Пример 3. *Из 10000 изделий, среди которых 10 негодных, $n = 100$ раз наугад выбирается одно (и каждый раз возвращается на место). Какова вероятность того, что первое негодное изделие появится при $k = 10$-м выборе?*

Ответ: $(1-0.001)^9 \cdot 0.001 < 0.001$.

B. Задача о хотя бы одном успехе. *Какова вероятность того, что оканчивается успехом хотя бы одно из n одинаковых и независимых испытаний, каждое из которых с вероятностью a оканчивается успехом, а с вероятностью $1-a$ неудачей?*

Решение. В модели Бернулли для n испытаний с вероятностью успеха a задача сводится к вычислению вероятности $P(A)$ события A, составленного из всех строк u, в которых есть хотя бы одна единица. Дополнение A' события A состоит из единственной строки $u = 0 \ldots 0$. Поэтому

$$P\left(A'\right) = p\,(0 \ldots 0) = a^0\,(1-a)^{n-0} = a^n.$$

По правилу дополнения получаем

$$P\,(A) = 1 - (1-a)^n\,.$$

Пример 1. *Симметричная монета подбрасывается $n = 10$ раз. Какова вероятность того, что хотя бы один раз она падает гербом вверх?*

Ответ: $1 - (1/2)^{10} \approx 0.999$.

Пример 2. *В одинаковых и независимых условиях производятся $n = 3$ выстрела, при каждом из которых с вероятностью $a = 0.8$ поражается цель, а с вероятностью $1 - a = 0.2$ — нет. Какова вероятность того, что цель поражается хотя бы один раз?*

Ответ: $1 - (0.2)^3 = 0.992$.

Пример 3. *Из 10000 изделий, среди которых 10 негодных, $n = 100$ раз наугад выбирается одно (и каждый раз возвращается на место). Какова вероятность того, что среди выбираемых изделий хотя бы один раз оказывается негодное?*

Ответ: $1 - (1 - 0.001)^{100} \approx 0.1$.

C. Задача о числе испытаний. *Каким должно быть число n одинаковых и независимых испытаний, каждое из которых с вероятностью a оканчивается успехом, а с вероятностью $1-a$*

— неудачей, чтобы вероятность хотя бы одному испытанию окончиться успехом была бы больше $1-\alpha$?

Решение. Используя решение задачи о хотя бы одном успехе, находим, что требуемое в условии задачи неравенство $P(A) \geqslant 1-\alpha$ эквивалентно неравенству $(1-a)^n \leqslant \alpha$. Если $0<a<1$ и $0<\alpha<1$, то это неравенство эквивалентно неравенству

$$n \geqslant \frac{\log \alpha}{\log(1-a)}.$$

Пример 1. *Какое число n раз нужно подбросить симметричную монету, чтобы вероятность хотя бы одного появления герба была больше $1-\alpha=0.99$?*

Ответ: $n \geqslant \frac{\log 0.01}{\log 0.5} > 6$.

Замечание. Этот результат можно истолковать так: если подбрасывать симметричную монету 7 раз, то практически достоверно, что хотя бы один раз она упадет гербом вверх.

Упражнение. Подбросить монету 100 раз по 7 раз и отметить число семерок, в которых герб появится хотя бы один раз.

Пример 2. *При каждом выстреле с вероятностью $a=0.7$ поражается цель, а с вероятностью $1-a=0.3$ — нет. Какое число n выстрелов нужно произвести, чтобы вероятность хотя бы одного поражения цели была больше $1-\alpha=0.99$?*

Ответ: $n \geqslant \frac{\log 0.01}{\log 0.3} > 3$.

Пример 3. *Какое число n раз наугад выбрать одно из 10000 изделий, среди которых 10 негодных (каждый раз возвращая его на место), чтобы вероятность хотя бы один раз выбрать негодное изделие было больше $1-\alpha=0.999$?*

Ответ: $n \geqslant \frac{\log 0.001}{\log 0.099} \approx 7500$.

Замечание. Этот результат объясняется чрезвычайной строгостью $1-\alpha=0.999$ контроля, а также малостью доли $a=0.001$ негодных изделий. Для того, чтобы обеспечить такой строгий контроль, нужно проверить примерно 3/4 всех изделий.

D. Задача о данном числе успехов. *Какова вероятность того, что оканчиваются успехом ровно m из n одинаковых и* *независимых испытаний, каждое из которых с вероятностью a оказывается успехом, а с вероятностью $1 - a$ — неудачей?*

Решение. В модели Бернулли для n испытаний с вероятностью успеха a задача сводится к вычислению вероятности $P(A_m)$ события $A_m = \{u : s(u) = m\}$, составленного из всех строк $u = u_1 \dots u_n$, в которых ровно m единиц. Число таких строк равно $\binom{n}{m}$. Элементарная вероятность $p(u)$ каждой такой строки одна и та же:

$$p(u) = a^m (1-a)^{n-m}.$$

Поэтому

$$P(A_m) = \binom{n}{m} a^m (1-a)^{n-m}.$$

Пример 1. *Вычислительная машина производит $n = 10^6$ одинаковых и независимых операций, в каждой из которых с вероятностью $a = 0.001$ происходит ошибка, а с вероятностью $1 - a = 0.999$ — нет. Какова вероятность того, что все $n = 10^6$ операций производятся машиной без ошибок?*

Ответ: $P(A_0) = (1-a)^n = (1-0.001)^{1000000}$.

Замечание. Неравенство Бернулли позволяет оценить степень малости этой вероятности. Если $0 < a < 1$, то $c = \frac{1}{1-a} > 1$, $c - 1 = \frac{a}{1-a}$, $(1-a)^n = \frac{1}{c^n} < \frac{1}{1+n(c-1)} = \frac{1-a}{na} < \frac{1}{na}$.

В частности, если $a = 10^{-3}$ и $n = 10^6$, то

$$\left(1 - 10^{-3}\right)^{10^6} < \frac{1}{10^6 10^{-3}} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}.$$

Пример 2. *Елочная гирлянда состоит из $n = 10$ последовательно соединенных лампочек, каждая из которых с вероятностью $a = 0.01$ перегорает, а с вероятностью $1 - a = 0.99$ — нет. Какова вероятность того, что ни одна лампочка в гирлянде не перегорает?*

Ответ: $P(A_0) = (1-a)^n = \left(1 - 10^{-2}\right)^{10} \approx 1 - 10 \cdot 10^{-2} = 0.9$.

Замечание. Это число оценивает *надежность* гирлянды лампочек.

Пример 3. *Имеются две розовые урны, в каждой из которых находятся красный и белый шары. Из каждой урны вынимается наугад выбранный шар. Какова вероятность того, что среди них* $k = 0, 1, 2$ *красных?*

Условие о выборе наугад позволяет использовать модель Бернулли для $n = 2$ испытаний с вероятностью успеха $a = 1/2$. Задача сводится к вычислению вероятностей событий A_0, A_1, A_2:

$$P(A_0) = \binom{2}{0} (1/2)^0 (1 - 1/2)^{2-0} = 1/4,$$

$$P(A_1) = \binom{2}{1} (1/2)^1 (1 - 1/2)^{2-1} = 1/2,$$

$$P(A_2) = \binom{2}{2} (1 - 1/2)^{2-2} (1/2)^2 = 1/4.$$

Замечание. Задача о розовых урнах имеет отношение к генетике. С основами генетики можно познакомиться, прочитав книгу Н.П.Дубница "Горизонты генетики"(М.: Просвещение, 1970).

При скрещивании растений двух родственных видов, одного с белыми цветами, а другого с красными, были получены гибриды с розовыми цветами. При скрещивании 564 таких гибридов 141 из них дали растение с белыми цветами, 291 — с розовыми и 132 — с красными. Соответствующие частоты 0.350; 0.516 и 0.234 близки к 1/4, 1/2 и 1/4.

Теория Менделя объясняет этот факт следующим образом. Каждая участвующая в образовании *гамет* клетка растения содержит пару *хромосом*, у которой связанный с окраской цветов *локус* занят парой генов u_1, u_2. Принадлежащий первой хромосоме ген u_1 может быть геном 0, обуславливающем белую окраску цветов, либо геном 1, обуславливающем красную окраску. Аналогично определяется принадлежащий второй хромосоме ген u_2. Если растение имеет *генотип* 00 ($u_1 = u_2 = 0$), то у него белые цветы, если 11 ($u_1 = u_2 = 1$) — красные. *Гибриды* имеют генотип $\{01, 10\}$ ($u_1 = 0, u_2 = 1$ или $u_1 = 1, u_2 = 0$) и розовые цветы. Рассматриваемые клетки гибридов при делении производят гаметы двух типов: одна из них содержит хромосому с геном 0, а другая хромосому с геном 1. При скрещивании гаметы одной клетки соединяются с гаметами другой независимым и одинаково случайным образом: каждая гамета каждого типа с одинаковой вероятностью соединяется с каждой другой.

Схематично этот процесс можно описать выбором наугад шаров из урн, рассматривающимся в примере 3.

Пример 4. *Каково наиболее вероятное число успехов для одинаковых и независимых испытаний, каждое из которых оканчивается с вероятностью a успехом, а с вероятностью 1 − a — неудачей?*

В модели Бернулли для n испытаний с вероятностью успеха a задача сводится к выяснению того, какое из чисел $P(A_m)$ наибольшее ($m = 0, 1, \ldots, n$). Будем предполагать, что $0 < a < 1$.

Как нетрудно проверить, использовав решение о данном числе успехов и свойства биномиальных коэффициентов,

$$\frac{P(A_m)}{P(A_{m-1})} = \frac{(n+1)\,a - m}{m\,(1-a)} + 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P(A_{m-1}) &> P(A_m), \text{ если } m > (n+1)\,a, \\ P(A_{m-1}) &= P(A_m), \text{ если } m = (n+1)\,a, \\ P(A_{m-1}) &< P(A_m), \text{ если } m < (n+1)\,a. \end{aligned}$$

Следовательно, наиболее вероятное число успехов m равно целой части числа $(n+1)\,a$: $m = [(n+1)\,a]$.

Замечание. Если число $(n+1)\,a$ целое, то наиболее вероятные числа успехов $m = (n+1)\,a$ и $m-1 = (n+1)\,a-1$. Например, если $n = 3$ и $a = 1/2$, то

$$P(A_0) = 1/8, \quad P(A_1) = 3/8, \quad P(A_2) = 3/8, \quad P(A_3) = 1/8.$$

Пример 4. *Какова вероятность того, что при 100 подбрасываниях симметричной монеты ровно 50 раз появится герб?*

В модели Бернулли $n = 100$ испытаний с вероятностью успеха $a = 1/2$ задача сводится к вычислению вероятности $P(A_{50})$ события A_{50}:

$$P(A_{50}) = \binom{100}{50}(1/2)^{50}(1-1/2)^{100-50} = \frac{100!}{50!50!}2^{-100} < 0.08.$$

Заметим, что при $n = 100$ и $a = 1/2$ наиболее вероятным числом успехов будет $m = [(n+1)a] = [101 \cdot 1/2] = [50 + 1/2] = 50$.

Е. Задача о большом числе успехов. *Какова вероятность того, что оканчиваются успехом больше, чем m из n независимых одинаковых испытаний, каждое из которых оканчивается с вероятностью a успехом, а с вероятностью* $1 - a$ *— неудачей?*

Решение. В модели Бернулли для n испытаний с вероятностью успеха a задача сводится к вычислению вероятности $P(A)$ суммы $A = A_m + \ldots + A_n$ $(0 \leqslant m \leqslant n)$ попарно непересекающихся событий $A_m, \ldots, A_n$.

Используя правило сложения и решение о данном числе успехов, получаем

$$P(A) = P(A_m) + \ldots + P(A_n) = \binom{n}{m}a^m(1-a)^{n-m} + \ldots +$$
$$+ \binom{n}{n}a^n(1-a)^{n-n} = \sum_{m \leqslant l \leqslant n}\binom{n}{l}a^l(1-a)^{n-l}.$$

Замечание. При большом числе слагаемых использовать полученное равенство трудно. Если $m \geqslant na$, то можно оценить найденную сумму следующим образом. Будем предполагать, что $0 < a < 1$.

Как уже отмечалось,

$$\frac{P(A_l)}{P(A_{l-1})} = \frac{(n+1)a - l}{l(1-a)} + 1 = q(l).$$

Если $(n+1)\,a \leqslant m+1 \leqslant l$, то $q\,(l-1) \geqslant q\,(l)$ и поэтому $q = q\,(m+1) \geqslant q\,(l)\,.$ Следовательно,

$$\frac{P\,(A_l)}{P\,(A_m)} = \frac{P\,(A_l)}{P\,(A_{l-1})}\frac{P\,(A_{l-1})}{P\,(A_{l-2})}\ldots\frac{P\,(A_{m+1})}{P\,(A_m)} = \\ = q\,(l)\,q\,(l-1)\ldots q\,(m+1) \leqslant q^{l-m}.$$

Таким образом,

$$P\,(A_l) \leqslant P\,(A_m)\,q^{l-m} \qquad\qquad (m \leqslant l \leqslant n)\,.$$

Суммируя эти равенства, получаем:

$$\sum_{m\leqslant l\leqslant n} P\,(A_l) \leqslant P\,(A_m) \sum_{m\leqslant l\leqslant n} q^{l-m}.$$

Заметим, что

$$0 < q = q\,(m+1) = \frac{(n+1)\,a-(m+1)}{(m+1)\,(1-a)} + 1 < 1.$$

Используя известное равенство для суммы геометрической прогрессии, находим:

$$\sum_{m\leqslant l\leqslant n} q^{l-m} = \sum_{0<k\leqslant n-m} q^k < \sum_{0\leqslant k} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{(m+1)\,(1-a)}{(m+1)-(n+1)a}.$$

Следовательно,

$$P\,(A) = \sum_{m\leqslant l\leqslant n} P\,(A_l) < P\,(A_m)\,\frac{(m+1)\,(1-a)}{(m+1)-(n+1)\,a}.$$

Пример 1. *Производится залп $n = 12$ одинаковых и независимых ракет, каждая из которых с вероятностью $a = 1/3$ поражает цель, а с вероятностью $1 - a = 2/3$ — нет. Цель уничтожается, если ее поражает больше $m = 8$ ракет. Какова вероятность уничтожения цели?*

Используя решение задачи о большом числе успехов и полученную оценку, находим, что искомая вероятность

$$P(A) = \sum_{8 \leqslant l \leqslant 12} \binom{12}{l} \left(\frac{1}{3}\right)^l \left(\frac{2}{3}\right)^{12-l} <$$
$$< \binom{12}{8} \left(\frac{1}{3}\right)^8 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \frac{2\,(8+1)\,2/3}{(8+1) - (12+1)\,1/3} < 0.02.$$

Из-за малой вероятности поражения и большого количества ракет, необходимых для ее уничтожения, цель практически не уничтожается.

Пример 2. *Космическая частица, попадая в данную область пространства, порождает лавину $n = 600$ одинаковых и независимых частиц, каждая из которых с вероятностью $a = 1/2$ регистрируется одним из счетчиков, а с вероятностью $1 - a = 1/2$ — нет. Какова вероятность того, что регистрируется больше, чем 500 частиц?*

Используя решение задачи о большом числе успехов и полученную оценку, находим, что искомая вероятность

$$P(A) = \sum_{l=500}^{600} \binom{600}{l} (1/2)^l (1-1/2)^{600-l} \leqslant$$
$$\leqslant \binom{600}{500} 2^{-600} \frac{501 \cdot 1/2}{501 - 600 \cdot 1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{600 \cdot 599 \ldots 501}{100 \cdot 99 \ldots 1} \cdot \frac{501}{1002 - 601} 2^{-600} \leqslant 2 \cdot 10^{-10}.$$

Регистрация счетчиками такого большого числа частиц в данных условиях практически невозможна.

Пример 3. *Что более вероятно получить:*

1) хотя бы 1 раз 6 очков, подбрасывая кость 6 раз;

2) хотя бы 2 раза 6 очков, подбрасывая кость 12 раз;

3) хотя бы 3 раза 6 очков, подбрасывая кость 18 раз?

Используем модель Бернулли для $n = 6, 12, 18$ испытаний с вероятностью успеха $a = 1/6$. Задача сводится к вычислению вероятностей событий $B_{mn} = A_m + \ldots + A_n$, описывающих появление больше $m = 1, 2, 3$ успехов соответственно:

$$P\left(B_{mn}\right) = \sum_{m \leqslant l \leqslant n} \binom{n}{l} (1/6)^l \, (5/6)^{n-l} =$$

$$= 1 - \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \binom{n}{k} (1/6)^k \, (5/6)^{n-k}.$$

Произведя вычисления, получаем:

1) $P\left(B_{1,6}\right) = 1 - (5/6)^6 \approx 0.665$;
2) $P\left(B_{2,12}\right) = (1 - 5/6)^{12} - 12 \cdot 1/6 \, (5/6)^{11} \approx 0.619$;
3) $P\left(B_{3,18}\right) =$
$= 1 - (5/6)^{18} - 18 \cdot 1/6 \, (5/6)^{17} - 153 \, (1/6)^2 \, (5/6)^{16} \approx 0.597$.

Замечание. Вместо того, чтобы подбрасывать $n = 6, 12, 18$ раз кость, можно один раз подбросить $n = 6, 12, 18$ костей. Связанные с такими подбрасываниями игры разработал Сэмуэль Пепайс. Вероятности появления хотя бы $m = 1, 2, 3$ шестерок по просьбе Пепайса вычислил Исаак Ньютон.

1.2. Условная вероятность

Для каждого события A и *возможного* события B, для которого $P\left(B\right) > 0$, определяется *условная вероятность*

$$P_B\left(A\right) = P(A \mid B) = P\left(AB\right) / P\left(B\right)$$

события A при условии B. Условная вероятность $P_B\left(A\right)$ служит *мерой реализуемости* события A при условии, что реализуется событие B. Определение условной вероятности можно сформулировать как

Правило деления: $P_B(A) = P(AB)/P(B)$.

Непосредственно из правила деления вытекает

Правило умножения: $P(AB) = P(B)\,P_B(A)$.

Задача 1. *Игральная кость подбрасывается два раза. Известно, что сумма очков равна 10. Какова вероятность при этом условии того, что один раз появляется 6 очков?*

Решение. Используем модель задачи 1 из 1.1. Задача сводится к вычислению условной вероятности $P_B(A)$ события $A=\{46, 64\}$ при условии $B = \{46, 55, 64\}$. По правилу деления

$$P_B(A) = P(AB)/P(B) = P(\{46, 64\})/P(\{46, 55, 64\}) = \\ = (2/36)\,/\,(3/26) = 2/3.$$

Задача 2. *Рассматривается выбор с возвращением, описанный в задаче 2 из 1.1. Известно, что первый раз выбирается шар 1. Какова вероятность при этом условии того, что второй раз выбирается шар 2?*

Решение. В модели задачи 2 из 1.1 дело сводится к вычислению условной вероятности $P_B(A)$ события $A = \{12, 22, 32, 42, 52\}$ при условии $B = \{11, 12, 13, 14, 15\}$. По правилу деления,

$$P_B(A) = P(AB)/P(B) = P(\{12\})/P(\{11, 12, 13, 14, 15\}) = 1/5.$$

Задача 3. *Рассматривается выбор с возвращением, описанный в задаче 3 из 1.1. Известно, что первый раз выбирается шар 1. Какова вероятность при этом условии того, что второй раз выбирается шар 2?*

Решение. В модели задачи 3 из 1.1 дело сводится к вычислению условной вероятности $P_B(A)$ события $A = \{12, 22, 32, 42, 52\}$ при условии $B = \{11, 12, 13, 14, 15\}$. По правилу деления,

$$P_B(A) = P(AB)/P(B) = P(\{12\})/P(\{11, 12, 13, 14, 15\}) = 1/4.$$

Задача 4. *Симметричная монета подбрасывается $n = 10$ раз. Известно, что при $k = 3$-м подбрасывании появляется герб.*

Какова вероятность при этом условии того, что этот герб первый?

Решение. В модели Бернулли для $n = 10$ испытаний с вероятностью успеха $a = 1/2$ задача сводится к вычислению условной вероятности $P_B(A)$ события $A = H_1 H_2 У_3$ при условии $B = У_3$. По правилу деления и формуле прямоугольника

$$P_B(A) = P(AB)/P(B) = P(H_1 H_2 У_3)/P(У_3) = 1/4.$$

Задача 5. *Рассматривается выбор с возвращением, описанный в задаче 3 из 1.1. Какова вероятность того, что первый раз выбирается шар 1, а второй раз шар 2?*

Решение. В модели задачи 3 из 1.1 дело сводится к вычислению условной вероятности $P_B(A)$ пересечения двух событий $A = \{12, 22, 32, 42, 52\}$ и $B = \{11, 12, 13, 14, 15\}$. Используя правило умножения и результат задачи 3 этого пункта, получаем:

$$P(AB) = P(B) P_B(A) = (4/20)(1/4) = 1/20.$$

То же самое получается и при непосредственном расчете:

$$P(AB) = P(\{12\}) = 1/20.$$

1.2.1. Формула полной вероятности

Стандартные задачи, решаемые с помощью формулы полной вероятности, можно схематически описать следующим образом.

Задача о полной вероятности. *Известны:*

1) вероятности $P(B_i) = \beta_i$ нескольких исключающих друг друга условий B_i, одно из которых с достоверностью выполняется;

2) условные вероятности $P_{B_i}(A) = \alpha_i$ события A при условии, что выполняется B_i.

Какова вероятность $P(A)$ события A?

Решение. Рассмотрим конечную вероятностную модель с множеством исходов $U = \{11, \ldots, i1, \ldots, n1, 10, \ldots, i0, \ldots, n0\}$, составленном из n строк $11, \ldots, i1, \ldots, n1$, n строк $10, \ldots, i0, \ldots, n0$, и элементарной вероятностью p со значениями:

$$p(i1) = \beta_i \alpha_i, \qquad p(i0) = \beta_i (1 - \alpha_i) \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

В этой модели каждое условие $B_i = \{i1, i0\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ составлено из двух строк $i1$ и $i0$, а событие $A = \{11, \ldots, i1, \ldots, n1\}$ — из строк $11, \ldots, i1, \ldots, n1$.

Используя свойства вероятностей β_i и α_i, нетрудно проверить, что в этой модели

$$P(B_i) = \beta_i, \qquad P_{B_i}(A) = \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Решение задачи дает

Формула полной вероятности:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i.$$

Пример 1. *Имеются красная, черная и белая урны с черными и белыми шарами. В красной урне $a_1 = 1$ черный и $a_0 = 2$ белых шара, в черной — $b_1 = 2$ черных и $b_0 = 3$ белых, в белой — $c_1 = 3$ черных и $c_0 = 4$ белых. Из красной урны наугад выбирается шар. Если этот шар черный, то следующий шар также наугад выбирается из черной урны. Если шар, выбранный из красной урны, белый, то следующий шар наугад выбирается из белой урны. Какова вероятность того, что оба выбирающиеся шара имеют одинаковый цвет?*

1. **Подробное решение.** Условимся описывать:

строкой 11: выбор *черного* шара из *красной* урны и *черного* шара из *черной* урны;

строкой 12: выбор *черного* шара из *красной* урны и *белого* шара из *черной* урны;

строкой 21: выбор *белого* шара из *красной* урны и *черного* шара из *белой* урны;

строкой 22: выбор *белого* шара из *красной* урны и *белого* шара из *белой* урны.

Множество строк $U = \{11, 12, 21, 22\}$ описывает возможные результаты рассматриваемого опыта.

Условия $B_1 = \{11, 12\}$, $B_2 = \{21, 22\}$ описывают соответственно выбор черного и белого шаров из красной урны. Так как выбор производится *наугад*, то

$$P(B_1) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{1}{3}, \qquad P(B_2) = \frac{a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2}{3}.$$

Аналогично, вследствие выбора наугад шаров из черной и белой урн, условные вероятности события $A = \{11, 22\}$, описывающего выбор двух черных или двух белых шаров, равны соответственно:

$$P_{B_1}(A) = \frac{b_1}{b_1 + b_2} = \frac{2}{5}, \qquad P_{B_2}(A) = \frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{4}{7}.$$

Из правила умножения вытекает, что элементарная вероятность p, описывающая реализуемость возможных результатов рассматриваемого опыта, имеет значения:

$$p(11) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{b_1}{b_1 + b_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}, \quad p(21) = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7},$$
$$p(12) = \frac{a_1}{a_1 + a_2} \cdot \frac{b_2}{b_1 + b_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}, \quad p(22) = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \cdot \frac{c_1}{c_1 + c_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7}.$$

В вероятностной модели, определяемой такими множеством исходов U и элементарной вероятностью p, задача сводится к вычислению вероятности $P(A)$ события $A = \{11, 21\}$. По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)\, P_{B_1}(A) + P(B_2)\, P_{B_2}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} \approx 0.51.$$

2. **Краткое решение.** Задача сводится к задаче о полной вероятности с вероятностями условий $\beta_1 = 1/3$, $\beta_2 = 2/3$ и условными вероятностями $\alpha_1 = 2/5$, $\alpha_2 = 4/7$. По формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1) P_{B_1}(A) + P(B_2) P_{B_2}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} \approx 0.51.$$

Пример 2. *По данным переписи 1951 года, в Англии и Уэльсе среди отцов, имеющих сыновей, оказалось 13% темноглазых и 87% светлоглазых. У темноглазых отцов оказалось 39% темноглазых и 61% светлоглазых сыновей. У светлоглазых отцов оказалось 10% темноглазых и 90% светлоглазых сыновей. Какова вероятность того, что наугад выбранные среди этого населения отец и сын имеют глаза одинакового цвета?*

Задача сводится к задаче о полной вероятности с вероятностями условий $\beta_1 = 0.13$, $\beta_2 = 0.87$ и условными вероятностями $\alpha_1 = 0.39$, $\alpha_2 = 0.61$. Искомая вероятность равна $\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 \approx 0.82$.

Замечание. Выбор наугад отца и сына можно представлять как выбор двух шаров по схеме примера 1 из красной, черной и белой урн с $a_1 = 13$ и $a_0 = 87$, $b_1 = 39$ и $b_0 = 61$, $c_1 = 10$ и $c_0 = 90$ черными и белыми шарами соответственно. Черные и белые шары в красной урне описывают темноглазых и светлоглазых отцов, в черной — темноглазых и светлоглазых сыновей у темноглазых отцов, в белой — темноглазых и светлоглазых сыновей у светлоглазых отцов.

Пример 3. *Статистика показывает, что среди двоен оказывается 28% идентичных и 72% неидентичных близнецов. Среди идентичных близнецов 100% одного пола, 0% разного пола. Среди неидентичных близнецов 100% одного пола, 0% разного пола. Какова вероятность того, что наугад выбранные среди двоен близнецы имеют одинаковый пол?*

Задача сводится к задаче о полной вероятности с вероятностями условий $\beta_1 = 0.28$, $\beta_2 = 0.72$ и условными вероятностями $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0.5$. Искомая вероятность равна $\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 \approx 0.64$.

Замечание. Эта вероятность близка к наблюдаемой в действительности частоте появления однополых близнецов при рождении двоен.

Появление однополых близнецов можно представить как появление двух шаров одинакового цвета по схеме примера 1 из красной, черной и белой урн с $a_1 = 28$ и $a_0 = 72$, $b_1 = 100$ и $b_0 = 0$, $c_1 = 50$ и $c_0 = 50$ черными и белыми шарами соответственно. Черные и белые шары в красной урне описывают идентичных и неидентичных близнецов, в черной — однополых и разнополых близнецов среди идентичных, в белой — среди неидентичных.

Пример 4. *В условиях примера 1 какова вероятность того, что второй из выбирающихся шаров черный?*

Задача сводится к задаче о полной вероятности с вероятностями условий $\beta_1 = 1/3$, $\beta_0 = 2/3$ и условными вероятностями $\alpha_1 = 2/5$, $\alpha_0 = 3/7$. Искомая вероятность равна $\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 \approx 0.42$.

Замечание. Вероятностная модель для примера 4 аналогична модели примера 1. Меняется только содержание исходов 01 и 00: в модели для примера 4 исход 01 описывает выбор белого шара из красной урны и черного из белой, а исход 00 — белого из красной и белого из белой. В соответствии с этим меняются элементарные вероятности исходов и условная вероятность $P_{B_0}(A)$ события A:

$$P_{B_0}(A) = \frac{c_1}{c_1 + c_0} = \frac{3}{7}.$$

Следующие примеры 5, 6 решаются по той же схеме, что и пример 4.

Пример 5. *Среди помещенных в Т-образный лабиринт голодных крыс 50% бегут в левый конец и 50% в правый. Среди крыс, побывавших в левом конце с пищей и вновь помещенных в лабиринт, $(50 + 100 \cdot \varepsilon)\%$ бегут в левый конец и $(50 - 100 \cdot \varepsilon)\%$ в правый. Среди крыс, побывавших в правом конце без пищи и вновь помещенных в лабиринт, 50% бегут в левый конец и 50% в правый. Какова вероятность того, что вновь помещенная крыса побежит в левый конец?*

Задача сводится к задаче о полной вероятности с вероятностями условий $\beta_1 = 0.5$, $\beta_0 = 0.5$ и условными вероятностями $\alpha_1 = 0.5 + \varepsilon$, $\alpha_0 = 0.5 - \varepsilon$ $(0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0.5)$. Искомая вероятность равна $\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 = 0.5 + \varepsilon$.

Замечание. Число ε выражает эффективность рассматриваемого процесса обучения крысы и определяется экспериментально. Например, если $\varepsilon = 0.05$, то вероятность того, что повторно помещенная в лабиринт крыса побежит к пище, равна 0.525.

Пример 6. *В самоанском письменном тексте 67% гласных и 33% согласных букв. Среди букв, следующих непосредственно за гласной, 49% гласных и 51% согласных. Среди букв, следующих непосредственно за согласной, 100% гласных и 0% согласных. Какова вероятность того, что за наугад выбранной буквой самоанского текста непосредственно следует гласная буква?*

Задача сводится к задаче о полной вероятности с вероятностями условий $\beta_1 = 0.67$, $\beta_0 = 0.33$ и условными вероятностями $\alpha_1 = 0/49$, $\alpha_0 = 0$. Искомая вероятность равна $\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 \approx 0.66$.

Замечание. В примерах 7–9 рассматривается система связи (рис. 2):

Рис. 2.

Передатчик посылает *сигнал* в *линию связи.* Проходя по линии связи, переданный сигнал может *исказиться* и превратиться в другой сигнал. *Приемник* улавливает сигнал, пришедший по линии связи. Таким образом, может быть принят не тот сигнал, который был послан.

В простейшем случае передатчик посылает сигналы 1 и 0 («$-$» и «$+$»). Проходя по линии, 1 может превратиться в 0 («$-$» может превратиться в «$+$») и наоборот. Таким образом, если передан сигнал 1 («−»), то может быть принят как сигнал 1 («−»), так и сигнал 0 («+»). Аналогично обстоит дело и при передаче сигнала 0 («+»).

О системах связи и относящихся к ним интересных задачах можно прочитать в книге А.М. Яглома и И.М. Яглома "Вероятность и информация"(М.: Наука, 1973).

Пример 7. *По линии связи посылаются сигналы 1, 0 с вероятностями $p_1 = 0.6$, $p_0 = 0.4$. Если посылается сигнал 1, то с вероятностями $r_{11} = 0.9$, $r_{10} = 0.1$ принимаются сигналы 1, 0. Если посылается сигнал 0, то с вероятностями $r_{01} = 0.3$, $r_{00} = 0.7$ принимаются сигналы 1, 0. Какова вероятность того, что принимается сигнал 1?*

Задача сводится к задаче о полной вероятности с вероятностями условий $\beta_1 = p_1$, $\beta_0 = p_0$ и условными вероятностями $\alpha_1 = r_{11}$, $\alpha_0 = r_{01}$ $(p_1, p_0, r_{11}, r_{10}, r_{01}, r_{00} \geqslant 0, p_1+p_0 = r_{11}+r_{10} = r_{01}+r_{00} = 1)$. Искомая вероятность равна $\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2 = p_1 r_{11}+p_0 r_{01} = q_1 = 0.66$.

Пример 8. *В условиях примера 7 какова вероятность того, что принимается сигнал 0?*

Ответ: $p_1 r_{10} + p_0 r_{00} = 0.34$.

Пример 9. *По линии связи с вероятностью p_i посылается сигнал i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Если посылается сигнал i, то с вероятностью r_{ij} принимается сигнал j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$. Какова вероятность того, что принимается сигнал j?*

Задача сводится к задаче о полной вероятности с вероятностями условий $\beta_i = p_i$ и условными вероятностями $\alpha_i = r_{ij}$. Искомая вероятность равна

$$q_j = \sum_{i=0}^{n-1} p_i r_{ij} \qquad \left(p_i r_{ij} \geqslant 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1} p_i = 1, \quad \sum_{j=0}^{n-1} q_j = 1\right).$$

Замечание. Если $r_{ij} = 1$ при $i = j$ и $r_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то передача происходит без искажений и $q_j = p_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Если $r_{ij} = 1/n$ для каждых i и j, то $q_j = 1/n$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Прием описывается той же вероятностной моделью, что и выбор наугад.

1.2.2. Формула Байеса

Стандартные задачи, решаемые с помощью *формулы Байеса,* можно схематично описать следующим образом.

Задача о вероятностях гипотез. *Известны:*

1) вероятности $P(B_i) = \beta_i$ *возможных исключающих друг друга предположений* B_i*;*

2) условные вероятности $P_{B_i}(A) = \alpha_i$ *события* A *при условии, что верно предположение* B_i*.*

Какова условная вероятность $P_A(B_i)$ *того, что верно предположение* B_i *при условии, что реализуется событие* A*?*

Решение. Условия задачи о вероятностях гипотез являются перефразировкой условий задачи о полной вероятности. Поэтому для решения этих задач можно использовать одну и ту же вероятностную модель.

Решение задачи о вероятностях гипотез в этой модели дает

Формула Байеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)\,P_{B_i}(A)}{\sum P(B_j)\,P_{B_j}(A)} = \frac{\beta_i\alpha_i}{\sum \beta_j\alpha_j}.$$

Пример 1. *В схеме примера 4 пункта 2 какова условная вероятность того, что первый шар черный при условии, что последний шар черный?*

В модели примера 4 пункта 1 задача сводится к вычислению условной вероятности $P_{B_1}(A)$ события $B_1 = \{11, 10\}$ при условии $A = \{11, 01\}$. По формуле Байеса

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\,P_{B_1}(A)}{P(B_1)\,P_{B_1}(A) + P(B_0)\,P_{B_0}(A)} \approx 0.32.$$

Тот же самый результат можно получить, используя вычисления примера 4 пункта 1 и правило деления:

$$P_A(B_1) = \frac{P(AB_1)}{P(A)} \approx 0.32.$$

Замечание. Следующие примеры 2 и 4 решаются по той же схеме, что и пример 1. Вопрос примера 3 аналогичен вопросу о вероятности вынуть белый шар при условии, что последний шар черный.

Пример 2. *В схеме примера 5 пункта 2 какова условная вероятность того, что крыса бегала к пище в первый раз при условии, что она побежала к пище во второй раз?*

Ответ: $\frac{\beta_1\alpha_1}{\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2} = \frac{0.5(0.5+\varepsilon)}{0.5(0.5+\varepsilon)+0.5\cdot 0.5} = \frac{0.5+\varepsilon}{1+\varepsilon}$.

В частности, если $\varepsilon = 0.05$, то искомая вероятность приблизительно 0.524.

Пример 3. *В схеме примера 6 пункта 2 какова условная вероятность того, что выбираемая буква оказалась согласной при условии, что непосредственно следующая за ней буква гласная?*

Ответ: $\frac{\beta_1\alpha_1}{\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2} = \frac{0.33\cdot 1}{0.67\cdot 0.49+0.33\cdot 1} \approx 0.5$.

Пример 4. *В схеме примера 7 пункта 2 какова условная вероятность того, что посылается сигнал 1 при условии, что принимается сигнал 1?*

Ответ: $\frac{\beta_1\alpha_1}{\beta_1\alpha_1+\beta_2\alpha_2} = \frac{p_1 r_{11}}{p_1 r_{11}+p_0 r_{01}} = s_{11} \approx 0.82$.

Пример 5. *В схеме примера 8 пункта 2 какова условная вероятность того, что посылается сигнал 1 при условии, что принимается сигнал 0?*

Задача сводится к задаче о вероятностях гипотез с вероятностями предположений $\beta_i = p_i$ и условными вероятностями $\alpha_i = r_{ij}$. Искомая вероятность равна

$$s_{ij} = \frac{p_i r_{ij}}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} p_k r_{kj}} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1; \quad j = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Замечание. Если $r_{ij} = 1$ при $i = j$, $r_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то передача происходит без искажений и $s_{ij} = p_i$ при $j = i$ $s_{ij} = 0$ при $j \neq i$. Если $r_{ij} = 1/n$, то $s_{ij} = p_i$: условная вероятность посылаемого сигнала не зависит от принимаемого сигнала.

1.3. Независимость и зависимость

События $C_1, \ldots, C_n$ называются *независимыми,* если вероятность пересечения каждых взятых из них m событий $C_{i_1}, \ldots, C_{i_m}$ равна *произведению* вероятностей этих событий:

$$P\left(C_{i_1}, \ldots, C_{i_m}\right) = P\left(C_{i_1}\right) \ldots P\left(C_{i_m}\right).$$

Если для некоторых m событий $C_{i_1}, \ldots, C_{i_m}$ из n событий $C_1, \ldots, C_n$ это равенство *не верно*, то события $C_1, \ldots, C_n$ называются *зависимыми* ($m \leqslant n$, $1 \leqslant i_1, \ldots i_m \leqslant n$). В частности, при $n = 2$ события $C_1 = A$ и $C_2 = B$ независимы, если и только если

$$P\left(AB\right) = P\left(A\right) P\left(B\right).$$

Если событие B *возможно* ($P\left(B\right) > 0$), то это равенство эквивалентно равенству

$$P_B\left(A\right) = P\left(A\right).$$

В качестве *меры зависимости* событий A и B часто используется *коэффициент корреляции*

$$K\left(A, B\right) = \frac{P\left(AB\right) - P\left(A\right) P\left(B\right)}{\sqrt{P\left(A\right)\left(1 - P\left(A\right)\right) P\left(B\right)\left(1 - P\left(A\right)\right)}}$$

событий A и B ($0 < P\left(A\right), P\left(B\right) < 1$). События A и B *независимы*, если и только если $K\left(A, B\right) = 0$.

В связи с использованием коэффициента корреляции вместо *зависимость* событий говорят также *корреляция* событий.

Пример 1. В условиях примера 1 пункта 2.2 события A и B_1, A и B_2 зависимы:

$$P_{B_1}(A) = \frac{2}{5} \neq \frac{54}{105} = P(A); \qquad P_{B_2}(A) = \frac{4}{7} \neq \frac{54}{105} = P(A);$$

$$K(A, B_1) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{54}{105}}{\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{54}{105} \cdot \frac{51}{105}}} = -\frac{2}{3\sqrt{17}} \approx -0.17;$$

$$K(A, B_2) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} - \frac{2}{3} \cdot \frac{54}{105}}{\sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{54}{105} \cdot \frac{51}{105}}} = \frac{2}{3\sqrt{17}} \approx 0.17.$$

Замечание. Результат $K(A, B_2) = -K(A, B_1)$ не случаен. Он объясняется тем, что событие B_1 является дополнением события B_2.

