Домашняя работа по геометрии за 9 класс

С задачами повышенной трудности

к учебнику «Геометрия. 7-9 класс»
Л.С. Атанасян и др., М.: «Просвещение», 2001 г.

учебно-практическое пособие

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА X. МЕТОД КООРДИНАТ

911.

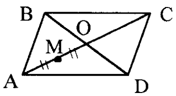
а) 2=0,5$|k|$, $|k|=4$, т.к. $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{n}$, то $k<0$ $k=-4$.

б) 240=12$|k|$, $|k|=20$, т.к. $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{n}$, то $k>0$ $k=20$.

в) 400=400$|k|$, $|k|=1$, т.к. $\vec{m}\uparrow\downarrow\vec{n}$, то $k<0$ $k=-1$.

г) $\sqrt{50}=\sqrt{2}\ |k|$, $|k|=\sqrt{25}$ =5, т.к. $\vec{m}\uparrow\uparrow\vec{n}$, то $k>0$ $k=5$

912.



Дано: ABCD – параллелограмм; AC∩BD=O;
M∈AO, AM=MO.
Найти k.

а) $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{AC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AO}$ и $\left|\overrightarrow{AC}\right|$=2$\left|\overrightarrow{AO}\right|$, то k=2;

б) $\overrightarrow{BO}=k\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BO}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BD}$ и $|BO|=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{BD}\right|$, то $k=\dfrac{1}{2}$;

в) $\overrightarrow{OC}=k\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{OC}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CA}$ и $\left|\overrightarrow{OC}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA}\right|$, то $k=-\dfrac{1}{2}$;

г) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DC}$ и $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{DC}\right|$, то $k=1$;

д) $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{BC}\uparrow\downarrow\overrightarrow{DA}$ и $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{DA}\right|$, то $k=-1$;

е) $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AM}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CA}$ и $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\dfrac{1}{4}\left|\overrightarrow{CA}\right|$, то $k=-\dfrac{1}{4}$;

ж) $\overrightarrow{MC}=k\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AM}$ и $\left|\overrightarrow{MC}\right|=3\left|\overrightarrow{AM}\right|$, то $k=3$;

з) $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{AC}\uparrow\downarrow\overrightarrow{CM}$ и $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\dfrac{4}{3}\left|\overrightarrow{CM}\right|$, то $k=-\dfrac{4}{3}$;

и) $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ не коллинеарные $\Rightarrow$ нельзя вычислить;

к) $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BD}$ не коллинеарные $\Rightarrow$ нельзя вычислить.

913.

а) да; б) да.

Т.к. сумма коллинеарных векторов есть коллинеарный им вектор.

914.

Дано: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

а) Доказать: $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ не коллинеарны.

<u>Доказательство</u> от противного.

Пусть $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарные, получим $\vec{a}+\vec{b}$ $=k(\vec{a}-\vec{b})$, откуда

$$\vec{a}+\vec{b}=k\vec{a}-k\vec{b}; \qquad \vec{a}(1-k)=\vec{b}(-1-k); \qquad \vec{a}=\frac{-1-k}{1-k}\vec{b},$$

пусть $\frac{-1-k}{1-k}=d$; тогда $\vec{a}=d\vec{b}$ — противоречие, т.к. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, следовательно $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ не коллинеарны.

б) Доказать: $(2\vec{a}-\vec{b})$ и $(\vec{a}+\vec{b})$ не коллинеарны.

<u>Доказательство</u> от противного.

Пусть $(2\vec{a}-\vec{b})$ и $(\vec{a}+\vec{b})$ коллинеарные, тогда $(2\vec{a}-\vec{b})=k(\vec{a}+\vec{b})$, откуда

$$2\vec{a}-\vec{b}=k\vec{a}+k\vec{b}, \qquad \vec{a}(2-k)=\vec{b}(k+1), \qquad \vec{a}=\frac{k+1}{2-k}\vec{b},$$

т.е. $\vec{a}=d\vec{b}$ — противоречие, т.к. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарные по условию.

в) Доказать: $(\vec{a}+\vec{b})$ и $(\vec{a}-3\vec{b})$ не коллинеарные.

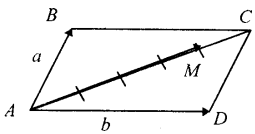
<u>Доказательство</u> от противного.

Пусть $(\vec{a}+\vec{b})$ и $(\vec{a}+3\vec{b})$ коллинеарные, тогда $(\vec{a}+\vec{b})=k(\vec{a}+3\vec{b})$, откуда

$$\vec{a}+\vec{b}=k\vec{a}+3k\vec{b}, \qquad \vec{a}(1-k)=\vec{b}(3k-1), \qquad \vec{a}=\frac{3k-1}{1-k}\vec{b},$$

т.е. $\vec{a}=d\vec{b}$ – противоречие, т.к. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарные по условию.

915.



Дано: ABCD – параллелограмм; M∈AC, AM:MC=4:1.