Пример 2. В условиях примера 4 пункта 2.2 события A и B_1, A и B_2 зависимы:

$$P_{B_1}(A) = \frac{2}{5} \neq \frac{44}{105} = P(A); \qquad P_{B_2}(A) = \frac{3}{7} \neq \frac{44}{105} = P(A);$$

$$K(A, B_1) \approx 0.03; \qquad K(A, B_2) \approx 0.03.$$

Замечание. Если состав шаров в черной и белой урнах одинаков ($b_1 = c_1, b_2 = c_2$), то в примере 2 события A и B_1, A и B_2 независимы:

$$P_{B_1}(A) = P_{B_2}(A) = P(A) = b_1/(b_1 + b_2) = c_1/(c_1 + c_2).$$

Это хорошо согласуется с интуицией: если состав шаров в черной и белой урнах одинаков, то вероятность выбрать черный шар не зависит от выбора урны.

Если, кроме того, в каждой из этих урн черных и белых шаров поровну ($b_1 = c_1 = b_2 = c_2$), то в примере 1 события A и B_1, A и B_2 независимы:

$$P_{B_1}(A) = P_{B_2}(A) = P(A) = 1/2.$$

Пример 3. *В условиях примера 2 пункта 2.2 какова зависимость между цветом глаз отца и сына?*

В модели примера 2 пункта 2.2 рассмотрим события A_1 и B_1, A_2 и B_2, описывающие соответственно темный цвет глаз у сыновей и отцов.

Из условий задачи следует, что

$$\begin{array}{lll} P(B_1) = 0.13, & P(B_2) = 0.87, & P_{B_1}(A_1) = 0.39, \\ P_{B_1}(A_2) = 0.61, & P_{B_2}(A_1) = 0.1, & P_{B_2}(A_2) = 0.9. \end{array}$$

По правилу умножения и формуле полной вероятности получаем:

$$\begin{aligned} &P(A_1B_1) = 0.13 \cdot 0.39 \approx 0.05, \\ &P(A_1) = 0.13 \cdot 0.39 + 0.87 \cdot 0.10 \approx 0.14. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$K(A_1, B_1) \approx \frac{0.13 \cdot 0.39 - 0.13 \cdot 0.14}{\sqrt{0.14 \cdot 0.86 \cdot 0.13 \cdot 0.87}} \approx 0.30.$$

Так как A и B_2 дополнительны событиям A_1 и B_1, то

$$-K(A_1, B_2) = -K(A_2, B_1) = K(A_2, B_2) = K(A_1, B_1).$$

Таким образом, в рассматриваемой модели между цветом глаз отца и сына существует зависимость, оцениваемая коэффициентом корреляции с абсолютной величиной примерно 0.30. Для одинакового цвета этот коэффициент положителен, а для разного — отрицателен.

Пример 4. *В условиях примера 5 пункта 2.2 какова зависимость между получением крысой пищи и ее поведением при повторном помещении в лабиринт?*

В модели примера 5 пункта 2.2 рассмотрим события A и B, описывающие соответственно то, что крыса побывала в левом конце лабиринта при первом ее помещении туда и при втором. Из условий задачи следует, что

$$P(B) = 1/2; \quad P\left(B'\right) = 1/2; \quad P_B(A) = 1/2 + \varepsilon; \quad P_{B'}(A) = 1/2.$$

По правилу умножения и формуле полной вероятности получаем:

$$P(AB) = 1/2\,(1/2 + \varepsilon)\,; \qquad P(A) = 1/2\,(1/2 + \varepsilon)\,.$$

Следовательно,

$$K(A, B) = \frac{(1/2)\,(1/2 + \varepsilon) - (1/2)\,(1/2)\,(1/2 + \varepsilon)}{\sqrt{(1/2)\,(1/2 + \varepsilon)\,(1/2)\,(1 - \varepsilon)\,(1/2)\,(1/2)}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}};$$
$$K\left(A', B\right) = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Если $\varepsilon = 0$, то $K(A, B) = 0$ и события A и B независимы. Если $\varepsilon \neq 0$, то $K(A, B) \neq 0$ и события A и B зависимы. В частности, если $\varepsilon = 1/2$, то $K(A, B) = 1/\sqrt{3}$.

Пример 5. *В условиях примера 7 пункта 2.2 какова корреляция между посланным и принятым сигналами?*

В модели примера 7 пункта 2.2 рассмотрим события A_1 и B_1, A_0 и B_0, описывающие соответственно принятый и посланный сигнал 1 и принятый и посланный сигнал 0. Из условия задачи следует, что

$$P(B_1) = p_1 = 0.6; \qquad P(B_0) = p_0 = 0.4;$$
$$P_{B_1}(A_1) = r_{11} = 0.9; \qquad P_{B_0}(A_1) = r_{01} = 0.3.$$

По правилу умножения и формуле полной вероятности получаем:

$$P(A_1 B_1) = p_1 r_{11} = 0.6 \cdot 0.9 = 0.54;$$
$$P(A_1) = p_1 r_{11} + p_0 r_{01} = q_1 = 0.66.$$

Следовательно,

$$K(A_1, B_1) = \frac{p_1 r_{11} - q_1}{\sqrt{p_1 p_0 q_1 q_0}} = \frac{0.6 \cdot 0.9 - 0.6 \cdot 0.66}{\sqrt{0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.66 \cdot 0.34}} \approx 0.6.$$

Так как события A_0 и B_0 дополнительны событиям A_1 и B_1, то

$$-K(A_0, B_0) = -K(A_1, B_0) = K(A_0, B_0) = K(A_1, B_1).$$

Замечание. Если $r_{11} = r_{01} = 1/2$, то $q_1 = q_0 = 1/2$, $K(A_1, B_1) = 0$ и события A_1 и B_1, A_0 и B_1, A_1 и B_0, A_0 и B_0 независимы. В этом случае можно считать, что посылаемый и принимаемый сигналы независимы. Если $r_{11} = 1$, $r_{01} = 0$, то $q_1 = p_1$, $q_0 = p_0$, $K(A_1, B_1) = 1$ и в этом случае корреляция наибольшая.

Пример 6. *Проверяется эффективность нового медицинского препарата. Из имеющихся 60 зараженных животных 30 вводится и 30 не вводится этот препарат. Среди животных, которым был введен препарат, 29 выздоравливают и 1 нет. Среди животных, которым не был введен препарат, 26 выздоравливают и 4 нет. Какова корреляция между введением препарата и выздоровлением?*

В данной модели, аналогичной рассматривавшимся в предыдущих примерах, дело сводится к вычислению коэффициента корреляции между событиями A и B, описывающими соответственно выздоровление и применение препарата. Из условий задачи следует, что

$$P(B) = 1/2, \quad P\left(B'\right) = 1/2, \quad P_B(A) = 29/30, \quad P_{B'}(A) = 26/30.$$

По правилу умножения и формуле полной вероятности получаем:

$$P(AB) = (1/2)(29/30) = 29/60, \qquad P(A) = 55/60.$$

Следовательно,

$$K(A, B) = \frac{(1/2)(29/30) - (1/2)(55/60)}{\sqrt{(1/2)(1/2)(55/60)(5/60)}} = \frac{3}{5\sqrt{11}} \approx 0.2.$$

Пример 7. *В продукции завода брак вследствие дефекта A составляет 6.1%, а вследствие дефекта B составляет 2.8%. Общий брак по одному из этих дефектов — 5.8% всей продукции завода. Какова корреляция между дефектами A и B?*

В модели, аналогичной рассматривавшимся в предыдущих примерах, дело сводится к вычислению коэффициента корреляции между событиями A и B, описывающими соответствующие дефекты. Из условий задачи следует, что

$$P(A) = 0.061, \qquad P(B) = 0.028, \qquad P(B \cup A) = 0.058.$$

Используя правило объединения, находим:

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(B \cup A) = 0.030.$$

Следовательно,

$$K(A, B) = \frac{0.030 - 0.061 \cdot 0.028}{\sqrt{0.061 \cdot 0.939 \cdot 0.028 \cdot 0.972}} \approx 0.832.$$

Пример 8. *Статистика показывает, что среди двоен 32% оба близнеца мальчики и 28% — девочки. Какова корреляция пола близнецов?*

В модели, аналогичной рассматривавшимся в предыдущих примерах, дело сводится к вычислению коэффициента корреляции между событиями A и B, описывающими мужской пол одного и другого близнецов. Из условий задачи следует, что

$$P(AB) = 0.32, \qquad\qquad P(AB) = 0.28.$$

Используя правила сложения и дополнения, находим:

$$P\left(A'B + AB'\right) = P\left(A'B\right) + P\left(AB'\right) =$$
$$= P(B) - P(AB) + P\left(B'\right) - -P\left(A'B'\right) = 1 - 0.32 - 0.28 = 0.4.$$

Естественно считать, что $P(A'B) = P(AB') = 0.20$. Тогда

$$P(A) = P(AB) + P\left(AB'\right) = 0.52,$$
$$P(B) = P(AB) + P\left(A'B\right) = 0.52.$$

Следовательно,

$$K(A, B) = \frac{0.32 - 0.52 \cdot 0.52}{\sqrt{0.52 \cdot 0.48 \cdot 0.52 \cdot 0.48}} \approx 0.2.$$

Кроме того,

$$-K\left(A', B\right) = -K\left(A, B'\right) = K\left(A', B'\right) = K(A, B).$$

1.4. Разные задачи

Рассмотрим несколько задач различного содержания.

1.4.1. Задача де Мере

Сколько раз нужно подбрасывать 2 игральные кости, чтобы вероятность хотя бы один раз получить 2 шестерки была больше половины?

Решение. Предположим, что кости разноцветные: красная и белая.

Результаты одного из подбрасывания такой пары костей можно описать множеством всех пар $u_1 u_2$, составленных из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Первое число u_1 описывает число очков на красной кости, а второе число u_2 — на белой. Результаты m последовательных подбрасываний можно описать множеством U всех строк $U = \{u_{11}u_{21}, u_{12}u_{22}, \dots, u_{1m}u_{2m}\}$ длины m, составленных из пар чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. Первое число i-й пары u_{i1} описывает число очков на красной кости при i-м подбрасывании, а второе число u_{i2} — на белой ($i = 1, \dots, m$). По правилу умножения таких строк 36^m.

Симметричность игральных костей позволяет считать все результаты равновозможными. Поэтому для описания рассматриваемого опыта можно использовать модель Лапласа для 36^m равновероятных исходов.

Задача сводится к вычислению вероятности $P(A)$ события A, составленного из всех строк u, в которых есть хотя бы одна пара 66. Это событие описывает появление хотя бы при одном подбрасывании двойной шестерки: 6 очков на красной кости и 6 — на белой.

Проще вычислить сначала вероятность дополнительного события A', составленного из всех строк u, в которых нет ни одной пары 66. По правилу умножения таких строк 35^m. Следовательно,

$$P\left(A'\right) = n\left(A'\right)/n\left(U\right) = 35^m/36^m = \left(35/36\right)^m.$$

По правилу дополнения отсюда вытекает, что

$$P\left(A\right) = 1 - P\left(A'\right) = 1 - \left(35/36\right)^m.$$

Неравенство $P\left(A\right) \geqslant 1/2$ поэтому будет эквивалентно неравенству $\left(35/36\right)^m \leqslant 1/2$. В свою очередь это неравенство эквивалентно неравенству

$$m \geqslant \log\left(1/2\right)/\log\left(35/36\right) \approx 24.6.$$

Таким образом, для того, чтобы вероятность появления двойной шестерки была больше половины, нужно подбрасывать кости самое меньшее 25 раз.

Замечание. Задача де Мере является одной из первых задач, с которыми связано зарождение современной теории вероятностей. В середине XVII века любивший азартные игры французский дворянин де Мере предложил эту задачу одному из выдающихся ученых того времени Паскалю.

Задача де Мере возникла в связи со следующей игрой. Две кости подбрасываются 24 раза. Можно ставить либо на появление хотя бы раз *двойной шестерки*, либо против этого результата. Приведенные рассуждения показывают, что в такой игре на двойную шестерку ставить невыгодно: вероятность выигрыша в этом случае равна $1 - (35/36)^{24} = 0.491404 < 1/2$.

Сначала де Мере ставил на появление хотя бы одной шестерки при подбрасывании одной кости 4 раза и, как правило, выигрывал чаще, чем проигрывал. (Вероятность появления хотя бы одной шестерки при четырех подбрасываниях одной кости равна $1 - (5/6)^4 = 671/1296 > 1/2$.) Когда это было замечено, де Мере начал ставить на появление хотя бы одной пары шестерок при подбрасывании двух костей 24 раза и, как правило, чаще проигрывал, чем выигрывал ($1 - (35/36)^{24} < 1/2$).

Сам де Мере правильно подсчитал, что вероятность появления двойной шестерки при подбрасывании пары костей в 6 раз меньше вероятности появления шестерки при подбрасывании одной кости. Отсюда он сделал неправильный вывод о том, что вероятность q появления шестерки при четырех подбрасываниях одной кости в 6 раз меньше вероятности p появления шестерки при четырех подбрасываниях одной кости: $q = 1/6 \cdot p$, а вероятность двойной шестерки при $6 \cdot 4 = 24$ подбрасываниях пары костей равна $6 \cdot q = p > 1/2$.

1.4.2. Задача о красных шарах

Имеются n шаров, l из которых красные, а $n - l$ — белые. Из этих n шаров наугад выбираются m. Какова вероятность того, что среди выбранных m шаров ровно k оказываются красными?

Решение. Предположим, что шары занумерованы, причем красные имеют номера $1, \ldots, l$, а белые — $l+1, \ldots, n$ ($1 \leqslant l < n$). Результаты выбора m шаров из этих n шаров можно описать множеством U всех выборок $u = \{u_1, \ldots, u_m\}$ ($1 \leqslant m \leqslant n$) m номеров из n номеров $1, \ldots, n$ ($1 \leqslant m \leqslant n$). Число таких выборок равно $\binom{n}{m}$.

Условие о выборе шаров *наугад* позволяет считать все результаты равновозможными. Поэтому для описания рассматриваемого опыта можно использовать модель Лапласа для $\binom{n}{m}$ равновероятных исходов.

Задача сводится к вычислению вероятности $P(A)$ события A, составленного из всех выборок, содержащих ровно k из номеров $1, \ldots, l$ $(0 \leqslant k \leqslant l)$. Существуют ровно $\binom{l}{k}$ выборок k из номеров $1, \ldots, l$ и ровно $\binom{n-l}{m-k}$ выборок $m-k$ из номеров $l+1, \ldots, n$. По правилу умножения отсюда вытекает, что существует ровно $n(A) = \binom{l}{k}\binom{n-l}{m-k}$ выборок m из номеров $1, \ldots, n$, содержащих ровно k из номеров $1, \ldots, l$. Следовательно,

$$P(A) = \binom{l}{k}\binom{n-l}{m-k} \Big/ \binom{n}{m}.$$

Задача о красных шарах имеет многочисленные приложения.

A. Статистический контроль. *Имеются $n = 100$ изделий, $l = 2$ из которых негодные, а $n - l = 98$ — годные. Из этих $n = 100$ изделий наугад выбираются $m = 10$. Какова вероятность того, что среди выбранных $m = 10$ ровно $k = 1$ оказываются негодными?*

Дело сводится к задаче о красных шарах, которые играют роль негодных изделий. Искомая вероятность равна

$$\binom{2}{1}\binom{n-2}{m-1} \Big/ \binom{n}{m} = 2\frac{m}{n} \cdot \frac{n-m}{n-1} = 2/11.$$

B. Тип гена. Предположим, что *ген* состоит из $n_0 = 3$ частей, из которых $l_0 = 1$ *мутантные,* а $n_0 - l_0 = 2$ — *немутантные.* Перед делением клетки части удваиваются, причем каждая мутантная дает две мутантные и каждая немутантная — две немутантные. При делении образуются две новые клетки, содержащие по одному новому гену, составленному $m = n_0$ частями из имеющихся $n = 2n_0$. Процесс образования новых генов описывается выбором наугад m из имеющихся n частей. *Тип гена* определяется числом k мутантных частей в нем.

Задача. *Какова вероятность того, что при делении клетки с геном типа $l_0 = 1$, состоящим из $n_0 = 3$ частей, получится клетка с геном типа $k = 2$?*

Решение. Задача сводится к задаче о красных шарах при $n = 2n_0 = 6$, $l = 2l_0 = 2$, $m = n_0 = 3$, $k = 2$. Красные шары играют роль мутантных частей гена. Искомая вероятность равна

$$\binom{2}{2}\binom{6-2}{3-2} \Big/ \binom{6}{3} = 1/5.$$

C. Анализ крови. *В данном объеме крови имеются n кровяных телец, $l = 5 \cdot 10^6$ которых красные, а $n - l = 5 \cdot 10^3$ — белые. Из этих n телец наугад выбираются $m = 10$. Какова вероятность того, что среди выбранных $m = 10$ кровяных телец нет красных?*

Решение сводится к решению задачи о красных шарах, которые играют роль красных кровяных телец. Искомая вероятность равна

$$P(A) = \binom{l}{0}\binom{m-l}{m-0} \Big/ \binom{n}{m} = \binom{m-l}{m-0} \Big/ \binom{n}{m} = \\ = \frac{(n-l)(n-l-1)\dots(n-l-m+1)}{n(n-1)\dots(n-m+1)}.$$

Легко убедиться в том, что эта вероятность очень мала. Так как каждый множитель в числителе меньше числа $n-l = 5\cdot10^3$, а в знаменателе — больше числа $n-m+1 = 5\cdot10^6+5\cdot10^3-9 > 5\cdot10^6$, то

$$P(A) \leqslant \left(\frac{5\cdot10^3}{5\cdot10^6}\right)^{10} = 10^{-30}.$$

Этот результат интуитивно ясен: так как красные кровяные тельца составляют подавляющее большинство, то чрезвычайно маловероятно, что их не окажется в случайной выборке.

D. Метод меченых частиц. *Имеются n частиц, l из которых отмечены, а $n - l$ — не отмечены. Из этих n частиц наугад выбираются m. Среди них оказывается ровно k отмеченных. При каком числе n частиц это наиболее вероятно?*

Решение сводится к решению задачи о красных шарах, играющих роль отмеченных частиц. Нужно найти $n = \hat{n}$, при котором вероятность

$$P(A) = \binom{l}{k}\binom{m-l}{m-k} \Big/ \binom{n}{m}$$

наибольшая. Для каждого $n > m + l - k$ отношение

$$\frac{\binom{l}{k}\binom{m-l}{m-k} \big/ \binom{n}{m}}{\binom{l}{k}\binom{m-l-1}{m-k} \big/ \binom{n-l}{m}} = \frac{(n-l)(n-m)}{n(n-m-l+k)}$$

больше 1, если $nk < lm$, и меньше 1, если $nk > lm$. Следовательно, если $k > 0$, то целая часть $\hat{n} = [ml/k]$ числа ml/k является *наиболее правдоподобной оценкой* для числа частиц: при $n = \hat{n}$ и данных m, l, k вероятность $P(A)$ наибольшая.

Задача о рыбах. *Из озера вылавливается $l = 1000$ рыб. Каждая из них метится и выпускается в озеро. Затем снова вылавливается $m = 1000$ рыб. Среди них оказывается $k = 100$ меченых. Каково наиболее правдоподобное число рыб в озере?*

Решение. Предположим, что второй улов организован так, что его можно считать выбором наугад m из имеющихся в озере n рыб. В этом случае наиболее правдоподобной оценкой для числа n рыб в озере является число $\hat{n} = 1000 \cdot 1000/100 = 10000$.

Е. Статистический контроль. *Имеются n изделий, l из которых негодные, а $n - l$ — годные. Из этих n изделий наугад выбираются m. Среди них оказывается ровно k негодных. При каком числе l негодных изделий это наиболее вероятно?*

Решение сводится к решению задачи о красных шарах, играющих роль отмеченных частиц. Нужно найти $l = \hat{l}$, при котором вероятность

$$P(A) = \binom{l}{k}\binom{n-l}{m-k} \Big/ \binom{n}{m}$$

наибольшая. Для каждого $l \neq k$ отношение

$$\frac{\binom{l}{k}\binom{n-l}{m-k} \,/\, \binom{n}{m}}{\binom{l-1}{k}\binom{m+1-l}{m-k} \,/\, \binom{n}{m}} = \frac{l\,(n-m-l+k+1)}{(l-k)\,(n-l+1)}$$

больше 1, если $lm < n\,(k+1)$, и меньше 1, если $lm > n\,(k+1)$. Следовательно, если $k > 0$, то целая часть $\hat{l} = [(n+1)\,k/m]$ числа $(n+1)\,k/m$ является *наиболее правдоподобной оценкой* для числа l негодных изделий: при $l = \hat{l}$ и данных m, l, k вероятность $P\,(A)$ наибольшая.

Задача. *Из партии $n = 999$ гвоздей наугад выбирают $m = 100$ гвоздей. Среди них оказывается ровно $k = 10$ негодных. Каково наиболее правдоподобное число негодных гвоздей в партии?*

Ответ: наиболее правдоподобной оценкой для числа l негодных гвоздей в партии является число $\hat{l} = 1000 \cdot 10/100 = 100$.

1.4.3. Задача о размещении

Шары случайным образом размещаются по ящикам. Какова вероятность того, что в каждом ящике оказывается данное число шаров?

Ответ зависит от того, каким образом размещаются шары по ящикам.

А. Различные шары. Пусть имеются m различных шаров $1, \ldots, m$ и n ящиков $1, \ldots, n$. Предположим, что каждый шар кладется в наугад выбранный ящик. В этом случае задачу о размещении можно сформулировать следующим образом.

Задача 1. *Каждый из шаров $1, \ldots, m$ кладется в наугад выбранный из ящиков $1, \ldots, n$. Какова вероятность того, что в первом ящике оказывается m_1 шаров, ..., а в n-м — m_n?*

Решение. Введем в рассмотрение произвольные натуральные числа $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ и $m_1, \ldots, m_n$ такие, что $m_1 + \ldots + m_n = m$. Каждое размещение шаров $1, \ldots, m$ по ящикам $1, \ldots, n$ можно описать строкой $u = u_1 \ldots u_m$ длины m, составленной из номеров $1, \ldots, n$:

шар i кладется в ящик u_i. Из правила умножения для числа элементов следует, что таких строк n^m.

Условие выбора наугад позволяет считать все размещения шаров равновозможными и использовать модель Лапласа для n^m равновероятных исходов.

Задача сводится к вычислению вероятности $P(A)$ события A, составленного из всех строк, в которых m_1 номеров $1, \ldots, m_n$ номеров n.

Используя принцип индукции, нетрудно проверить, что

$$n(A) = \frac{m!}{m_1! \ldots m_n!}.$$

Действительно, если $n = 1$, то это равенство верно: в этом случае множество A состоит из одной строки, составленной из единиц. Для каждого номера n, если равенство для строк номеров $1, \ldots, n$ верно, то оно верно для строк номеров $1, \ldots, n, n+1$. В самом деле, множество таких строк можно разбить на части, состоящие из строк с одинаково расположенными m_{n+1} номерами $n+1$. Таких частей $\binom{m}{m_{n+1}}$. Если число строк в каждой части выбирается рассматриваемым равенством для $m - m_{n+1}$, то, по правилу сложения, число рассматриваемых строк номеров $1, \ldots, n, n+1$ равно

$$\begin{aligned} n(A) &= \frac{(m - m_{n+1})!}{m_1! \ldots m_n!} \binom{m}{m_{n+1}} = \\ &= \frac{(m - m_{n+1})!}{m_1! \ldots m_n!} \cdot \frac{m!}{(m_{n+1})!\,(m - m_{n+1})!} = \frac{m!}{m_1! \ldots m_{n+1}!}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{m!}{m_1! \ldots m_n!} n^{-m}. \tag{1}$$

B. Одинаковые шары. Рассмотрим m одинаковых шаров и n различных ящиков $1, \ldots, n$. Предположим, что размещения шаров по ящикам равновозможны. В этом случае задачу о размещении можно сформулировать следующим образом.

Задача 2. *Наугад выбирается размещение m одинаковых шаров по n различным ящикам $1, \ldots, n$. Какова вероятность того, что в ящике 1 оказывается m_1 шаров, …, а в ящике n — m_n шаров?*

Решение. Введем в рассмотрение произвольные натуральные числа $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ и $m_1, \ldots, m_n$ такие, что $m_1 + \ldots + m_n = m$.

Размещение m одинаковых шаров по n различным ящикам $1, \ldots, n$, при котором в ящике 1 оказывается m_1 шаров, …, а в ящике n — m_n шаров, можно описать строкой u длины $m + n$, составленной из m одинаковых кружочков и номеров $1, \ldots, n$.

Первым элементом строки u является номер 1, следующие m_1 элементов — кружочки, …, $n + (m_1 + \ldots + m_n)$-м элементом — номер n, следующие m_n элементов — кружочки (рис. 3).

$$u = 1 \ \underbrace{o \ldots o}_{m_1} \ \ 2 \ \underbrace{o \ldots o}_{m_2} \ \ \cdots \ n \ \underbrace{o \ldots o}_{m_n}$$

Рис. 3.

Выбор размещений наугад позволяет считать все размещения равновозможными и использовать модель Лапласа.

Задача сводится к вычислению числа всех рассматриваемых строк u. Каждая такая строка определяется местами кружочков в ней. Поэтому число всех строк равно числу выборок m из номеров $2, \ldots, m + n$. Таким образом,

$$p\,(u) = 1 \Big/ \binom{n+m-1}{m}. \tag{2}$$

Замечание. Искомая вероятность выражается также равенством

$$p\,(u) = 1 \Big/ \binom{n+m-1}{n-1},$$

соответствующим выбору мест для номеров $2, \ldots, m + n$ в строке u.

Задача о размещении шаров имеет многочисленные приложения. Шары и ящики могут, например, играть роли соответственно:

1) числа очков и номеров подбрасывания игральной кости; 2) карт и их мастей; 3) частиц и областей пространства; 4) людей и их дней рождения; 5) биологических особей и их генотипов; 6) молекул и цепочек молекул.

Пример 1. *Игральная кость подбрасывается шесть раз. Какова вероятность того, что каждый раз появляется новое число очков?*

Дело сводится к задаче о размещении для различных шаров, играющих роль очков. Ящики играют роль подбрасываний кости. Используя равенство (1) для $m = n = 6$ и $m_1 = \ldots = m_n = 1$ находим, что искомая вероятность равна $6! \cdot 6^{-6} = 0.01543$.

Вместо размещения иногда рассматривается выбор.

Пример 2. *Имеется 4 комплекта (x, y) по 3 шара: x красных и y черных $(x + y = 3)$. Какова вероятность того, что в наугад выбранном комплекте будут красные и черные шары?*

Эквивалентная задача: *3 одинаковых шара случайным образом размещаются по 2 урнам: красной и черной. Какова вероятность того, что ни одна из урн не окажется пустой?*

Исходы описываются тройками ККК, ККЧ, КЧЧ, ЧЧЧ или парами (0,3), (1,2), (2,1), (3,0) и считаются равновероятными. Их число равно числу $\binom{2+3-1}{3} = 4$ целых положительных решений $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ уравнения $x + y = 0$. Благоприятными являются исходы ККЧ, КЧЧ. Их число равно числу $\binom{3-1}{2-1} = 2$ целых строго положительных решений $x > 0$, $y > 0$ уравнения $x + y = 0$. Искомая вероятность равна $\frac{1}{2}$.

Замечание. Возьмем три различных красных шара К1,К2,К3 и 3 различных черных шара Ч1,Ч2,Ч3, а также две различные урны 1 и 2. Возможные размещения шаров по урнам описываются тройками К1 К2 К3, К1 К2 Ч1, К1 К3 Ч1, К2 К3 Ч1, ..., К3 Ч2 Ч3, Ч1 Ч2 Ч3 шаров в урне 1. Будем считать эти размещения равновероятными. Их число равно $\binom{6}{3} = 20$. Одноцветные шары в урне 1 описываются тройками К1 К2 К3 и Ч1 Ч2 Ч3. Вероятность того, что в урнах окажутся разноцветные шары, равна $\frac{9}{10}$.

Колода игральных карт для бриджа состоит из 52-х карт 4-х различных мастей. В каждой масти 13 карт: 2, 3, ..., 10, валет, дама, король, туз. Будем различать карты только по масти и считать, что колода разделена на 4 части: 13 пик, 13 треф, 13 бубен, 13 червей. Из каждой части выбирается случайное число карт (от 0 до 13) так, чтобы сумма имела данное возможное значение (например, 13). Все такие выборки считаются равновероятными.

Пример 3. *Какова вероятность того, что при описанной процедуре в случайной выборке из 13 карт будут карты всех 4-х мастей?*

Дело сводится к задаче о размещении $m = 13$ одинаковых шаров, играющих роль выбранных карт. Ящики 1, 2, 3, 4 играют роль мастей. Нужно вычислить вероятность того, что ни один из ящиков не окажется пустым. Отсутствие пустых ящиков описывает событие A, составленное из всех строк u, в которых каждый из $n - 1 = 3$ номеров 2, 3, 4 занимает одно из $m - 1 = 12$ мест между кружочками (см. задачу 2 и рис. 3). Например, $u = 10200300040000000$. Число таких строк равно $\binom{12}{3}$. Следовательно,

$$P(A) = \binom{12}{3} \bigg/ \binom{4+13-1}{13} = 11/28.$$

Замечание. Если различать карты не только по масти, но и по значению, то при выборе наугад 13 из 52 карт ответ будет другим. Число равновероятных исходов в этом случае равно $\binom{52}{13}$. А число неблагоприятных выборок из 13 карт, в которых нет хотя бы одной масти, равно $4\cdot\binom{52-13}{13} - 6\cdot\binom{52-26}{13} + 4\cdot\binom{52-39}{13}$. Вероятность того, что в наугад выбранных 13 из 52 карт есть все 4 масти, немногим меньше 0.95.

Пример 4. Модель Максвелла–Больцмана. Рассмотрим

m различных частиц, распределенных по *n областям пространства.* Предположим, что все распределения частиц *равновероятны*, а состояние системы определяется указанием числа частиц, попавших в каждую область пространства.

Условимся описанную модель называть *моделью Максвелла–Больцмана.* Модель Максвелла–Больцмана сводится к модели *различных шаров,* если частицы считать шарами, а области пространства — ящиками. Поэтому вероятность того, что система оказывается в состоянии $(m_1, \ldots, m_n)$, для модели Максвелла–Больцмана выражается равенством (1).

Задача. *Какова в модели Максвелла–Больцмана вероятность того, что в каждой области пространства оказывается ровно одна частица?*

Ответ: $n!/n^n$. Когда n увеличивается, эта вероятность уменьшается. Если $n \geqslant 10$, то $n!/n^n \leqslant 0.0004$.

Пример 5. Модель Бозе–Эйнштейна. Рассмотрим *m одинаковых частиц,* распределенных по *n областям пространства.* Предположим, что все распределения частиц *равновероятны*, а состояние системы определяется указанием числа частиц, попавших в каждую область пространства.

Условимся описанную модель называть *моделью Бозе–Эйнштейна.* Модель Бозе–Эйнштейна сводится к модели *одинаковых шаров*, если частицы считать шарами, а области пространства — ящиками. Поэтому в модели Бозе–Эйнштейна вероятность того, что система оказывается в состоянии $(m_1, \ldots, m_n)$, выражается равенством (2).

Задача. *Какова в модели Бозе–Эйнштейна вероятность того, что в каждой области пространства оказывается хотя бы одна частица?*

Решение. В модели m одинаковых шаров, распределенных по n ящикам, дело сводится к вычислению вероятности того, что не оказывается пустых ящиков. Отсутствие пустых ящиков описывает событие A, составленное из всех строк u, в которых нет рядом стоящих номеров: каждый из $n-1$ номеров $2, \ldots, n$ занимает одно из $m-1$ мест между кружочками. Поэтому

$$n\,(A) = \binom{m-1}{n-1}, \qquad P\,(A) = \binom{m-1}{n-1} \Big/ \binom{n+m-1}{n-1}.$$

В частности, если $m < n$, то эта вероятность равна нулю: ящиков больше, чем шаров, и обязательно останутся пустые.

1.4.4. Задача о крэпсе

Подбрасывается две игральные кости. Если сумма очков равна 7 или 11, то игрок выигрывает; если 2 или 3 или 12, — проигрывает. При каждой другой сумме первая партия оканчивается вничью, и кости подбрасываются снова и снова до повторения первой суммы или до суммы 7 (но не больше, чем n раз). В первом случае игрок выигрывает, а во втором — проигрывает. В других случаях игра оканчивается вничью. Какова вероятность выигрыша игрока?

Решение. Построим вероятностную модель для рассматриваемой игры. В качестве множества исходов возьмем множество U всех строк $u = u_1 \ldots u_j \ldots u_n$ длины n, составленных из чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Число s на j-м месте строки u $(u_j = s)$ описывает сумму s при j-м подбрасывании. Используя зависимость подбрасываний, определим элементарную вероятность p следующим образом. При решении задачи 4 пункта 1.1 было показано, что одно подбрасывание двух костей описывается элементарной вероятностью q, значения $q\,(s)$ которой содержит приведенная там таблица. Значение $p\,(u)$ для каждой строки $u = u_1 \ldots u_j \ldots u_n$ элементарной вероятности p, описывающей n подбрасываний двух костей, определим равенством

$$p\,(u) = q\,(u_1) \ldots q\,(u_j) \ldots q\,(u_n)\,.$$

Для каждого номера $j = 1, \ldots, n$ рассмотрим события A^j, B^j и C^j, описывающие соответственно *выигрыш при j-й партии*, *проигрыш при j-й партии* и *ничью при каждой из первых j партий.*

В частности,

$$A^1 = \{u : u_1 = 7, 11\}, \qquad B^1 = \{u : u_1 = 2, 3, 12\},$$
$$C^1 = \{u : u_1 = 4, 5, 6, 8, 9, 10\};$$

$$\begin{aligned}
A^2 = {} & \{u : u_1 = u_2 = 4\} + \{u : u_1 = u_2 = 5\} + \{u : u_1 = u_2 = 6\} + \\
& + \{u : u_1 = u_2 = 8\} + \{u : u_1 = u_2 = 9\} + \{u : u_1 = u_2 = 10\}, \\
B^2 = {} & \{u : u_1 = 4, u_2 = 7\} + \{u : u_1 = 5, u_2 = 7\} + \\
& + \{u : u_1 = 6, u_2 = 7\} + \{u : u_1 = 8, u_2 = 7\} + \\
& + \{u : u_1 = 9, u_2 = 7\} + \{u : u_1 = 10, u_2 = 7\}, \\
C^2 = {} & \{u : u_1 = 4, u_2 \neq 4, 7\} + \{u : u_1 = 5, u_2 \neq 5, 7\} + \\
& + \{u : u_1 = 6, u_2 \neq 6, 7\} + \{u : u_1 = 8, u_2 \neq 8, 7\} + \\
& + \{u : u_1 = 9, u_2 \neq 9, 7\} + \{u : u_1 = 10, u_2 \neq 10, 7\}.
\end{aligned}$$

Если $3 \leqslant j \leqslant n$, то

$$\begin{aligned}
A^j = {} & \{u : u_1 = 4, u_2 \neq 4, 7, \ldots, u_{j-1} \neq 4, 7, u_j = 4\} + \\
& + \{u : u_1 = 5, u_2 \neq 5, 7, \ldots, u_{j-1} \neq 5, 7, u_j = 5\} + \\
& + \{u : u_1 = 6, u_2 \neq 6, 7, \ldots, u_{j-1} \neq 6, 7, u_j = 6\} + \\
& + \{u : u_1 = 8, u_2 \neq 8, 7, \ldots, u_{j-1} \neq 8, 7, u_j = 8\} + \\
& + \{u : u_1 = 9, u_2 \neq 9, 7, \ldots, u_{j-1} \neq 9, 7, u_j = 9\} + \\
& + \{u : u_1 = 10, u_2 \neq 10, 7, \ldots, u_{j-1} \neq 10, 7, u_j = 10\}, \\
B^j = {} & \{u : u_1 = 4, u_2 \neq 4, 7, \ldots, u_{j-1} \neq 4, 7, u_j = 7\} + \\
& + \{u : u_1 = 5, u_2 \neq 5, 7, \ldots, u_{j-1} \neq 5, 7, u_j = 7\} + \\
& + \{u : u_1 = 6, u_2 \neq 6, 7, \ldots, u_{j-1} \neq 6, 7, u_j = 7\} + \\
& + \{u : u_1 = 8, u_2 \neq 8, 7, \ldots, u_{j-1} \neq 8, 7, u_j = 7\} + \\
& + \{u : u_1 = 9, u_2 \neq 9, 7, \ldots, u_{j-1} \neq 9, 7, u_j = 7\} + \\
& + \{u : u_1 = 10, u_2 \neq 10, 7, \ldots, u_{j-1} \neq 10, 7, u_j = 7\}.
\end{aligned}$$

Ясно, что события $A^1, \ldots, A^n$, $B^1, \ldots, B^n$ попарно не пересекаются. Их суммы $A = A^1 + \ldots + A^n$, $B = B^1 + \ldots + B^n$ описывают соответственно выигрыш и проигрыш игрока, когда игра продолжается не более, чем n партий. Пересечение $C = C^1 \ldots C^n$ событий $C^1, \ldots, C^n$ описывает ничью. Ясно, что события A, B и C попарно не пересекаются и

$$A + B + C = U.$$

Из *правила сложения* следует, что

$$P(A) = P\left(A^1\right) + \ldots + P(A^n), \quad P(B) = P\left(B^1\right) + \ldots + P(B^n),$$
$$P(C) = 1 - P(A) - P(B).$$

Таким образом, дело сводится к вычислению вероятностей событий A^j и B^j.