Разложить: $\overrightarrow{AM}$ по $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$

<u>Решение:</u>

$\overrightarrow{AM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AC}$ и $|AM|=\frac{4}{5}|\overrightarrow{AC}|$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, то $\overrightarrow{AM}=\frac{4}{5}(\vec{a}+\vec{b})$.

916.

Дано: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

Найти x, y.

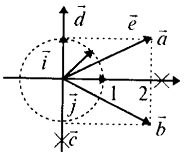
а) $3\vec{a} - x\vec{b} = y\vec{a} + \vec{b}$, то y = 3, x = –1

б) $4\vec{a} - x\vec{a} + 5\vec{b} + y\vec{b} = \vec{0}$, то x = 4, y = –5

в) $x\vec{a} + 3\vec{b} - y\vec{b} = \vec{0}$, то $x = 0$, $y = 3$

г) $\vec{a} + \vec{b} - 3y\vec{a} + x\vec{b} = \vec{0}$, то $y = \frac{1}{3}$, $x = -1$

917.



$\vec{a}\,\{3; 0\}$; $\vec{b}\,\{2; -1\}$;

$\vec{c}\,\{0; -3\}$; $\vec{d}\,\{1; 1\}$;

$\vec{e}\,\{2; \sqrt{2}\}$.

918.

$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{c} = 2\vec{i}$;

$\vec{d} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$; $\vec{e} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$; $\vec{f} = -4\vec{i} - 5\vec{j}$.

919.

$\vec{a}\,\{2; 3\}$; $\vec{b}\,\{-\frac{1}{2}; -2\}$; $\vec{c}\,\{8; 0\}$;

$\vec{d}\,\{1; -1\}$; $\vec{e}\,\{0; -2\}$; $\vec{f}\,\{-1,0\}$.

920.

а) $\vec{x} = -3\vec{i} + \frac{1}{5}\vec{j}$; б) $\vec{y} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$; в) $\vec{z} = -\vec{i}$;

г) $\vec{u} = 3\vec{j}$; д) $\vec{v} = \vec{j}$.

921.

а) $x\vec{i} + y\vec{j} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$; $x = 5$, $y = -2$

б) $-3\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + 7\vec{j}$; $x = -3$, $y = 7$

в) $x\vec{i} + y\vec{j} = -4\vec{i}$; $x = -4$, $y = 0$

г) $x\vec{i} + y\vec{j} = 0$; $x = 0$, $y = 0$

922.

а) $\vec{a}\,\{3;\,2\}$, $\vec{b}\,\{2;\,5\}$, $\Rightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}\,\{5;\,7\}$;

б) $\vec{a}\,\{3;\,-4\}$, $\vec{b}\,\{1;\,5\}$, $\Rightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}\,\{4;\,1\}$;

в) $\vec{a}\,\{-4;\,-2\}$, $\vec{b}\,\{5;\,3\}$, $\Rightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}\,\{1;\,1\}$;

г) $\vec{a}\,\{2;\,7\}$, $\vec{b}\,\{-3;\,-7\}$, $\Rightarrow$ $\vec{a}+\vec{b}\,\{-1;\,0\}$.

923.

а) если $\vec{a}\,\{5;\,3\}$, $\vec{b}\,\{2;\,1\}$, то $\vec{a}-\vec{b}\,\{3;\,2\}$;

б) если $\vec{a}\,\{3;\,2\}$, $\vec{b}\,\{-3,\,2\}$, то $\vec{a}-\vec{b}\,\{6,\,0\}$;

в) если $\vec{a}\,\{3;\,6\}$, $\vec{b}\,\{4,\,-3\}$, то $\vec{a}-\vec{b}\,\{-1;\,9\}$;

г) если $\vec{a}\,\{-5;\,-6\}$, $\vec{b}\,\{2;\,-4\}$, то $\vec{a}-\vec{b}\,\{-7;\,-2\}$.

924.

$2\vec{a}\,\{6;\,4\}$; $3\vec{a}\,\{9;\,6\}$; $-\vec{a}\,\{-3;\,-2\}$; $-3\vec{a}\,\{-9;\,-6\}$.

925.

$\vec{a}\,\{2,\,4\} \Rightarrow -\vec{a}\,\{-2;\,-4\}$;

$\vec{b}\,\{-2;\,0\} \Rightarrow -\vec{b}\,\{2;\,0\}$;

$\vec{c}\,\{0;\,0\} \Rightarrow -\vec{c}\,\{0;\,0\}$;

$\vec{d}\,\{-2;\,-3\} \Rightarrow -\vec{d}\,\{2;\,3\}$;

$\vec{e}\,\{2;\,-3\} \Rightarrow -\vec{e}\,\{-2;\,3\}$;

$\vec{f}\,\{0;\,5\} \Rightarrow -\vec{f}\,\{0;\,-5\}$.

926.