Используя определение элементарной вероятности p и соответствующую таблицу, находим:

$$P\left(A^1\right) = q(7) + q(11) = 2/9;$$
$$P\left(B^1\right) = q(2) + q(3) + q(12) = 1/9;$$
$$P\left(A^2\right) = q(4) + q(5) + q(6) + q(8) + q(9) + q(10) = 100/(36)^2;$$
$$P\left(B^2\right) = (q(4) + q(5) + q(6) + \\ + q(8) + q(9) + q(10))\, q(7) = 144/(36)^2.$$

Заметим, что

$$q(4) = q(10) = 3/36; \;\; q(9) = q(5) = 4/36; \;\; q(6) = q(8) = 5/36;$$
$$q(2) + q(3) + q(5) + q(6) + q(8) + \\ + q(9) + q(10) + q(11) + q(12) = 27/36;$$
$$q(2) + q(3) + q(4) + q(6) + q(8) +$$

$$+ q(9) + q(10) + q(11) + q(12) = 26/36;$$

$$q(2) + q(3) + q(5) + q(8) + q(9) +$$
$$+ q(10) + q(11) + q(12) = 25/36.$$

Если $3 \leqslant j \leqslant n$, то, используя правило сложения, определение элементарной вероятности p и эти равенства, получаем:

$$P(A^j) = 2\left(\frac{3}{36}\left(\frac{27}{36}\right)^{j-2}\frac{3}{36} + \frac{4}{36}\left(\frac{26}{36}\right)^{j-2}\frac{4}{36} + \frac{5}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{j-2}\frac{5}{36}\right);$$

$$P(B^j) = 2\left(\frac{3}{36}\left(\frac{27}{36}\right)^{j-2}\frac{6}{36} + \frac{4}{36}\left(\frac{26}{36}\right)^{j-2}\frac{6}{36} + \frac{5}{36}\left(\frac{25}{36}\right)^{j-2}\frac{6}{36}\right).$$

Используя правило сложения и эти равенства, получаем:

$$P(A) = \frac{2}{9} + 2\left(\left(\frac{3}{36}\right)^2\frac{1-(27/36)^{n-1}}{1-(27/36)} + \left(\frac{4}{36}\right)^2\frac{1-(26/36)^{n-1}}{1-(26/36)} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{5}{36}\right)^2\frac{1-(25/36)^{n-1}}{1-(25/36)}\right) = \frac{244}{495} - r(A);$$

$$P(B) = \frac{2}{9} + \frac{2\cdot 3}{36}\left(\left(\frac{3}{36}\right)\frac{1-(27/36)^{n-1}}{1-(27/36)} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{4}{36}\right)\frac{1-(26/36)^{n-1}}{1-(26/36)} + \left(\frac{5}{36}\right)\frac{1-(25/36)^{n-1}}{1-(25/36)}\right) = \frac{251}{495} - r(B),$$

где

$$r(A) = \frac{2}{36}\left(\left(\frac{27}{36}\right)^{n-1} + \frac{8}{5}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} + \frac{25}{11}\left(\frac{27}{36}\right)^{n-1}\right);$$

$$r(B) = \frac{1}{36}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{27}{36}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} + \frac{5}{11}\left(\frac{27}{36}\right)^{n-1}\right).$$

Отсюда следует, что

$$P(C) = r\,(A) + r\,(B) = \frac{1}{18}\left(3\left(\frac{27}{36}\right)^{n-1} + 4\left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} + 5\left(\frac{27}{36}\right)^{n-1}\right).$$

Заметим, что

$$r\,(A) \leqslant \frac{1}{18}\left(1 + \frac{8}{5}\frac{25}{11}\right)\left(\frac{27}{36}\right)^{n-1} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1};$$

$$r\,(B) \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{5}{11}\right)\left(\frac{27}{36}\right)^{n-1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1};$$

$$r\,(C) \leqslant \frac{1}{18}\,(2 + 4 + 5)\left(\frac{27}{36}\right)^{n-1} \leqslant \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

При достаточно большом числе n партий эти величины произвольно малы. Если $n > 25$, то каждая из них меньше 0.0018.

Таким образом, при достаточно большом числе партий $n \geqslant 25$ вероятности выигрыша, проигрыша и ничьей выражаются соответственно приближенными равенствами

$$P\,(A) \approx \frac{244}{495} \approx 0.493, \qquad P\,(B) \approx \frac{251}{495} \approx 0.507, P\,(C) \approx 0.$$

Вероятность выигрыша приблизительно на 0.014 меньше вероятности проигрыша.

Замечание. Рассматриваемая игра называется крэпс и очень популярна в некоторых странах.

1.4.5. Задача о красных, белых и розовых урнах

В каждой из комнат 1 и 2 имеются:

1) красные урны $1, \ldots, a$*, каждая с красным шаром 1 и красным шаром 2;*

2) розовые урны $a+1, \ldots, a+b$*, каждая с красным шаром 1 и белым шаром 2;*

3) розовые урны $a+b+1,\dots,a+2b$, каждая с белым шаром 1 и красным шаром 2;

4) белые урны $a+2b+1,\dots,a+2b+c$, каждая с белым шаром 1 и белым шаром 2.

В каждой из комнат наугад выбирается урна. В каждой урне наугад выбирается шар. Какова вероятность того, что оба выбираемые шары белые?

Решение. Возможные результаты рассматриваемого опыта удобно описывать матрицами

$$u = \begin{pmatrix} u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & u_{23} \end{pmatrix}$$

в которых $(i=1,2)$: u_{i0} равно *номеру* урны, выбранной в комнате i; $u_{i1}=1$, если в ней шар 1 *красный*, и $u_{i1}=0$, если *белый;* $u_{i2}=1$, если в ней шар 2 *красный,* и $u_{i2}=0$, если *белый*; $u_{i3}=1$, если выбранный из нее шар *красный*, и $u_{i3}=0$, если *белый.*

Эти матрицы u образуют множество исходов U.

Условие выбора наугад урн и шаров позволяет использовать классическую модель Лапласа.

Рассмотрим события

$$B\left(\begin{smallmatrix} i & j \\ l & m \end{smallmatrix}\right) = \left\{\{u : \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & j \\ l & m \end{pmatrix}\right\}, \quad (i,j,l,m=0,1)\,,$$

составленные из матриц u со средним значением $\left(\begin{smallmatrix} i & j \\ l & m \end{smallmatrix}\right)$ и описывающие выбираемые урны, а также события

$$A\binom{k}{n} = \left\{u : \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix}\right\}, \qquad (k,n=0,1)\,,$$

составленные из матриц u с последним столбцом $\binom{k}{n}$ и описывающие выбираемые шары. Задача сводится к вычислению вероятности события $A\binom{0}{0}$.

По формуле полной вероятности

$$P\left(A\binom{k}{n}\right) = \sum_{i,j,l,m} P\left(B\left(\begin{smallmatrix} i & j \\ l & m \end{smallmatrix}\right)\right) P_{B\left(\begin{smallmatrix} i & j \\ l & m \end{smallmatrix}\right)}\left(A\binom{k}{n}\right).$$

Таким образом, дело сводится к вычислению вероятностей событий $B\left(\begin{smallmatrix} i & j \\ l & m \end{smallmatrix}\right)$ и условных вероятностей $A\binom{k}{n}$.

Положим:

$$\overline{a} = \frac{a}{a+2b+c}, \qquad \overline{b} = \frac{b}{a+2b+c}, \qquad \overline{c} = \frac{c}{a+2b+c}.$$

Как нетрудно проверить, вероятности событий $B\left(\begin{smallmatrix} i & j \\ l & m \end{smallmatrix}\right)$ содержит таблица

$ij \backslash lm$	11	10	01	00
11	$\overline{a}\overline{a}$	$\overline{a}\overline{b}$	$\overline{a}\overline{b}$	$\overline{a}\overline{c}$
10	$\overline{b}\overline{a}$	$\overline{b}\overline{b}$	$\overline{b}\overline{b}$	$\overline{b}\overline{c}$
01	$\overline{b}\overline{a}$	$\overline{b}\overline{b}$	$\overline{b}\overline{b}$	$\overline{b}\overline{c}$
00	$\overline{c}\overline{a}$	$\overline{c}\overline{b}$	$\overline{c}\overline{b}$	$\overline{c}\overline{c}$

Условные вероятности события $A\binom{k}{n}$ содержит таблица 1. Используя эти таблицы и *формулу полной вероятности*, находим:

$$P\left(A\binom{1}{1}\right) = \left(\overline{a}+\overline{b}\right)^2; \qquad P\left(A\binom{0}{0}\right) = \left(\overline{b}+\overline{c}\right)^2;$$
$$P\left(A\binom{1}{0}\right) = P\left(A\binom{0}{1}\right) = \left(\overline{a}+\overline{b}\right)\left(\overline{b}+\overline{c}\right).$$

Таким образом, ответ:

$$P\left(A\binom{0}{0}\right) = \left(\frac{b+c}{a+2b+c}\right)^2.$$

Замечание. Задача о красных, белых и розовых урнах имеет отношение к генетической модели наследования некоторого признака. По этому признаку каждая *особь* рассматриваемой популяции относится к одному из трех возможных *генотипов* gg, GG и $\{gG, Gg\}$. В первых двух случаях говорят о *чистом* генотипе, а в последнем — о *смешанном.*

Таблица 1.

ij \ lm \ k n	11 11	11 10	11 01	11 00	10 11	10 10	10 01	10 00	01 11	01 10	01 01	01 00	00 11	00 10	00 01	00 00
1 1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	0
1 0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
0 0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Предполагается, что каждая мужская и женская особи, образуя пару, порождают одного *потомка.* В соответствии с теорией Менделя генотип потомка определяется следующим образом. Каждая из двух *гамет* (половых клеток) каждого из двух *родителей* переносит один *ген* g или G из составляющих генотип этого родителя. Для участия в образовании *зиготы* (оплодотворенной клетки) у каждого из родителей наугад выбирается одна из гамет. Гены, принесенные этими гаметами, и образуют генотип потомка.

В частности, эта модель хорошо объясняет результаты опыта по скрещиванию растений с белыми и красными цветами, о котором говорилось в пункте 1.2.

В задаче о красных, белых и розовых урнах эти урны играют роль генотипов, а шары в них — генов. Нумерация шаров и разбиение розовых урн на два типа не имеют, по-видимому, генетического смысла и введены для симметрии схемы.

Пример 1. *Имеются 130 растений с красными цветами, 290 гибридов с розовыми и 140 растений с белыми цветами. Какова вероятность того, что при скрещивании наугад выбираемых растений получается растение с белыми цветами?*

Предположим, что наследование окраски цветов описывается рассматриваемой моделью. Дело сводится к задаче о красных, белых и розовых урнах при $a = 130$, $b = 145$, $c = 140$. Искомая вероятность равна

$$\left(\frac{b+c}{a+2b+c}\right)^2 = \left(\frac{295}{560}\right)^2 \approx 0.28.$$

Пример 2. *Имеются 130 растений с красными цветами и 290 гибридов с розовыми цветами. Какова вероятность того, что при скрещивании наугад выбираемых растений получается растение с белыми цветами?*

По-прежнему, предполагаем, что наследование окраски цветов описывается рассматриваемой моделью. Дело сводится к задаче о красных, белых и розовых урнах при $a = 130$, $b = 145$, $c = 0$. Искомая вероятность равна

$$\left(\frac{b}{a+2b}\right)^2 = \left(\frac{145}{420}\right)^2 \approx 0.12.$$

Замечание. Этот пример поясняет влияние *селекции.* Если растения с белыми цветами исключить из процесса размножения, то вероятность появления потомка с белыми цветами уменьшается, а вероятность появления потомка с красными цветами увеличивается:

$$\left(\frac{b+c}{a+2b+c}\right)^2 = \left(\frac{275}{560}\right)^2 \approx 0.43.$$

Вероятности появления гибридов с розовыми цветами приблизительно равны 0.48 и 0.45.

Пример 3. *Известно, что при скрещивании наугад выбираемых из 130 растений с красными цветами и 290 растений с розовыми цветами появляется потомок с красными цветами. Какова вероятность того, что его родители — красные цветы?*

В модели задачи о красных, белых и розовых урнах при $a = 130$, $b = 145$, $c = 0$ дело сводится к вычислению вероятности события $B\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ при условии $A\binom{1}{1}$. По формуле Байеса

$$P_{A\binom{1}{1}}\left(B\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)\right) = P\left(B\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)\right) P_{B\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)}\left(A\binom{1}{1}\right) \Big/ P\left(A\binom{1}{1}\right) =$$

$$= \left(\frac{a}{a+2b}\right)^2 \Big/ \left(\frac{a+b}{a+2b}\right)^2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 = \left(\frac{130}{275}\right)^2 \approx 0.22.$$

2. Случайные переменные

В этой главе рассматриваются некоторые задачи, связанные со случайными переменными для конечной вероятностной модели.

2.1. Среднее и дисперсия

Рассмотрим конечную вероятностную модель, определяемую *множеством исходов* U и *элементарной вероятностью* p.

Случайной переменной называется каждая числовая функция f на множестве исходов U.

Случайные переменные f и g называются *независимыми*, если они принимают значения независимо друг от друга: для каждых чисел x и y событие $A(x) = \{u : f(u) = x\}$ (f принимает значение x) и событие $B(y) = \{u : g(u) = y\}$ (g принимает значение y) независимы. Аналогично определяется независимость нескольких случайных переменных.

2.1.1. Среднее

Важнейшей числовой характеристикой случайной переменной f является ее *среднее* $E(f)$, определяемое как *сумма* произведений вероятностей $p(u)$ исходов u на соответствующие значения $f(u)$ случайной переменной f:

$$E(f) = \sum f(u)\, p(u).$$

При вычислении среднего удобно пользоваться следующими правилами:

Правило постоянной: $E(c) = c$;

Правило сложения: $E(f+g) = E(f) + E(g)$;

Правило умножения на число: $E(cf) = cE(f)$;

Правило неравенства: $E(f) \leqslant E(g)$ $(f \leqslant g)$.

Если случайные переменные f и g *независимы,* то для них верно

Правило умножения: $E(f \cdot g) = E(f) \cdot E(g)$.

Из определения среднего следует, что оно равно также сумме произведений значений x случайной переменной f на вероятности $q(x)$ этих значений:

$$E(f) = \sum xq(x), \qquad (q(x) = P\{u : f(u) = x\}).$$

Это равенство часто сокращает вычисление среднего.

Рассмотрим несколько примеров вычисления среднего.

Задача 1. *Игральная кость подбрасывается два раза. Какова средняя сумма очков?*

Решение. В соответствии с задачей 1 пункта 1.1 главы 1 эта сумма описывается суммой f случайных переменных f_1 и f_2, выражающих соответственно число очков при первом и втором подбрасываниях:

$$f_1(u) = u_1, \quad f_2(u) = u_2, \quad f(u) = u_1 + u_2 \quad (u = u_1 u_2).$$

По правилу сложения отсюда следует, что

$$E(f) = E(f_1) + E(f_2) = 7.$$

Замечание. Задача 4 пункта 1.1 главы 1 показывает, что эта средняя сумма является и *наиболее вероятной.* Таблица вероятностей значений для суммы очков, полученная при решении этой задачи, позволяет вычислить среднюю сумму очков непосредственно.

Задача 2. *Из урны с шарами 1, 2, 3, 4, 5 два раза наугад выбирается шар и возвращается в урну. Какова средняя разность номеров?*

Решение. В соответствии с задачей 2 пункта 1.1 главы 1 эта разность описывается разностью f случайных переменных f_1 и f_2, выражающих соответственно номер шара при первом и втором извлечениях:

$$f_1(u) = u_1, \quad f_2(u) = u_2, \quad f(u) = u_1 - u_2 \quad (u = u_1 u_2).$$

Используя указанное для вычисления среднего равенство, получаем:

$$E(f_1) = E(f_2) = 1 \cdot \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5} = 3.$$

По правилам сложения и умножения на число отсюда следует, что

$$E(f) = E(f_1) - E(f_2) = 0.$$

Задача 3. *Из урны с шарами 1, 2, 3, 4, 5 два раза наугад выбирается шар и не возвращается в урну. Какова средняя разность номеров?*

Решение. В соответствии с задачей 3 пункта 1.1 главы 1 эта разность описывается аналогично задаче 2, то есть, по-прежнему, $E(f_1) = (1+2+3+4+5)/5$. По определению

$$E(f_2) = \sum_u f_2(u) \frac{1}{20} =$$
$$= \frac{1}{20}\left((15-1) + (15-2) + (15-3) + (15-4) + (15-5)\right) = 3.$$

Снова $E(f) = E(f_1) - E(f_2) = 0$.

Замечание. Среднее $E(f_2)$ можно вычислить так же, как и $E(f_1)$, если, используя формулу полной вероятности, доказать, что f_2 принимает каждое значение $1, 2, 3, 4, 5$ с вероятностью

$$P\{u : f_2(u) = x\} = 4 \cdot 1/5 \cdot 1/4 = 1/5.$$

Задача 4. *Вычислительная машина производит $n = 10^6$ одинаковых и независимых операций. Каково среднее число ошибок?*

Решение. Оно равно среднему $E(s)$ числа успехов s для модели Бернулли из $n = 10^6$ испытаний с вероятностью успеха $a = 10^{-6}$. Общее число успехов s равно сумме успехов s_j при j-м испытании $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Используя правило сложения, получаем:

$$E(s) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} E(s_j) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} (1 \cdot a + 0 \cdot (1-a)) = na = 1.$$

Диффузия газов. Рассмотрим 2 литровых сосуда, один из которых содержит газ A, а другой — газ B, находящиеся под атмосферным давлением и при одинаковой температуре. Если сосуды соединить трубкой, то через некоторое время в каждом из них окажется одинаковая смесь C газов A и B.

Можно так объяснить это явление. Каждый из газов представляет собой множество $n = 10^{22}$ хаотически двигающихся молекул. Поведение каждого из газов после соединения сосудов описывается моделью Бернулли для $n = 10^{22}$ испытаний с вероятностью успеха $a = 1/2$ (успехом считается переход молекулы в другой сосуд). Вследствие хаотичности движения молекул можно считать, что доля диффундировавших молекул описывается частотой $n^{-1} \cdot s$. А установившееся равновесие связано с равенством средней частоты успеха его вероятности $1/2$.

Задача 5. *Какова средняя доля диффундирующих молекул?*

Решение. Используя результат задачи 4 и правило умножения на число, получаем:

$$E\left(n^{-1} \cdot s\right) = n^{-1} E\left(s\right) = n^{-1} n a = 1/2.$$

Замечание. В пункте 1.1 главы 1 было показано, что наиболее вероятное значение для числа успехов

$$\hat{m} = \left[\left(n+1\right) a\right] = 2^{-1} \cdot 10^{22}.$$

Следовательно, наиболее вероятное значение для частоты успеха равно $n^{-1}\hat{m} = 2^{-1}$.

Таким образом, установление равновесия является и наиболее вероятным событием. В то же время вероятность этого события, т.е. вероятность того, что диффундирует ровно половина молекул, меньше 10^{-10}.

Задача 6. *Симметричная монета подбрасывается n раз. Если она впервые падает гербом вверх при j-м подбрасывании, то игрок выигрывает 2^j рублей ($j = 1, \ldots, n$). Если при всех n подбрасываниях монета падает цифрой вверх, то игрок проигрывает $n \cdot 2^n$ рублей. Каков средний выигрыш игрока?*

Решение. Этот выигрыш описывается случайной переменной f на множестве исходов модели Бернулли n испытаний с вероятностью успеха $a = 1/2$, определяемой следующим образом: $f(u) = 2^j$, если в строке u первая по порядку единица расположена на j-м месте; кроме того, $f(0\ldots 0) = -n \cdot 2^n$. Задача сводится к вычислению среднего $E(f)$ случайной переменной f. Последняя принимает значение $x = 2^j$ с вероятностью $q(x) = 2^{-j}$. Это следует из того, что число строк u длины n из 1 и 0, у которых первая по порядку единица расположена на j-м месте, равно числу всех строк длины $n-j$ из 1 и 0, т.е. 2^{n-j}. А вероятность каждого исхода равна 2^{-n}. Значит,

$$q(x) = 2^{n-j}2^{-n} = 2^j \qquad\qquad \left(x = 2^j\right).$$

Используя указанное для вычисления среднего равенство, получаем:

$$E(f) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} 2^j 2^{-j} - n2^{-n} \cdot 2^n = n - n = 0.$$

Задача 7. *Каково среднее число мест, на которых в двух идентичных хорошо тасованных колодах находятся одинаковые карты?*

Решение. Каждое взаимное расположение n карт в колодах можно описать перестановкой множества из n элементов. Так как таких перестановок $n!$, то в качестве модели для рассматриваемой задачи о совпадениях удобно взять модель Лапласа для $n!$ равновероятных исходов, которыми являются перестановки номеров $1, \ldots, n$.

Для каждого номера $j = 1, \ldots, n$ рассмотрим случайную переменную f_j, значение которой $f_j(u)$ равно 1, если перестановка u оставляет номер j на месте $(u(j) = j)$, и равно 0 в противном случае $(u(j) \neq j)$. Число совпадений в рассматриваемых колодах описывает сумма f случайных переменных f_j $(j = 1, \ldots, n)$.

Число перестановок u, оставляющих номер j на месте, равно числу всех перестановок остальных $n-1$ номеров, т.е. числу $(n-1)!$. Следовательно,

$$E(f_j) = 1\frac{(n-1)!}{n!} + 0\left(1 - \frac{(n-1)!}{n!}\right) = 1/n \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

По правилу сложения отсюда следует, что

$$E(f) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} E(f_j) = n\frac{1}{n} = 1.$$

Замечание. Таким образом, среднее число совпадений равно единице и не зависит от числа карт в колоде. Этот результат вряд ли можно было ожидать.

Задача 8. *Из урны, содержащей 1 красный и $n-1$ белых шаров, вынимаются по одному шары (без возвращения). Каково среднее число белых шаров, вынутых перед красным?*

Решение. Как и в задаче о красных шарах из пункта 4.2 главы 1, предположим, что шары отмечены номерами $1, \ldots, n$, причем красный шар имеет номер 1. Тогда каждый выбор n шаров из урны можно описать перестановкой u множества номеров $\{1, \ldots, n\}$. В качестве модели для решения рассматриваемой задачи возьмем, как и в предыдущей, модель Лапласа для $n!$ равновероятных исходов, которыми являются такие перестановки u.

Рассмотрим случайную переменную f, значение которой $f(u)$ для каждой перестановки u равно номеру $u(1)$ места, на которое переставляется номер 1, уменьшенному на 1:

$$f(u) = u(1) - 1.$$

Для каждого номера $x = 0, \ldots, n-1$ число перестановок u, для которых $u(1) = x + 1$, равно числу подстановок вместо $2, \ldots, n$ множества $\{1, \ldots, n\} - \{x+1\}$, т.е. числу $(n-1)!$. Следовательно, вероятность $q(x)$ того, что случайная переменная f примет значение x, выражается равенствами

$$q(x) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \qquad (x = 0, \ldots, n-1).$$

Поэтому

$$E(f) = \sum_{0 \leqslant x \leqslant n} x \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

2.1.2. Дисперсия

Среднее является очень грубой характеристикой случайной переменной: ее значения могут сильно отклоняться от него. Поэтому для более точного описания случайной переменной f используется *дисперсия* $D(f)$, определяемая как *среднее квадрата отклонения* f от $E(f)$:

$$D(f) = E\left((f - E(f))^2\right) = \sum (f(u) - E(f))^2 p(u).$$

При вычислении дисперсии удобно использовать равенства

$$D(f) = \sum (x - E(f))^2 q(x), \qquad D(f) = E\left(f^2\right) - E^2(f)$$

и следующие правила:

Правило постоянной: $D(c) = 0$;

Правило умножения на число: $D(cf) = c^2 D(f)$;

Правило прибавления постоянной: $D(f + c) = D(f)$;

Если случайные переменные f и g независимы, то для них верно

Правило сложения: $D(f + g) = D(f) + D(g)$.

Рассмотрим несколько примеров вычисления дисперсии. Используем случайные переменные, описанные в предыдущем пункте, и вычисленные для них средние.

Задача 1. Используя указанные для вычисления дисперсии равенства, получаем:

$$D(f_1) = D(f_2) = \sum_{1 \leqslant x \leqslant 6} (x - 3.5)^2 \frac{1}{6} \approx 2.91.$$

Вследствие *независимости* случайных переменных f_1 и f_2 по правилу сложения отсюда вытекает, что

$$D(f) = D(f_1) + D(f_2) \approx 5.82.$$

Задача 2. Аналогично:

$$D(f_1) = D(f_2) = \sum_{1 \leqslant x \leqslant 5} (x - 3)^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{5}{3},$$
$$D(f) = D(f_1) + D(f_2) = \frac{10}{3} \approx 3.3.$$

Задача 3. В этой задаче случайные переменные f_1 и f_2 *зависимы*, и поэтому правило сложения для дисперсий к ним неприменимо. Используем формулу

$$D(f) = E\left(f^2\right) - E^2(f).$$

Так как $E(f) = 0$, то $D(f) = E\left(f^2\right)$. Используя правила для вычисления средних, получаем отсюда

$$D(f) = E\left((f_1 - f_2)^2\right) = E\left(f_1^2\right) + E\left(f_2^2\right) - E(f_1 f_2).$$

Пользуясь указанным для вычисления дисперсии равенством, убеждаемся в том, что

$$E\left(f_1^2\right) = E\left(f_2^2\right) = \sum_{1 \leqslant x \leqslant 5} x^2 \frac{1}{5} = 11.$$

Из определений вытекает, что

$$E(f_1 f_2) = \sum_{x \neq y} xy \frac{1}{20} = \frac{1}{20} \left(\left(\sum_{1 \leqslant x \leqslant 5} x \right) \left(\sum_{1 \leqslant y \leqslant 5} y \right) - \sum_{1 \leqslant z \leqslant 5} z^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{20} (15 \cdot 15 - 55) = 8.5.$$

Следовательно, $D(f) = 11 + 11 - 17 = 5$.

Замечание. Дисперсия разности номеров вынимаемых из урны шаров для выбора без возвращения больше, чем для выбора с возвращением. Это объясняется тем, что при выборе без возвращения исключены равные нулю значения разности номеров.

Задача 4. Используя указанное для вычисления дисперсии равенство, получаем:

$$D(s_j) = (1-a)^2 a + (0-a)^2 (1-a) = a(1-a) = 10^{-6} \left(1 - 10^{-6}\right)$$
$$(1 \leqslant j \leqslant n).$$

Так как случайные переменные s_j *независимы*, то, по правилу сложения,

$$D(s) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} D(s_j) = na(1-a) = 1 - 10^{-6}.$$

Задача 5. Аналогично, используя правило умножения на число, получаем:

$$D\left(n^{-1} s\right) n^{-2} D(s) = n^{-1} a (1-a) = 4^{-1} n^{-1}.$$

Задача 6. Используя указанное для вычисления дисперсии равенство, получаем:

$$D(f) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(2^j - 0\right)^2 2^{-j} + \left(n^2 2^{2n} - 0\right) 2^{-n} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} 2^j + n^2 2^n = \left(n^2 + 2\right) 2^n - 2.$$

Для достаточно больших n дисперсия произвольно велика.

Задача 7. Вычислим предварительно средние произведений $f_j f_k$:

$$E\left(f_j^2\right) = P\{u : f_j^2(u) = 1\} = P\{u : f_j(u) = 1\} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

$$E(f_j f_k) = P\{u : f_j(u) = f_k(u) = 1\} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)} \quad (1 \leqslant j \neq k \leqslant n).$$

Используя эти равенства и правила вычисления среднего получаем:

$$E\left(f^2\right) = \sum_{j=1}^{n} E\left(f_j^2\right) + 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} E(f_j f_k) = = n\frac{1}{n} + n(n-1)\frac{1}{n(n-1)} = 2,$$

откуда по формуле квадратов следует, что

$$D(f) = E\left(f^2\right) - E^2(f) = 2 - 1 = 1.$$

Как и среднее, дисперсия числа совпадений равна 1 и не зависит от числа карт в колодах.

Задача 8. Используя равенство для суммы квадратов, получаем:

$$D(f) = E\left(f^2\right) - E^2(f) = \sum_{0 \leqslant x \leqslant n} x^2 \frac{1}{n} - \frac{(n-1)^2}{4} = = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right)\frac{1}{n} - \frac{(n-1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

2.2. Закон больших чисел

Этот закон для *попарно независимых* и *одинаково распределенных* случайных переменных f_j со средним и дисперсией

$$E\,(f_j) = a, \qquad D\,(f_j) = b^2 \qquad (\,b > 0, \ \ 1 \leqslant j \leqslant n\,)$$

на множестве исходов U конечной вероятностной модели (U, p) выражает

Теорема Чебышева.

$$P\left\{u : \left|n^{-1}\sum_{1\leqslant j\leqslant n} f_j\,(u) - a\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \varepsilon^{-2} n^{-1} b^2 \qquad (\varepsilon > 0)\,.$$

Она оценивает вероятность *значительного* отклонения *арифметического среднего* случайных переменных f_j от их *среднего* a. Для достаточно больших чисел n это отклонение *практически невозможно.*

Из теоремы Чебышева следует

Теорема Бернулли.

$$P\left\{u : \left|n^{-1}\sum_{1\leqslant j\leqslant n} s_j\,(u) - a\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant \varepsilon^{-2} n^{-1} a\,(1-a) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon^{-2} n^{-1} 4^{-1} \quad (\varepsilon > 0)\,.$$

Она оценивает вероятность *значительного* отклонения *частоты* успеха от его *вероятности.* Для достаточно больших чисел n это отклонение *практически невозможно.*

Теоремы Чебышева и Бернулли дают очень грубые оценки рассматриваемых вероятностей.

2.2.1. Примеры

Рассмотрим несколько примеров использования закона больших чисел. Положим:

$$B(n,\varepsilon)=\left\{u:\left|n^{-1}\sum_{1\leqslant j\leqslant n}s_j(u)-a\right|\geqslant\varepsilon\right\}.$$

Пример 1. Для задачи 4 из пункта 1.1.1 о вычислительной машине по теореме Бернулли получаем при $\varepsilon=2^{-1}\cdot 10^{-2}$

$$P(B(n,\varepsilon))\leqslant 4\cdot 10^4\cdot 10^{-6}\cdot 4^{-1}=10^{-2}.$$

Если считать значительными отклонения больше, чем на $\varepsilon=10^{-2}$, и считать практически невозможными события, вероятности которых меньше $\alpha=10^{-2}$, то из этого неравенства следует, что значительное отклонение частоты ошибки от ее вероятности $a=10^{-6}$ практически невозможно.

Пример 2. Для задачи 5 из пункта 1.1.1 о диффузии газов по теореме Бернулли получаем при $\varepsilon=10^{-8}$

$$B(n,\varepsilon)\leqslant 10^{16}\cdot 10^{-22}\cdot 4^{-1}<10^{-6}.$$

Если считать значительными отклонения больше, чем на $\varepsilon=10^{-8}$, и считать практически невозможными события, вероятности которых меньше $\alpha=10^{-6}$, то из этого неравенства следует, что значительное отклонение доли диффундирующих молекул от $a=1/2$ практически невозможно. Именно вследствие закона больших чисел можно считать, что средняя доля диффундирующих молекул описывает рассматриваемую смесь газов.

Пример 3. Для задачи 7 из пункта 1.1.1 о числе совпадений по теореме Чебышева получаем при $\varepsilon=n^{-1}$

$$B(n,\varepsilon)\leqslant n^2n^{-1}\left(1-n^{-1}\right)=n^{-1}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае $a = \varepsilon = n^{-1}$, и поэтому

$$B\,(n, \varepsilon) = \left\{ u : \left| n^{-1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j\,(u) - n^{-1} \right| \geqslant n^{-1} \right\} \geqslant$$

$$\geqslant \left\{ u : \left| n^{-1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j\,(u) - 1 \right| \geqslant 1 \right\} = \left\{ u : \left| n^{-1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j\,(u) \neq 1 \right| \right\}.$$

Следовательно,

$$\left\{ u : \left| n^{-1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j\,(u) \neq 1 \right| \right\} \leqslant 1 - n^{-1},$$

$$\left\{ u : \left| n^{-1} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} f_j\,(u) = 1 \right| \right\} = n^{-1}.$$

Полученные оценки плохие.

Теорема Бернулли позволяет решить две часто встречающиеся задачи: 1) *о проверке гипотезы* и 2) *об оценке вероятности.*

2.2.2. Проверка гипотезы

Рассмотрим последовательность n испытаний, описываемую моделью Бернулли с неизвестной вероятностью успеха. Сделаем предположение, что эта вероятность равна a $(0 \leqslant a \leqslant 1)$. При реализации рассматриваемой последовательности частота успехов оказывается равной b $(0 \leqslant b \leqslant 1)$. Согласуется ли сделанное предположение с результатом эксперимента?

Представляется разумным использовать следующий принцип: если при реализации произошло событие, которое при сделанном предположении является практически невозможным, то предположение не согласуется с результатом эксперимента.

Рассмотрим модель Бернулли с параметрами n и a. Условимся считать практически невозможными события, вероятность которых меньше α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Если сделанное предположение о том, что вероятность успеха равна a, соответствует действительности, то для вероятности $P(B)$ события

$$B = \{u : |(1/n)\, s(u) - a| \geqslant \Delta\},$$

где $\Delta = |b - a|$, верно неравенство

$$P(B) \leqslant a(1-a) \,/\, \left(n\Delta^2\right).$$

Если

$$\Delta \geqslant \Delta_0 = \sqrt{\frac{a(1-a)}{n\alpha}},$$

то $a(1-a) \,/\, \left(n\Delta^2\right) \leqslant \alpha$ и $P(B) \leqslant \alpha$, т.е. при сделанном предположении *отклонение частоты успеха от вероятности успеха больше, чем на величину* Δ_0 *является практически невозможным событием.*

Таким образом, проверка гипотезы о равенстве вероятности успеха числу a для модели Бернулли n испытаний заключается в следующем.

1) выбирается *оценка невозможности* α и определяется *допустимое отклонение* Δ_0 значения частоты успеха от вероятности успеха a:

$$\Delta_0 = \sqrt{\frac{a(1-a)}{n\alpha}};$$

2) подсчитывается полученное в результате эксперимента *значение* b *частоты успеха* и определяется *отклонение* $\Delta = |b - a|$;

3) если *полученное отклонение* значения частоты успеха от вероятности успеха *больше допустимого* Δ_0: $\Delta \geqslant \Delta_0$, то гипотеза *не согласуется* с имеющимися данными.

Замечание. Если $\Delta < \Delta_0$, то *нельзя* сделать вывод о том, что гипотеза согласуется с имеющимися данными. Из-за грубости использованной оценки событие B может оказаться практически невозможным и при $\Delta < \Delta_0$.

Рассмотрим несколько примеров.

А. Задача о жулике. Яркий пример вопиющего несоответствия между предположением и действительностью описан в следующем старинном анекдоте: «Однажды в Неаполе преподобный Галиани увидел человека из Базиликаты, который, встряхивая три игральные карты в чашке, держал пари, что выбросит три шестерки. Вы скажете, такая удача возможна. Однако человеку из Базиликаты удалось это и во второй раз, и пари повторялось. Он клал кости в чашку 3, 4, 5 раз и каждый раз выбрасывал три шестерки. "Черт возьми! — воскликнул преподобный. — Кости налиты свинцом!" Так оно и было. Но почему преподобный воспользовался нечестивым выражением?» Преподобный Галиани выругался, очевидно, решив, что человек из Базиликаты — жулик. Соответствует ли действительности предположение о том, что человек из Базиликаты — честный?

Процесс 5-кратного честного бросания трех честных костей можно описать моделью Бернулли для $n = 5$ испытаний с вероятностью успеха $a = 1/6^3$ (успехом считается выпадение трех шестерок). Предположим, что человек из Базиликаты и его кости честные. Задача, таким образом, сводится в проверке гипотезы о равенстве вероятности успеха данному значению. Используем построенную для этой проверки схему.

1. Условимся считать практически невозможными события, вероятности которых меньше $\alpha = 0.001$. В этом случае допустимое отклонение $\Delta_0 = \left(6^{-3}\left(1-6^{-3}\right) / \left(5\cdot 10^{-3}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Полученное отклонение $\Delta = 1 - 6^{-3}$.

3. Нетрудно проверить, что $\Delta \geqslant \Delta_0$.

В самом деле, данное неравенство эквивалентно каждому из нижеследующих неравенств: $\left(1-6^{-3}\right)^2 \geqslant 6^{-3}\left(1-6^{-3}\right) / \left(5\cdot 10^{-3}\right)$; $1-6^{-3} \geqslant 6^{-3} / \left(5\cdot 10^{-3}\right)$; $5\left(6^3-1\right) \geqslant 10^3$; $1075 \geqslant 1000$.

Таким образом, полученное отклонение значения частоты успеха от вероятности успеха больше допустимого. Предположение, что человек из Базиликаты — честный человек, *не согласуется* с имеющимися данными. Преподобный Галиани был прав.

B. Статистический контроль производственного процесса. Условимся работу автомата, производящего гвозди, описывать моделью Бернулли с вероятностью успеха $a = 1/4$ (успехом считается изготовление негодного гвоздя). При проверке партии из $n = 10000$ гвоздей доля негодных оказалась равной $b = 5/12$. Можно ли считать, что это свидетельствует о неполадках в работе автомата?

Задача сводится в проверке гипотезы о равенстве вероятности успеха данному значению. Используем построенную для этой проверки схему.

1. Условимся считать практически невозможными события, вероятности которых меньше $\alpha = 0.001$. В этом случае допустимое отклонение $\Delta_0 = (1/4 \cdot 3/4) \,/\, \left(10^4 \cdot 10^{-3}\right)^{\frac{1}{2}} < (1/4 \cdot 10)^{\frac{1}{2}} < 1/6$.

2. Полученное отклонение $\Delta = |5/12 - 1/4| = 1/6$.

3. Таким образом, полученное отклонение значения частоты успеха больше допустимого: $\Delta \geqslant \Delta_0$.

Поэтому можно считать, что полученные данные свидетельствуют о неполадках в работе автомата.

C. Рак легких. Условимся считать, что процесс выявления заболевания раком легких при обследовании группы некурящих людей описывается моделью Бернулли с вероятностью успеха $a = 10^{-4}$ (успехом считается то обстоятельство, что человек болен раком легких). При обследовании группы $n = 10^5$ курящих людей доля больных раком легких оказалась равной $b = 11 \cdot 10^{-4}$. Можно ли считать, что эти данные подтверждают связь между курением и раком легких?

Задача сводится в проверке гипотезы о равенстве вероятности успеха данному значению. Используем построенную для этой проверки схему.

1. Условимся считать практически невозможными события,

вероятности которых меньше $\alpha = 0.001$. В этом случае допустимое отклонение

$$\Delta_0 = \left(10^{-4}\left(1 - 10^{-4}\right) / \left(10^5 \cdot 10^{-3}\right)\right)^{\frac{1}{2}} < 10^{-3}.$$

2. Полученное отклонение $\Delta = 11 \cdot 10^{-4} - 10^{-4} = 10^{-3}$.

3. Таким образом, полученное отклонение значения частоты успеха больше допустимого: $\Delta \geqslant \Delta_0$.

Можно считать, что имеющиеся данные подтверждают существование связи между курением и раком легких.

D. Пол ребенка. Будем считать, что процесс рождения мальчиков и девочек описывается моделью Бернулли с неизвестной вероятностью успеха (успехом считается рождение мальчика). Представляется правдоподобным предположение, что рождение мальчика и рождение девочки равновероятны. По имеющимся данным в Швейцарии с 1871 по 1990 год родилось $n = 2644757$ детей. Среди них $m = 1359671$ мальчик. Согласуется ли предположение о равенстве вероятностей рождения мальчика и рождения девочки с этими данными?

Задача сводится к проверке гипотезы о том, что вероятность успеха $a = 1/2$. Используем построенную для этой проверки схему.

1. Условимся считать практически невозможными события, вероятности которых меньше $\alpha = 0.001$. В этом случае допустимое отклонение

$$\Delta_0 = \left((1/4) / \left(2644757 \cdot 10^{-3}\right)\right)^{\frac{1}{2}} < \left(4 \cdot 25 \cdot 10^5 \cdot 10^{-3}\right)^{-\frac{1}{2}} = 0.01.$$

2. Значение частоты успеха для этого случая $b \geqslant 0.5141$. Полученное отклонение $\Delta \geqslant 0.5141 - 0.5 = 0.0141$.