а) $\vec{a}\,\{2;\,-5\}$, $\vec{b}\,\{-5;\,2\}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}=3\vec{a}-3\vec{b}=\{6;\,-15\}+\{15;\,-6\}=\{21;\,-21\}$;

б) $\vec{a}\,\{4;\,1\}$, $\vec{b}\,\{1;\,2\}$, $\vec{c}\,\{2;\,7\}$ $\Rightarrow$

$$\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c} = \{8;\,2\} + \{-3;\,-6\} + \{8;\,28\} = \{13;\,24\};$$

в) $\vec{a}\,\{-7;\,-1\}$, $\vec{b}\,\{-1;\,7\}$, $\vec{c}\,\{4;\,-6\}$ $\Rightarrow$

$$\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \{-21;\,-3\} + \{2;\,-14\} + \{-2;\,3\} = \{-21;\,-14\};$$

г) $\vec{a}\,\{7;\,-2\}$, $\vec{b}\,\{2;\,5\}$, $\vec{c}\,\{-3;\,3\}$ $\Rightarrow$ $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\{8;\,-10\}$.

927.

Дано: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарные

Доказать: координаты пропорциональны

Пусть $\vec{a}\,\{x_1;\,y_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2;\,y_2\}$. Так как $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарные, то $\vec{a} = k\vec{b}$ и $x_1 = kx_2$, $y_1 = ky_2$, откуда

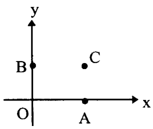
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = k$$

928.

$\vec{a}\,\{3;7\}$, $\vec{b}\,\{-2;1\}$, $\vec{c}\,\{6;14\}$, $\vec{d}\,\{2;-1\}$, $\vec{e}\,\{2;4\}$, указать коллинеарные векторы.

$\vec{a}$ и $\vec{c}$, т.к. $\frac{3}{6}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}=k$; $\vec{b}$ и $\vec{d}$, т.к. $\frac{-2}{2}=\frac{1}{-1}=-1=k$.

929.



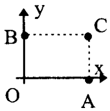
Дано: $A\in Ox_+$; $B\in Oy_+$.

Найти координаты A и B.

а) OA=5; OB=3, $\Rightarrow$ A(5; 0) и B(0; 3)

б) OA=a; OB=b, $\Rightarrow$ A=(a; 0) и B(0; b)

930.



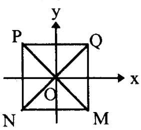
Дано: $A\in Ox, B\in Oy$; OACB – прямоугольник.

Найти координаты A, B, C.

а) OA=6,5, OB=3, $\Rightarrow$ A(6,5; 0); B(0; 3); C(6,5; 3);

б) OA=a, OB=b, $\Rightarrow$ A(a; 0); B(0; b); C(a; b).

931.

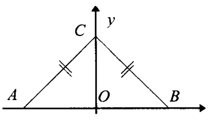


Дано: MNPQ – квадрат; P(–3; 3), $MP\cap NQ=O$; O(0; 0)

Найти координаты M, N, Q.

P(–3; 3); M(3; –3); N(–3; –3); Q(3;3).

932.

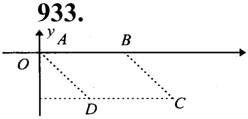


Дано: ΔABC, AC=BC, AB=2a, $CO\perp AB$ CO=h.

Найти координаты A, B, C.

AB=2a; CO=h; A(–a; 0); B(a; 0); C(0; h).

933.



Дано: ABCD — параллелограмм, A(0; 0), B(5; 0), C(12; –3).

Найти D.

$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{AB}\Rightarrow\overline{AD}=\overline{AC}-\overline{AB}$ по свойству параллелограмма.

D(7; –3), т.к. $x_D=x_C-x_B=7$; $y_D=y_C=-3$.

934.

а) A(2; 7), B(–2; 7); $\overrightarrow{AB}\,\{-2-2;\,7-7\}=\{-4;\,0\}$;

б) A(–5; 1), B(–5; 27); $\overrightarrow{AB}\,\{-5-(-5);\,27-1\}=\{0;\,26\}$;

в) A(–3; 0), B(0; 4); $\overrightarrow{AB}$ {0–(–3); 4–0}={3; 4};

г) A(0; 3), B(–4; 0); $\overrightarrow{AB}$ {–4–0; 0–3}={–4; –3}.

935.

A	(0; 0)	(x; –3)	(6; $\frac{3}{2}$)	(a; b)	(l; 2)
B	(1; 1)	(2; –7)	(3; 1)	(a+c; d+b)	(1; 2)
AB	{1; 1}	{5; y}	{–3; –$\frac{1}{2}$}	{c; d}	{0; 0}

2–x=5 ⇒ x=–3;
–7–(–3)=y ⇒ y=–4.

936.