3. Таким образом, полученное отклонение значения частоты успеха больше допустимого: $\Delta \geqslant \Delta_0$.

Предположение, что рождение мальчика и рождение девочки равновероятны, не согласуется с имеющимися данными. (В демографии принято считать, что вероятность рождения мальчика равна 0.515.)

Е. Телепатия. В контрольном опыте по проверке существования телепатической связи (Москва — Керчь), проведенном 10 мая 1968 года, из 10 телепатически переданных образов предметов правильно не был принят ни один. Предположим, что прием описывается моделью Бернулли для $n = 10$ испытаний. Согласуется ли результат опыта с предположением, что вероятность правильного приема образов равна $a = 0.999$?

Задача сводится к проверке гипотезы о том, что вероятность успеха $a = 0.999$. Используем построенную для этой проверки схему.

1. Условимся считать практически невозможными события, вероятности которых меньше $\alpha = 0.001$. В этом случае допустимое отклонение

$$\Delta_0 = \left(\left(1 - 10^{-3}\right) \cdot 10^{-3} / \left(10 \cdot 10^{-3}\right)\right)^{\frac{1}{2}} < 0.33.$$

2. Полученное отклонение $\Delta = |0 - 0.999| = 0.999$.

3. Таким образом, полученное отклонение значения частоты успеха в три раза превышает допустимое: $\Delta > 3\Delta_0$.

Можно считать, что гипотеза о практически достоверном приеме телепатически переданного образа предмета контрольным опытом не подтвердилась. (В то же время, разумеется, проделанный расчет нельзя считать доказательством отсутствия телепатической связи вообще.)

Замечание. Во всех рассмотренных примерах практически невозможные события были определены как события, вероятности которых меньше $\alpha = 0.001$. Выбор значения 0.001 произволен. Обычно α определяется в зависимости от конкретных обстоятельств. Уменьшение α соответствует менее строгому подходу к проверке гипотезы: допустимое отклонение увеличивается, и вывод о несогласованности с результатом эксперимента делается реже.

2.2.3. Оценка вероятности

Рассмотрим вновь последовательность n испытаний, описываемую моделью Бернулли с неизвестной вероятностью успеха. В качестве *оценки для вероятности* успеха используем *частоту* успеха. Какое число испытаний *практически достоверно* обеспечивает *данную точность* оценки?

Условимся считать практически достоверными события, вероятность которых больше $1-\alpha$ $(1<\alpha<1)$. Вместо *практически достоверно* будем говорить также *с вероятностью, большей* $1-\alpha$. Точность оценки $(1/n)\,s$ зададим числом ε $(0<\varepsilon<1)$. Оцениваемую вероятность обозначим буквой a $(0 \leqslant a \leqslant 1)$.

Задача сводится к определению числа n_0 такого, что для каждого натурального числа $n \geqslant n_0$ и каждого числа a $(0 \leqslant a \leqslant 1)$ в модели Бернулли с параметрами n и a было верно неравенство

$$P\{u : |(1/n)\,s - a| < \varepsilon\} \geqslant 1-\alpha.$$

По теореме Бернулли, для этого достаточно, чтобы выполнялось $n_0 = 1/4\alpha\varepsilon^2$.

Таким образом, если число испытаний n в модели Бернулли *больше* числа $n_0 = 1/4\alpha\varepsilon^2$, то *с вероятностью, большей* $1-\alpha$, *частота успехов* $(1/n)\,s$ *оценивает вероятность успеха* a *с точностью* ε.

Рассмотрим несколько примеров.

А. Статистический контроль качества продукции. Вернемся к автомату, производящему гвозди. Предположим, что он заменен новым, работу которого также можно описать моделью Бернулли, но уже с неизвестной вероятностью успеха a (успехом по-прежнему считается изготовление негодного гвоздя). Для оценки этой вероятности производится пробная партия из n гвоздей. В качестве оценки для a берется *доля* негодных гвоздей пробной партии. Требуется определить число n гвоздей для пробной партии, при котором эта оценка практически достоверно имела бы точность $\varepsilon = 0.1$. Практически достоверные события определим как события, вероятности которых больше $1 - \alpha = 0.999$ ($\alpha = 0.001$).

Задача сводится к определению числа испытаний, при котором использование частоты успеха практически достоверно обеспечивает заданную точность. Используем полученное для этого числа неравенство. В рассматриваемом случае $\alpha = 0.001$ и $\varepsilon = 0.1$, следовательно, $n \geqslant n_0 = 2500$.

B. Оценка доли курящих. Неизвестная доля a жителей города курит. Для определения доли курящих жителей предполагается провести ряд независимых наблюдений, при которых все жители будут иметь равную возможность стать объектом наблюдения. Можно поэтому считать, что процесс наблюдения описывается моделью n испытаний Бернулли с вероятностью успеха a (успехом считается то, что наблюдаемый житель курит). В качестве оценки доли a курящих жителей предполагается использовать частоту s/n курящих среди наблюдавшихся жителей. Требуется, чтобы оценка практически достоверно имела точность $\varepsilon = 0.005$. Практически достоверными считаются события, вероятности которых больше $1 - \alpha = 0.95$ ($\alpha = 0.05$). Сколько нужно провести наблюдений?

Задача сводится к определению числа испытаний, при котором использование частоты успеха практически достоверно обеспечивает заданную точность. Используем полученное для этого числа неравенство. В рассматриваемом случае $\alpha = 0.05$ и $\varepsilon = 0.005$. Следовательно, нужно провести $n \geqslant n_0 = 200000$ наблюдений.

C. Эффективность лечения. Испытывается новый метод лечения некоторой болезни. О его эффективности предполагается судить по доле выздоровевших среди подопытных зараженных кроликов, подвергнутых лечению этим методом. Требуется, чтобы оценка эффективности была достаточно точной и надежной. Сколько нужно кроликов для такого опыта?

Будем предполагать, что процесс выздоровления или смерти подопытных кроликов описывается моделью Бернулли для n испытаний с неизвестной вероятностью успеха (выздоровление кролика) a. Практически достоверными считаются события, вероятности которых *больше* $1 - \alpha = 0.95$ ($\alpha = 0.05$). *Точность* оценки зададим числом $\varepsilon = 0.25$. Задача о числе подопытных кроликов сводится к определению числа n испытаний, при котором оценка вероятности успеха a с помощью частоты успеха s/n практически достоверно обеспечивает заданную точность ε. Применяя полученное для этого числа неравенство, находим, что $n \geqslant n_0 = 80$.

Если требовать при той же практической достоверности точность $\varepsilon = 0.05$, то будет $n \geqslant n_0 = 2000$.

Если при этой точности оценивать практическую достоверность числом $1 - \alpha = 0.99$ ($\alpha = 0.01$), то будет $n \geqslant n_0 = 10000$.

Замечание. Полученные с помощью неравенства Чебышева оценки для отклонения частоты успеха от вероятности успеха и для числа испытаний являются грубыми. Более развитая теория дает более точные оценки. В частности, можно показать, что при оценке доли курящих для достижения точности 0.005 с вероятностью 0.95 достаточно провести не 200 000, а всего 40 000 наблюдений.

3. Разные задачи

В этой главе рассматриваются некоторые избранные задачи.

3.1. Задача о разорении игрока

Игрок, имеющий m рублей, играет n партий в орлянку с партнером, имеющим $c-m$ рублей. Ставка в каждой партии равна одному рублю. Какова вероятность того, что за эти n партий игрок проиграет все свои деньги?

3.1.1. Математическая формулировка задачи

Рассмотрим произвольные натуральные числа m, $n > 0$ и $c > m$. Последовательность n подбрасываний симметричной монеты описывается моделью Бернулли n испытаний с вероятностью успеха $a = 1/2$. Для каждого номера $j = 1, \ldots, n$ случайная переменная $f_j = 2s_j - 1$ описывает выигрыш игрока в j-й партии: $f_j(u) = 1$, если $u \in У_j$, и $f_j(u) = -1$, если $u \in H_j$. Общий выигрыш игрока, имеющего l рублей $(0 < l < c)$, в $j, \ldots, k$-й партиях с партнером, имеющим $c-l$ рублей, описывается случайной переменной g^l_{jk}, определяемой равенствами

$$
\begin{aligned}
&g^l_{jj}(u) = f_j(u), \\
&g^l_{jk}(u) = f_j(u) + g^l_{j+1,k}(u) \quad \left(-l < g^l_{j+1,k}(u) < c-l;\ 1 \leqslant j < k\right), \\
&g^l_{jk}(u) = g^l_{j+1,k}(u) \qquad \left(g^l_{j+1,k}(u) = -l, c-l;\ 1 \leqslant j < k\right).
\end{aligned}
$$

Замечание. Последние равенства соответствуют формальному продолжению игры, когда один из игроков разорился.

Задача сводится к вычислению вероятности $p(m,n)$ события

$$A = \{u : g^m_{1n}(u) = -m; g^m_{1k}(u) \neq -m, 1 \leqslant k < n\}.$$

3.1.2. Составление разностного уравнения

Непосредственно подсчитать вероятность $p(m,n)$, по-видимому, трудно. Поэтому с помощью формулы полной вероятности составим разностное уравнение, определяющее вероятность $p\,(m,n)$.

Рассмотрим события $У_1$ и H_1, описывающие выигрыш и проигрыш игрока в 1-й партии. По формуле полной вероятности

$$P\,(AP\,(H_1)\,P_{H_1}\,(A)) = P\,(У_1)\,P_{У_1}\,(A) + P\,(H_1)\,P_{H_1}\,(A)\,. \qquad (*)$$

Имеем: $P\,(У_1) = a = 1/2$ и $P\,(H_1) = (1-a) = 1/2$. Непосредственно из определений вытекает, что при $c - m, n > 1$

$$\begin{aligned} У_1 A = \{u : f_1\,(u) = 1; g^m_{1n}\,(u) = -m; g^m_{1k}\,(u) \neq -m, 1 \leqslant k < n\} = \\ = \{u : f_1\,(u) = 1; g^{m+1}_{2n}\,(u) = -\,(m+1)\,; \\ g^{m+1}_{2k}\,(u) \neq -\,(m+1)\,, 2 \leqslant k < n\} = У_1 B. \end{aligned}$$

Из независимости испытаний в модели Бернулли следует, что случайные переменные f_1, g^{m+1}_{2n} независимы и события

$$\begin{aligned} &У_1 = \{u :\ f_1\,(u) = 1\}, \\ &B = \{u : g^{m+1}_{2n}\,(u) = -\,(m+1)\,; g^{m+1}_{2k}\,(u) \neq -\,(m+1)\,, 2 \leqslant k < n\}, \end{aligned}$$

независимы. Поэтому

$$\begin{aligned} P_{У_1}\,(A) = P\,(У_1 A)\,/P\,(У_1) = P\,(У_1 B)\,/P\,(У_1) = \\ = P\,(У_1)\,P\,(B)\,/P\,(У_1) = P\,(B)\,. \end{aligned}$$

Из однородности испытаний в модели Бернулли следует, что при $n > 1$ вероятность события B равна вероятности события

$$C = \{u : g^{m+1}_{1(n-1)}(u) = -(m+1); g^{m+1}_{1k}(u) \neq -(m+1),\ 1 \leqslant k < n-1\}$$

(проигрыш $m+1$ рублей в 1, …, $(n-1)$-й партиях). В самом деле, исход $u = u_1 \ldots u_n$ принадлежит событию B, если и только если исход $v = u_2 \ldots u_n u_1$ принадлежит событию C. Элементарные вероятности исходов u и v равны, следовательно, равны вероятности событий B и C. Таким образом, при $c - m > 0$, $n > 1$

$$P_{H_1}(A) = p(m-1, n-1).$$

Подставляя найденные значения в равенство (*), получаем

$$p(m,n) = \frac{1}{2}p(m+1,n-1) + \frac{1}{2}p(m-1,n-1)$$
$$(1 < m < c-1,\ n > 1). \quad (1)$$

Кроме того, как нетрудно проверить,

$$\begin{aligned} &p(1,n) = (1/2)\,p(2,n-1), \\ &p(c-1,n) = (1/2)\,p(c-2,n-1) \qquad (n>1), \qquad (2) \\ &p(1,1) = 1/2, \qquad p(m,1) = 0 \qquad (1 < m < c). \end{aligned}$$

Замечание. Равенства (1) и (2) эквивалентны равенствам

$$p(m,n) = (1/2)\,p(m+1,n-1) + (1/2)\,p(m-1,n-1)$$
$$(0 < m < c,\ n > 0),$$

если

$$p(0,0) = 1, \quad p(0,n) = p(c,n) = p(m,0) = 0 \quad (0 < m \leqslant c, 0 < n).$$

Говорят, что числа $p(m,n)$ $(0 \leqslant m \leqslant c,\ n > 0)$ образуют решение разностного уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2).

3.1.3. Решение задачи

Используя принцип индукции, нетрудно убедиться в том, что если для произвольных чисел $q(m,n)$ верны равенства

$$q\,(m,n) = (1/2)\,q\,(m+1,n-1) + (1/2)\,q\,(m-1,n-1)$$
$$(1 < m < c-1, n > 1)\,,$$
$$q\,(1,n) = (1/2)\,q\,(2,n-1)\,,$$
$$q\,(c-1,n) = (1/2)\,q\,(c-2,n-1) \qquad (n > 1)\,,$$
$$q\,(1,1) = (1/2)\,, \qquad q\,(m,1) = 0 \qquad (1 < m < c)\,,$$

аналогичные равенствам (1) и (2), то

$$q\,(m,n) = p\,(m,n) \qquad (0 < m < c, n > 0)\,.$$

Замечание. Эквивалентное утверждение выражается фразой: решение уравнения (1), удовлетворяющее (2), единственное.

Оказывается, что единственные числа $p\,(m,n)$, для которых верны равенства (1) и (2), определяются равенством

$$p\,(m,n) = \frac{1}{c}\sum_{0<k<c} \sin\frac{km\pi}{c}\cdot\sin\frac{k\pi}{c}\cdot\cos^{n-1}\frac{k\pi}{c}$$
$$(0 < m < c, n > 0)\,. \quad (3)$$

Прежде всего заметим, что для каждых числа $x \neq 2\pi l$ ($l = 0$, $\pm1, \pm2, \ldots$) и номера $n > 0$ верно равенство

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \cos\,kx = \frac{1}{2}\left(\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\Big/\sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) - 1\right),$$

которое получается суммированием обеих частей равенства

$$\cos kx \sin\left(\frac{1}{2}\,x\right) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)x\right).$$

Используя указанное равенство для суммы косинусов, получаем:

$$p\,(1,1)=\frac{1}{c}\sum_{0<k<c}\sin^2\frac{k\pi}{c}=\frac{1}{2c}\sum_{0<k<c}\left(1-\cos\frac{2\pi}{c}k\right)=$$
$$=\frac{1}{2c}\left\{(c-1)-\frac{1}{2}\left(\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{c}\right)\Big/\sin\frac{\pi}{c}-1\right)\right\}=1/2.$$

Если $1<m<c$, то

$$p\,(m,1)=\frac{1}{c}\sum_{0<k<c}\sin\frac{km\pi}{c}\sin\frac{k\pi}{c}=$$
$$=\frac{1}{2c}\sum_{0<k<c}\left(\cos\frac{(m-1)\,\pi}{c}k-\cos\frac{(m+1)\,\pi}{c}k\right)=$$
$$=\frac{1}{2c}\left\{\sin\left((m-1)\,\pi-\frac{(m-1)\,\pi}{2c}\right)\Big/\sin\frac{(m-1)\,\pi}{2c}-\right.$$
$$\left.-\sin\left((m+1)\,\pi-\frac{(m+1)\,\pi}{2c}\right)\Big/\sin\frac{(m+1)\,\pi}{2c}\right\}.$$

Так как числа $m-1$ и $m+1$ оба четные или нечетные, то дроби в фигурных скобках обе равны -1 или $+1$. Поэтому

$$p\,(m,1)=0\qquad\qquad (1<m<c)\,.$$

Для каждого номера $n>1$ имеем:

$$p\,(1,n)=\frac{1}{c}\sum_{0<k<c}\sin^2\frac{k\pi}{c}\cos^{n-1}\frac{k\pi}{c}=$$
$$=\frac{1}{2c}\sum_{0<k<c}\sin\frac{2k\pi}{c}\sin\frac{k\pi}{c}\cos^{n-2}\frac{k\pi}{c}=\frac{1}{2}p\,(2,n-1)\,,$$
$$p\,(c-1,n)=\frac{1}{c}\sum_{0<k<c}\sin\left(k\pi-\frac{k\pi}{c}\right)\sin\frac{k\pi}{c}\cos^{n-1}\frac{k\pi}{c}=$$
$$=\frac{1}{2c}\sum_{0<k<c}\sin\left(k\pi-\frac{k\pi}{c}\right)\sin\frac{k\pi}{c}\cos^{n-2}\frac{k\pi}{c}=\frac{1}{2}p\,(c-2,n-1)\,.$$

Если $1 < m < c-1$ и $n > 0$, то

$$\frac{1}{2}p\left(m+1,n-1\right)+\frac{1}{2}p\left(m-1,n-1\right)=$$
$$=\frac{1}{2c}\sum_{0<k<c}\left(\sin\frac{k\left(m+1\right)\pi}{c}-\sin\frac{k\left(m-1\right)\pi}{c}\right)\sin\frac{k\pi}{c}\cos^{n-2}\frac{k\pi}{c}=$$
$$=\frac{1}{c}\sum_{0<k<c}\sin\frac{km\pi}{c}\sin\frac{k\pi}{c}\cos^{n-1}\frac{k\pi}{c}=p\left(m,n\right).$$

Таким образом, из равенств (3) вытекают равенства (1) и (2). Следовательно, равенства (3) определяют искомые вероятности $p\left(m,n\right)$.

Замечание. Получение равенства (3) связано с более развитой математической техникой и поэтому не обсуждается. При небольших значениях переменных m и n вероятности $p(m,n)$ можно вычислить, непосредственно используя равенства (1) и (2).

3.1.4. Случайное блуждание

Вероятностная схема, построенная для задачи о разорении игрока, описывает также *симметричное случайное блуждание частицы по одномерной решетке с поглощающими экранами.* Такая схема иногда используется, например, для описания одномерного *броуновского движения*, при котором частица подвергается ударам со с стороны большого числа хаотически двигающихся молекул. Пусть точки $-m,-m+1,\ldots,0,\ldots,c-m$ оси абсцисс координатной плоскости описывают возможные положения некоторой частицы в моменты $j=1,\ldots,n$. В начальный момент частица находится в точке 0. Если в момент $j-1$ частица находится в точке x $(-m < x < c-m)$, то в момент j она с одинаковой вероятностью переходит в точку $x+1$ или в точку $x-1$. В точках $-m$ и $c-m$ расположены поглощающие экраны: если частица попадает в какую-нибудь из них, то она там и остается.

В этой схеме положение частицы соответствует выигрышу игрока, а поглощение частицы экраном в в точке $-m$ — разорению.

Равенства (3) определяют вероятность того, что частица в момент n будет поглощена экраном в точке $-m$.

Замечание. Если сформулировать задачу о разорении, не ограничивая заранее число партий и предполагая, что игра ведется до разорения одного из игроков, то при математической постановке задачи для описания такой игры придется рассматривать вероятностное пространство с *бесконечным* множеством исходов.

3.2. Задача о спичечных коробках

Известный польский математик С. Банах сформулировал следующую шуточную задачу.

Некто носит с собой две коробки спичек. Время от времени он вынимает спичку из наугад выбранной коробки. Рано или поздно выбранная коробка впервые оказывается пустой. Сколько спичек в этот момент остается в другой коробке?

3.2.1. Распределение числа оставшихся спичек

Обозначим число спичек в каждой из коробок буквой m, а искомое число оставшихся спичек — буквой x $(0 \leq x \leq m)$. Предположим, что одна из коробок имеет номер 0, а другая — номер 1. Используем модель Бернулли для $n = 2m + 1$ испытаний с вероятностью успеха $a = 1/2$. Число число оставшихся спичек в этой модели описывается случайной переменной f, определяемой так:

В каждой строке u длины $n = 2m + 1$, составленной из номеров 0 и 1, число единиц $s(u)$ либо строго больше m, либо строго меньше m. Множество $A = \{u : s(u) > m\}$ строк первого типа описывает появление пустой коробки номер 1, а множество $A = \{u : s(u) < m\}$ строк второго типа — пустой коробки номер 0. В первом случае число оставшихся спичек выражается равенством

$$f(u) = m - k(u) \qquad\qquad (s(u) > m), \tag{1}$$

где $k(u)$ обозначает общее число нулей до $(m+1)$-й единицы в строке u. Во втором случае число оставшихся спичек выражается равенством

$$f(u) = m - l(u) \qquad\qquad (s(u) < m), \qquad\qquad (2)$$

где $l(u)$ обозначает общее число единиц до $(m+1)$-го нуля в строке u.

Равенства (1) и (2) определяют значение $f(u)$ случайной переменной f для каждого исхода u.

Например, если $m = 1$, то

$$\begin{aligned} &f(111) = 1 - 0 = 1, && f(110) = 1 - 0 = 1,\\ &f(101) = 1 - 1 = 0, && f(011) = 1 - 1 = 0,\\ &f(000) = 1 - 0 = 1, && f(001) = 1 - 0 = 1,\\ &f(010) = 1 - 1 = 0, && f(100) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Вычислим вероятность $q(x)$ того, что случайная переменная f примет значение x:

$$q(x) = P\{u : f(u) = x\} \qquad\qquad (0 \leqslant x \leqslant m).$$

Это и будет решением задачи.

Для каждой строки u такой, что $s(u) > m$, равенство $f(u) = x$ означает, что:

1) в строке u на $(2m - x + 1)$-м месте находится 1;

2) перед ней на $2m - x$ местах произвольно расположены m единиц и $m - x$ нулей;

3) после нее расположена произвольная строка длины x из номеров 0 и 1.

Число таких строк u равно $\binom{2m-x}{m}2^x$ $(0 \leqslant x \leqslant m)$.

Столько же строк u, для которых $s(u) < m$ и равенство $f(u) = x$. Следовательно, общее число исходов u, для которых $f(u) = x$, равно $\binom{2m-x}{m}2^{x+1}$ $(0 \leqslant x \leqslant m)$. Так как исход u имеет вероятность $p\,(u) = 2^{-(2m+1)}$, то

$$q\,(x) = \binom{2m-x}{m} 2^{-(2m-x)} \qquad\qquad (0 \leqslant x \leqslant m)\,.$$

3.2.2. Среднее число оставшихся спичек

Вычислим среднее $E\,(f)$ случайной переменной f. Непосредственно это сделать, по-видимому, трудно. Поэтому воспользуемся искусственным приемом.

Так как

$$\sum_{0 \leqslant x \leqslant m} q\,(x) = \sum_{u} p\,(u) = 1,$$

то

$$m - E\,(f) = \sum_{0 \leqslant x \leqslant m} mq\,(x) - \sum_{0 \leqslant x \leqslant m} xq\,(x) =$$

$$= \sum_{0 \leqslant x \leqslant m} (m-x) \binom{2m-x}{m} 2^{-(2m-x)}.$$

Вместе с тем для каждого $x = 0, \ldots, m-1$

$$(m-x) \binom{2m-x}{m} \frac{(m-x)\,(2m-x)!}{m!\,(m-x)!} =$$

$$= \frac{(2m-x)\,(2m-x-1)!}{m!\,(m-x-1)!} = (2m-x) \binom{2m-x-1}{m}.$$

Отсюда вытекает, что

$$m - E\,(f) = \sum_{0 \leqslant x < m} (2m-x) \binom{2m-x-1}{m} 2^{-(2m-x)} =$$

$$= \frac{2m+1}{2} \sum_{0 \leqslant x < m} q\,(x+1) - \frac{1}{2} \sum_{0 \leqslant x \leqslant m} (x+1)\,q\,(x+1)\,.$$

В то же время

$$\sum_{0\leqslant x\leqslant m}(x+1)\,q\,(x+1)=\sum_{0<x\leqslant m}xq\,(x)=\sum_{0\leqslant x\leqslant m}xq\,(x)=E\,(f)\,,$$
$$\sum_{0\leqslant x<m}q\,(x+1)=\sum_{0<x\leqslant m}q\,(x)=\sum_{0\leqslant x\leqslant m}q\,(x)-q\,(0)=1-q\,(0)\,.$$

Следовательно,

$$m-E\,(f)=\frac{2m+1}{2}\,(1-q\,(0))-\frac{1}{2}E\,(f)\,.$$

Так как $q\,(0)=\binom{2m}{m}2^{-2m}$, то отсюда вытекает, что

$$E\,(f)=(2m+1)\binom{2m}{m}2^{-2m}-1.$$

Это равенство выражает среднее число оставшихся спичек.

Замечание. Можно доказать, что

$$E\,(f)\approx 2\,(m/\pi)^{\frac{1}{2}}-1.$$

В частности, если $m=12$, то $E\,(f)\approx 3$; если $m=50$, то $E\,(f)\approx 7$.

Эти результаты проверялись экспериментально. Например, можно взять две коробки с 12 спичками в каждой и монету. Отметить коробку номер 1 и коробку номер 0. Подбрасывать монету и, когда она падает гербом вверх, брать спичку из коробки номер 1, а когда цифрой вверх, брать спичку из коробки номер 0. И так до тех пор, пока взятая коробка не окажется пустой. Нужно проделать этот опыт несколько раз, подсчитывая число оставшихся спичек. Вследствие закона больших чисел арифметическое среднее этих чисел, как правило, не будет значительно отличаться от числа 3.

Задача. Вычислить дисперсию случайной переменной f.

3.3. Задача о длине случайной ломаной

3.3.1. Постановка задачи

Геометрическое описание. Рассматриваются ломаные на плоскости, составленные из n звеньев одинаковой длины. Углы между соседними звеньями имеют одну и ту же абсолютную величину α, но могут иметь разные знаки. Нужно вычислить среднее значение квадрата расстояния между концами ломаной. (Квадрат взят для упрощения выкладок.)

Математическая модель. Обозначим конец j-го звена ломаной точкой $z_j = (x_j, y_j)$ координатной плоскости, а угол между j-м звеном и осью x обозначим φ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Будем считать, что началом ломаной служит начало координат $z_0 = (x_0, y_0) = (0, 0)$, 1-е звено расположено на оси x $(\varphi_0 = 0)$ и все звенья имеют длину 1:

$$|z_j - z_{j+1}| = \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2} = 1 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)\,.$$

Будем исследовать величину отношения $\xi_n = |z_n|^2/n$ квадрата расстояния между концами ломаной к числу звеньев.

Рассмотрим число $\alpha \in]0, \pi[$ и случайные величины ξ_k, принимающие значения $+1$ или -1 с вероятностью $p_k = q_k = 1/2$ независимо друг от друга $(2 \leqslant k \leqslant n)$. Будем считать, что $n \geqslant 2$ и

$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \eta_k, \qquad \eta_k = \xi_k \alpha \qquad (2 \leqslant k \leqslant n)\,.$$

Тогда φ_k, а вместе с ними ξ_n становятся случайными величинами и можно вычислять их средние значения.

Задача *Вычислить среднее значение случайной величины* ξ_n.

Замечание. Предположения $z_0 = (0, 0)$, $\varphi_0 = 0$ и $|z_j - z_{j+1}| = 1$ имеют технический характер. А предположения о ξ_j существенные. Без них задача становится намного сложнее.

3.3.2. Вспомогательные предложения

Отождествим точку $z=(x,y)$ координатной плоскости с комплексным числом $z=x+yi=re^{i\varphi}$.

Лемма 1.

$$z_n = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} e^{i\varphi_j} \qquad\qquad (n\geqslant 1)\,. \tag{1}$$

□ Если $n=1$, то $z_1=1=e^{i0}=e^{i\varphi_0}$ и (1) верно. Пусть (1) верно для $n=m\geqslant 1$. Тогда

$$z_{m+1}=z_m+e^{i\varphi_{m+1}}=\sum_{1\leqslant j\leqslant m} e^{i\varphi_j}+e^{i\varphi_{m+1}}=\sum_{1\leqslant j\leqslant m+1} e^{i\varphi_j}+e^{i\varphi_{m+1}}.$$

По принципу индукции (1) верно для каждого натурального n. ■

Замечание. $|z_{m+1}-z_m|=1$ и $z_{m+1}-z_m=e^{i\varphi_{m+1}}$ по определению. Аргументы вершин z_n в явном виде не будут выписываться; они не понадобятся.

В частности,

$$z_2=z_1+(z_2-z_1)=1+e^{i\varphi_2}=1+e^{i\xi_2\alpha},$$
$$z_3=z_2+(z_3-z_2)=1+e^{i\varphi_3}+e^{i\varphi_2}=1+e^{i\xi_2\alpha}+e^{i(\xi_2+\xi_3)\alpha}.$$

Следствие.

$$|z_n|^2=\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} e^{i(\varphi_k-\varphi_j)}. \tag{2}$$

□ По формуле Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, поэтому

$$e^{-i\varphi}=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)=\cos\varphi-i\sin\varphi=\left(e^{i\varphi}\right)^*,$$

($z^*=x-iy$ для $z=x+iy$). Кроме того, сопряженное к сумме равно сумме сопряженных

$$\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j\right)^*=\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j+i\sum_{1\leqslant j\leqslant n} b_j\right)^*=$$
$$=\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} a_j-i\sum_{1\leqslant j\leqslant n} b_j\right)=\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}(a_j-ib_j)\right)=\sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j^*$$

для $c_j = a_j + ib_j$. Наконец,

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = (x - iy)(x + iy) = z^* z.$$

Используя равенство (1) и свойства сопряжения, получаем:

$$|z_n|^2 = z^* z = \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} e^{i\varphi_j}\right)^* \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} e^{i\varphi_k}\right) =$$

$$= \left(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} e^{-i\varphi_j} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} e^{i\varphi_k}\right) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(e^{-i\varphi_j} e^{i\varphi_k}\right)\right) =$$

$$= \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} e^{i(\varphi_k - \varphi_j)},$$

так как

$$e^{-i\varphi_j} \cdot e^{i\varphi_k} = e^{i\varphi_k - i\varphi_j} = e^{i(\varphi_k - \varphi_j)}. \quad \blacksquare$$

Лемма 2.

$$E\left(e^{-i\xi_l \alpha}\right) = E\left(e^{i\xi_l \alpha}\right) = \cos\alpha \qquad (2 \leqslant l \leqslant n).$$

□

$$E\left(e^{i\xi_l \alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right) = \cos\alpha,$$
$$E\left(e^{-i\xi_l \alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}\right) = \cos\alpha$$

при любом $\alpha \in \mathbb{R}$. Эти равенства следуют из определения среднего значения случайной величины и формулы Эйлера. ■

Следствие.

$$E\left(e^{i(\varphi_k - \varphi_j)}\right) = \cos^{|k-j|}\alpha \qquad (1 \leqslant j, k \leqslant n). \qquad (3)$$

□ 1) Если $j = k$, то $e^{i(\varphi_k - \varphi_j)} = e^{i0} = 1$ и $E(1) = 1 = \cos^0 \alpha$.

2) Если $j < k$, то из $\varphi_k - \varphi_j = \xi_{j+1}\alpha + \ldots + \xi_k\alpha$ получаем $e^{i(\varphi_k-\varphi_j)} = e^{i\xi_{j+1}\alpha+\ldots+i\xi_k\alpha}$. Так как случайные величины $\xi_{j+1}, \ldots, \xi_k$ независимы, то отсюда и из леммы 2 следует, что

$$E\left(e^{i(\varphi_k-\varphi_j)}\right) = E\left(e^{i\xi_{j+1}\alpha}\right)\ldots E\left(e^{i\xi_k\alpha}\right) = \cos^{k-j}\alpha.$$

3) Если $j > k$, то аналогично

$$E\left(e^{i(\varphi_k-\varphi_j)}\right) = E\left(e^{-i(\varphi_j-\varphi_k)}\right) = E\left(e^{-i\xi_{k+1}\alpha}\right)\ldots E\left(e^{-i\xi_j\alpha}\right) = \\ = \cos^{j-k}\alpha = \cos^{|k-j|}\alpha. \quad \blacksquare$$

3.3.3. Решение задачи

Среднее суммы случайных величин равно сумме их средних. Поэтому из равенств (2) и (3) следует, что

$$E\left(|z_n|^2\right) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} E\left(e^{i(\varphi_k-\varphi_j)}\right) = \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} \cos^{|k-j|}\alpha. \tag{4}$$

Равенство (4) уже можно считать решением задачи. Но лучше найти для $E\left(|z_n|^2\right)$ более простое выражение, преобразуя полученную сумму подходящим образом.

Абсолютная величина $|k-j| = m = 0, 1, \ldots, n-1$ соответственно для $n-m = n, (n-1), \ldots, 1$ слагаемых в полученной двойной сумме. Сами эти слагаемые равны $\cos^0\alpha = 1, \cos\alpha, \ldots, \cos^{n-1}\alpha$. Поэтому из равенства (4) следует

$$E\left(|z_n|^2\right) = n + 2\sum_{1\leqslant m\leqslant n-1}(n-m)\cos^m\alpha. \tag{5}$$

В частности,

$$E\left(|z_2|^2\right) = 2 + 2\cos\alpha, \qquad E\left(|z_3|^2\right) = 3 + \left(2\cos\alpha + \cos^2\alpha\right).$$

Если использовать специальное соотношение для косинусов, в равенстве (5) можно освободиться от суммы.

Теорема.

$$E\left(|z_n|^2\right) = n \cdot \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - 2\cos\alpha \cdot \frac{1+\cos^n\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}. \qquad (6)$$

□ Заметим, что

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n-1} (n-m)\cos^m\alpha = n \sum_{1\leqslant m\leqslant n-1} \cos^m\alpha - \sum_{1\leqslant m\leqslant n-1} m\cos^m\alpha =$$
$$= n \cdot \frac{\cos\alpha - \cos^n\alpha}{1-\cos\alpha} - \cos\alpha \cdot \sum_{1\leqslant m\leqslant n-1} m\cos^{m-1}\alpha. \qquad (7)$$

Для преобразования оставшейся суммы используем равенства с производными

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n-1} mx^{m-1} = \sum_{1\leqslant m\leqslant n-1} (x^m)' = \left(\sum_{1\leqslant m\leqslant n-1} x^m\right)' =$$
$$= \left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)' = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^{n-1}}{1-x}.$$

При $x = \cos\alpha$ получаем

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n-1} m\cos^{m-1}\alpha = \frac{1-\cos^n\alpha}{(1-\cos\alpha)^2} - \frac{n\cos^{n-1}\alpha}{1-\cos\alpha},$$
$$\cos\alpha \cdot \sum_{1\leqslant m\leqslant n-1} m\cos^{m-1}\alpha = \cos\alpha \cdot \frac{1-\cos^n\alpha}{(1-\cos\alpha)^2} - \frac{n\cos^n\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

Подставляя это равенство в (7), находим

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n-1} (n-m)\cos^m\alpha = n \cdot \frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - \cos\alpha \cdot \frac{1-n\cos^n\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}. \qquad (8)$$

Из (5) и (8) следует, что

$$E\left(|z_n|^2\right) = n \cdot \left(1 + \frac{2\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\right) - 2\cos\alpha \cdot \frac{1 \cos^n \alpha}{(1-\cos\alpha)^2}. \qquad (9)$$

Так как $1 + \frac{2\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$, то (9) эквивалентно (6). ■

Ломаная со звеньями длины $l > 0$ имеет вершины в точках lz_j. Так как $E\left(|lz_j|^2\right) = E\left(l^2 |z_j|^2\right) = l^2 E\left(|z_j|^2\right)$, то из теоремы вытекает

Следствие.

$$E\left(|lz_n|^2\right) = l^2 \left(n \cdot \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - 2\cos\alpha \cdot \frac{1 \cos^n \alpha}{(1-\cos\alpha)^2}\right). \qquad (10)$$

В частности, при $l = 1/\sqrt{n}$ и $\xi_n = |z_n| / \sqrt{n}$, имеем

$$E\left(\xi_n^2\right) = l^2 \left(\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{2}{n}\cos\alpha \cdot \frac{1 \cos^n \alpha}{(1-\cos\alpha)^2}\right). \qquad (11)$$

Равенство (11) можно считать окончательным решением задачи. Из (11) сразу следует, что

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\xi_n^2\right) = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{\cos^2(\alpha/2)}{\sin^2(\alpha/2)}. \qquad (12)$$

Равенство (12) показывает, что вместо z_n целесообразнее исследовать случайную величину $u_n = z_n/\sqrt{n}$. Т.е. нормировать z_n с помощью $\sqrt{n}$. Заметим, что $\xi_n = |u_n|$. Положим

$$L(\alpha, n) = E\left(\xi_n^2\right), \qquad L(\alpha) = \lim_{n\to\infty} L(\alpha, n). \qquad (13)$$

Из (12) следует, что (так как $0 < \alpha < \pi$, то $0 < \alpha/2 < \pi/2$ и $\operatorname{ctg}(\alpha/2) > 0$)

$$L(\alpha) = \operatorname{ctg}(\alpha/2) > 0. \qquad (14)$$

Конкретные значения при стандартных углах α для $L(\alpha)$ дает таблица

α	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$
$L(\alpha)$	3.7	2.4	1.7	1	0.6	0.4	0.3

(15)

Эту таблицу интересно проверить статистически.

Вопросы. Как объяснить, что значения $L(\alpha)$ в таблице (15) убывают, причем монотонно? Какие свойства z_n описывает норма $L(\alpha, n)$?

Замечание. В связи с решенной задачей возникает много близких, также относящихся к геометрическим вероятностям.

Упражнения.

1. Исследовать распределение и найти дисперсию случайной величины $\xi_n^2 = |z_n|^2 / n$. (Сначала статистическими методами и компьютерным моделированием.)

2. Исследовать распределение, а также найти первые моменты случайной величины $\xi_n = |u_n| = |z_n| / \sqrt{n}$. Сравнить $E(\xi_n)$ с $L(\alpha, n) = \left(E\left(\xi_n^2\right)\right)^{1/2}$ (нормой в $\mathcal{L}^2(\Omega)$).

3. Решить задачу о среднем для нескольких равновероятных углов. И тоже потом исследовать распределение и найти дисперсию.

4. Решить аналогичные задачи для двух неравномерных углов.

5. Исследовать случай различных по величине углов. Другие варианты случайных величин η_k. А в дальнейшем рассмотреть непрерывные линии со случайной кривизной.

6. Перейти к пространственным ломаным (аналогичные задачи).

7. Исследовать распределения характеристик серий поворотов на данный угол (число серий, максимальная длина серии и т. д.).

8. Узнать о приложениях в химии и биологии (у специалистов и в литературе).

9. Случай $l = 1/\sqrt{n}$ удобно моделировать на компьютере, составляя таблицы распределений по интервалам около среднего до пренебрежимо малых вероятностей и составляя графики распределений. Попутно вычислить и дисперсии. Углы стоит брать стандартные, как и в таблице. (Вначале $\pi/2$ и $\pi/4$).