A	(2; –3)	(–10; –11)	(0; 1)	(0, 0)	(c; d)	(3; 5)	(3t+5; 7)	(1; 3)
B	(–3, 1)	(4; 7)	(6; –11)	(–3; 7)	(2a–c; 2a–d)	(3; 8)	(t+7; –7)	(–1; –3)
M	(–$\frac{1}{2}$; –l)	(–3; –2)	(3; –5)	(–1$\frac{1}{2}$; 3$\frac{1}{2}$)	(a; b)	(3; 6$\frac{1}{2}$)	(2t+6; 0)	(0; 0)

937.

Дано: B∈AC, AB=BC; D∈BC, BD=DC; A(0; l), B(5; –3).
Найти координаты C и D.

1) $\begin{cases} x_B = \dfrac{x_A + x_C}{2} \\ y_B = \dfrac{y_A + y_C}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 5 = \dfrac{0 + x_c}{2} \\ -3 = \dfrac{1 + y_c}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_C = 10 \\ y_C = -7 \end{cases}$ ⇒ C(10; –7).

2) $\begin{cases} x_D = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_D = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x_D = \dfrac{5 + 10}{2} = 7{,}5 \\ y_D = \dfrac{-3 - 7}{2} = -5 \end{cases}$ ⇒ D(7,5; –5).

938.

а) $\vec{a}$ {5;9}, то $|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{25 + 81} = \sqrt{106}$

б) $\vec{b}$ {–3;4}, то $|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

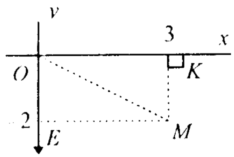
в) $\vec{c}$ {–10;–10}, то $|\vec{c}| = \sqrt{(-10)^2 + (-10)^2} = \sqrt{100 + 100} = 10\sqrt{2}$

г) $\vec{d}$ {10;17}, то $|\vec{d}| = \sqrt{10^2 + 17^2} = \sqrt{100 + 289} = \sqrt{389}$

д) $\vec{e}$ {11;–11}, то $|\vec{e}| = \sqrt{11^2 + (-11)^2} = \sqrt{121 + 121} = 11\sqrt{2}$

е) $\vec{f}\ \{10;0\}$, то $\left|\vec{f}\right| = \sqrt{10^2+0^2} = \sqrt{100} = 10$

939.



Дано: M(3;–2).
Найти а) MK; б) ME; в) MO.
а) MK⊥OX, MK=2;
б) ME⊥OY, ME=3;
в) OM=$\sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

940.

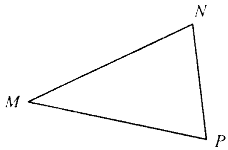
а) A(2; 7) и B(–2; 7), AB=$\sqrt{(-2-2)^2+(7-7)^2} = \sqrt{16+0} = 4$;

б) A(–5; 1) и B(–5; –7), AB=$\sqrt{(-5-(-5))^2+(-7-1)^2} = \sqrt{0+64} = 8$;

в) A(–3; 0) и B(0; 4), AB=$\sqrt{(0-(-3))^2+(4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$;

а) A(0; 3) и B(–4; 0), AB=$\sqrt{(-4-0)^2+(0-3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

941.



Дано: M(4; 0); N(12; –2) P(5; –9).
Найти P_{MNP}.
<u>Решение:</u>

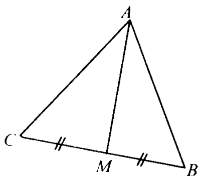
MN=$\sqrt{(12-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$;

NP=$\sqrt{(12-5)^2+(-2+9)^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2}$;

MP=$\sqrt{(5-4)^2+(-9)^2} = \sqrt{1+81} = \sqrt{82}$;

P_{MNP}=$2\sqrt{17}+7\sqrt{2}+\sqrt{82}$.

942.

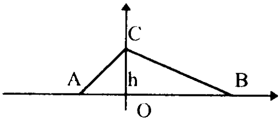


Дано: A(0; l); B(1; –4); C(5; 2); AM — медиана.
Найти AM.

$$\begin{cases} x_m = \dfrac{x_b+x_c}{2} \\ y_m = \dfrac{y_b+y_c}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_m = \dfrac{1+5}{2} = 3 \\ y_m = \dfrac{2-4}{2} = -1 \end{cases} \qquad M(3;\ 1)$$

AM=$\sqrt{(3-0)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

943.

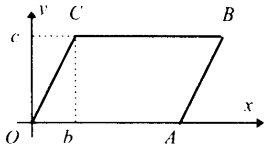


Дано: $B\in OX_+$; $C\in OY_+$; $A\in OX$; $OA=a$, $OB=b$, $OC=h$.
Найти AC, BC.
$B(b; 0)$; $A(-a; 0)$; $C(0; h)$.

$$AC=\sqrt{(0-(-a))^2+(h-0)^2}=\sqrt{a^2+h^2};$$

$$BC=\sqrt{(0-6)^2+(h-0)^2}=\sqrt{b^2+h^2}.$$

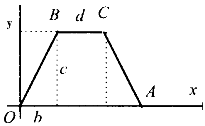
944.