3.4. Задача о планировании эксперимента

Для оценки числа курящих жителей в городе предполагается провести *выборочное анкетирование.* Эксперимент планируется следующим образом: выбираются n из m районов города и в них анкетируются все жители. Обсуждаются схема выбора *без возвращения* и схема выбора *с возвращением.* В схеме выбора без возвращения наугад выбирается один из районов города и туда посылается первый анкетер, затем наугад выбирается один из оставшихся районов и туда посылается второй анкетер и т.д., пока не будет послан последний n-й анкетер. В схеме выбора с возвращением каждый из n анкетеров независимо от других наугад выбирает себе для анкетирования один из m районов города. При этом может случиться, что один и тот же район будет анкетироваться несколько раз, т. е. будут охвачены не n районов, а меньше.

Посылка разных анкетеров в разные районы и охват тем самым точно n районов представляются более разумными. В то же время план, при котором каждый из анкетеров выбирает себе район *наугад*, привлекает своей организационной простотой. Поэтому имеет смысл рассмотреть оба плана подробнее и сравнить оценки среднего значения анкетируемых жителей и оценки случайных отклонений от этого среднего для каждого из планов.

3.4.1. Схемы выбора с возвращением и без возвращения

Названия схем связаны с тем, что классические формулировки соответствующих задач используют *урновую модель.*

А. Последовательный выбор с возвращением. *В урне находится m шаров с номерами $1, \ldots, m$. Из нее вынимается наугад выбранный шар и отмечается его номер. После этого шар возвращается в урну. И так n раз. Какова вероятность вынуть шар с номером i на j-й раз ($m \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$)?*

Для математической формулировки данной задачи выберем в качестве множества исходов множество $U = \{1, \ldots, m\}^n$ всех слов $u = u_1 \ldots u_n$ длины n, составленных из номеров $1, \ldots, m$ ($1 \leqslant u_1, \ldots u_n \leqslant m$). Из общего правила умножения для числа элементов декартова произведения множеств следует, что число элементов в множестве U равно m^n. Это множество исходов описывает последовательность n испытаний, состоящих каждое в выборе одного из m шаров. Событие $У_{ij} = \{u : u_j = i\}$, составленное из всех слов $u = u_1 \ldots u_n$, у которых на j-м месте находится номер i, соответствует выбору шара с номером i на j-й раз.

В рассматриваемой схеме выбора с возвращением испытания независимы и производятся в одинаковых условиях: состав шаров в урне не меняется. При выборе с возвращением может случиться, что один и тот же шар будет вынут несколько раз и, следовательно, число шаров с различными номерами среди n вынутых будет строго меньше n. Независимость испытаний и одинаковость условий, в которых они проводятся, вместе с предположением о выборе наугад позволяют описать схему выбора с возвращением постоянной элементарной вероятностью p_1 со значениями

$$p_1(u) = 1/m^n \qquad (u \in U). \tag{1}$$

Задача сводится к вычислению вероятности $P_1(У_{ij})$ события $У_{ij}$. Используя *правило умножения*, находим, что число элементов $n(У_{ij})$ в множестве $У_{ij}$ равно m^{n-1}. Поэтому

$$P_1(У_{ij}) = 1/m \qquad (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n). \tag{2}$$

Замечание. Как и следовало ожидать, эта вероятность не зависит от номера i шара и номера j испытания.

В. Последовательный выбор без возвращения. *В урне находится m шаров с номерами $1, \ldots, m$. Из нее вынимается наугад выбранный шар и отмечается его номер. После этого шар не возвращается в урну. И так n раз. Какова вероятность впервые вынуть шар с номером i на j-й раз ($m \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$)?*

Формулировка отличается от формулировки задачи предыдущего пункта добавлением частицы *не* перед словом *возвращается.* В схеме выбора без возвращения испытания зависимы и производятся в различных условиях: состав шаров в урне меняется от испытания к испытанию.

Для математического описания схемы выбора без возвращения можно использовать то же множество исходов $U = \{1, \ldots, m\}^n$, что и для схемы выбора с возвращением. Различие этих схем будем описывать различием элементарных вероятностей.

Рассмотрим событие U_0, составленное из всех слов $u = u_1 \ldots u_n$, у которых номера $u_1, \ldots, u_n$ попарно различны. Определим элементарную вероятность p_2, описывающую выбор без возвращения равенствами:

$$p_2(u) = \frac{1}{m \cdots (m-n+1)} \quad (u \in U_0), \quad p_2(u) = 0 \quad (u \notin U_0). \qquad (1')$$

Число элементов $n(U_0)$ в множестве U_0 равно $m \cdots (m-n+1)$. Поэтому сумма всех значений $p_2(u)$ равна 1 и p_2 является элементарной вероятностью для U.

Задача снова сводится к вычислению вероятности $P_2\,(У_{ij})$ события $У_{ij}$.

Из равенства $(1')$ вытекает, что

$$P_2\,(У_{ij}) = P_2\,(У_{ij} \cap U_0) = n\,(У_{ij} \cap U_0)\,/\,(m \cdots (m-n+1))\,.$$

Используя общее правило умножения, нетрудно убедиться в том, что

$$n\,(У_{ij} \cap U_0) = (m-1) \cdots (m-n+1)\,.$$

Следовательно,

$$P_2\left(У_{ij}\right) = 1/m. \tag{2'}$$

Замечание. Таким образом, вероятности вынуть шар с номером i на j-й раз в схемах выбора с возвращением и выбора без возвращения равны. Эти схемы отличаются условными вероятностями вынуть шар i на j-й раз при условии, что он не был вынут раньше. В схеме выбора с возвращением эта условная вероятность равна $1/m$, а в схеме выбора без возвращения — $1/\left(m - j + 1\right)$.

3.4.2. Математическая формулировка задачи

Рассмотрим 1-е и 2-е вероятностные пространства (U, P_1) и (U, P_2), определенные в пунктах 4.1.1 и 4.1.2. Опишем 1-й и 2-й планы, использующие выбор с возвращением и выбор без возвращения случайными переменными f_1 и f_2, определенными соответственно для 1-го и 2-го пространства. Предположим, что число жителей в i-м районе известно и равно x_i $(i = 1, \ldots, m)$. Рассмотрим случайную переменную f_{1j} $(i = 1, \ldots, n)$ со значениями $f_{1j}\left(u\right) = x_i$ $(u \in У_{ij})$. Переменная f_{1j} описывает число жителей, анкетированных j-м анкетером при 1-м плане. Сумма

$$f_1 = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} f_{1j}$$

описывает общее число анкетированных жителей при 1-м плане.

Точно также определяются случайные переменные f_{2j} и f_2 для 2-го плана.

Задача сводится к вычислению средних $E\left(f_1\right)$, $E\left(f_2\right)$ и дисперсий $D\left(f_1\right)$, $D\left(f_2\right)$ случайных переменных f_1 и f_2.

Замечание. Верны равенства

$$f_{1j}\left(u\right) = f_{2j}\left(u\right), \qquad f_1\left(u\right) = f_2\left(u\right) \qquad \left(u \in U\right).$$

Более того,

$$P_1\{u : f_{1j}(u) = x_i\} = P_2\{u : f_{2j}(u) = x_i\} = 1/m \qquad (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n),$$

т. е. случайные переменные f_{1j} и f_{2j} одинаково распределены. В то же время случайные переменные f_1 и f_2 имеют различные распределения. Случайные переменные f_{1j} и f_{2j} определены для различных вероятностных пространств, причем переменные f_{1j} независимы, а переменные f_{2j} зависимы.

3.4.3. Решение задачи

Рассмотрим вначале вероятностное пространство (U, P_1) и случайную переменную f_1, затем вероятностное пространство (U, P_2) и случайную переменную f_2.

А. Среднее и дисперсия для 1-го плана. Используя равенство (2), получаем

$$E(f_{1j}) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i P_1(У_{ij}) = \frac{1}{m} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i = a \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Поэтому

$$E(f_1) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} E(f_{1j}) = na. \tag{3}$$

Дисперсия для f_{1j} выражается равенствами

$$D(f_{1j}) = E(f_{1j} - a)^2 = \frac{1}{m} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} (x_i - a)^2 = b^2 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Нетрудно убедиться, что случайные переменные f_{1j} $(1 \leqslant j \leqslant n)$ независимы. Следовательно,

$$D(f_1) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} D(f_{1j}) = nb^2. \tag{4}$$

В. Среднее и дисперсия для 2-го плана. Используя равенство $(2')$, получаем

$$E\left(f_{2j}\right)=\sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i P_2\left(У_{ij}\right)=\frac{1}{m}\sum_{1\leqslant i\leqslant m} x_i=a \qquad (1\leqslant j\leqslant n).$$

Поэтому

$$E\left(f_2\right)=\sum_{1\leqslant j\leqslant n} E\left(f_{2j}\right)=na. \tag{$3'$}$$

Вычисление дисперсии для f_2 связано с более длинными выкладками. Дисперсия для f_{2j} так же, как и для f_{1j}, выражается равенством

$$D\left(f_{2j}\right)=b^2 \qquad\qquad (1\leqslant j\leqslant n).$$

Вычислим среднее произведений $(f_{2j}-a)(f_{2l}-a)$ при $1\leqslant j<l\leqslant n$. Рассмотрим произвольные различные номера i, k между 1 и m и множество $\{u: f_{2j}(u)=x_i, f_{2l}(u)=x_k\}\cap U_0$. Используя правило умножения, нетрудно проверить, что число элементов этого множества равно $(m-2)\dots(m-n+1)$. Следовательно,

$$P_{j,l}(i,k)=P_2\left(\{u: f_{2j}(u)=x_i, f_{2l}(u)=x_k\}\right)=1/\left(m\left(m-1\right)\right) \qquad (i\neq k).$$

Если $i=k$, то соответствующая вероятность равна 0. Следовательно,

$$E\left(\left(f_{2j}-a\right)\left(f_{2l}-a\right)\right)=\sum_{i,k}\left(x_i-a\right)\left(x_k-a\right)P_{j,l}(i,k)=$$

$$=\frac{1}{m\left(m-1\right)}\sum_{i\neq k}\left(x_i-a\right)\left(x_k-a\right)=$$

$$=\frac{1}{m(m-1)}\left(\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\left(x_i-a\right)\right)^2-\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\left(x_i-a\right)^2\right)=-\frac{1}{m-1}\,b^2.$$

Наконец, используя определение дисперсии и полученные равенства, находим:

$$D\left(f_2\right)=E\left(f_2-na\right)^2=E\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\left(f_{2j}-a\right)\right)^2=$$

$$=E\left(\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\left(f_{2j}-a\right)^2+2\sum_{1\leqslant j<l<n}\left(f_{2j}-a\right)\left(f_{2l}-a\right)\right)=$$

$$=\sum_{1\leqslant j\leqslant n}D(f_{2j})+2\sum_{1\leqslant j<l<n}E((f_{2j}-a)(f_{2l}-a))=nb^2-2\binom{n}{2}\frac{1}{m-1}\,b^2.$$

Таким образом,

$$D\left(f_2\right)=\frac{n\left(m-n\right)}{m-1}\,b^2. \tag{$4'$}$$

Сравнивая равенства (3) и ($3'$), (4) и ($4'$), видим, что в среднем планы 1-й и 2-й равноценны: при каждом из них можно ожидать, что число анкетированных жителей равна na, где a — среднее число жителей в районе. Однако при плане 1 с хаотическим выбором можно ожидать бо́льших отклонений от числа na, чем при плане 2 с более упорядоченным выбором районов.

Замечание. Из полученных равенств вытекает, что если $x_i\neq a$ для некоторых номеров i и $b\neq 0$, то случайные переменные f_{2j} и f_{2l} зависимы и коэффициент корреляции для них выражается равенством

$$K\left(f_{2j},f_{2l}\right)=\frac{1}{m-1}\qquad\qquad\left(j\neq l\right).$$

Равенство $b^2=0$ означает, что в каждом районе ровно a жителей.

3.5. Задача об анализе крови

Сравним следующие два метода анализа крови для группы $n=k\cdot l$ человек. У каждого из этих людей результат анализа может быть либо *отрицательным,* либо *положительным.*

При первом методе кровь каждого человека анализируется отдельно. Ясно, что для этого требуется n анализов.

При втором методе группу разбивают на l подгрупп по k человек. Часть взятой для анализа крови каждого из этих k человек смешивается, полученная смесь анализируется. Если результат анализа смеси отрицателен, то этого одного анализа достаточно. Если результат анализа смеси положителен, то проводится дополнительный анализ для каждого из этих людей. В этом случае для группы из k человек проводится $1 + k$ анализов.

Требуется оценить среднее количество анализов при втором методе.

3.5.1. Математическая формулировка задачи

Будем предполагать, что рассматриваемая группа из n людей описывается моделью Бернулли для n испытаний с вероятностью успеха a, считая успехом отрицательный результат анализа. Произведем нумерацию людей в группе и подгруппах. Обозначим $n\,(i,j)$ номер в группе i-го человека j-й подгруппы.

Случайная переменная f_{ij} со значениями

$$f_{ij}\,(u) = 1 - s_{n(i,j)}\,(u) \qquad\qquad (1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant l)$$

описывает результат анализа i-го человека j-й подгруппы: она равна 0 в случае отрицательного и 1 в случае положительного результата анализа для этого человека.

Случайная переменная

$$f_j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j} f_{ij} \qquad\qquad (1 \leqslant j \leqslant l)$$

описывает результат анализа смеси для j-й подгруппы: эта переменная равна 0, если результат анализа отрицателен, и не равен 0, если он положителен.

Для каждого вещественного числа x положим:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если} \quad x < 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ 1, & \text{если} \quad x > 0. \end{cases}$$

Случайная переменная g_j со значениями

$$g_j\left(u\right) = 1 + k \cdot \operatorname{sgn}\left(f_j\left(u\right) f_{ij}\left(u\right)\right) \qquad (1 \leqslant j \leqslant l)$$

описывает число анализов для j-й подгруппы: она равна 1, если результат анализа отрицателен, и равна $1 + k$, если он положителен. Наконец, случайная переменная

$$g = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j} g_j$$

описывает общее число анализов для второго метода. Задача сводится к вычислению среднего $E\left(g\right)$ случайной переменной g.

3.5.2. Решение задачи

Заметим, что

$$E\left(g\right) = E\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant j} g_j\right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j} E\left(g_j\right).$$

Кроме того,

$$E\left(g_j\right) = E\left(1 + f \cdot \operatorname{sgn} f_j\right) = 1 + kE\left(\operatorname{sgn} f_j\right) \qquad (1 \leqslant j \leqslant l).$$

Таким образом, дело сводится к вычислению среднего $E\left(h_j\right)$ случайных переменных h_j со значениями

$$h_j\left(u\right) = \operatorname{sgn} f_j\left(u\right) \qquad (1 \leqslant j \leqslant l).$$

Случайная переменная h_j принимает значения 0 и 1. Следовательно,

$$E\left(h_j\right) = P\{u : h_j = 1\} = 1 - P\{u : h_j = 0\} \qquad (1 \leqslant j \leqslant l)\,.$$

Равенство $h_j\left(u\right) = 0$ эквивалентно равенству $f_j\left(u\right) = 0$, которое эквивалентно равенствам

$$f_{1j}\left(u\right) = \ldots = f_{kj} = 0 \qquad\qquad (1 \leqslant j \leqslant l)\,.$$

Эти равенства, в свою очередь, эквивалентны равенствам

$$s_{n(1,j)}\left(u\right) = \ldots = s_{n(k,j)} = 1 \qquad\qquad (1 \leqslant j \leqslant l)\,.$$

Так как

$$P\{u : s_{n(1,j)}\left(u\right) = \ldots = s_{n(k,j)} = 1\} = a^k \qquad (1 \leqslant j \leqslant l)\,,$$

то, следовательно,

$$E\left(h_j\right) = 1 - a^k \qquad\qquad (1 \leqslant j \leqslant l)$$

и $E\left(g\right) = l\left(1 + k\left(1 - a^k\right)\right)$. Используя равенство $l = n/k$, получаем

$$E\left(g\right) = n\left(1 - a^k + 1/k\right).$$

Замечание. Если при определении случайной переменной, описывающей число анализов, не вдаваться в подробности, то решение задачи выглядит очень просто. В самом деле, если анализы крови отдельных людей независимы, то для каждой подгруппы вероятность отрицательного результата смеси равна a^k, а положительного — $1-a^k$. Следовательно, среднее число анализов для каждой группы равно

$$1 \cdot a^k + \left(1 + k\right)\left(1 - a^k\right) = 1 + k\left(1 - a^k\right).$$

Так как подгрупп l, то среднее общего числа анализов равно

$$l\left(1+k\left(1-a^k\right)\right)=n\left(1-a^k+1/k\right).$$

Если вероятность a отрицательного результата анализа достаточно велика ($a^k > 1/k$), то $E(g) < n$ и второй метод в среднем экономичен. Например, если $a = 0.8$ и $k = 2$, то $E(g) = n(1-0.14)$. В этом случае можно ожидать, что второй метод дает по сравнению с первым среднюю экономию около 14%. Для больших групп это может иметь существенное значение.

Замечание. Во время второй мировой войны описанный метод применялся в армейских условиях и давал экономию в числе анализов до 80%.

3.6. Задача о наибольшей дисперсии

Модель Бернулли описывает последовательность независимых и одинаково распределенных описаний с двумя случайными исходами каждое. Естественно рассмотреть аналогичную модель описывающую произвольную последовательность n независимых испытаний с двумя случайными исходами каждое. Для такой модели так же, как и для модели Бернулли, определено *общее число успехов.* Возникает задача о том, для какой из этих моделей с *данной средней вероятностью успеха* общее число успехов имеет наибольшую дисперсию?

3.6.1. Модель Бернулли для n испытаний с вероятностями успеха $a_1, \dots, a_n$

В качестве *множества исходов* для этой модели выберем то же самое множество, что и для обычной модели Бернулли: множество U всех слов $u = u_1 \dots u_n$ длины n, составленных из чисел 0 и 1. Для новой модели определены те же события, что и для обычной модели Бернулли. В частности, определены события $У_j$ и $Н_j$ — *успех* при j-м испытании и *неудача* при j-м испытании, а также связанные с ними переменные s_j и $s = \sum s_j$ — число успехов при j-м испытании и общее число успехов.

Введем в рассмотрение числа $a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющие условию $0 \leqslant a_j \leqslant 1$ $(n \geqslant 1,\ j = 1, \ldots, n)$. Определим *элементарную вероятность* p равенством

$$p\,(u) = \prod a_j^{s_j(u)}\,(1 - a_j)^{1 - s_j(u)} \qquad (u \in U)\,.$$

Используя принцип индукции, нетрудно убедиться в том, что p является элементарной вероятностью для U. В частном случае, когда $a_1 = \ldots = a_n = a$, эта элементарная вероятность равна элементарной вероятности для обычной модели Бернулли n испытаний с вероятностью успеха a.

Множество исходов U и элементарная вероятность p, выбранные указанным образом, определяют вероятностную модель (U, p). Условимся называть эту модель *моделью Бернулли* для n испытаний с вероятностями успеха $a_1, \ldots, a_n$. Обычная модель Бернулли для n испытаний с вероятностью успеха a является частным случаем этой новой модели при $a_1 = \ldots = a_n = a$.

Как нетрудно проверить, в новой модели

$$P\{u : s_j\,(u) = 1\} = P\,(У_j) = a_j,$$
$$P\{u : s_j\,(u) = 0\} = P\,(H_j) = 1 - a_j$$

и, следовательно,

$$E\,(s_j) = a_j, \qquad D\,(s_j) = a_j\,(1 - a_j)\,.$$

Нетрудно убедиться также в том, что случайные переменные s_j по-прежнему независимы. Поэтому

$$E\,(s) = \sum a_j, \qquad D\,(s) = \sum a_j\,(1 - a_j)\,.$$

Если $a_1 = \ldots = a_n = a$, то эти равенства эквивалентны соответствующим равенствам для обычной модели Бернулли из n испытаний с вероятностью успеха a.

3.6.2. Решение задачи о наибольшей дисперсии

Рассмотрим модель Бернулли для n испытаний с вероятностями успеха $a_1, \ldots, a_n$. Назовем число $a = (1/n) \sum a_j$ *средней вероятностью* успеха для этой модели. В частности, если $a_i = a$ $(i = 1, \ldots, n)$, то средняя вероятность успеха совпадает с обычной. Как уже отмечалось,

$$E\,(s) = na, \qquad\qquad D\,(s) = na - \sum a_j^2.$$

Рассмотрим произвольный номер $n \geqslant 1$ и число a. Задача состоит в том, чтобы среди всех моделей Бернулли n испытаний с вероятностями успеха $a_1, \ldots, a_n$, у которых средняя вероятность равна a, найти модели с наибольшей дисперсией $D\,(s) = na - \sum a_j^2$ общего числа успехов s.

Заметим, что

$$\sum (a_j - a)^2 = \sum \left(a_j^2 - 2aa_j + a^2\right) = \\ = \sum a_j^2 - 2a \sum a_j + na^2 = \sum a_j^2 - na^2.$$

Следовательно,

$$\sum a_j^2 = na^2 + \sum (a_j - a)^2$$

и сумма $\sum a_j^2$ является наименьшей, а дисперсия $D\,(s)$ наибольшей, если и только если $a_1 = \ldots = a_n = a$.

Замечание. Таким образом, модель Бернулли для n испытаний с вероятностями успеха $a_1 = \ldots = a_n = a$ является единственной моделью среди всех моделей Бернулли для n испытаний с вероятностями успеха $a_1, \ldots, a_n$, имеющих среднюю вероятность успеха, равную a, для которой дисперсия $D\,(s)$ общего числа успехов s наибольшая. Этот результат представляется довольно неожиданным и приводит к парадоксальным, на первый взгляд, выводам.

Рассмотрим, например, систему из независимых элементов с двумя состояниями, характеризующуюся средней вероятностью одного из однородных элементов. Оказывается, что если система составлена из однородных элементов, то можно ожидать наибольших случайных отклонений от среднего режима. Обычно в этом случае ожидают наименьших отклонений.

3.7. Двоичные марковские последовательности

Пусть имеются белая и черная урны с белыми и черными шарами. Доля белых шаров в белой урне $q_{00} = 1 - b$, а доля черных шаров в белой урне $q_{10} = b$ $(0 < b < 1)$. Аналогично, белых шаров в черной урне $q_{01} = 1 - a$, а доля черных шаров в черной урне $q_{11} = a$ $(0 < a < 1)$. Кроме того, пусть имеется еще одна урна — красная, тоже с белыми и черными шарами. Доля белых шаров в красной урне $p_{00} = c$, а доля черных шаров в красной урне $p_{10} = 1 - c$ $(0 < c < 1)$.

Рассмотрим следующую последовательность $1 + n$ испытаний $(n \geqslant 1)$; начальное 0-е испытание состоит в выборе наугад шара из красной урны; k-е испытание состоит в выборе наугад шара из урны цвета $(k-1)$-го вынутого шара, регистрации цвета этого k-го шара и возвращении его в ту же урну $(k = 1, \ldots, n)$. В частности, если 0-й шар, вынутый из красной урны, оказался белым, то 1-й шар вынимается наугад из белой урны и после регистрации цвета возвращается в нее; если 0-й шар оказался черным, то 1-й шар вынимается наугад из черной урны и после регистрации цвета возвращается в нее.

Возникает задача: *Какова вероятность того, что k-й вынутый шар будет белым?*

3.7.1. Математическая формулировка задачи

Ясно, что в модели, описывающей рассматриваемую последовательность испытаний, вероятность вынуть белый шар при начальном 0-м испытании должна быть равной p_{00}, а черный — p_{10}.

Точно так же ясно, что условная вероятность вынуть белый шар при k-м испытании, если при $(k-1)$-м испытании вынут белый шар, должна быть равной q_{00}, а черный — q_{10}. Аналогично, условная вероятность того, что k-й шар белый, если $(k-1)$-й — черный, должна равняться q_{01}, а того, что черный — q_{11} $(k = 1, \ldots, n)$. Характерная особенностью рассматриваемой последовательности испытаний является *цепная зависимость* испытаний: вероятности исходов k-го испытания определяются исходом $(k-1)$-го.

Определим вероятностную модель, описывающую рассматриваемую последовательность испытаний, следующим образом. В качестве *множества исходов* возьмем множество U всех слов $u = u_0 u_1 \ldots u_n$ длины $1+n$, составленных из номеров 0 и 1. *Элементарную вероятность* p определим равенством:

$$p\,(u) = q_{i_n i_{n-1}} \ldots q_{i_1 i_0} p_{i_0 0} \qquad (n \geqslant 1,\ 0 \leqslant i_0, i_1, \ldots, i_n \leqslant 1). \tag{1}$$

Будем предполагать, что

$$\begin{aligned} &p_{00}, p_{10} > 0, && p_{00} + p_{10} = 1,\\ &q_{00}, q_{10} > 0, && q_{00} + q_{10} = 1,\\ &q_{01}, q_{11} > 0, && q_{01} + q_{11} = 1. \end{aligned} \tag{$1'$}$$

Если $n = 1$, то $U = \{00, 01, 10, 11\}$ и

$$\begin{aligned} &p\,(00) = q_{00} p_{00}, && p\,(01) = q_{10} p_{00},\\ &p\,(10) = q_{01} p_{10}, && p\,(11) = q_{11} p_{10}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы проверить, что равенство (1) действительно определяет элементарную вероятность, достаточно заметить, что из условий $(1')$ вытекают условия $p\,(u) > 0$, $\sum p\,(u) = 1$. Последнее равенство легко доказать, используя принцип индукции.

Убедимся в том, что определенная такими множествами исходов U и элементарной вероятностью p вероятностная модель обладает нужными для описания рассматриваемой последовательности свойствами. Условимся белый цвет обозначать номером 0, а черный — 1. В частности, событие *белый шар при k-м испытании* равенством $i_k = 0$, а событие *черный шар при k-м испытании* равенством $i_k = 1$. При таком соглашении символ $P(i_0 = 0)$, например, обозначает вероятность того, что при 0-м испытании вынут белый шар, а символ $P(i_0 = 1)$ — черный. В рассматриваемой модели испытания и все связанные с ними понятия определяются так же, как и для модели Бернулли.

Рассмотрим вначале частный случай. При $n = 1$ имеем:

$$P(i_0 = 0) = P(\{00, 01\}) = p_{00} + p_{01} = q_{00}p_{00} + q_{10}p_{00} = p_{00},$$
$$P(i_0 = 1) = P(\{10, 11\}) = p_{10} + p_{11} = q_{01}p_{10} + q_{11}p_{10} = p_{10}.$$

Таким образом, вероятность вынуть шар i-го цвета при начальном 0-м испытании действительно равна p_{i0} $(i = 0, 1)$. Кроме того, учитывая условие $p_{00}, p_{10} > 0$, получаем:

$$P_{i_0=0}(i_1 = 0) = \frac{P(i_0 = 0, i_1 = 0)}{P(i_0 = 0)} = \frac{p(00)}{p_{00}} = \frac{q_{00}p_{00}}{p_{00}} = q_{00},$$
$$P_{i_0=0}(i_1 = 1) = \frac{P(i_0 = 0, i_1 = 1)}{P(i_0 = 0)} = \frac{p(01)}{p_{00}} = \frac{q_{10}p_{00}}{p_{00}} = q_{10},$$
$$P_{i_0=1}(i_1 = 0) = \frac{P(i_0 = 1, i_1 = 0)}{P(i_0 = 1)} = \frac{p(10)}{p_{10}} = \frac{q_{01}p_{10}}{p_{10}} = q_{01},$$
$$P_{i_0=1}(i_1 = 1) = \frac{P(i_0 = 1, i_1 = 1)}{P(i_0 = 1)} = \frac{p(11)}{p_{10}} = \frac{q_{11}p_{10}}{p_{10}} = q_{11}.$$

Таким образом, условная вероятность вынуть шар i-го цвета при k-м испытании, если $(k-1)$-м вынут шар j-го цвета, действительно, равна q_{ij} $(0 \leqslant i, j \leqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n)$.

В общем случае аналогичные выкладки с учетом условий p_{j0}, $q_{ij} > 0$ приводят к тем же результатам:

$$P(i_0 = j) = \sum q_{i_n i_{n-1}} \ldots q_{i_1 j} p_{j0} = p_{j0} \sum q_{i_n i_{n-1}} \ldots q_{i_1 j} = p_{j0},$$
$$P_{i_{k-1}=j}(i_k = i) = \frac{P(i_{k-1} = j, i_k = i)}{P(i_{k-1} = j)} =$$

$$= \frac{q_{ij} \sum q_{i_n i_{n-1}} \cdots q_{i_1 i_0} p_{i0}}{\sum q_{i_n i_{n-1}} \cdots q_{i_1 i_0} p_{i0}} = q_{ij}.$$

Суммирование ведется по всем индексам $0 \leqslant i_0, i_1, \ldots, i_n \leqslant 1$, кроме $i_0 = j$ для первой строки, $i_{k-1} = j$, $i_k = j$ и $i_{k-1} = j$ — соответственно для числителя и знаменателя второй. Равенство

$$\sum_{0 \leqslant i_k, \ldots, i_n \leqslant 1} q_{i_n i_{n-1}} \ldots q_{i_1 j} = 1 \qquad (j = 0, 1;\ k = 1, \ldots, n)\,,$$

которое используется в обеих строках, легко доказывается по индукции.

Таким образом, мы доказали, что в рассматриваемой вероятностной модели вероятность j-го исхода при начальном 0-м испытании равна p_{j0}. Кроме того, было доказано, что условная вероятность i-го исхода при j-м исходе $(k-1)$-го испытания равна q_{ij} $(0 \leqslant i, j \leqslant 1, 1 \leqslant k \leqslant n)$ (подчеркнем, что эти вероятности зависят от номера испытания). Таким образом, рассматриваемая вероятностная модель обладает нужными для описания рассматриваемой последовательности испытаний свойствами.

Говорят, что эта модель описывает *марковскую цепь* (или *марковскую последовательность*) длины n. Номера 0 и 1 называют *состояниями.* Числа $p_{i_0 0}$ — *начальными*, а q_{ij} — *переходными вероятностями* цепи. Вместо испытаний говорят о *моментах времени.*

Задача состоит в вычислении вероятностей

$$p_{0k} = P\,(i_k = 0)\,, \qquad\qquad p_{1k} = P\,(i_k = 1)$$

состояний цепи в k-й момент времени $(k = 1, \ldots, n)$.

3.7.2. Матричная запись

Рассмотрим *матрицы*

$$\bar{p}_0 = \begin{pmatrix} p_{00} \\ p_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 1-c \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-b & a \\ b & 1-a \end{pmatrix}.$$

Матрица $\bar{p}_0$ называется *вектором начальных вероятностей*, а матрица Q — *матрицей переходных вероятностей*. Рассмотрим также вектор вероятностей в k-й момент:

$$\bar{p}_k = \begin{pmatrix} p_{0k} \\ p_{1k} \end{pmatrix} \qquad\qquad (k = 1, \ldots, n)\,.$$

Определим умножение матриц правилом *строка* на *столбец*. Например:

$$Q\bar{p}_{k-1} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{0(k-1)} \\ p_{1(k-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{00}p_{0(k-1)} + q_{01}p_{1(k-1)} \\ q_{10}p_{0(k-1)} + q_{11}p_{1(k-1)} \end{pmatrix}$$
$$(k = 1, \ldots, n)\,,$$

$$Q^2 = QQ = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} q_{00}q_{00} + q_{01}q_{10} & q_{00}q_{01} + q_{01}q_{11} \\ q_{10}q_{00} + q_{11}q_{10} & q_{10}q_{01} + q_{11}q_{11} \end{pmatrix}.$$

Используя условия $q_{i0} > 0$, $q_{i1} > 0$, $p_{0(k-1)} = P\,(i_{k-1} = 0) > 0$, $p_{1(k-1)} = P\,(i_{k-1} = 1) > 0$ и формулу полной вероятности, получаем:

$$q_{i0}p_{0(k-1)} + q_{i1}p_{1(k-1)} =$$
$$= P_{i_{k-1}=0}(i_k = i)P(i_{k-1} = 0) + P_{i_{k-1}=1}(i_k = i)P(i_{k-1} = 1) = p_{ik}.$$

Понимая под равенством матриц равенство их соответствующих элементов и сравнивая полученные результаты, видим, что

$$\bar{p}_k = Q\bar{p}_{k-1} \qquad\qquad (k = 1, \ldots, n)\,.$$

Используя это равенство последовательно, убеждаемся в том, что

$$\bar{p}_k = Q^k\bar{p}_0 \qquad\qquad (k = 1, \ldots, n)\,. \qquad (2)$$

Это равенство связывает вероятности состояний в k-й момент с начальными и переходными вероятностями, и его можно считать решением поставленной задачи. В рассматриваемом простом случае удается пойти дальше.

3.7.3. Решение задачи

Как нетрудно проверить,

$$Q = \begin{pmatrix} 1-b & a \\ b & 1-a \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} + \frac{1-a-b}{a+b}\begin{pmatrix} b & -a \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

(Умножение матрицы на число означает умножение каждого ее элемента на это число.) Например:

$$\frac{1}{a+b}\,a + \frac{1-a-b}{a+b}\,b = \frac{a+(1-a-b)\,b}{a+b} = \frac{(a+b)\,(1-b)}{a+b} = 1-b,$$
$$\frac{1}{a+b}\,b + \frac{1-a-b}{a+b}\,(-b) = \frac{b-(1-a-b)\,b}{a+b} = \frac{(a+b)\,b}{a+b} = b.$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} b & -a \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & -a \\ -b & a \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} ab-ab & -aa+aa \\ bb-bb & -ab+ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Кроме того,

$$\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+ab & a^2+ab \\ ab+b^2 & ab+b^2 \end{pmatrix} =$$
$$= (a+b)\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} b & -a \\ b & -b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} b & -a \\ b & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & -a \\ b & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2+ab & -ab-a^2 \\ -b^2-ab & ab+a^2 \end{pmatrix} =$$
$$= (a+b)\begin{pmatrix} b & -a \\ b & -b \end{pmatrix}.$$

Используя полученные равенства и последовательно вычисляя

$Q^2, \ldots, Q^k$, получаем:

$$Q^k = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} + \frac{(1-a-b)^k}{a+b}\begin{pmatrix} b & -a \\ -b & a \end{pmatrix} \quad (k = 1, \ldots, n)\,. \tag{3}$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 1-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + a\,(1-c) \\ bc + b\,(1-c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} b & -a \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ 1-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc - a\,(1-c) \\ -bc + a\,(1-c) \end{pmatrix} = ((a+b)\,c - a)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из равенств (2) и (3) следует равенство

$$\bar{p}_k = \frac{1}{a+b}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (1-a-b)^k\left(c - \frac{a}{a+b}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Это равенство эквивалентно равенствам

$$\begin{aligned} p_{0k} &= \frac{a}{a+b} + (1-a-b)^k\left(c - \frac{a}{a+b}\right), \\ p_{1k} &= \frac{b}{a+b} - (1-a-b)^k\left(c - \frac{a}{a+b}\right). \end{aligned} \tag{4$'$}$$

Равенства $(4')$ и являются решением задачи: первое из них выражает вероятность состояния 0, а второе — состояния 1 в k-й момент $(k = 1, \ldots, n)$.

Так как $0 < a, b < 1$, то $|1-a-b| < 1$. Поэтому при достаточно больших номерах k члены с $(1-a-b)^k$ произвольно малы и ими можно пренебречь. Таким образом,

$$p_{0k} \approx \frac{a}{a+b} = \frac{q_{01}}{q_{01}+q_{10}}, \qquad p_{1k} \approx \frac{b}{a+b} = \frac{q_{10}}{q_{01}+q_{10}}.$$

Полученные результаты показывают, что с течением времени влияние начального состояния ослабевает и вероятности состояний начинают определяться главным образом переходными вероятностями цепи. Для урновой модели это означает, что вероятность вынуть белый шар при испытании с достаточно большим номером практически определяется составом шаров в белой и черной урнах и мало зависит от состава шаров в красной урне.

3.7.4. Модель Бернулли

Если $a + b = 1$, то из равенств $(4')$ следует, что

$$p_{0k} = a, \qquad p_{1k} = 1 - a \qquad (k = 1, \dots, n)\,.$$

В этом случае матрица переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix} \tag{*}$$

имеет одинаковые столбцы. Для урновой модели это означает, что состав шаров в белой и черной урнах одинаков и можно обойтись одной из них.

Обозначим $s\,(u)$ число номеров 1 в слове $u = i_1 \dots i_n$. В рассматриваемом случае верны равенства

$$P\{0i_1 \dots i_n, 1i_1 \dots i_n\} =$$
$$= ca^{s(u)}(1-a)^{n-s(u)} + (1-c)\,a^{s(u)}(1-a)^{n-s(u)} = a^{s(u)}(1-a)^{n-s(u)}.$$

Следовательно, дело сводится к модели Бернулли для n испытаний с вероятностью успеха a.

Из равенств $(4')$ следует также, что при $n > 1$ и $0 < a < 1$ такая модель Бернулли определяет единственную марковскую цепь рассматриваемого вида, для которой испытания независимы. В самом деле, если k-е и $(k-1)$-е испытания независимы, то

$$a = q_{01} = P_{i_{k-1}=1}\,(i_k = 0) = P\,(i_k = 0) = p_{0k} =$$
$$= \frac{a}{a+b} + (1-a-b)^k \left(c - \frac{a}{a+b}\right) \quad (k = 1, \dots, n)\,.$$

Эти равенства возможны, только если правая часть не зависит от k, т.е. если второе слагаемое в ней равно 0 (равенство $1-a-b=1$ эквивалентно равенствам $a=b=0$ и поэтому исключено). В этом случае $a=a/(a+b)$ и, следовательно, $a+b=1$.

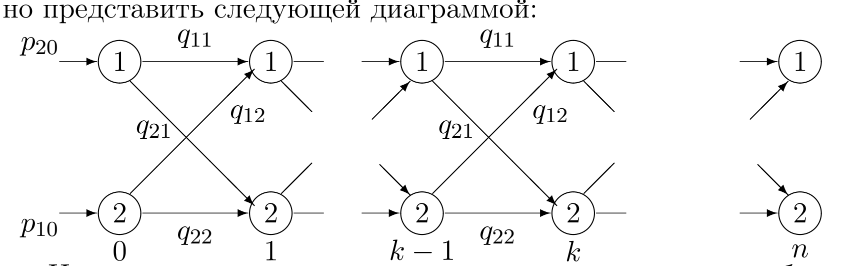
Таким образом, схема Бернулли для n испытаний с вероятностью успеха a эквивалентна марковской цепи с двумя состояниями, произвольными начальными вероятностями и матрицей переходных вероятностей, определяемой равенством (*).

3.7.5. Двоичное случайное блуждание

Наглядной иллюстрацией марковской цепи с двумя состояниями является следующая физическая схема. В начальный момент частица 0 с вероятностью $p_{10}=c$ находится в точке 1, а с вероятностью $p_{20}=1-c$ — в точке 2 $(0<c<1)$. Если в момент $k-1$ частица находится в точке 1, то в момент k она с вероятностью $q_{11}=1-b$ остается в точке 1, а с вероятностью $q_{21}=b$ перескакивает в точку 2 $(0<b<1)$. Аналогично, если в момент $k-1$ частица находится в точке 2, то в момент k она с вероятностью $q_{12}=a$ перескакивает в точку 1, а с вероятностью $q_{22}=1-a$ остается в точке 2 $(0<a<1)$. Этот процесс продолжается до момента n $(n>1,\ k=1,\ldots,n)$.