Дано: OACB — параллелограмм; $A\in OX_+$; B(b; c); OA=a.
Найти а) C(x; y); б) AC, CO.
Т.к. $OC \parallel AB$, то $y_C=y_B=c$; т.к. $OA=BC=a$, то $x_C=b-a \Rightarrow C(b-a; c)$.

$$AC=\sqrt{(b-a-a)^2+c^2}; \quad OC=\sqrt{(a-b)^2+c^2}.$$

945.



Дано: OBCA – трапеция; OA=a, BC=d, B(b; c).
Найти AC, OC.
A(a; 0), B(b; c); OA=a, BC=d.
Т.к. $OA \parallel BC$, то $y_C=y_B=c$; $x_C=b+d \Rightarrow C(b+d; c)$.

$$AC=\sqrt{(b+d-a)^2+c^2}; \quad OC=\sqrt{(b+d)^2+c^2}.$$

946.

а) Дано: A(2; 3) и B(x; 1); AB=2.
Найти x.

$$AB=\sqrt{(x-2)^2+(1-3)^2}=2$$

$2=\sqrt{(x-2)^2+4}$; $\quad 4=(x-2)^2+4$; $\quad (x-2)^2=0$; $\quad x=2$.

б) Дано: $M_1(-1; x)$; $M_2(2x; 3)$; $M_1M_2=7$.
Найти x.

$$M_1M_2=\sqrt{(2x+1)^2+(3-x)^2}=7$$

$49=(2x+1)^2+(3-x)^2$; $\quad 49=4x^2+4x+1+9-6x+x^2$; $\quad 5x^2-2x-39=0$;

$D=(-2)^2-4\cdot 5\cdot(-39)=784$; $\quad x_{1,2}=\dfrac{21\pm\sqrt{784}}{10}$; $\quad x_1=3$; $\quad x_2=-2{,}6$.

947.

Дано: A(0; l); B(l; –4); C(5; 2).

Доказать: ΔABC — равнобедренный.

Найти S_{ABC}.

$AB=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$; $AC=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$; $BC=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}$, т.к. AB=AC, то ΔABC — равнобедренный.

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_B+x_C}{2} \\ y_M=\dfrac{y_B+y_C}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_M=3 \\ y_M=-1 \end{cases}$$

$$AM=\sqrt{(3-0)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13},$$

т.к. ΔABC равнобедренный, то медиана является высотой.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}h\cdot BC=\frac{1}{2}\,BC\cdot AM=\frac{1}{2}\sqrt{52}\cdot\sqrt{13}=\frac{1}{2}\,26=13.$$

948.

а) Дано: A(–3; 5); B(6; 4); C∈OY, AC=CB.

Найти C(x; y).

Точка C имеет координаты (0; y), то

$$AC=\sqrt{(-3-0)^2+(5-y)^2}=\sqrt{9+(5-y)^2};$$

$$BC=\sqrt{(6-0)^2+(4-y)^2}=\sqrt{36+(4-y)^2},$$

т.к. AC=BC, то

$$9+(5-y)^2=36+(4-y)^2; \qquad (5-y)^2-(4-y)^2=36-9;$$

$$(5-y-4+y)(5-y+4-y)=27;$$

$$9-2y=27; \qquad y=-9.$$

Ответ: C(0; –9).

б) Дано: C(4; –3) и D(8; 1); E∈OY, CE=ED.

Найти E(x; y).

Точка E имеет координаты (0; y),

$$CE=\sqrt{16+(y+3)^2}\ ;\ ED=\sqrt{64+(1-y)^2},$$

т.к. CE=ED, то

$$16+(y+3)^2=64+(1-y)^2;$$

$$(y+3)^2-(1-y)^2=64-16;$$

$$(y+3-1+y)(y+3+1-y)=48;$$

$$(2+2y)4=48; \qquad 2+2y=12;$$

$$2y=10 \quad y=5$$

Ответ: E(0; 5).

949.

а) Дано: A(1; 2);B(–3; 4); E∈ OX, AE=EB.

Найти E(x; y).

Точка E имеет координаты (x; 0)

$$AE=\sqrt{(1-x)^2+(0-2)^2}=\sqrt{(1-x)^2+4};$$

$$EB=\sqrt{(x+3)^2+(4-0)^2}=\sqrt{(x+3)^2+16}.$$

Т.к. AE=EB, то

$(1–x)^2+4=(x+3)^2+16$; $(1–x)^2–(x+3)^2=12$; $(1–x–x–3)(1–x+x+3)=12$;

$(–2x–2)\cdot 4=12$; $–2x=5$; $x=–2,5$

Ответ: E(–2,5; 0)

б) Дано: C(1; 1) и D(3; 5); M∈ OX, CM=MD

Точка M имеет координаты (x; 0)

$$CM=\sqrt{(1-x)^2+(0-1)^2}=\sqrt{(1-x)^2+1};$$

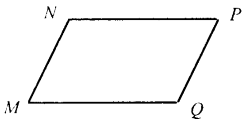
$$MD=\sqrt{(3-x)^2+(5-c)^2}=\sqrt{(3-x)^2+25};$$

$(1–x)^2+1=(3–x)^2+25$; $(1–x)^2–(3–x)^2=24$;

$–2\cdot(4–2x)=24$; $4–2x=–12$; $x=8$

Ответ: M(8; 0)

950.