Какова вероятность того, что в момент k частица находится в точке 1?

Описанную схему случайного блуждания по двум точкам можно представить следующей диаграммой:



На этой диаграмме пути, составленные из стрелок, изображают возможные пути частицы во времени и пространстве. Перемножая вероятности, которыми взвешены соответствующие стрелки, получаем элементарную вероятность каждого данного пути.

Ответ на поставленный вопрос дается первым из равенств ($4'$):

$$p_{1k} = \frac{a}{a+b} + (1-a-b)^k \left(c - \frac{a}{a+b}\right) \qquad (k = 1, \ldots, n)\,.$$

Например, если $a = b = c = 1/4$, то

$$p_{1k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{k+2}} \qquad (k = 1, \ldots, n)\,.$$

3.7.6. Обучение

Простейшую модель обучения крысы определенной реакции на раздражение можно описать марковской цепью с двумя состояниями. На начальное 0-е раздражение крыса с вероятностью $p_{10} = c$ реагирует правильно, а с вероятностью $p_{20} = 1 - c$ — неправильно ($0 < c < 1$). Если на ($k-1$)-е раздражение крыса реагирует правильно, то после обучения на k-е раздражение она с вероятностью $q_{11} = 1 - b$ реагирует правильно, а с вероятностью $q_{11} = b$ — неправильно ($0 < b < 1$). Аналогично, если на ($k-1$)-е раздражение крыса реагирует неправильно, то после обучения на k-е раздражение она с вероятностью $q_{12} = a$ реагирует правильно, а с вероятностью $q_{22} = 1 - a$ — неправильно ($0 < a < 1$). Производится n опытов ($n > 1, k = 1, \ldots, n$).

Какова вероятность того, что k-я реакция крысы будет правильной?

Ответ дается тем же равенством, что и в примере с частицей. В частности, если $a = b = 1$ и $c = a/\,(a+b)$, то при каждом раздражении вероятность правильной реакции одна и та же и равна a, т.е. описываемый такой схемой процесс обучения не дает никакого эффекта.

Если $c < a/\,(a+b)$, то обучение дает определенный эффект. Продолжая его достаточно долго, можно приблизиться к предельной вероятности правильной реакции $a/\,(a+b)$. Наконец, если

$c > a/(a+b)$, то обучение дает отрицательный эффект: вероятность правильной реакции уменьшается.

3.8. Случайное блуждание по плоской решетке

Рассмотрим еще одну простую модель, связанную со случайными блужданиями. Как и в задаче о случайной ломаной, будем использовать комплексные числа.

3.8.1. Постановка задачи

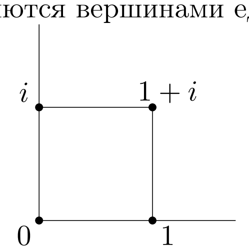
Пусть даны две случайны переменные x, y, имеющие распределения Бернулли с параметрами соответственно α, β $(0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1)$:

$$P(x=1) = \alpha, \qquad P(x=0) = 1-\alpha,$$
$$P(y=1) = \beta, \qquad P(y=0) = 1-\beta.$$

Рассмотрим комплексную случайную переменную $z = x + yi$. Она имеет распределение

$$P(z=0) = (1-\alpha)(1-\beta), \qquad P(z=1) = \alpha(1-\beta),$$
$$P(z=i) = (1-\alpha)\beta, \qquad P(z=1+i) = \alpha\beta.$$

Точки 0, 1, i, $1+i$ являются вершинами единичного квадрата:



Частица, находящаяся в момент t в точке $z(t) = c = (a,b)$ перемещается в момент $t+1$ в точку $z(t+1) = c + z$. В начальный момент $t = 0$ частица находится в точке $(0,0)$. Ее путь за n шагов описывает сумма

$$\overline{z}(n) = \sum_{t=1}^{n} z(t).$$

Предположим, что слагаемые $z(t)$ независимы и распределены одинаково с z. Требуется найти распределение, среднее значение и дисперсию комплексной случайной переменной.

3.8.2. Решение

Пусть

$$z(t) = x(t) + y(t)\, i \qquad\qquad (t = 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$\overline{z}(n) = \overline{x}(n) + \overline{y}(n)\, i, \quad \overline{x}(n) = \sum_{t=1}^{n} x(t), \quad \overline{y}(n) = \sum_{t=1}^{n} y(t).$$

Случайные переменные $x(t)$, $y(t)$ независимы в совокупности, $x(t)$ распределены одинаково с x, а $y(t)$ — одинаково с y. Следовательно

$$P(\overline{x}(n) = k) = \binom{n}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{n-k},$$
$$P(\overline{y}(n) = l) = \binom{n}{l} \beta^l (1-\beta)^{n-l}.$$

Так как $\overline{x}(n)$, $\overline{y}(n)$ независимы вместе с $x(z)$, $y(z)$, то

$$P(\overline{z}(n) = k + li) = P(\overline{x}(n) = k)\, P(\overline{y}(n) = l).$$

Из действий со средними и дисперсиями вытекает, что

$$E(\overline{z}(n)) = E(\overline{x}(n)) + E(\overline{y}(n))\, i = n(\alpha + \beta i),$$
$$V(\overline{z}(n)) = V(\overline{x}(n)) + V(\overline{y}(n)) = n(\alpha(1-\alpha) + \beta(1-\beta)).$$

3.8.3. Дополнительные задачи

1. Вычислить наибольшую вероятность для значений случайной переменной $\overline{z}(n)$.

2. Какова вероятность того, что при сделанных предположениях частица в момент $t = n$ попадет на границу квадрата с вершинами $(0,0)$, $(n,0)$, $(0,n)$, (n,n)?

3. Какова вероятность того, что в один из моментов $m \leqslant n$ частица выйдет из прямоугольника с вершинами $(0,0)$, $(k,0)$, $(0,l)$, (k,l)?

4. Какова вероятность того, что до момента n частица будет двигаться по прямой?

5. Какова вероятность того, что траекторией частицы будет квадрат?

6. Пусть случайные переменные x, y вместо нулевого принимают значение -1. Вычислить моменты и решить задачи 1 – 5 для такого блуждания.

Приложение

В приложении кратко описываются некоторые элементарные сведения из алгебры и анализа. Этих сведений достаточно для понимания основного содержания книги. Более подробно нужные сведения изложены в книгах "Энциклопедия элементарной математики" [1]–[3] и "Лекции по математическому анализу" [4] – [5], на которые давались ссылки.

1. Числа

Широко приняты обозначения:

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел,

$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел,

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел,

$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Каждое из этих множеств вкладывается в следующее:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Определению этих чисел и описанию их свойств посвящен том 1 "Энциклопедии элементарной математики" [1].

1.1. Натуральные числа

Множество $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ натуральных чисел определяется автоматически. для него определен порядок, операция сложения и умножения с обычными свойствами. Каждое непустое множество $M \subseteq N$ имеет наименьший элемент $a = \min M$. В частности, $1 = \min M$. Но в множестве $\mathbb{N}$ нет наибольшего элемента.

Из существования наименьшего элемента выводится существование непосредственно следующего за данным натуральным числом m натурального числа $m + 1 = \min\{n \in \mathbb{N} : n > m\}$. Порядок согласован с операцией сложения. Выводится также

Принцип индукции. Пусть $M \subseteq N$,

(1) $1 \in M$,

(2) для каждого $n \in \mathbb{N}$ из $n \in M$ следует $n + 1 \in M$.

Тогда $M = \mathbb{N}$.

Принцип индукции часто применяется в доказательствах. Но иногда удобнее непосредственно использовать существование наименьшего элемента.

Части M множества $\mathbb{N}$ делятся на *конечные* (существует наибольшее число $\max M$) и *бесконечные* (в M нет наибольшего числа). Каждое множество E, которое взаимно однозначно отображается на некоторое множество M натуральных чисел, называется *счетным*. Если M конечно, то и E называется *конечным*. Если M бесконечно, то E называется *бесконечным счетным*. Существуют множества, не являющиеся счетными. Например, множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

1.2. Целые числа

При $a > b$ уравнения $a + x = b$, $ax = b$ не имеют решений в множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Симметризация $\mathbb{N}$ с помощью добавления нуля 0 и множества $-\mathbb{N} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1\}$ *отрицательных целых* чисел дает множество $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \cup \mathbb{N}$ целых чисел. Для $\mathbb{Z}$ также определен порядок, операции сложения и умножения. Но к операции сложения добавляется обратная операция — вычитание. Порядок и операции для $\mathbb{Z}$ обладают обычными свойствами. В множестве $\mathbb{Z}$ нет наименьшего и наибольшего элементов. Целое число $x = b - a$ является решением уравнения $a + x = b$ при любых целых a, b. Легко доказать, что множество $\mathbb{Z}$ счетно.

1.3. Рациональные числа

При $a > b$ уравнение $ax = b$ не имеет решения и в множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел. Поэтому к целым числам добавляют дробные и получают *рациональные*, которые обеспечивают существование нужного решения. Рациональное число $q = m/n$ отождествляется с парой (m, n) и любой другой парой (k, l) такой, что $ml = nk$ $(l, n \neq 0)$. Порядок и действия с рациональными числами определяются порядком и действиями для дробей. К операции умножения добавляется обратная операция — деление. Рациональное число $m/1$ отождествляется с целым числом m и поэтому $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Рациональное число $x = b/a$ является решением уравнения $ax = b$ при рациональном $a \neq 0$ и любом рациональном b. Нетрудно доказать, что множество $\mathbb{Q}$ счетно.

1.4. Вещественные числа

Не существует рационального числа x такого, что $x^2 = 2$. В множестве $A(2) = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ нет наибольшего, а в множестве $B(2) = \{b \in \mathbb{Q} : b^2 > 2\}$ нет наименьшего. Поэтому последовательность отрезков $[a_n, b_n] \subset \mathbb{Q}$ таких, что $a_n \in A(2)$, $b_n \in B(2)$, $a_n \leqslant a_{n+1}$, $b_{n+1} \leqslant b_n$ и $b_n - a_n < 1/n$ не имеет общей точки: их пересечение является пустым множеством. Чтобы исправить эти и многие другие недостатки, вводят *вещественные* числа, которые отождествляются со специальными последовательностями рациональных чисел. Вещественные числа называют также *действительными*. Порядок и действия для рациональных чисел переносятся на вещественные с соблюдением всех правил (в частности, правила знаков). Постоянные последовательности отождествляются со своими значениями и поэтому $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Верна

Аксиома Архимеда. *Для каждых вещественных чисел $a > 0$ и b существует натуральное число n такое, что $na > b$.*

Рациональные числа составляют *всюду плотное множество* в $\mathbb{R}$: между каждыми различными вещественными числами есть рациональное. Множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел несчетно. Во многих случаях это компенсируется *сепарабельностью* — существованием всюду плотного множества.

Упорядоченное множество вещественных чисел обладает еще одним важным свойством.

Аксиома полноты. *Всякая убывающая последовательность отрезков $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ $(a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n)$ имеет непустое пересечение.*

В частности, существует единственное вещественное число $\sqrt{2}$, которое является общей точкой для последовательности отрезков $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ таких, что $a_n \in A\,(2)$, $b_n \in B\,(2)$, $a_n \leqslant a_{n+1}$, $b_{n+1} \leqslant b_n$ и $b_n - a_n < 1/n$. Кроме того, $x = \sqrt{2}$ является решением уравнения $x^2 = 2$. Вообще, для каждого вещественного $b > 0$ и натурального m существует единственное вещественное число $x = b^{1/m} > 0$, являющееся решением уравнения $x^m = b$.

В связи с тем, что для $\mathbb{R}$ определены сложение и умножение, вычитание и деление, обладающие обычными свойствами, а также определен порядок, при котором верны аксиомы Архимеда и полноты, $\mathbb{R}$ вместе с порядком и операциями называется *полным архимедовым полем.* Существуют другие определения вещественных чисел, при которых аксиома Архимеда и аксиома полноты становятся теоремами.

Для каждых различных вещественных чисел x, y верно одно из двух: либо $x < y$, либо $y < x$. Поэтому порядок для $\mathbb{R}$ называют *линейным* и говорят о *вещественной прямой.*

Полнота множества $\mathbb{R}$ вещественных чисел позволяет ввести понятия нижней и верхней граней, обобщающие понятия наименьшего и наибольшего элементов множества. Рассмотрим непустое множество $X \subseteq \mathbb{R}$ и числа $a, b \in \mathbb{R}$. Если $a \leqslant x$ для всех $x \in X$, то говорят, что a ограничивает X *снизу.* Если $x \leqslant b$ для всех $x \in X$, то говорят, что b ограничивает X *сверху.* (Имеется в виду изображение $\mathbb{R}$ вертикальной прямой.) Число a называют также *минорантой*, а b — *мажорантой* для X. Ясно, что не все множества X их имеют. В частности, у самой вещественной прямой $\mathbb{R}$ нет ни минорант, ни мажорант: она не ограничена ни снизу, ни сверху. Множество X, ограниченное и снизу, и сверху, называется просто *ограниченным.*

Наибольшую миноранту α ограниченного снизу множества X называют его *нижней гранью* и пишут $\alpha = \inf X$. Наименьшую мажоранту β ограниченного сверху множества X называют его *верхней гранью* и пишут $\beta = \sup X$.

Если множество X имеет наименьший элемент, то он является и нижней гранью: $\min X = \inf X$. Если множество X имеет наибольший элемент, то он является и верхней гранью. Эти утверждения следуют непосредственно из определений. Пусть, например, $X = [0,1] = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Тогда $0 = \min X = \inf X$, $1 = \max X = \sup X$. Если $X =]0,1[= \{x : 0 < x < 1\}$, то $0 = \inf X$, $1 = \sup X$, а $\min X$, $\max X$ не существуют.

Из аксиомы полноты для $\mathbb{R}$ следует

Теорема о гранях. 1) *Каждое непустое ограниченное снизу множество вещественных чисел имеет нижнюю грань.*

2) *Каждое непустое ограниченное сверху множество вещественных чисел имеет верхнюю грань.*

В свою очередь, из теоремы о гранях можно вывести утверждение о полноте. Формулировки и доказательства целого ряда эквивалентных утверждений есть в [4]. Аксиома полноты там названа леммой Кантора. остальные связаны с именами Бореля, Вейерштрасса, Дедекинда и Коши. Их иногда называют основными леммами математического анализа.

В [1] дается аксиоматическое определение вещественных чисел.

Часто бывает удобно рассматривать *расширенную числовую прямую* $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, которая получается добавлением к $\mathbb{R}$ *бесконечных чисел* $-\infty = \min \mathbb{R}$, $+\infty = \max \mathbb{R}$. Элементы из $\mathbb{R}$ называют тогда *конечными* вещественными числами. Для них сохраняются прежние порядок и действия. По определению $-\infty < x < +\infty$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Иногда определяют действия и с бесконечными числами, но тогда действия приобретают некоторые необычные свойства. Приняты обозначения $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Вместо $+\infty$ пишут также просто ∞.

1.5. Комплексные числа

Не существует вещественного числа x такого, что $x^2 = -1$. Это следует из правила знаков. Вместе с $x^2 + 1 = 0$ не имеют вещественных решений и многие другие алгебраические уравнения. Поэтому к вещественным числам добавляются мнимые, образуя вместе с вещественными комплексные числа, которые дают решения любого алгебраического уравнения. Комплексные числа играют большую роль в математике.

Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел образуется из поля $\mathbb{R}$ вещественных присоединением *мнимой единицы* i и всех новых чисел $a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, получающихся с помощью алгебраических действий. Мнимая единица i определяется равенством $i^2 = -1$ и является решением уравнения $x^2 + 1 = 0$. Числа $c = a + bi$ называются *комплексными*. Комплексные числа $c = a + bi$, $z = x + iy$ считаются равными тогда и только тогда, когда $a = x$, $b = y$. То есть, когда верно равенство $(a, b) = (x, y)$ для упорядоченных пар. Вещественное число a отождествляется с комплексным числом $a + 0i$, и поэтому считается, что $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Числа $0 + bi$ называются *мнимыми*. Сумма и произведение комплексных чисел $c = a + bi$, $z = x + yi$ определяются равенствами, которые получаются по правилам действий с учетом равенства $i^2 = -1$:

$$c \pm z = (a \pm x) + (b \pm y)\, i, \qquad cz = (ax - by) + (ay + bx)\, i,$$
$$\frac{c}{z} = \frac{ax + by}{x^2 + y^2} - \frac{ay - bx}{x^2 + y^2}\, i \qquad \left(x^2 + y^2 > 0\right).$$

Комплексные числа дают решения любого алгебраического уравнения $p\,(z) = 0$, где $p\,(z)$ — полином степени $n \geqslant 1$ с комплексными коэффициентами. Это утверждает *основная теорема алгебры* комплексных чисел. Ее подробное доказательство есть в [1] и [5].

В частности, введение комплексных чисел позволяет решать любые квадратные уравнения. Существование мнимой единицы дает возможность извлекать корни из отрицательных чисел и не требовать положительности дискриминанта.

Благодаря взаимно однозначному соответствию $(x, y) \to x + yi$ комплексные числа можно отображать точками или векторами координатной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in (x, y)\,, y \in (x, y)\}$. Это придает наглядность действиям с комплексными числами.

Число $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$ называется *абсолютной величиной* числа $z = x + yi$. Для чисел $c = a + bi$, $z = x + yi$ верны соотношения:

$$|0| = 0, \quad |z| > 0 \quad (z \neq 0); \quad |c + z| \leqslant |c| + |z|\,; \quad |cz| = |c|\,|z|\,.$$

Их легко проверить. Из среднего неравенства, которое называется *неравенством треугольника*, следует эквивалентное неравенство

$$||c| - |z|| \leqslant |c - z|\,.$$

Комплексное число также можно записать в *полярной форме*

$$z = re^{i\varphi}.$$

Здесь

$$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} > 0,$$
$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x) & \text{при } x>0 \ \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{arctg}(y/x)+\pi & \text{при } x<0, y>0 \ \left(\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi\right) \\ \operatorname{arctg}(y/x)-\pi & \text{при } x<0, y<0 \ \left(-\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } x=0, y>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } x=0, y=0 \\ \pi & \text{при } x<0, y=0. \end{cases}$$

Равенство комплексных чисел

$$c = |c|\, e^{i \arg c}, \qquad z = |z|\, e^{i \arg z}$$

эквивалентно равенствам $|c| = |z|$, $\arg c = \arg z$.

Комплексное число $z^* = x - yi$ называется *сопряженным* для $z = x + yi$. Для чисел $c = a + bi$, $z = x + yi$ верны равенства:

$$(c+z)^* = c^* + z^*, \quad (cz)^* = z^* c^*, \quad z^* z = |z|^2, \quad (z^*)^* = z.$$

Пусть $z \neq 0$. Тогда $z^{-1} z = 1$, $z^{-1} z z^* = z^*$, $z^{-1} |z|^2 = z^*$, откуда

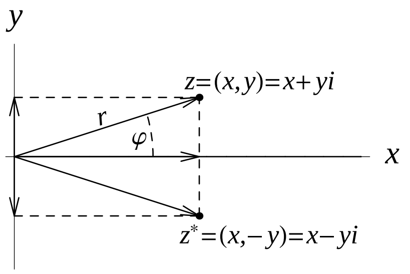
$$z^{-1} = z^* |z|^{-2}, \qquad c/z = zz^* / |z|^2$$

в соответствии с прежним равенством для c/z. В частности,

$$i^{-1} = i^* \cdot 1 = -i.$$

Сопряжение имеет простой геометрический смысл: оно осуществляет зеркальное отображение плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в горизонтальную прямую $\mathbb{R} = \mathbb{R} \times \{0\}$, оставляя ее точки (вещественные числа) неподвижными. Равенство $z^* = z$ означает, что $z = x \in \mathbb{R}$.

Связь между комплексными числами, точками плоскости и векторами поясняет рисунок:



Значения *мнимой экспоненты* e^{it} определяются *формулой Эйлера*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Для мнимой экспоненты верно *правило сложения* показателей:

$$e^{i(t+u)} = e^{it} \cdot e^{iu} \qquad (t, u \in \mathbb{R})\,.$$

Она имеет *период* 2π:

$$e^{i(t+2k\pi)} = e^{it} \qquad (t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z})\,.$$

Это позволяет вычислять аргументы сумм комплексных чисел, которые по определению принадлежат интервалу $]-\pi, \pi]$.

Так как

$$\cos(-t) = \cos t \qquad \sin(-t) = -\sin t,$$

то формула Эйлера эквивалентна равенству

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t \qquad (t \in \mathbb{R})\,.$$

Складывая и вычитая равенства для e^{it} и e^{-it}, получаем формулы для косинуса и синуса:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Благодаря теореме сложения для мнимой экспоненты эти равенства позволяют легко выводить многие формулы для тригонометрических функций.

Подробнее о комплексных числах можно прочитать в "Энциклопедии элементарной математики" [1].

2. Векторы

В алгебре векторы определяются как элементы абстрактного множества, которые можно складывать и умножать на числа с соблюдением обычных правил. В геометрии добавляется числовая характеристика, играющая роль длины. При определенных условиях она позволяет измерять углы между векторами.

2.1. Векторные пространства

2.1.1. Рассмотрим множество V, для каждых элементов x, y которого и чисел α, β из $\mathbb{K}$ определены сумма $x+y$ и произведение αx, согласованные правилами

$$\alpha\,(\beta x) = (\alpha\beta)\,x, \quad \alpha\,(x+y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha+\beta)\,x = \alpha x + \beta x.$$

Как обычно предполагается, что сложение для V коммутативно и ассоциативно. Кроме того, существует ноль и противоположный элемент $-x$ для каждого x из V, причем

$$1 \cdot x = x, \qquad (-1)\cdot x = -x, \qquad y - x = y + (-x)\,.$$

Множество V с такими операциями называют *векторным пространством*, его элементы — *векторами*, а числа — *скалярами*. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то пространство V называют *вещественным*, если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ — *комплексным*. В вещественном пространстве векторы можно умножать только на вещественные числа, а в комплексном — на любые.

Вещественное поле $\mathbb{R}$ служит примером вещественного векторного пространства, а комплексное поле $\mathbb{C}$ — комплексного. Так как $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, то $\mathbb{C}$ можно рассматривать и как вещественное пространство, отождествляя его с $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Поэтому все, что говорится дальше о векторах, применимо и к числам.

Векторы часто называют также *точками* векторного пространства. Скалярный и векторный нули обозначаются одинаково 0. Для них верны равенства:

$$0 \cdot x = 0, \qquad\qquad \alpha \cdot 0 = 0.$$

Если для векторов $x, y \in V$ определено произведение $xy \in V$ и для каждого скаляра α верны равенства

$$\alpha\,(xy) = (\alpha x)\,y = x\,(\alpha y)\,,$$

то векторное пространство V называют *векторной алгеброй*. Обычно предполагается, что умножение ассоциативно, коммутативно и дистрибутивно по сложению.

2.1.2. Возьмем произвольное множество U и рассмотрим множество $V = \mathcal{F}\,(U, \mathbb{K})$ всех числовых функций на U. Для них определены сложение и умножение:

$$(f + g)\,(u) = f\,(u) + g\,(u)\,, \quad (fg)\,(u) = f\,(u)\,g\,(u) \quad (u \in U)\,.$$

Эти операции коммутативны, ассоциативны, и умножение дистрибутивно по сложению. Произведение функции на число из $\mathbb{K}$ равно произведению на соответствующую постоянную:

$$(\alpha g)\,(u) = \alpha \cdot g\,(u) = f\,(u)\,g\,(u) \qquad (f\,(u) = \alpha, u \in U)\,.$$

Множество $V = \mathcal{F}\,(U, \mathbb{K})$ с указанными операциями является векторной алгеброй. Если $U = \mathbb{N}$, то векторами служат последовательности вещественных чисел, если $U = \mathbb{R}$ — числовые функции вещественной переменной, принимающие значения в $\mathbb{K}$.

Пусть $U = \{1, \ldots, m\}$ и рассматриваются только сумма вещественных функций и произведение функции на вещественное число. Тогда $V = \mathcal{F}(U, \mathbb{K})$ является векторным пространством. Оно обозначается $\mathbb{K}^m$. Векторы обычно записываются строками $V = (v_1, \ldots, v_m)$, где $v_i = v(i)$ есть значение функции v для аргумента $i = 1, \ldots, m$. В частности, при $m = 2$ и $m = 3$ получаются векторы на плоскости и в пространстве. При $m = 1$ векторы отождествляются с числами из $\mathbb{K}$. Чаще всего $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. При $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ пространство $\mathbb{C}^m$ отождествляется с $\mathbb{R}^{2m}$.

2.2. Базы

Геометрия векторного пространства тесно связана с фундаментальным понятием линейной независимости векторов.

2.2.1. Рассмотрим векторное пространство V. Назовем семейство чисел α_i $(i \in I)$ *финитным*, если $\alpha_i = 0$ для всех индексов i, не принадлежащих некоторому конечному множеству K. Если $K = 0$ и $\alpha_i = 0$ для всех $i \in I$, то семейство (α_i) называется *нулевым*. Для каждого финитного семейства скаляров α_i и семейства векторов x_i определен вектор $x = \sum \alpha_i x_i$, равный сумме конечного числа векторов $\alpha_i x_i$ при $\alpha_i \neq 0$. Говорят, что x является *линейной комбинацией* векторов x_i с *коэффициентами* α_i. Векторы x_i называются *линейно независимыми*, если равенство $\sum \alpha_i x_i = 0$ верно только для нулевого семейства скаляров α_i. Если $\sum \alpha_i x_i = 0$ и $\alpha_i \neq 0$ для некоторых индексов i, то говорят, что векторы x_i *линейно зависимы*.

Максимальное семейство линейно независимых векторов (к которому нельзя добавить ни одного вектора без без нарушения независимости) называется *базой* векторного пространства V. Составляющие базу векторы называются *базовыми*. Пусть (e_i) — база. Тогда для каждого вектора x существует единственное финитное семейство скаляров $\alpha_i(x)$ такое, что $x = \sum \alpha_i(x) e_i$. Каждый вектор равен некоторой линейной комбинации базовых. Это объясняет их название. Можно доказать, что в каждом векторном пространстве есть базы. Но в сложном пространстве найти подходящую базу непросто.

Число во всех базах пространства V одно и то же. Оно называется его *размерностью* и обозначается $\dim V$. Векторные пространства делятся на *конечномерные* ($\dim V < \infty$) и *бесконечномерные*. В бесконечномерном случае говорят не о числе векторов в базе, а о ее *мощности*. Все базы пространства имеют одну и ту же мощность.

2.2.2. В пространстве $v = \mathbb{R}^m$ стандартную базу составляют единичные векторы e_i с единицей на i-м месте и нулями на остальных. В частности, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ для плоскости $\mathbb{R}^2$ и $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ для пространства $\mathbb{R}^3$.

Рассмотрим пространство $V = \mathcal{M}(\mathbb{R})$, векторами которого являются полиномы x со значениями

$$x(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_m t^m \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Коэффициенты $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($0 \leqslant i \leqslant m$; $m = 0, 1, 2, \ldots$). Степени s^n со значениями $s^n(t) = t^n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) составляют базу пространства полиномов. Их линейная независимость следует из того факта, что полином степени $m > 0$ не может иметь больше, чем m корней. Пространство $V = \mathcal{M}(\mathbb{R})$ бесконечномерно.

Полезно попытаться найти какую-нибудь базу в векторном пространстве $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ всех вещественных функций вещественной переменной.

2.3. Нормированное пространство

Нормой называется числовая характеристика векторов, играющая роль длины.

2.3.1. Поставим в соответствие каждому вектору x пространства V число $\|x\| \geqslant 0$ так, чтобы соотношения

$$|x+y| \leqslant \|x\| + \|y\|\,, \qquad \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|\,.$$

были верны для всех векторов x, y из V и скаляра α. Число $\|x\|$ называется *нормой* вектора x, а пространство V — *нормированным*. Из определения следует, что $\|0\| = 0$. Если $\|x\| > 0$ при $x \neq 0$, то $x \neq y$ эквивалентно $\|x-y\| > 0$ и нормированное пространство V естественно назвать *отделимым*. Обычно отделимость включается в определение. Но иногда удобно рассматривать неотделимые нормированные пространства.

Вместо $\|x\|$ часто пишут $|x|$, когда это не приводит к путанице.

Для пространства $V = \mathbb{R}^m$ часто вводятся нормы, определяемые равенствами

$$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_m|\,, \qquad \|x\|_2 = \Big(|x_1|^2 + \ldots + |x_m|^2\Big)^{1/2},$$
$$\|x\|_{max} = \max\{|x_1|\,, \ldots, |x_m|\}.$$

Нетрудно проверить, что эти нормы обладают всеми нужными свойствами, включая отделимость.

В частном случае, когда $V = \mathbb{R}$ или $V = \mathbb{C}$ и векторами являются числа, нормой служит абсолютная величина. Все, что говорится дальше о векторах нормированного пространства, применимо и к числам.

Число $\rho\,(x,y) = \|x-y\|$ называется *расстоянием* между векторами x, y нормированного пространства V. Функция ρ на множестве $V \times V$ пар (x,y) называется *метрикой* для V. Она обладает свойствами:

$$\rho\,(x,y) \geqslant 0, \qquad \rho\,(x,y) = \rho\,(y,x)\,,$$
$$\rho\,(x,y) \leqslant \rho\,(x,z) + \rho\,(z,y)\,, \qquad \rho\,(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\,\rho\,(x,y)$$

для каждых векторов x, y, z и скаляра α. Если пространство V отделимо, то $\rho\,(x,y) > 0$ при $x \neq y$. При использовании расстояния $\rho\,(x,y)$ векторы x, y обычно называют *точками*.

Произвольное множество M, для пар (x, y) элементов которого определено расстояние $\rho(x, y) \geqslant 0$ так, что $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ и $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, образует *метрическое пространство* (M, ρ). Обычно требуется еще *невырожденность* метрики ρ, позволяющая ей отделять точки: $\rho(x, y) > 0$ при $x \neq y$. Нормированное пространство служит примером метрического пространства, для элементов которого определены алгебраические действия, а метрика обладает свойством однородности $\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\, \rho(x, y)$.

2.3.2. Рассмотрим векторное пространство $V = \mathcal{B}(T, U, \mathbb{K})$, составленное из числовых функций на множестве U, ограниченных на $T \subseteq U$. Определим норму вектора $x \in V$ равенством

$$\|x\| = \sup\{|x(t)| : t \in T\}.$$

Ясно, что $\|x\| \geqslant 0$. Так как $|x(t) + y(t)| \leqslant |x(t)| + |y(t)|$, то $|x(t) + y(t)| \leqslant \|x\| + \|y\|$, откуда $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех векторов x, y из V. А так как $|\alpha x(t)| = |\alpha|\, |x(t)|$, то $|\alpha x(t)| \leqslant |\alpha|\, \|x\|$, $\|\alpha x\| \leqslant |\alpha|\, \|x\|$ и вместе с тем $\|\alpha x\| \geqslant |\alpha|\, |x(t)|$, $\|\alpha x\| / |\alpha| \geqslant |x(t)|$, $\|\alpha x\| / |\alpha| \geqslant \|x\|$, $\|\alpha x\| \geqslant |\alpha|\, \|x\|$ при $\alpha \neq 0$. Значит, $\|\alpha x\| = |\alpha|\, \|x\|$.

Если $T = U$, то рассматриваемое нормированное пространство $V = \mathcal{B}(T, U, \mathbb{K})$ отделимо, а если $T \neq U$, то неотделимо: $\|x\| = 0$ для любой функции $x \in V$, равной нулю на множестве T и имеющей произвольные значения $x(u)$ при $u \notin T$.

2.4. Евклидово пространство

Так называется векторное пространство, для векторов которого определено скалярное произведение. Это произведение позволяет измерять не только длины векторов, но и углы между ними.

Для простоты будем рассматривать вещественные евклидовы пространства. Комплексные устроены сложнее.

2.4.1. Среди нормированных пространств выделяются пространства, для векторов которых верно *тождество параллелограмма*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

В геометрической интерпретации векторы x и y изображаются противоположными сторонами, а векторы $x+y$ и $x-y$ — диагоналями параллелограмма. В частности, тождество параллелограмма выполняется для нормы $\|\cdot\|_2$ в пространстве $V = \mathbb{R}^m$. Для норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_{max}$ оно неверно.

Если для нормы в пространстве V верно тождество параллелограмма, то равенство

$$xy = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

определяет *скалярное произведение* для V. Это значит, что для любых векторов $x, y, z \in V$ и скаляра $\alpha \in \mathbb{R}$ верны равенства

$$xy = yx, \qquad (x+y)\,z = xz + yz, \qquad (\alpha x)\,y = \alpha\,(xy)\,.$$

Эти равенства означают, что скалярное произведение симметрично и линейно по первой (а значит, и по второй) переменной. Кроме того, $xx \geqslant 0$. В отделимом пространстве $xx > 0$ при $x \neq 0$.

Обратную связь между скалярным произведением и нормой выражают равенства

$$\|x\|^2 = xx, \qquad \|x\| = \sqrt{xx}.$$

Чаще всего для векторного пространства сначала определяют скалярное произведение, обладающее перечисленными свойствами, а потом указанными равенствами определяют норму. Векторное пространство со скалярным произведением называется *евклидовым*, а норма для него — *евклидовой*.

Примером служит пространство $V = \mathbb{R}^m$ с нормой $\|\Delta\| = \|\Delta\|_2$, где

$$xy = x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m$$

для векторов $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)$.

Замечание. Скалярное произведение xy векторов x, y есть число, а не вектор. Чтобы отличить скалярное произведение от других, его часто обозначают (x, y) или $\langle x, y \rangle$. Но такие обозначения усложняют формулы.

2.4.2. Кроме тождества параллелограмма для векторов евклидова пространства верны *тождество треугольника*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2xy$$

и *поляризационное тождество*

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4xy.$$

Тождество треугольника следует из определения нормы и тождества

$$(x + y)(x + y) = xx + yy + 2xy,$$

а поляризационное — из тождества

$$(x + y)(x + y) - (x - y)(x - y) = 4xy.$$

Если $xy = 0$, то говорят, что векторы x, y *ортогональны*, и пишут $x \perp y$. Для ортогональных векторов верна

Теорема Пифагора. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Она сразу следует из тождества треугольника.

Верно и обратное утверждение: если $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, то $x \perp y$. Оно тоже следует из тождества треугольника.

2.4.3. Для каждых векторов x, y евклидова пространства V верно

Неравенство Коши. $|xy| \leqslant \|x\| \, \|y\|$.

$\square$ В самом деле,

$$0 \leqslant (\lambda x + y)(\lambda x + y) = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda xy + \|y\|^2$$

при любом вещественном λ. Пусть $\|x\| \neq 0$, тогда получаем при $\lambda = -xy/\|x\|^2$

$$0 \leqslant -(xy)^2/\|x\|^2 + \|y\|^2,$$

откуда следует доказываемое неравенство. По симметрии оно верно и когда $\|y\| \neq 0$.

Если $\|x\| = \|y\| = 0$, то при $\lambda = -xy$ получаем $0 \leqslant -2(xy)^2$, откуда $xy = 0 = \|x\|\,\|y\|$. ■

В отделимом пространстве равенство $|xy| = \|x\|\,\|y\|$ эквивалентно $y = \alpha x$ при некотором α. Пусть $y = \alpha x$. Тогда

$$|xy| = |\alpha|\,|xx| = |\alpha|\,\|x\|^2 = \|\alpha x\|\,\|x\| = \|x\|\,\|y\|.$$

Обратно, пусть $\|x\| \neq 0$, $|xy| = \|x\|\,\|y\|$ и $\alpha = xy/\|x\|^2$. Тогда

$$\|y - \alpha x\|^2 = (y - \alpha x)(y - \alpha x) = \alpha^2\|x\|^2 - 2\alpha xy + \|y\|^2 = 0$$

и $y - \alpha x = 0$.

2.5. Ортогональные проекции

Понятие ортогональности позволяет выделять в евклидовых пространствах ортогональные семейства векторов, которые эффективно используются. По-прежнему рассматриваются вещественные пространства.

2.5.1. Рассмотрим евклидово пространство V. Семейство векторов $x_i \in V$ называется *ортогональным*, если $x_i \perp x_j$ для любых индексов $i \neq j$. Если кроме того $\|x_i\| = 1$ для всех индексов i, то семейство (x_i) называется *ортонормированным*. Ненулевые векторы ортогонального семейства линейно независимы: если $\sum \alpha_i x_i = 0$ для некоторого финитного семейства скаляров α_i, то $\alpha_i\|x_i\|^2 = 0$ и $\alpha_i = 0$ для каждого i, для которого $x_i \neq 0$ и $\|x_i\| = 0$.

База, составленная из ортогональных векторов, называется *ортогональной*. Из ортонормированных — *ортонормированной*.

Примером может служить база из ортонормированных векторов $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_m = (0, \ldots, 0, 1)$ для евклидова пространства $V = \mathbb{R}^m$. Пусть $x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_m e_m$ ($\xi_i \in \mathbb{R}$). Тогда

$$\|x\|^2 = xx = \xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2.$$

Это равенство верно и для любой другой ортонормальной базы (e_i), так как по определению $e_i e_i = 1$ и $e_i e_j = 0$ при $i \neq j$.

2.5.2. Рассмотрим конечномерное евклидово пространство X с ортонормированной базой из векторов e_i, $i \in I$ и разбиение $\{K, L\}$ множества I:

$$K \cup L = I, \qquad\qquad K \cap L = \varnothing.$$

Равенства

$$y = \sum_{k \in K} \xi_k e_k, \qquad\qquad z = \sum_{l \in L} \xi_l e_l$$

определяют *ортогональные проекции* вектора $x = \sum\limits_{i \in I} \xi_i e_i$ на пространства Y и Z с базами из векторов e_k, $k \in K$ и e_l, $l \in L$, которые вместе составляют базу e_i, $i \in I$ пространства X. Пространства Y, Z являются *подпространствами* пространства X и составляют его *ортогональное разложение*:

$$X = Y + Z, \qquad\qquad Y \cap Z = \{0\}.$$

Это значит, что каждый вектор $x \in X$ равен сумме своих ортогональных проекций y, z на подпространства Y, Z и общим вектором у Y, Z является только вектор 0. Кроме того, каждый вектор $y \in Y$ ортогонален каждому вектору $z \in Z$.

Примером служит разложение пространства $X = \mathbb{R}^3$ на подпространства $Y = \mathbb{R}e_2$ и $Z = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_3$, составленные соответственно из векторов с декартовыми координатами $(0, \xi_2, 0)$ и

$(\xi_1, 0, \xi_3)$ $(\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R})$. Здесь $I = \{1, 2, 3\}$, $K = \{2\}$, $L = \{1, 3\}$, $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$, $y = \xi_2 e_2$, $z = \xi_1 e_1 + \xi_3 e_3$ и $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

Нулевое пересечение подпространств Y и Z обеспечивает единственность разложения $x = y + z$: если также $x = v + w$, то $v - y = z - w = 0$ и $v = y$, $w = z$ при $v, y \in Y$ и $w, z \in Z$.