Дано: MNPQ — четырехугольник.

Доказать: MNPQ — параллелограмм.

а) M(1; 1); N(6; 1); P(7; 4) Q(2; 4).

$$MN=\sqrt{(6-1)^2+(1-1)^2}=\sqrt{25}=5;$$

$$PQ=\sqrt{(2-7)^2+(4-4)^2}=\sqrt{25}=5;$$

$$NP=\sqrt{(7-6)^2+(4-1)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10};$$

$$MQ=\sqrt{(2-1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10};$$

т. к. MN=PQ; NP=MQ, то MNPQ – параллелограмм

б) M(–5;l); N(–4;4); P(–l;5) Q(–2;2)

$$MN=\sqrt{(-4-(-5))^2+(4-1)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

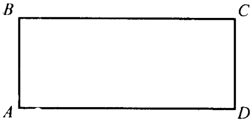
$$PQ=\sqrt{(-2-(-1))^2+(2-5)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$$

$$NP=\sqrt{(-1-(-4))^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

$$MQ=\sqrt{(-2-(-5))^2+(2-1)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$$

Т.к. MN=PQ=NP=MQ, то MNPQ – ромб

951.



Дано: ABCD — четырехугольник.
Доказать: ABCD — прямоугольник.
Найти S_{ABCD}.

а) A(–3; –1); B(1; 1); C(1; –3) D(–3; –3).

$$AB=\sqrt{16}=4;\ BC=\sqrt{4}=2;\ CD=\sqrt{16}=4;\ AD=\sqrt{4}=2;$$

$$BD=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5};\ AC=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

т.к. AB=CD, BC=AD и BD=AC, то ABCD — прямоугольник (по признаку — параллелограмм с равными диагоналями).

$$S_{\text{ABCD}}=4\cdot 2=8$$

б) A(4; 1),B(3; 5), C(–1; 4), D(0; 0).

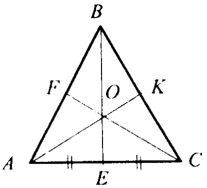
$$AB=\sqrt{1+16}=\sqrt{17};\ BC=\sqrt{16+1}=\sqrt{17};\ CD=\sqrt{1+16}=\sqrt{17};$$

$$AD=\sqrt{16+1}=\sqrt{17};\ AC=\sqrt{25+9}=\sqrt{34};\ BD=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}.$$

Т.к. AB=BC=CD=AD, то ABCD — ромб; т.к. диагонали этого ромба равны (AC=BD), то этот ромб – квадрат.

$$S_{\text{ABCD}}=\left(\sqrt{17}\right)^2=17.$$

954.



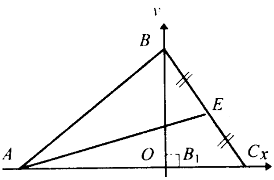
Дано: ΔABC, AB=BC; BE=160 см, AC=80 см; AK, CF, BE – медианы.
Найти CF, AK.

BE=160 см, AC=80 см т.к. OE=$\frac{1}{3}$ BE по свойству медиан, то OE=$\frac{1}{3}\cdot 160=53\frac{1}{3}$ см

В ΔAOE: AO=$\sqrt{AE^2+OE^2}=\sqrt{40^2+(53\frac{1}{3})^2}=\frac{200}{3}$ см.

AO=$\frac{2}{3}$ AK по свойству медиан, $\frac{200}{3}=\frac{2}{3}$ AK, AK=100. Т.к. ΔABC — равнобедренный, то AK=CF=100 см.

955.



Дано: ΔABC; $BB_1 \perp AC$; AE – медиана.
Найти AE.

<u>Решение:</u>

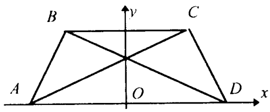
BB_1=10 см; AB_1=10 см, BC_1=4 см введем систему координат, где B_1 — начало координат. Тогда A(–10; 0); C(4; 0); B(0;

10), затем $x_E = \dfrac{x_B + x_C}{2}$, x_E=2; $y_E = \dfrac{y_B + y_C}{2}$, y_E=2 $\Rightarrow$ E(2; 5).

$$AE=\sqrt{(10+2)^2+(0-5)^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13 \text{ см.}$$

956.

Дано: ABCD — равнобедренная трапеция.

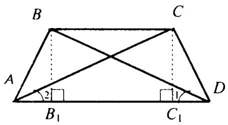


Доказать: BD=AC.

Введем систему координат как показано на рисунке, ось OY — ось симметрии, тогда $A(-x_1; 0)$ и $D(x_1; 0)$; $B(-x_2; h)$ и $C(x_2; h)$.

$$AC=\sqrt{(x_2+x_1)^2+h^2}, \quad BD=\sqrt{(x_1+x_2)^2+h^2},$$

то AC=BD; ч.т.д.