2.5.3. Верно утверждение аналогичное теореме о перпендикуляре и наклонной: если $y \in Y$ — ортогональная проекция $x \in X$ и $v \in Y$, то $\|x - y\| \leqslant \|x - v\|$. В само деле, $y - v \in Y$, $x - y = z \in Z$ и поэтому $x - y \perp y - v$. По теореме Пифагора отсюда следует, что

$$\|x - v\|^2 = \|x - y + y - v\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - v\|^2 \geqslant \|x - y\|^2 .$$

Элемент $x \in X$ можно отождествить с *направленным отрезком* $x(\cdot) : [0, 1] \to X$ — отображением отрезка $[0, 1]$ вещественной прямой в векторное пространство X, ставящее в соответствие числу $t \in [0, 1]$ элемент $x(t) = tx$ — и изображать стрелкой с началом в $x(0) = 0$ и концом в $x(1) = x$. Это объясняет термин *вектор* x. При использовании нормы $\|x - y\|$ для измерения *расстояния* между $x, y \in X$ естественнее называть эти элементы *точками*. Вместе с тем норма $\|x - y\|$ измеряет *длину вектора* $x - y$. Проекция y служит основанием перпендикуляра к подпространству Y, проведенного из точки y в точку x, а точка $v \in Y$, $v \neq y$ — основанием наклонной $x - v$ к Y, проведенной из v в x. При такой терминологии неравенство $\|x - y\| < \|x - v\|$ при $v \neq y$ и $\|y - v\| > 0$ выражается классической фразой: *перпендикуляр короче наклонной.* Точка y является *ближайшей* к x точкой пространства Y.

Замечание. Если подходящим образом определены суммы бесконечных семейств чисел и суммы бесконечных семейств векторов, то сказанное с соответствующими оговорками обобщается на бесконечномерные евклидовы пространства.

3. Предел

Понятие предела формализует естественную идею приближения переменной с помощью постоянной. Переход от переменных к постоянным позволяет существенно упростить многие рассуждения и формулы. Предел является фундаментальным математическим понятием.

3.1. Направленности

Так называются функции, заданные на направленных множествах. Для таких числовых или векторных функций и определяется предел.

3.1.1. Рассмотрим *частично упорядоченное множество* X: для некоторых его элементов x и y определено отношение *y следует* за x, которое записывается $y \succcurlyeq x$. Это отношение *рефлексивно* ($x \succcurlyeq x$) и *транзитивно*: $x \succcurlyeq x$ и из $z \succcurlyeq y$, $y \succcurlyeq x$ следует $z \succcurlyeq x$. Элементы x и y, для которых $y \succcurlyeq x$ или $x \succcurlyeq y$, называются *сравнимыми*. Порядок, при котором каждые два элемента сравнимы, называется *линейным*. Если из $y \succcurlyeq x$ и $x \succcurlyeq y$ следует $x = y$, то порядок называется *антисимметричным*.

Примером линейного антисимметричного порядка служит порядок $\geqslant$ для вещественной прямой $\mathbb{R}$. Координатный порядок для точек плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ является нелинейным: точки $(1, 2)$ и $(2, 1)$, например, несравнимы. Если точки плоскости упорядочить по расстоянию от точки $(0, 0)$, то такой порядок не будет антисимметричным: отношения $y \succcurlyeq x$ и $x \succcurlyeq y$ будут верны для любых точек x, y данной окружности с центром в $(0, 0)$.

Направлением для множества X называется порядок, обладающий свойством: для каждых $x, y \in X$ существует следующий за ними $z \in X$. Множество с направлением называется *направленным*.

Пример 1. Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел с естественным порядком $\geqslant$. Это направление для $\mathbb{N}$ обозначается обычно $n \to \infty$. Аналогично определяется направление $x \to \infty$ для множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным порядком $\geqslant$. Если заменить порядок $\geqslant$ на противоположный $\leqslant$, то получится направление $x \to -\infty$.

Пример 2. Пусть $a \in \mathbb{R}$ и $y \succcurlyeq x$ означает, что $|y - a| \leqslant |x - a|$: следующей является точка, которая ближе к a. Это направление для $\mathbb{R}$ обозначается $x \to a$. Обычно требуется еще, чтобы $x \neq a$ и $y \neq a$. Часто рассматриваются только точки из некоторого множества $A \subseteq \mathbb{R}$. Например, из $A =]-\infty, a[$ или из $A =]a, +\infty[$. Тогда соответственно пишут $x \to a$, $x > a$. Пишут также $x \to a-$ или $x \to a+$.

Пример 3. Рассмотрим класс $\mathcal{K} = \mathcal{K}(U)$ всех конечных частей K множества U. Порядок по включению $\supseteq$ является направлением для $\mathcal{K}$: включение $L \supseteq K$ означает, что L следует за K. А объединение $K \cup L = M$ следует за K и за L при любых K и L. Условимся такое направление обозначать $K \to U$. Если само множество U конечно, то в таком направлении оно является последним элементом.

3.1.2. Функция на направленном множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел называется *последовательностью*. По аналогии функция на направленном множестве X называется *направленностью*. Выделяются вещественные, числовые и векторные направленности.

Рассмотрим направленное множество X, числовую функцию f на X и число c. Говорят, что направленность f *сходится к* c и пишут $f \to c$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x(\varepsilon) \in X$ такой, что неравенство $|f(x) - c| \leqslant \varepsilon$ верно для всех $x \in X$, следующих за $x(\varepsilon)$:

$$|f(x) - c| \leqslant \varepsilon \qquad\qquad (x \succcurlyeq x(\varepsilon)).$$

Число c называют *пределом* направленности f и пишут $\lim f = c$.

Когда нужно, явно указывают аргумент x и направление для X: $f(x) \to c$ ($x \to a$, $x \to \infty$ и т. д.) или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ и т. д. Вместо стрелок $\to$ иногда используют приближенные равенства $\approx$: $f(x) \approx c$ ($x \approx a$, $x \approx \infty$ и т. д.).

В теоретических рассуждениях удобны сокращенные обозначения, в выкладках — подробные.

Точно так же определяется предел для векторной направленности: предел c в этом случае является вектором, а черточки $||$ обозначают норму.

По аналогии можно определить сходимость направленности $f\colon X \to M$ точек метрического пространства (M, ρ): нужно только заменить $|f(x) - c|$ на $\rho(f(x), c)$ и писать $\rho(f(x), c) \leqslant \varepsilon$ $(x \succcurlyeq x(\varepsilon))$. Свойства метрики позволяют обобщать на направленности в метрических пространствах все, что говорится о сходимости векторных или числовых направленностей и не связано с алгебраическим действиями. Всюду, где используется единственность предела, нужно предполагать отделимость пространства. Если норма или метрика не отделяют точки, то все точки, находящиеся на нулевом расстоянии от предельной, тоже являются пределами. Это сразу следует из неравенства треугольника.

Говорят, что направленность f на X *сходится в себе* и пишут $f \to$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $x(\varepsilon) \in X$ такой, что неравенство $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ верно для всех элементов $x, y \in X$, следующих за $x(\varepsilon)$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon, \qquad\qquad (x, y \succcurlyeq x(\varepsilon)).$$

Установить существование предела числовой направленности часто помогает

Критерий Коши. *Числовая направленность имеет предел тогда и только тогда, когда она сходится в себе.*

Необходимость условия критерия легко доказывается с использованием неравенства треугольника. А достаточность эквивалентна полноте числового поля и может быть принята за аксиому.

Для векторных направленностей в произвольном нормированном пространстве критерий Коши неверен. Нормированные пространства, для которых он верен, называются *полными*. В частности, пространство $\mathbb{R}^m$ полное.

С помощью критерия Коши можно доказать существование предела направленности. Но он не дает информации о значении этого предела.

Для числовых направленностей понятия *сходится к некоторому числу* и *сходится в себе* эквивалентны. Их можно объединять термином *сходится*.

Замечание. Иногда для сходимости направленности в себе бывает удобна следующая эквивалентная формулировка: *для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует элемент* $x_0(\varepsilon) \in X$ *такой, что*

$$|f(x) - f(x_0(\varepsilon))| \leqslant \varepsilon, \qquad (x \succcurlyeq x_0(\varepsilon)).$$

Это неравенство следует из определения сходимости в себе при $y = x(\varepsilon) = x_0(\varepsilon)$. А неравенство определения получается из выписанного при $x(\varepsilon) = x_0(\varepsilon/2)$ аналогичного неравенства с заменой x на y и неравенства треугольника.

Рассмотрим последовательность $r : \mathbb{N} \to X$ такую, что для каждого элемента $x \in X$ существует номер $n(x) \in \mathbb{N}$ такой, что $r(n) \succcurlyeq x$ для всех $n \geqslant n(x)$. Направленное множество X, для которого такие последовательности r существуют, называется *секвенцируемым*. Функция f на секвенцируемом направленном множестве X называется *секвенцируемой направленностью*. Последовательность $f(r)$ со значениями $f(r(n))$ называется *подпоследовательностью* направленности f. Числовые и векторные функции на $\mathbb{R}$ при направлениях $x \to a$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$ секвенцируемы. Для класса $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbb{R})$ всех конечных множеств $K \subseteq \mathbb{R}$, направленного по включению $\supseteq$, не существует последовательности $r : \mathbb{N} \to K$ такой, что для каждого $K \in \mathcal{K}$ существует $n(K) \in \mathbb{N}$,при котором $r(n) \succcurlyeq K$ для всех $n \geqslant n(K)$. Если бы такая последовательность конечных множеств $r(n) \subseteq \mathbb{R}$ существовала, то их счетное объединение $r\,(\mathbb{N})$ содержало бы несчетное множество $\mathbb{R}$. Поэтому направленности на $\mathcal{K}$ не секвенцируемы.

Из определений следует, что каждая подпоследовательность сходящейся секвенцируемой направленности сходится к тому же пределу. Верно и обратное: если все подпоследовательности секвенцируемой направленности сходятся к одному пределу, то она сходится к этому пределу. В самом деле, если $f \nrightarrow c$, то существует $\alpha > 0$ такое, что для каждого $x \in X$ при некотором $y\,(x) \succcurlyeq x$ верно неравенство $|f\,(y\,(x)) - c| > \alpha$. Возьмем последовательность точек $x\,(n) \in X$ такую, что для каждого $x \in X$ есть $n\,(x) \in \mathbb{N}$ такой, что $x\,(n) \succcurlyeq x$ при $n \geqslant n\,(x)$. Последовательность $(x\,(n))$ определяет последовательность точек $r\,(n) = y\,(x\,(n)) \in X$. Из определений следует, что $r\,(n) \succcurlyeq x\,(n) \succcurlyeq x$ при $n \geqslant n\,(x)$ и $f\,(r) = (f\,(r\,(n)))$ есть подпоследовательность f. Так как $|f\,(r\,(n)) - c| > \alpha > 0$ для всех номеров n, то $f\,(r\,(n)) \nrightarrow c$.

Вычисление пределов секвенцируемых направленностей можно сводить к вычислению пределов последовательностей. Если хотя бы одна из подпоследовательностей расходится или какие-нибудь две сходятся к разным пределам, то направленность не имеет предела.

Примерами пределов направленностей служат известные пределы числовых последовательностей и функций. Сумма семейства и интеграл будут определены как пределы специальных направленностей.

Замечание. Сходимость всех подпоследовательностей служит критерием сходимости секвенцируемой направленности. Это следует из того, что последовательности, сходящиеся к разным пределам, составляют расходящуюся последовательность. Пусть $f(r(n)) \to a$, $f(s(n)) \to b$ и $a \neq b$. Тогда $f(t(n))$ при $t(2n-1) = r(n)$ и $t\,(2n) = s\,(n)$ расходится. Если рассматривается векторная направленность, то нужно предполагать отделимость: $\|a - b\| > 0$ при $a \neq b$.

3.1.3. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. $f(n) = a^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ $(a > 0)$. Пусть сначала $a > 1$. Тогда по биномиальной формуле

$$a = \left(a^{1/n}\right)^n = \left(1 + \left(a^{1/n} - 1\right)\right)^n \geqslant 1 + n\left(a^{1/n} - 1\right),$$

откуда $0 < a^{1/n} - 1 < (a-1)/n$ и $a^{1/n} - 1 \to 0$, $a^{1/n} \to 1$.

Если $0 < b < 1$, то $a = 1/b > 1$. Поэтому $b^{1/n} = 1/a^{1/n} \to 1$.

Пример 2. $f(n) = n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. По биномиальной формуле

$$n = \left(n^{1/n}\right)^n = \left(1 + \left(n^{1/n} - 1\right)\right)^n \geqslant (1/2)\, n\,(n-1)\left(n^{1/n} - 1\right)^2,$$

откуда $0 \leqslant n^{1/n} - 1 \leqslant \sqrt{2}/\sqrt{n-1}$ при $n > 1$ и $n^{1/n} - 1 \to 0$, $n^{1/n} \to 1$.

Пример 3. $f(n) = \left(n^{(m)}\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, где $m \geqslant 0$ и $n^{(0)} = 1$, $n^{(1)} = n$, $n^{(m)} = n\,(n-1)\cdots(n-m+1)$ при $m > 2$. Если $n > m$, то $n^m \geqslant n^{(m)} \geqslant 1$ и $1 \leqslant \left(n^{(m)}\right)^{1/n} \leqslant (n^m)^{1/n} = \left(n^{1/n}\right)^m$. Так как по доказанному $n^{1/n} \to 1$, то $\left(n^{1/n}\right)^m \to 1$ и, следовательно, $\left(n^{(m)}\right)^{1/n} \to 1$.

Пример 4. $(n!)^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $n > m$. Тогда

$$(n!)^{1/n} = 1^{1/n} \cdots m^{1/n} \cdots n^{1/n} \geqslant m^{1/n} \cdots n^{1/n} \geqslant \left(m^{1/n}\right)^{n-m} =$$
$$= m \cdot m^{-m/n} = m\left(m^{-m}\right)^{1/n} \geqslant m/2$$

при всех $n \geqslant m + n(m)$. Существование такого $n(m)$ следует из $(m^{-m})^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Значит, $(n!)^{1/n} \to \infty$.

3.1.4. Для числовых последовательностей из критерия Коши следует

Теорема Вейерштрасса. *Каждая ограниченная числовая последовательность имеет сходящуюся подпоследовательность.*

□ Рассмотрим вещественную последовательность (x_n), ограниченную числами a и b: $a \leqslant x_n \leqslant b$ $(n \in \mathbb{N})$. Пусть $a_0 = a$, $b_0 = b$ и $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. хотя бы одной из половин $[a_0, c_0]$ или $[c_0, b_0]$ отрезка $[a_0, b_0]$ принадлежат значения x_n для бесконечного множества номеров n. Выберем такую половину, обозначим ее $[a_1, b_1]$ и возьмем в ней точку $x_{r(1)}$ с каким-нибудь номером $r(1) \geqslant 1$. Продолжая этот процесс индуктивно, определим убывающую последовательность отрезков $[a_n, b_n]$ с длинами $(b_1 - a_1)/2^n$ и последовательность чисел $x_{r(n)}$ с номерами $r(n) \geqslant n$ такую, что $x_{r(m)} \in [a_n, b_n]$ для всех номеров $m \geqslant n$. Так как $(b_1 - a_1)/2^n \to 0$, то последовательность $\left(x_{r(n)}\right)$ сходится в себе, а следовательно, и к некоторому числу. ■

Рассмотрим комплексную последовательность (z_n) такую, что $|z_n| \leqslant r$. Пусть $z_n = x_n + y_n i$. Так как $|x_n| \leqslant \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n| \leqslant r$, то по доказанному существует сходящаяся подпоследовательность $\left(x_{r(n)}\right)$ вещественной последовательности (x_n). В свою очередь ограниченная вещественная последовательность $\left(y_{r(n)}\right)$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\left(y_{s(n)}\right)$. Подпоследовательность $\left(x_{s(n)}\right)$ последовательности $\left(x_{r(n)}\right)$ сходится вместе с нею. Пусть $x_{s(n)} \to a$ и $y_{s(n)} \to b$. Тогда $z_{s(n)} \to a + bi$.

Так как последовательность комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$ можно отождествить с последовательностью точек $z_n = (x_n, y_n)$ евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ и абсолютная величина $|x_n + iy_n|$ равна норме $\|(x_n, y_n)\|$, то из теоремы Вейерштрасса вытекает

Следствие: *Каждая ограниченная последовательность точек плоскости имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Ограниченность последовательности точек z_n означает, что $\|z_n\| \leqslant r$ для всех n и некоторого $r > 0$: точки z_n принадлежат кругу с центром 0 и радиусом r. Вторая часть доказательства теоремы есть прямое доказательство этого следствия, которое обобщает теорему.

3.2. Действия с пределами

Предел направленности имеет те же алгебраические свойства, что и предел последовательности.

3.2.1. Рассмотрим направленное множество X. Сходящиеся числовые направленности на множестве X составляют векторную алгебру $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X)$. Предел $\lim$ является *линейным и мультипликативным функционалом* на $\mathcal{C}$: каждой $f \in \mathcal{C}$ ставится в соответствие число $\lim f$ так, что

$$\lim(f + g) = \lim f + \lim g, \qquad \lim(f \cdot g) = \lim f \cdot \lim g$$

для каждых $f, g \in \mathcal{C}$. Кроме того, если $g(x) \neq 0$ для всех $x \in X$ и $\lim g \neq 0$, то

$$\lim(f/g) = \lim f / \lim g.$$

Для векторных направленностей предел обладает только свойством линейности: в общем векторном пространстве произведение векторов не определяется.

3.2.2. Пусть f и g — вещественные сходящиеся направленности на X. Как обычно, $f \geqslant 0$ и $f \leqslant g$ означают, что $f(x) \geqslant 0$ и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in X$. Предел $\lim$ является *положительным линейным функционалом*: $\lim f \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$. Из положительности следует *монотонность*: $\lim f \leqslant \lim g$ при $f \leqslant g$.

Функциональная точка зрения полезна при теоретических рассуждениях. В выкладках дело сводится к обычным действиям, аналогичным действиям с пределами последовательностей. Доказательства тоже аналогичны. Но сформулированные утверждения имеют гораздо более общий характер.

3.2.3. Среди направленностей выделяются сходящиеся к нулю, которые называются бесконечно малыми или пренебрежимыми. С ними очень удобно производить алгебраические действия.

По определению числовая или векторная функция α на направленном множестве X является *бесконечно малой*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $x(\varepsilon) \in X$ такое, что $|\alpha(x)| \leqslant \varepsilon$ при $x \succcurlyeq x(\varepsilon)$. Бесконечно малые направленности называют также *пренебрежимыми*. Этот термин хорошо выражает их роль. С помощью бесконечно малых можно сформулировать определение предела, эквивалентное данному раньше. Для функции f на направленном множестве X сходимость к c означает, что f есть сумма постоянной c и некоторой бесконечно малой: $f = c + \alpha$, $\alpha \to 0$. Вместо $\alpha \to 0$ пишут также $\alpha \approx 0$.

Ясно, что если $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$, то

$$\alpha + \beta \to 0 \qquad \alpha\beta \to 0, \qquad c\beta \to 0.$$

Отсюда следует, что если $f = a + \alpha$ и $g = b + \beta$, то

$$f + g = (a + b) + (\alpha + \beta), \qquad fg = ab + \gamma, \qquad cg = cb + c\beta,$$

где $\gamma = \alpha b + a\beta + \alpha\beta \to 0$. Точно так же

$$f/g = a/b + \delta,$$

где $\delta = \dfrac{\alpha}{b+\beta} - \beta \cdot \dfrac{a}{b(b+\beta)} \to 0$ при $g(x) \neq 0$, $b \neq 0$.

грубо говоря, с бесконечно малыми можно обращаться как с нулями и пренебрегать ими. А со сходящимися направленностями — как с постоянными. но при этом нужно соблюдать осторожность.

3.3. Верхний и нижний пределы

Для ограниченных вещественных направленностей определяются *верхний и нижний пределы.*

3.3.1. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — направленность, множество $f(X)$ значений которой ограничено. Тогда вследствие полноты вещественной прямой $\mathbb{R}$ для каждого $x \in X$ определены числа

$$\underline{f}(x) = \inf\{f(y) : y \succcurlyeq x\}, \qquad \overline{f}(x) = \sup\{f(y) : y \succcurlyeq x\}.$$

Направленности $\underline{f}$ и $\overline{f}$ с такими значениями называются *нижней* и *верхней* для f. из определений следует, что

$$\begin{aligned} &\underline{f}(z) \geqslant \underline{f}(x), && \overline{f}(z) \leqslant \overline{f}(x) && (z \succcurlyeq x); \\ &\underline{f}(x) \leqslant f(x) \leqslant \overline{f}(x), && \underline{f}(x) \leqslant \overline{f}(y) && (x, y \in X). \end{aligned}$$

Так как множество $\underline{f}(X)$ значений $\underline{f}$ ограничено сверху каждым числом $\overline{f}(x)$, а множество $\overline{f}(X)$ ограничено снизу каждым числом $\underline{f}(x)$, то существуют числа

$$\underline{\lim} f = \sup \underline{f}(X), \qquad \overline{\lim} f = \inf \overline{f}(X).$$

Эти числа называются соответственно *нижним* и *верхним пределами* направленности f. Для них, когда это нужно, явно указывается направление.

3.3.2. Из определений легко выводится

Теорема. *Число c является пределом ограниченной вещественной направленности f в том и только в том случае, когда $\underline{\lim} f = \overline{\lim} f = c$.*

Простейшим примером направленности, имеющей нижний и верхний пределы, но не имеющей предела, служит последовательность $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ со значениями $f(n) = (-1)^n$. Ясно, что $\underline{\lim} f = -1$, $\overline{\lim} f = 1$, а $\lim f$ не существует.

Направленность $f : X \to \mathbb{R}$ называется *возрастающей*, если $f(y) \geqslant f(x)$ при $y \succcurlyeq x$ и *убывающей*, если $f(y) \leqslant f(x)$ при $y \succcurlyeq x$. Например, нижняя направленность $\underline{f}$ возрастает, а верхняя $\overline{f}$ —

убывает. Сформулированной теореме о нижнем и верхнем пределах эквивалентна следующая теорема о монотонных направленностях. Будем называть нижней и верхней гранью вещественной направленности нижнюю и верхнюю грани множества ее значений.

Теорема. *Ограниченная снизу убывающая направленность сходится к своей нижней грани. А ограниченная сверху возрастающая направленность сходится к своей верхней грани.*

В частности,

$$\lim \underline{f} = \sup \underline{f} = \underline{\lim} f, \qquad \lim \overline{f} = \inf \overline{f} = \overline{\lim} f.$$

Теорему о нижнем и верхнем пределах и теорему о монотонных последовательностях можно выводить друг из друга, а можно доказывать независимо.

3.4. Двойной и повторный пределы

Часто приходится рассматривать пределы числовых или векторных функций, зависящих от нескольких направленных переменных. Формально можно свести дело к двум переменным.

3.4.1. Рассмотрим направленные множества X, Y и числовую или векторную функцию h на множестве $X \times Y$ пар (x, y) с первым элементом $x \in X$ и вторым элементом $y \in Y$. Порядки для множеств X и Y определяют *координатный порядок* для их *декартова произведения* $X \times Y$: $(x, y) \succcurlyeq (u, v)$ означает, что $x \succcurlyeq u$ и $y \succcurlyeq v$ для $x, u \in X$ и $y, v \in Y$.

Функция $h = h(\cdot, \cdot)$ и элемент $x \in X$ определяют функцию $h(x, \cdot)$ на Y со значениями $h(x, y)$ для $y \in Y$. Функция h и элемент $y \in Y$ определяют функцию $h(\cdot, y)$ со значениями $h(\cdot, \cdot)$ для $x \in X$. Таким образом, по определению

$$h(x, \cdot)(y) = h(\cdot, y)(x) = h(x, y).$$

В первом случае фиксируется первый элемент пары, а второй к становится переменной. Во втором случае — наоборот. Функции $h(\cdot,\cdot)$, $h(x,\cdot)$, $h(\cdot,y)$ являются направленностями, и можно говорить об их пределах. Предположим, что существуют пределы $f(x)=\lim h(x,\cdot)$ и $g(y)=\lim h(\cdot,y)$ для каждых $x\in X$ и $y\in Y$. Функции f и g с такими значениями являются направленностями на X и на Y. Они могут иметь пределы $a=\lim f$ и $b=\lim g$. Введем для всех этих пределов специальные термины и обозначения.

Предел h называется *двойным* и обозначается $\lim\limits_{x,y} h(x,y)$. Пределы $f(x)=\lim\limits_{x} h(x,y)$ и $g(y)=\lim\limits_{y} h(x,y)$ называются *простыми*. Пределы

$$\lim_x f(x)=\lim_x\lim_y h(x,y), \qquad \lim_y g(y)=\lim_y\lim_x h(x,y)$$

называются *повторными*. Верна

Теорема. *Если у двойной числовой направленности существует двойной предел и все простые, то существуют оба повторных предела, равные двойному.*

□ То есть, если положим $\lim\limits_{x,y} h(x,y)=c$ и $\lim\limits_{y} h(x,y)=f(x)$, $\lim\limits_{x} h(x,y)=g(y)$ для всех x и y, то существуют $\lim\limits_{x}\lim\limits_{y} h(x,y)=a$, $\lim\limits_{y}\lim\limits_{x} h(x,y)=b$ и $a=b=c$. Коротко

$$\lim_{x,y} h(x,y)=\lim_x\lim_y h(x,y)=\lim_y\lim_x h(x,y).$$

В самом деле, возьмем $\varepsilon>0$ и $x(\varepsilon/2)\in X$, $y(\varepsilon/2)\in Y$ такие, что $|h(x,y)-c|<\varepsilon/2$ при $x\succcurlyeq x(\varepsilon/2)$, $y\succcurlyeq y(\varepsilon/2)$. Кроме того для всякого x возьмем $y(\varepsilon/2,x)\in Y$ такой, что $|h(x,y)-f(x)|<\varepsilon/2$ при $y\succcurlyeq y(\varepsilon/2,x)$. Используя неравенство треугольника, получаем:

$$|f(x)-c|\leqslant|h(x,y(\varepsilon/2))-f(x)|+|h(x,y(\varepsilon/2))-c|\leqslant\varepsilon$$

при $x\succcurlyeq x(\varepsilon/2)$. Значит, $\lim\limits_{x}\lim\limits_{y} h(x,y)=c$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{y}\lim\limits_{x} h(x,y)=c$. ■

3.4.2. Существование и равенство повторных пределов необходимы, но не достаточны для существования двойного. Нужны дополнительные предположения. Сходимость $h(x,\cdot) \to f(x)$ назовем *равномерной* по x, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $y\,(\varepsilon) \in Y$ такой, что $|h\,(x,y) - f\,(x)| < \varepsilon$ для всех $y \succcurlyeq y\,(\varepsilon)$ и всех $x \in X$. В случае неравномерной сходимости для каждого x существует свой элемент $y\,(\varepsilon, x)$, но нет универсального $y\,(\varepsilon)$. Аналогично определяется равномерная сходимость $h\,(\cdot, y) \to g\,(y)$. Верна

Теорема. *Если у двойной числовой направленности существуют все простые пределы и сходимость по одной из переменных равномерна, то существуют двойной предел, оба повторных и эти три предела равны.*

□ Пусть $\lim\limits_{x} h\,(x,y) = g\,(y)$ для всех $y \in Y$, $\lim\limits_{y} h\,(x,y) = f\,(x)$ для всех $x \in X$ и сходимость $h\,(x,y) \to f\,(x)$ равномерна по x. Докажем, что $f\,(x) \to$. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
&|f\,(u) - f\,(v)| \leqslant \\
&\qquad \leqslant |f\,(u) - h\,(u,y)| + |h\,(u,y) - h\,(v,y)| + |h\,(v,y) - f\,(v)| \quad (*)
\end{aligned}
$$

для всех $u, v \in X$ и $y \in Y$. благодаря равномерной сходимости $h\,(x,y) \to f\,(x)$ для каждого $\varepsilon > 0$ существует $y\,(\varepsilon) \in Y$ такой, что

$$
|f\,(u) - h\,(u,y)| \leqslant \varepsilon, \qquad |f\,(v) - h\,(v,y)| \leqslant \varepsilon \qquad (y \succcurlyeq y\,(\varepsilon))
$$

для всех $u, v \in X$. А так как $h\,(x, y\,(\varepsilon)) \to g\,(y\,(\varepsilon))$, то существует $x\,(\varepsilon) \in X$ такой, что

$$
|h\,(u, y\,(\varepsilon)) - h\,(v, y\,(\varepsilon))| \leqslant \varepsilon \qquad\qquad (u, v \succcurlyeq x\,(\varepsilon))\,.
$$

Из этих неравенств и неравенства (*) при $y = y\,(\varepsilon)$ следует, что

$$
|f\,(u) - f\,(v)| \leqslant 3\varepsilon \qquad\qquad (u, v \succcurlyeq x\,(\varepsilon))\,.
$$

Направленность f сходится в себе, и значит, существует повторный предел $\lim\limits_{x}\lim\limits_{y} h\,(x,y) = \lim\limits_{x} f\,(x)$.

Пусть $\lim\limits_{x} f(x) = a$. Докажем, что $\lim\limits_{x,y} h(x,y) = a$. Заметим, что

$$|h(x,y) - a| \leqslant |h(x,y) - f(x)| + |f(x) - a|$$

для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Так как $f(x) \to a$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $x(\varepsilon) \in X$ такой, что

$$|f(x) - a| \leqslant \varepsilon \qquad (x \succcurlyeq x(\varepsilon)).$$

А так как $h(x,y) \to f(x)$ равномерно по x, то

$$|h(x,y) - f(x)| \leqslant \varepsilon \qquad (y \succcurlyeq y(\varepsilon))$$

при некотором $y(\varepsilon) \in Y$ и всех $x \in X$. Из этих неравенств следует, что

$$|h(x,y) - a| \leqslant 2\varepsilon \qquad (x \succcurlyeq x(\varepsilon), y \succcurlyeq y(\varepsilon)).$$

Значит, $\lim\limits_{x,y} h(x,y) = a$.

По последней теореме второй повторный предел тоже существует и $\lim\limits_{y} \lim\limits_{x} h(x,y) = \lim\limits_{y} g(y) = a$.

Теорема доказана. ■

4. Сумма

Сумма семейства чисел или векторов определяется как предел направленности его конечных сумм. она обладает многими свойствами конечных сумм.

4.1. Конечные суммы

Рассматриваются семейства чисел или векторов нормированного пространства. Для каждого конечного множества элементов такого семейства определена их сумма. Увеличение таких множеств порождает некоторую направленность. Ее предел, если он существует, естественно считать суммой данного семейства.

4.1.1. Рассмотрим семейство (x_i) с множеством индексов I. для каждого конечного $K \subseteq I$ определена сумма

$$s(K) = \sum_{i \in K} x_i.$$

Эти *конечные суммы* образуют направленность $(s(k))$ на классе $\mathcal{K} = \mathcal{K}(I)$ конечных частей множества I, упорядоченном отношением $\supseteq$. Такое направление для $\mathcal{K}$ обозначается $K \to I$. Предел $s = \lim\limits_{K \to I} s(K)$ называют *суммой* семейства (x_i) и пишут

$$s = \sum_{i \in I} x_i.$$

Когда ясно, о каком множестве индексов идет речь, пишут $\sum x_i$. Семейство, для которого такая сумма существует, называется *суммируемым*.

Равенство $s = \lim\limits_{K \to I} s(K)$ означает, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное $K(\varepsilon) \subseteq I$ такое, что $|s - s(K)| \leqslant \varepsilon$ для всех конечных множеств индексов $K \supseteq K(\varepsilon)$. Пусть, например, $I = \mathbb{P}$ и $x_n = q^n$, $0 < q < 1$. Тогда $s = 1/(1-q)$. В самом деле, если $\varepsilon > 0$ и $K(\varepsilon) = \{0, 1, \ldots, n(\varepsilon)\}$, $q^{n(\varepsilon)} \leqslant \varepsilon(1-q)$, то $|s - s(K)| \leqslant |s - s(K(\varepsilon))| \leqslant q^{n(\varepsilon)}/(1-q) \leqslant \varepsilon$ при $K \supseteq K(\varepsilon)$.

4.1.2. Из критерия Коши следует

Критерий суммируемости. *числовое семейство (x_i) суммируемо тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное множество $K(\varepsilon) \subseteq I$ такое, что $|s(M)| \leqslant \varepsilon$ Для каждого конечного $M \subseteq I$, не пересекающегося с $K(\varepsilon)$.*

Условие критерия можно сформулировать так: при исключении достаточно большого конечного множества индексов все конечные суммы из оставшихся индексов произвольно малы.

Выбирая одноэлементные множества $M = \{x_i\}$, получаем *необходимое условие суммируемости* направленности (x_i): она должна быть бесконечно малой. Как показывает пример с $x_n = 1/n$, условие $x_i \to 0$ не является достаточным: не все бесконечно малые суммируемы.

Из критерия Коши суммируемости следует, что для каждого натурального числа n только конечное множество членов суммируемого семейства (x_i) может иметь значения $|x_i| > 1/n$. Поэтому только счетное множество $x_i \neq 0$. Суммирование числового семейства сводится к суммированию некоторой последовательности его значений. Семейства используются тогда, когда нет подходящей нумерации.

Замечание. Для семейства векторов из евклидова пространства $\mathbb{R}^m$ тоже верен критерий суммируемости, и суммирование векторов сводится к суммированию их координат. Для семейства векторов из произвольного нормированного пространства сходимость в себе направленности конечных сумм является необходимым, но не достаточным условием существования суммы.

4.1.3. При суммировании последовательности принято называть *рядами* и вместо *сумма последовательности* говорить *сумма ряда*. Для положительных рядов (x_n), $x_n \geqslant 0$ семейство всех конечных сумм $s(K)$ можно заменить последовательностью конечных сумм $s(n) = s(K(n))$ для множеств индексов $K(n) = \{1, \ldots, n\}$. Верно равенство $s = \lim\limits_{n\to\infty} s\,(n)$. В самом деле, если $|s - s\,(K)| \leqslant \varepsilon$ для всех $K \supseteq K\,(\varepsilon)$, то и для $K\,(n) \supseteq K\,(\varepsilon)$. То есть, $|s - s\,(n)| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant n\,(\varepsilon) = \max K\,(\varepsilon)$. Обратно, $|s - s\,(K)| \leqslant |s - s\,(n\,(\varepsilon))| \leqslant \varepsilon$ при $K \supseteq K\,(n\,(\varepsilon))$.

Критерий Коши сходимости для последовательности $(s\,(n))$ эквивалентен критерию суммируемости для (x_n), $x_n \geqslant 0$: условие $|s\,(n) - s\,(m)| \leqslant \varepsilon$ при $n, m \geqslant n\,(\varepsilon)$ равносильно условию $s\,(M) \leqslant \varepsilon$ при $M \cap K\,(n\,(\varepsilon)) = \varnothing$.

Предположение о положительности рассматриваемой последовательности (x_n) существенно. Есть несуммируемые числовые последовательности (x_n), для которых существует предел $\lim s\,(n)$. Например, $x_n = (-1)^n/n$. Такие ряды называют *условно сум-*

мируемыми. Вместо суммируемости часто говорят о *сходимости* ряда (x_n), имея в виду последовательность его конечных сумм $s\,(n)$.

4.1.4. Каждая последовательность $y = (y\,(n))$ определяет последовательность Δy приращений со значениями

$$\Delta y\,(n) = y\,(n+1) - y\,(n)\,.$$

Ясно, что

$$\sum_{l \leqslant m < n} \Delta y\,(m) = y\,(n) - y\,(l)$$

для каждых номеров $l < n$.

Для произведения $x \cdot y = (x\,(n) \cdot y\,(n))$ последовательностей $x = (x\,(n))$ и $y = (y\,(n))$ верны равенства

$$\Delta\,(xy)\,(n) = x\,(n+1)\,y\,(n+1) - x\,(n)\,y\,(n) = \Delta x\,(n) \cdot y\,(n+1)\,,$$
$$x\,(n)\,\Delta y\,(n) = \Delta\,(xy)\,(n) - y\,(n+1)\,\Delta x\,(n)\,.$$

Из выписанных равенств следует

Формула суммирования по частям.

$$\sum_{l \leqslant m < n} x(m)\Delta y(m) = (x(n)y(n) - x(l)y(l)) - \sum_{l \leqslant m < n} y(m+1)\Delta x(m).$$

Применим эту формулу для вычисления суммы ряда (na^n), где $0 < a < 1$. Пусть $x\,(n) = n$, $\Delta x\,(n) = 1$ и $y\,(0) = 1/\,(a-1)$, $y\,(n+1) = y\,(n) + a^n$, $\Delta y\,(n) = a^n$ $(n > 0)$. Тогда

$$\sum_{0 \leqslant m < n} ma^m = \left(n\frac{a^n}{a-1} - 0 \cdot \frac{1}{a-1}\right) - \sum_{0 \leqslant m < n} \frac{a^{m+1}}{a-1} \cdot 1 =$$
$$= \frac{na^n}{a-1} - \frac{a}{a-1}\frac{a^n-1}{a-1} = \frac{a}{(1-a)^2} - \frac{na^n}{1-a} - \frac{a^{n+1}}{(1-a)^2}.$$

Так как $0 < a < 1$, $na^n \to 0$ и $a^{n+1} \to 0$, то отсюда следует, что

$$\sum_{n \geqslant 1} na^n = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

Условие $0 < a < 1$ можно заменить на $|a| < 1$.

Формулу суммирования по частям можно записать в более симметричном виде:

$$\sum_{l \leqslant m < n} x(m)\,\Delta y(m) + \sum_{l \leqslant m < n} y(m+1)\,\Delta x(m) = x(n)\,y(n) - x(l)\,y(l)\,.$$

(Симметрию несколько нарушает множитель $y(m+1)$ вместо $y(m)$ во второй сумме.)

Рассмотрим положительную последовательность (α_n), числовую последовательность (b_n) и последовательность ее частичных сумм $y(n) = \sum b_m$ $(m < n)$.