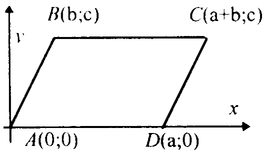
Обратно.

Дано: ABCD – трапеция; AC=BD.

Доказать: AB=CD.

$BB_1 \perp AD$, $CC_1 \perp AD$. Рассмотрим ΔBB_1D и ΔCC_1A; $BB_1=CC_1=h$. $\Delta BB_1D=\Delta CC_1A$ (по катету и гипотенузе). Рассмотрим ΔABD и ΔACD: AD – общая; BD=AC (по условию); $\angle 1=\angle 2$, т.е. $\Delta ABD=\Delta ACD$ (по 2 сторонам и углу) $\Rightarrow$ AB=CD.

957.



Дано: ABCD – параллелограмм; AC=BD.

Доказать: ABCD – прямоугольник.

Введем систему координат так, как показано на рисунке.

$$AC^2=(a+b)^2+c^2, \quad BD^2=(a-b)^2+c^2.$$

Т.к. AC=BD, то

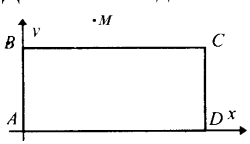
$$(a+b)^2+c^2=(a-b)^2+c^2, \qquad a^2+2ab+b^2=a^2-2ab+b^2, \qquad 4ab=0,$$

a=0 или b=0; допустим a=0, то D(a; 0) совместится с точкой A(0; 0) — это невозможно, т.е. $a \neq 0$, получим b=0, значит ABCD — прямоугольник. Что и требовалось доказать.

958.

Дано: ABCD – прямоугольник

Доказать что для любой M: $AM^2+CM^2=BM^2+DM^2$.



Введем систему координат так, как показано на рисунке, тогда A(0; 0); D(a; 0); B(0; c); C(a; c); M(x; y).

$$AM^2=x^2+y^2, \qquad CM^2=(a-x)^2+(c-y)^2;$$

$$BM^2=x^2+(c-y)^2; \qquad DM^2=(a-x)^2+y^2.$$

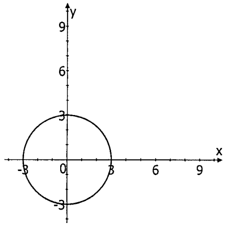
Складывая, получим:

$$AM^2+CM^2=x^2+y^2+(a-x)^2+(c-y)^2=x^2+(c-y)^2+(a-x)^2+y^2;$$

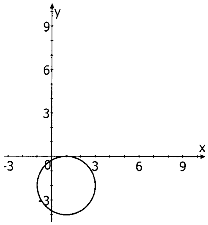
$$BM^2+DM^2=x^2+(c-y)^2+(a-x)^2+y^2.$$

Что и требовалось доказать.

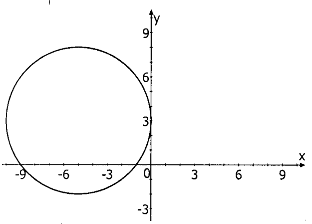
959.



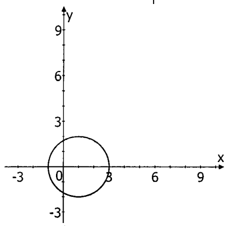
а) $x^2+y^2=9$; O(0; 0); R=3



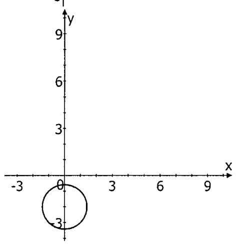
б) $(x-1)^2+(y+2)^2=4$; O(1; –2); R=2



в) $(x+5)^2+(y-3)^2=25$; O(–5; 3); R=5



г) $(x-1)^2+y^2=4$; O(1; 0); R=2



д) $x^2+(y+2)^2=2$; O(0; –2); R=$\sqrt{2}$

960.

A(3; –4); B(1; 0); C(0; 5); D(0; 0); E(0; l)

а) $x^2+y^2=25$; точки A(3; –4) и C(0; 5), т.к.

$$3^2+(-4)^2=25; \qquad 0^2+5^2=25.$$

б) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$; B(1; 0), т.к.

$$(1-1)^2+(0+3)^2=9.$$

в) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$; точка B, т.к.

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+0^2=\frac{1}{4};$$

точка D, т.к.

$$\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+0^2=\frac{1}{4}.$$

961.

$(x+5)^2+(y-1)^2=16$, O(–5;1); R=4.