Признак Дирихле. *Если (α_n) убывает и $\alpha_n \to 0$, а последовательность $(y(n))$ ограничена, то ряд $(\alpha_n b_n)$ имеет сумму.*

□ Положим $x(n) = \alpha_n$ и заметим, что

$$\sum_{l \leqslant m < n} \Delta x(m) = x(n) - x(l)\,, \quad \Delta y(m) = y(m+1) - y(m) = b_m.$$

По условию

$$|y(n)| \leqslant \gamma, \qquad |x(n)| = x(n)\,, \qquad |\Delta x(n)| = -\Delta x(n)$$

для некоторого $\gamma > 0$ и каждого n. Суммируя по частям и используя неравенство треугольника, получаем при $l < n$

$$\begin{aligned}\left|\sum_{l \leqslant m < n} \alpha_n b_n\right| &= \left|\sum_{l \leqslant m < n} x(m)\,\Delta y(m)\right| \leqslant \\ &\leqslant |x(n)\,y(n)| + |x(l)\,y(l)| + \sum_{l \leqslant m < n} |y(m+1)\,\Delta x(m)| \leqslant \\ &\leqslant \gamma\,(x(n) + x(l) - (x(n) - x(l))) = 2\gamma x(l) = 2\gamma\alpha_l.\end{aligned}$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Так как $\alpha_n \to 0$, то существует номер $n(\varepsilon)$ такой, что $\alpha_l \leqslant (2\gamma)^{-1}\varepsilon$ при всех $l \geqslant n(\varepsilon)$. Следовательно,

$$\left|\sum_{l\leqslant m<n} \alpha_n b_n\right| \leqslant \varepsilon \qquad\qquad (n > l \geqslant n(\varepsilon)).$$

Значит, ряд $(\alpha_n b_n)$ имеет сумму. ■

Вещественный ряд (a_n), у которого любые соседние члены a_n и a_{n+1} имеют разные знаки ($a_n a_{n+1} < 0$), называется *знакопеременным*. Будем для определенности считать, что $a_0 > 0$. Тогда $a_n = (-1)^n |a_n|$.

Признак Лейбница. *Если последовательность* $(|a_n|)$ *убывает и* $a_n \to 0$, *то знакопеременный ряд* (a_n) *имеет сумму.*

Признак Лейбница можно получить из признака Дирихле, положив $\alpha_n = |a_n|$ и $b_n = (-1)^n$, $n \geqslant 0$. Для ряда (b_n) частичные суммы с четными номерами равны единице, а с нечетными — нулю. Подчеркнем, что признаки Дирихле и Лейбница выявляют условную суммируемость, а не абсолютную.

Пример. Ряд $\left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ имеет сумму, а ряд $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ не имеет (конечной) суммы.

4.1.5. Суммирование семейств комплексных чисел сводится к суммированию их вещественных и мнимых частей.

Пусть $z_k = x_k + y_k i$, $k \in I$. Тогда семейство (z_k) суммируемо тогда и только тогда, когда суммируемы семейства (x_k) и (y_k). При этом

$$\sum z_k = \sum x_k + \left(\sum y_k\right) i.$$

Утверждение о суммируемости и выписанное равенство для сумм следуют непосредственно из определений, линейности конечного суммирования и предела.

Суммирование векторов в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$ сводится к суммированию их координат.

4.2. Абсолютная суммируемость

Вместе с каждым числовым семейством естественно связывается семейство абсолютных величин рассматриваемых чисел. Оно суммируемо тогда и только тогда, когда суммируемо исходное семейство. Это часто используется.

4.2.1. Рассмотрим вещественное семейство (x_i) и семейства $\left(x_i^+\right)$, $\left(x_i^-\right)$, $(|x_i|)$, $i \in I$. Здесь x^+, x^-, $|x|$ обозначают *положительную* и *отрицательную части* вещественного числа x и его абсолютное значение:

$$
\begin{aligned}
&x^+ = x \qquad (x \geqslant 0), && x^+ = 0 \qquad (x < 0);\\
&x^- = 0 \qquad (x \geqslant 0), && x^- = -x \qquad (x < 0);\\
&x = x^+ - x^-, && |x| = x^+ + x^-.
\end{aligned}
$$

По определению $x^- \geqslant 0$.

Составляя конечные суммы только из положительных или только из отрицательных чисел x_i и используя критерий суммируемости, легко убедиться в том, что суммируемость (x_i) эквивалентна одновременной суммируемости $\left(x_i^+\right)$ и $\left(x_i^-\right)$, а следовательно, и $(|x|_i) = \left(x_i^+\right) + \left(x_i^-\right)$. Благодаря линейности суммы, для суммируемого семейства (x_i) верны равенства

$$\sum x_i = \sum x_i^+ - \sum x_i^-, \qquad \sum |x_i| = \sum x_i^+ + \sum x_i^-.$$

Рассмотрим семейство (z_k) комплексных чисел $z_k = x_k + y_k i$ и вещественные семейства $\left(x_k^+\right)$, $\left(x_k^-\right)$, $\left(y_k^+\right)$, $\left(y_k^-\right)$, $(|z_k|)$. Из сказанного о вещественных семействах следует, что (z_k) суммируемо тогда и только тогда, когда суммируемы указанные семейства. В частности, семейство $(|z_k|)$ абсолютных величин $|z_k|$ чисел z_k. Благодаря линейности суммы, для суммируемого семейства (z_k) верно равенство

$$\sum z_k = \left(\sum x_k^+ - \sum x_k^-\right) + \left(\sum y_k^+ - \sum y_k^-\right) i.$$

4.2.2. Ясно, что направленность $(s(K))$ конечных сумм положительного семейства (x_i) возрастает: $s(K) \leqslant s(L)$ при $K \subseteq L$. по теореме о монотонной направленности сходимость $(s(K))$ эквивалентна ограниченности. Так как суммируемость числового семейства (z_k) эквивалентна его абсолютной суммируемости и ограниченность множества конечных сумм $\sum\limits_{k\in K} z_k$ эквивалентна ограниченности множества абсолютных конечных сумм $\sum\limits_{k\in K} |z_k|$, то верна

Теорема. *Числовое семейство суммируемо тогда и только тогда, когда множество его конечных сумм ограничено.*

Этот критерий суммируемости очень удобен. Он часто проверяется легче, чем критерий Коши. Для проверки суммируемости семейства широко применяется также следующий из теоремы

Принцип сравнения. *Числовое семейство (x_i) суммируемо тогда и только тогда, когда $|x_i| \leqslant q_i$ для некоторого суммируемого семейства (q_i).*

Ограниченность множества конечных сумм для мажоранты (q_i) влечет ограниченность множества конечных сумм для $(|x_i|)$ и, следовательно, суммируемость (x_i). Если семейство (x_i) суммируемо, то в качестве мажорирующих можно взять $q_i = |x_i|$.

Пример. Рассмотрим ряд "обратных квадратов" $x_n = 1/n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Заметим, что $x_1 = 1 = q_1$ и

$$x_n = \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{(n-1)\,n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = q_n \qquad (n > 1)\,.$$

Ряд (q_n) суммируем:

$$\sum_{m=1}^{n} q_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} \to 2.$$

Следовательно, ряд $\left(1/n^2\right)$ суммируем и имеет сумму, меньшую или равную двум. Можно доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Для проверки суммируемости последовательностей часто выбирается геометрическая прогрессия: $q_n = q^n$, $0 < q < 1$. Если последовательность суммируема только условно, то для нее принцип сравнения не верен. Контрпримером служит последовательность $x_n = (-1)^n/n$: эта последовательность условно суммируема, но не существует суммируемой последовательности (q_n) такой, что $1/n \leqslant q_n$.

4.2.3. Для установления абсолютной суммируемости числовых рядов эффективно применяются признаки Коши и д'Аламбера, следующие из принципа сравнения (4.2.2).

Признак Коши.

(1) Если $\overline{\lim}\,|x_n|^{1/n} < 1$, *то ряд* (x_n) *абсолютно суммируем;*

(2) Если $\overline{\lim}\,|x_n|^{1/n} > 1$, *то ряд* (x_n) *не имеет суммы.*

□ (1) Положим $\alpha_n = |x_n|^{1/n}$, $\overline{\alpha}_n = \sup\{\alpha_m : m \geqslant n\}$ и пусть $\alpha = \lim \overline{\alpha}_n = \overline{\lim}\alpha$ — верхний предел последовательности (α_n). Если последовательность (α_n) не ограничена, то $\alpha = \infty$. Неравенство $\alpha < 1$ означает, что $\overline{\alpha}_n \leqslant q = \alpha + \varepsilon < 1$ при $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$ и $\alpha_n \leqslant \overline{\alpha}_n \leqslant q < 1$ при $n \geqslant n(\varepsilon)$, откуда $|x_n| \leqslant q^n$ при $n \geqslant n(\varepsilon)$ и по признаку сравнения ряд (x_n) абсолютно суммируем.

(2) Пусть $\alpha > 1$ и $\alpha < \infty$. Тогда существует подпоследовательность $\alpha_{r(n)} \to \alpha$, для которой $\alpha_{r(n)} \geqslant \alpha - \varepsilon > 1$ при $n \geqslant n(\varepsilon)$. Следовательно, $\left|x_{r(n)}\right| > 1$ при $n \geqslant n(\varepsilon)$, $x_n \nrightarrow 0$ и ряд (x_n) не имеет суммы. Он не суммируем даже условно. Если $\alpha = \infty$, то последовательность (x_n) не ограничена вместе с (α_n) и поэтому не может иметь сумму. ■

Рассмотрим последовательность чисел $x_n \neq 0$, для которой определена последовательность отношений x_{n+1}/x_n.

Признак д'Аламбера.

(1) Если $\overline{\lim}\,|x_{n+1}/x_n| < 1$*, то ряд* (x_n) *абсолютно суммируем;*

(2) Если $\underline{\lim}\,|x_{n+1}/x_n| > 1$*, то ряд* (x_n) *не имеет суммы.*

□ (1) Доказательство почти такое же, как для признака Коши. Пусть $\gamma_n = |x_{n+1}/x_n|$ и $\beta = \overline{\lim}\gamma_n < 1$. Тогда существует $q \in]0, 1[$ такое, что $\gamma_n \leqslant q$ и $|x_{n+1}| \leqslant q\,|x_n|$ при $n \geqslant n\,(0)$. Следовательно, $\left|x_{n+n(0)}\right| \leqslant cq^n$ для $c = \left|x_{n(0)}\right|$ и по принципу сравнения ряд (x_n) абсолютно суммируем.

(2) Пусть $\underline{\gamma_n} = \inf\{\gamma_m : m \geqslant n\}$ и $\alpha = \lim \underline{\gamma_n} = \underline{\lim}\gamma_n$ — нижний предел последовательности (γ_n). Неравенство $\alpha > 1$ для $\alpha \neq \infty$ означает, что $\gamma_n \geqslant \underline{\gamma}_n \geqslant \alpha - \varepsilon = 1$ при $\varepsilon = \alpha - 1 > 0$ и $n \geqslant n\,(0)$. Следовательно, $|x_{n+1}/x_n| \geqslant 1$, $|x_n| \geqslant \left|x_{n(0)}\right| > 0$ при $n \geqslant n\,(0)$ и $x_n \nrightarrow 0$. Ряд (x_n) не имеет суммы. Он не суммируем даже условно. Если $\alpha = \infty$, то тоже $|x_{n+1}/x_n| \geqslant 1$ при $n \geqslant n\,(0)$ и $x_n \nrightarrow 0$. ■

Замечание. Если фигурирующие в признаках Коши и д'Аламбера пределы равны 1, то нельзя сделать никакого заключения о суммируемости ряда: он может не иметь суммы, быть условно или абсолютно суммируемым. Когда рассматриваемые в этих признаках последовательности $\left(|x_n|^{1/n}\right)$, $(|x_{n+1}/x_n|)$ сходятся, то нижний и верхний пределы в условиях заменяются пределами.

Примеры. Если $x_n = x^n$, то $|x_n|^{1/n} = |x|$ и по признаку Коши при $|x| < 1$ ряд (x^n) абсолютно суммируем, а при $|x| > 1$ — не имеет суммы. (При $x = 1$ он ее тоже не имеет, но это не следует из признака.)

Если $x_n = x^n/n!$ $(x \neq 0)$, то $|x_{n+1}/x_n| = |x|\,/\,(n+1) \to 0$ и по признаку д'Аламбера ряд $(x^n/n!)$ абсолютно суммируем.

4.3. Коммутативность и ассоциативность

Члены суммируемых семейств можно переставлять и разбивать на группы.

4.3.1. Рассмотрим числовое семейство (x_i), *перестановку* p его множества индексов I (взаимно однозначное отображение множества I на себя) и *переставленное семейство* (y_i) с членами $y_i = x_{p(i)}$. Коммутативность суммирования означает, что суммируемость (x_i) влечет суммируемость (y_i) и $\sum x_i = \sum y_i$.

Теорема. *Суммирование коммутативно.*

В самом деле, каждому конечному $K \subseteq I$ соответствует конечное $L = p\,(K) = \{j = p\,(i) : i \in K\}$, и верны равенства

$$t\,(K) = \sum_{i\in K} y_i = \sum_{i\in K} x_p\,(i) = \sum_{j\in L} x_j = s\,(L)\,.$$

Поэтому из сходимости направленности конечных сумм для (x_i) следует сходимость направленности конечных сумм для (y_i) и равенство их пределов.

Например, в суммируемой последовательности можно переставить четные и нечетные члены.

4.3.2. Рассмотрим семейство (x_i) и разбиение множества индексов I на части $A\,(\beta)$, $\beta \in B$. Если (x_i) суммируемо, то, благодаря ограниченности множества его конечных сумм, существуют также суммы $s_\beta = \sum\limits_{i\in A(\beta)} x_i$. Ассоциативность суммирования означает, что семейство (s_β) суммируемо и имеет ту же сумму, что и (x_i):

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{\beta\in B}\left(\sum_{i\in A(\beta)} x_i\right).$$

Теорема. *Суммирование ассоциативно.*

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что конечные суммы для семейства (s_β) составляются из конечных сумм (x_i), разбитых по выбранным множествам A_β. Благодаря линейности пределы получающихся направленностей равны.

Например, в суммируемой последовательности можно сгруппировать все четные и все нечетные члены, суммируя их отдельно, а потом складывая результаты.

4.4. Двойные и повторные суммы.

Часто приходится суммировать семейства, имеющие несколько индексов. Формально можно свести дело к двум индексам.

4.4.1. Рассмотрим семейство $(x_{\alpha\beta})$, индексированное парами $\alpha\beta$ элементов $\alpha \in A$, $\beta \in B$ множеств A, B. Будем для элементов такого *двойного семейства* использовать функциональную запись: $x_{\alpha\beta} = x\,(\alpha, \beta)$. Для каждых $\alpha \in A$ и $\beta \in B$ определены также *простые* семейства $(x\,(\alpha, \cdot))$ и $(x\,(\cdot, \beta))$ с индексами соответственно из B и A. В функциональной записи

$$x\,(\alpha, \cdot)\,(\beta) = x\,(\cdot, \beta)\,(\alpha) = x\,(\alpha, \beta)\,.$$

если двойное семейство суммируемо, то благодаря ограниченности множества его конечных сумм простые семейства тоже суммируемы. Суммы

$$s\,(\alpha) = \sum_{\beta} x\,(\alpha, \beta)\,, \qquad t\,(\beta) = \sum_{\alpha} x\,(\alpha, \beta)$$

называются *простыми*. Из суммируемости двойного семейства $(x(\alpha, \beta))$ следует также суммируемость семейств $(s\,(\alpha))$ и $(t\,(\beta))$. Сумма $s = \sum\limits_{\alpha,\beta} x\,(\alpha, \beta)$ называется *двойной*, а суммы

$$\sum_{\alpha} s\,(\alpha) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} x\,(\alpha, \beta)\,, \qquad \sum_{\beta} t\,(\beta) = \sum_{\beta} \sum_{\alpha} x\,(\alpha, \beta)$$

— *повторными*.

Из теоремы об ассоциативности суммирования следует

Теорема. *Если существует двойная сумма, то существуют обе повторные и все три суммы равны.*

Коротко:

$$\sum_{\alpha,\beta} x(\alpha,\beta) = \sum_{\alpha}\sum_{\beta} x(\alpha,\beta) = \sum_{\beta}\sum_{\alpha} x(\alpha,\beta).$$

Возможность переставлять порядок суммирования часто позволяет существенно упростить вычисления.

Если $x(\alpha,\beta) = y(\alpha)\,z(\beta)$, то выписанное равенство превращается в

$$\sum_{\alpha,\beta} y(\alpha)\,z(\beta) = \sum_{\alpha} y(\alpha) \sum_{\beta} z(\beta).$$

Замечание. Если $x(\alpha,\beta) \geqslant 0$, то из суммируемости семейств $x(\alpha,\cdot)$ и $x(\cdot,\beta)$, а также семейства сумм $s(\alpha) = \sum\limits_{\beta} x(\alpha,\beta)$ или $t(\beta) = \sum\limits_{\alpha} x(\alpha,\beta)$ следует суммируемость двойного семейства $x(\cdot,\cdot)$ и возможность применять теорему.

Пусть

$$\sum_{\beta\in L} x(\alpha,\beta) \leqslant s(\alpha), \qquad \sum_{\alpha\in K} x(\alpha,\beta) \leqslant t(\beta)$$

для $\alpha \in A$, $\beta \in B$ и конечных $K \subseteq A$, $L \subseteq B$, а также пусть $\sum\limits_{\alpha\in K} s(\alpha) \leqslant c < \infty$. Тогда

$$\sum_{\alpha\in K,\beta\in L} x(\alpha,\beta) = \sum_{\alpha\in K}\sum_{\beta\in L} x(\alpha,\beta) \leqslant \sum_{\alpha\in K} s(\alpha) \leqslant c.$$

Значит, двойное семейство $x(\cdot,\cdot) = (x(\alpha,\beta))$ суммируемо.

В частности, если $x(\alpha,\beta) = y(\alpha)\,z(\beta)$, $y(\alpha) \geqslant 0$, $z(\beta) \geqslant 0$ и

$\sum\limits_{\alpha\in K} y(\alpha) \leqslant s,\ \sum\limits_{\beta\in L} z(\beta) \leqslant t$, то

$$\sum_{\alpha\in K,\beta\in L} (y(\alpha)\, z(\beta)) = \sum_{\alpha\in K} y(\alpha) \sum_{\beta\in L} z(\beta) \leqslant st,$$
$$\sum_{\alpha,\beta} (y(\alpha)\, z(\beta)) = \sum_{\alpha} y(\alpha) \sum_{\beta} z(\beta)\,.$$

4.4.2. Рассмотрим двойное семейство чисел $x(m,n) = 1/n^m$ ($m > 1$, $n > 1$ натуральные). Его суммируемость следует из неравенств

$$s(K) \leqslant \sum_{1<n<k} \left(\sum_{1<m<k} \frac{1}{n^m} \right) = \sum_{1<n<k} \frac{1 - 1/n^k}{n(n-1)} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{1<n<k} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{1<n<k} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{k-1} \leqslant 1,$$

где k строго больше всех номеров m, n, составляющих пары (m,n) из взятого конечного множества K.

Используя теорему о двойной и повторных суммах, получаем:

$$\sum_{m,n} \frac{1}{n^m} = \sum_{n} \sum_{m} \frac{1}{n^m} = \sum_{n} \frac{1}{n(n-1)} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k-1} \right) = 1.$$

Суммировать сначала по n, а потом по m было бы сложнее.

5. Степенные ряды

Последовательности степенных функций с коэффициентами называются степенными рядами. Суммы степенных рядов играют важную роль в математическом анализе и его приложениях.

5.1. Каждая последовательность комплексных чисел c_n, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, определяет последовательность функций со значениями $c_n z^n$ ($z \in C$). Эта последовательность называется *степенным рядом с коэффициентами* c_n.

Примеры.

1. *Геометрическая прогрессия*: $c_n = 1$ для всех номеров n.

2. *Полиномиальный ряд*: $c_n = 0$ для всех номеров n, больших некоторого номера m.

3. *Экспоненциальный ряд*: $c_n = 1/n!$ $(0! = 1)$.

4. *Гармонический ряд*: $c_0 = 0$, $c_n = 1/n$ $(n > 0)$.

5. *Биномиальный ряд*: $c_n = c^{(n)}/n!$

Здесь c обозначает произвольное комплексное число, а $c^{(n)}$ — его *n-ю обобщенную степень*: $c^{(0)} = 1$, $c^{(1)} = c$, $c^{(2)} = c(c-1)$, $c^{(n)} = c(c-1)\ldots(c-n+1)$ для всех номеров $n > 2$. В частности, если $c = p$ — целое положительное число, то $c^{(n)}/n! = p^{(n)}/n! = c_n(p)$ — коэффициент при z^n, получающийся при возведении в p-ю степень бинома $1 + z$:

$$(1+z)^p = \sum \left(p^{(n)}/n!\right) z^n \qquad (0 \leqslant n \leqslant p)\,.$$

В этом случае $p^{(n)} = 0$ для всех номеров $n > p$ и биномиальный ряд превращается в специальный полиномиальный ряд.

Если $z = 0$, то $c_n z^n = c_n 0^n = 0$ при $n > 0$ и все частичные суммы этого ряда равны c_0. Следовательно, сумма самого ряда тоже равна c_0. При $z = 0$ любой степенной ряд имеет сумму. Степенные ряды, которые при всех $z \neq 0$ не имеют суммы, называются *вырожденными*.

Пример. Пусть $c_n = n^n$ $(0^0 = 1)$. Тогда $|n^n z^n| \geqslant 1$ при $n \geqslant 1/|z|$, $z \neq 0$. Следовательно, $n^n z^n \to 0$ при $z \neq 0$ и ряд не имеет суммы.

Всюду в дальнейшем будут рассматриваться только *невырожденные ряды* $c_n z^n$, которые имеют сумму при некоторых $z \neq 0$.

5.2. Будем считать, что $x/0 = \infty$ и $x/\infty = 0$ для каждого $x > 0$ и что плоскость C есть круг бесконечного радиуса, имеющий центром любую точку: $C = B(c, \infty)$ $(c \in C)$.

Рассмотрим произвольный степенной ряд $c_n z^n$ и связанную с ним последовательность $a_n = |c_n|^{1/n}$ $(n > 0)$. Если эта последовательность не ограничена, то ряд $c_n z^n$ вырожденный. Поэтому будем предполагать, что a_n ограничена и для нее существует конечный верхний предел: $\alpha = \overline{\lim}\left(|c_n|^{1/n}\right) < \infty$.

Конечное или бесконечное число $r = 1/\alpha$ называется *радиусом суммируемости* или, коротко, просто *радиусом* степенного ряда $c_n z^n$.

Примеры.

1. *Геометрическая прогрессия*: $c_n = 1$, $a_n = 1$, $\alpha = 1$, $r = 1$.

2.*Полиномиальный ряд*: $c_n = 0$ $(n > m)$, $a_n = 0$ $(n > m)$, $\alpha = 0$, $r = \infty$.

3. *Экспоненциальный ряд*: $c_n = 1/n!$, $a_n = 1/(n!)^{1/n}$, $\alpha = 0$, $r = \infty$.

4. *Гармонический ряд*: $c_n = 1/n$ $(n > 0)$, $a_n = 1/n^{1/n}$, $\alpha = 1$, $r = 1$.

5. *Биномиальный ряд*: если $c = p \in \mathbb{N}$, то $c_n = p^{(n)}/n! = 0$ при $n > p$ и $\alpha = 0$, $r = \infty$; если $c \notin \mathbb{N}$, то $c_n = c^{(n)}/n!$, $a_n = \left|c^{(n)}/n!\right|^{1/n}$, $\alpha = 1$, $r = 1$.

Доказательства того, что $(n!)^{1/n} \to \infty$, $n^{1/n} \to 1$, $\left|c^{(n)}/n!\right|^{1/n} \to 1$, есть в 3.1.3.

Рассмотрим последовательность комплексных чисел c_n такую, что последовательность $|c_n|^{1/n}$ ограничена.

Теорема.

1) *Если $|z| < r$, то ряд $c_n z^n$ абсолютно суммируем.*

2) *Если $|z| > r$, то ряд $c_n z^n$ не имеет суммы.*

□ Применим признак Коши суммируемости рядов. Заметим, что

$$\overline{\lim}\, |c_n z^n|^{1/n} = \overline{\lim}\, |c_n|^{1/n} z^n = \alpha\, |z| = |z|/r.$$

(Если $\alpha = 0$, то по соглашению $r = 1/\alpha = \infty$ и $|z|/r = 0$.) Если $|z| < r$, то $|z|/r < 1$ и ряд $c_b z^n$ абсолютно суммируем. Если $|z| > r$, то $|z|/r > 1$ и ряд $c_b z^n$ не имеет суммы. ■

Таким образом, ряд $c_n z^n$ абсолютно суммируем при $z \in B(0,r)$. В частности, если $r = \infty$, то $|z| < r$ и ряд $c_n z^n$ абсолютно суммируем при любом $z \in C = B(0,\infty)$. Круг $B(0,r)$ называется кругом суммируемости степенного ряда $c_n z^n$. При $r > 0$ этот ряд невырожденный. Вместо суммируемости часто говорят о *сходимости* степенного ряда.

Замечание. Если $|z| = r$, то вопрос о суммируемости ряда $c_n z^n$ требует дополнительного исследования. При одних значениях z ряд может иметь сумму, а при других — нет.

Контрпример. Гармонический ряд z^n/n $(n > 0)$ имеет сумму при $z = -1$ и не имеет суммы при $z = 1$ (4.1.4).

Часто бывает полезна

Лемма Абеля. *Если степенной ряд* $(c_n z^n)$ *имеет сумму при* $z = z_0 \neq 0$, *то он абсолютно суммируем при* $|z| < |z_0|$.

□ Из условной сходимости $(c_n z_0^n)$ следует сходимость и ограниченность этой последовательности. Пусть $|c_n z_0^n| \leqslant \gamma$ и $q = |z/z_0| < 1$. Тогда

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n \, (z/z_0)^n| \leqslant \gamma q^n.$$

По принципу сравнения ряд $(c_n z^n)$ абсолютно суммируем. ■

Следствие. *Если степенной ряд* $(c_n z^n)$ *не имеет суммы при* $z = z_0$, *то он не имеет суммы и при всех* z *с* $|z| > |z_0|$.

□ Если бы ряд $(c_n z_1^n)$ имел сумму при $|z_1| > |z_0|$, то по лемме имел бы сумму и ряд $(c_n z_0^n)$. ■

6. Элементарные функции

Элементарные функции подробно описаны в [3]. В [5] отдельная глава посвящена основной элементарной функции — экспоненте. Здесь кратко перечисляются некоторые факты, которые используются в книге.

6.1. Экспонента

Так называется сумма экспоненциального ряда $(z^n/n!)$ с произвольным комплексным z.

6.1.1. Назовем *экспонентой* функцию $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ со значениями

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Абсолютная суммируемость ряда $(z^n/n!)$ при любом $z \in \mathbb{C}$ следует из признака д'Аламбера:

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \mid / \frac{z^n}{n!} \right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Выделяется вещественное число

$$e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Как нетрудно проверить, для любого $n \in \mathbb{N}$ верны неравенства

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} < e < \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} + \frac{2}{(n+1)!}.$$

При $n = 5$ получаются неравенства $2.716 < e < 2.719$. Число e иррациональное.

6.1.2. Одно из важнейших свойств экспоненты выражает
Теорема сложения.

$$\exp(c + z) = \exp(c) \cdot \exp(z) \qquad (c, z \in \mathbb{C}).$$

□ используя биномиальную формулу и правила действий с суммами, получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c+z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+m=n} \frac{c^k}{k!}\frac{z^m}{m!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}. \quad \blacksquare$$

Из теоремы сложения по индукции можно вывести равенство $\exp(n) = e^n$ $(n \in \mathbb{N})$. Это служит основанием для показательной записи экспоненты:

$$\exp(z) = e^z \qquad\qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Теорема сложения в такой записи имеет привычный вид:

$$e^{c+z} = e^c \cdot e^z \qquad\qquad (c, z \in \mathbb{C}).$$

Следствие 1. $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

□ В самом деле по теореме сложения

$$e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1.$$

Равенства $e^0 = \exp(0) = 1$ вытекают из определений. ■

Следствие 2. $e^z \neq 0$ $(z \in \mathbb{C})$.

□ Если бы $e^z = 0$ при некотором $z \in \mathbb{C}$, то равенство $e^z \cdot e^{-z} = 1$ было бы невозможно. ■

Следствие 3. $(e^z)' = e^z$ $(z \in \mathbb{C})$.

□ Производная для комплексной переменной определяется так же, как для вещественной. По теореме сложения для каждых $z, \Delta \in \mathbb{C}$ $(\Delta \neq 0)$ верны равенства

$$\frac{e^{z+\Delta} - e^z}{\Delta} = e^z \frac{e^\Delta - 1}{\Delta} = e^z \left(1 + \Delta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta^{n-2}}{n!}\right).$$

Так как при $|\Delta| \leqslant 1$ верны неравенства

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta^{n-2}}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\Delta^{n-2}|}{n!} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} < e,$$

то

$$(e^z)' = \lim_{\Delta \to 0} \frac{e^{z+\Delta} - e^z}{\Delta} = e^z. \quad \blacksquare$$

Совпадение с производной является одним из замечательных свойств экспоненты.

6.1.3. По теореме сложения для комплексного числа $z = x + it$ $(x, t \in \mathbb{R})$ верно равенство

$$e^{x+it} = e^x \cdot e^{it}.$$

Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со значениями $f(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ называется *вещественной* экспонентой. А функция $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ со значениями $g(t) = e^{it}$ $(t \in \mathbb{R})$ называется *мнимой* экспонентой.

Вещественная экспонента определяется равенством

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Так как $e^z \neq 0$ $(z \in \mathbb{C})$, то из теоремы сложения следует, что вещественная экспонента строго положительна:

$$e^x = e^{x/2} e^{x/2} > 0 \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Поэтому вследствие $(e^x)' = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ экспонента строго возрастает. Кроме того,

$$e^x \to 0 \qquad (x \to -\infty), \qquad\qquad e^x \to \infty \qquad (x \to \infty).$$

Это следует из неравенства $e^x > x$ при $x > 0$ и равенства $e^{-x} = 1/e^x$.

По теореме Больцано из всего вышесказанного следует, что вещественная экспонента взаимно однозначно отображает прямую $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ на ее строго положительную часть $]0, \infty[$. Обратная функция $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ называется *натуральным логарифмом*.

Его свойства определяются свойствами вещественной экспоненты. В частности, из теоремы сложения для экспоненты следует теорема умножения для логарифма:

$$\ln(x+y) = \ln x + \ln y \qquad\qquad (x, y > 0).$$

Логарифм ln является гладкой функцией. По правилу дифференцирования обратной функции получаем:

$$(\ln x)' = 1/(e^u)' = 1/e^u = 1/x \qquad\qquad (x = e^u).$$

Для каждого $a > 0$ равенство

$$a^z = e^{x \ln a} \qquad\qquad (z \in \mathbb{C})$$

определяет *показательную функцию* с основанием a. Ее свойства определяются свойствами экспоненты и логарифма.

6.2. Тригонометрические функции

Основными тригонометрическими функциями являются косинус и синус. Они определяются как вещественная и мнимая части функции e^{it} $(t \in \mathbb{R})$.

6.2.1. По определению

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{t^n}{n!}. \tag{1}$$

Так как

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^{n+4} = i^n \quad (n \geqslant 0),$$

то, суммируя отдельно вещественные и мнимые члены ряда (1), получаем

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \tag{2}$$

где

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \tag{3}$$

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{4}$$

Суммируемость всех этих рядов следует из суммируемости экспоненциального ряда. Равенства (3) и (4) определяют функции *косинус* и *синус*. Равенство (2) называется *формулой Эйлера*.

Косинус является *четной* функцией, а синус — *нечетной*:

$$\cos(-t) = \cos t, \qquad \sin(-t) = -\sin t.$$

Это следует из равенств (3) и (4). Поэтому равенство (2) эквивалентно

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t. \tag{5}$$

Складывая (2), (5) и вычитая (5) из (2), получаем:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \tag{6}$$

Равенства (5) и (6) тоже называют формулами Эйлера.

6.2.2. Равенства (2) и (5) показывают, что комплексное число e^{-it} является сопряженным для e^{it}: $(e^{it})^* = e^{-it}$, откуда

$$\left|e^{it}\right|^2 = e^{it}(e^{it})^* = e^{it}e^{-it} = 1, \qquad \cos^2 t + \sin^2 t = 1. \tag{7}$$

Из равенства (7) следуют неравенства

$$|\cos t| \leqslant 1, \qquad |\sin t| \leqslant 1.$$

Для косинуса и синуса верна

Теорема сложения.

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,\\ \sin(x+y) &= \cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y.\end{aligned} \tag{8}$$

$\square$ Здесь $x, y \in \mathbb{R}$. Умножая второе из равенств (8) на i, складывая результат с первым, применяя к левой части формулу Эйлера и при перегруппировке правой используя $i^2 = -1$, убеждаемся в том, что равенства (8) эквивалентны

$$\begin{aligned}e^{i(x+y)} &= (\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y) + i(\cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y) =\\ &= \cos x \cdot (\cos y + i \sin y) + i \sin x(\cos y + i \sin y) = e^{ix} \cdot e^{iy}.\end{aligned}$$

Равенства (8) следуют из теоремы сложения для экспоненты. $\blacksquare$

Равенства (7) и (8) показывают, что определенные формулами (3), (4) или (6) функции обладают обычными свойствами основных тригонометрических функций.

Дифференцируя равенства (6), получаем

$$\cos' t = -\sin t, \qquad \sin' t = \cos t, \tag{9}$$

откуда

$$\cos'' t = -\cos t, \qquad \sin'' t = -\sin t. \tag{10}$$

Обе функции являются решением одного и того же дифференциального уравнения. Они различаются лишь условиями $\cos 0 = 1$, $\cos' 0 = 0$ и $\sin 0 = 0$, $\sin' 0 = 1$. Равенства (9) и (10) тоже показывают, что функции cos и sin обладают нужными свойствами. Эти равенства вместе с условиями однозначно выделяют косинус и синус среди гладких функций на $\mathbb{R}$ ([5]). Можно доказать, что равенства (7), (8) и $\sin' 0 = 1$ однозначно определяют косинус и синус среди всех вещественных функций на $\mathbb{R}$.

6.2.3. Знание производных позволяет исследовать поведение косинуса и синуса.

Заметим, что $\cos 0 = 1$, $\cos 2 < 0$:

$$\cos 2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} = -\frac{1}{3} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{4^n}{(2n)!}\left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) < 0.$$

По теореме Больцано существует $\alpha \in]0, 2[$ такое, что $\cos\alpha = 0$. Вместе с тем $\sin t > 0$ при $t \in]0, 2[$:

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{4n+1}}{(4n+1)!}\left(1 - \frac{t^2}{(4n+2)(4n+3)}\right) > 0.$$

Так как $\cos t = -\sin t < 0$ при $t \in]0, 2[$, то косинус строго убывает на этом интервале и $t = \alpha$ является единственной точкой, в которой $\cos t = 0$. Благодаря (7) верно равенство $\sin\alpha = 1$. Отсюда по теореме сложения

$$\cos(x+\alpha) = -\sin x, \qquad \sin(x+\alpha) = \cos x,$$

откуда

$$\begin{aligned} &\sin(x+2\alpha) = \cos(x+\alpha) = -\sin x, \\ &\cos(x+2\alpha) = -\sin(x+\alpha) = -\cos x, \\ &\cos(x+4\alpha) = \cos x, \qquad \sin(x+4\alpha) = \sin x \end{aligned}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, косинус и синус имеют период 4α. Нулями косинуса являются точки $t = \alpha \pm 2n\alpha$, а нулями синуса — точки $t = \pm n\alpha$ (n = 0, 1, 2. ...).

Равенства (9) и (10) описывают поведение косинуса и синуса на интервале $]-2\alpha, 2\alpha]$. Так как эти функции периодические, то этим описывается их поведение на всей прямой $\mathbb{R}$.

6.2.4. Исследование поведения косинуса и синуса показывает, что мнимая экспонента взаимно однозначно отображает интервал $]-2\alpha, 2\alpha]$ на единичную окружность $S = \{z : |z| = 1\}$ плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Мнимая экспонента вместе с косинусом и синусом имеет период 4α:

$$e^{i(t+4\alpha)} = \cos(t+4\alpha) + i\sin(ty+4\alpha) = \cos t + i\sin t = e^{it}.$$

Равенство $e^{is} = 1$ возможно тогда и только тогда, когда $s = \pm 4n\alpha$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Поэтому $e^{i(t+s)} = e^{it} \cdot e^{is} \neq e^{it}$ при $0 < s < 4\alpha$, что обеспечивает взаимную однозначность отображения интервала $]-2\alpha, 2\alpha]$ на окружность S.

Длину окружности S принято обозначать 2π. Из равенства $2\pi = 4\alpha$ следует, что $\alpha = \pi/2$. Полученные равенства можно переписать в привычном виде:

$$\begin{aligned} &e^{i(t+2\pi k)} = e^{it}, \\ &\cos(t+2\pi k) = \cos t, \qquad \sin(t+2\pi k) = \sin t \end{aligned}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ и $k \in \mathbb{Z}$. Интервал $]-2\alpha, 2\alpha] =]-\pi, \pi]$.

6.2.5. Рассмотрим произвольное число $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ и заметим, что $z = |z| \cdot z/|z|$. Так как $|z/|z|| = |z|/|z| = 1$, то существует единственное число $\arg z \in]-\pi, \pi]$ такое, что $z/|z| = \exp(i \arg z)$ и

$$z = |z|\, e^{i \arg z}.$$

Число $\arg z$ называется аргументом комплексного числа $z \neq 0$. Если $x > 0$, то $\arg x = 0$. Если $x < 0$, то $\arg z = \pi$. Кроме того, $\arg(iy) = \pi/2$ при $y > 0$ и $\arg(iy) = -\pi/2$ при $y < 0$.

Равенство $z_1 = z_2$ комплексных чисел $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ эквивалентно равенствам $|z_1| = |z_2|$, $\arg z_1 = \arg z_2$.

Геометрически величина $\arg z$ выражает угол между векторами z и $e_1 = (0, 1)$ координатной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Приняты обозначения:

$$z = re^{i\varphi} \qquad\qquad (r = |z| > 0, \varphi \in]-\pi, \pi]) \,.$$

Из теоремы сложения следует, что

$$z^n = r^n e^{in\varphi} \qquad\qquad (z \neq 0, n \in \mathbb{N}) \,.$$

Формула Эйлера позволяет получить отсюда *формулу Муавра*

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \,.$$

Литература

[1] *Энциклопедия элементарной математики. Т.1. Арифметика.* Москва, Гостехиздат, 1951.

[2] *Энциклопедия элементарной математики. Т.2. Алгебра.* Москва, Гостехиздат, 1951.

[3] *Энциклопедия элементарной математики. Т.3. Функции и пределы (основы анализа).* Москва, Гостехиздат, 1952.

[4] Савельев Л. Я. *Лекции по математическому анализу. Часть 1.* Новосибирск, НГУ, 1969.

[5] Савельев Л. Я. *Лекции по математическому анализу. Части 2.1, 2.2–3.* Новосибирск, НГУ, 1973.

[6] Савельев Л. Я. *Интегрирование равномерно измеримых функций.* Новосибирск, НГУ, 1984.

[7] Савельев Л. Я. *Приложения к теории вероятностей.* Новосибирск, НГУ, 1989.

[8] Савельев Л. Я. *Комбинаторика и вероятность.* Новосибирск, Наука, 1975.

[9] Грэхем Р., Кнут Д., Поташник О. *Конкретная математика. Основание информатики.* Москва, Мир, 1998.

[10] Робертс Ф. С. *Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам.* Москва, Наука, 1986.

[11] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1.* Москва, Мир, 1984.

[12] Яглом А. М., Яглом И. М. *Вероятность и информация.* Москва, Наука, 1973.

Алфавитный указатель