A(–2; 4):

$$(-2+5)^2+(4-1)^2\neq16,\ 9+9\neq16,\ 18\neq16,$$

т.к. 18>16, то A(–2; 4) вне круга;

B(–5; –3):

$$(-5+5)^2+(-3-1)^2=16,\ 0+16=16,\ 16=16,$$

то B(–5; –3) на окружности;

C(–7 –2):

$$(-7+5)^2+(-2-1)^2\neq16,\ 4+9\neq16,\ 13\neq16,$$

т.к. 13<16, то C(–7; –2) лежит внутри круга;

D(l; 5):

$$(l+5)^2+(5-l)^2\neq16,\ 36+16\neq16,\ 52\neq16,$$

т.к. 52>16, то D(l; 5) лежит вне круга.

962.

Дано: $x^2+y^2=25$, A(3; 4) и B(4; –3)

Доказать: AB — хорда.

Доказательство:

Проверим, что точки A и B лежат на окружности:

A(3; 4):

$$3^2+4^2=25,\ 9+16=25,\ 25=25,$$

B(4; –3):

$$4^2+(-3)^2=25,\ 16+9=25,\ 25=25,$$

то и A и B $\in$ окр. $\Rightarrow$ AB – хорда.

963.

а) $x^2+y^2=25$, $(-4)^2+y^2=25$, $16+y^2=25$, $y^2=9$, $y_{1,2}=\pm3$, следовательно A(4; 3) или A(4; –3).

б) $x^2+3^2=25$, $x^2=16$, $x_{1,2}=\pm4$.

964.

а) $(3-3)^2+(y-5)^2=25$, $(y-5)^2=25$, $y-5=\pm5 \Rightarrow y_1=10$, $y_2=0$.

Ответ: (3; 10) и (3; 0)

б) $(x-3)^2+(5-5)^2=25$, $(x-3)^2=25$, $x-3=\pm5 \Rightarrow x_1=8$, $x_2=-2$.

Ответ: (8; 5) и (–2; 5)

965.

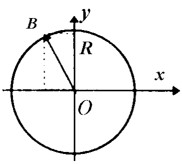
а) $x^2+y^2=9$ б) $x^2+y^2=2$ в) $x^2+y^2=\frac{25}{4}$

966.

а) $x^2+(y-5)^2=9$ в) $(x+3)^2+(y+7)^2=\frac{1}{4}$

б) $(x+1)^2+(y-2)^2=4$ г) $(x-4)^2+(y+3)^2=100$

967.



Дано: Окр(O; R); O(0; 0); B(–3; 3): B∈Окр(O; R)

Написать уравнение окружности

<u>Решение</u>:

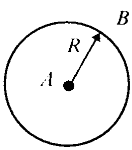
B(–1;3) центр окружности в начале координат, то уравнение имеет вид $x^2+y^2=R^2$, т.к. B лежит на окружности, то OB=R

$$OB=\sqrt{(-1-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10},\ R=\sqrt{10}$$

То уравнение окружности:

$$x^2+y^2=10.$$

968.



Дано: Окр(A;R); A(0;6); B(–3;2); B∈Окр(A;R)

Написать: уравнение окружности

<u>Решение</u>:

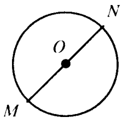
$$x^2+(y-6)^2=R^2=AB^2$$

$$R=AB=\sqrt{(0+3)^2+(6-2)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

То уравнение окружности имеет вид

$$x^2+(y-6)^2=25.$$

969.



Дано: Окр(O; R); MN–диаметр этой окружности
Написать уравнение окружности
а) если M(–3; 5); N(7; –3); т.к. MN — диаметр, то O — середина MN, и

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_m + x_n}{2} \\ y_0 = \dfrac{y_m + y_n}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{-3+7}{2} = 2 \\ y_0 = \dfrac{5-3}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O(2;\ 1)$$

$$R = MO = \sqrt{(2+3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41},$$

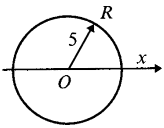
уравнение окружности имеет вид: $(x-2)^2+(y-1)^2=41$.
б) если M(2; –1), N(4; 3), т.к. MN — диаметр, то O — середина MN, и

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_m + x_n}{2} \\ y_0 = \dfrac{y_m + y_n}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ y_0 = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow O(3;\ 1)$$

$$R = ON = \sqrt{(3-4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5},$$

то уравнение имеет вид: $(x-3)^2+(y-1)^2=5$.

970.



Дано: Окр(O; R); A(l; 3)∈Окр(O; R); R=5; O∈OX
Написать уравнение окружности
Точка O имеет координаты (x; 0)

$$R = OA = \sqrt{(x-1)^2 + 3^2}, \qquad 5 = \sqrt{(x-1)^2 + 3^2},$$

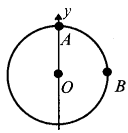
$$25 = (x-1)^2 + 9, \qquad (x-1)^2 = 16,$$

$$x-1 = \pm 4, \qquad x=5 \text{ или } x=-3,$$

т.е. O(5; 0) или O(–3; 0) следовательно, может существовать две окружности:

$$(x-5)^2+y^2=25 \qquad \text{или} \qquad (x+3)^2+y^2=25$$

971.



Дано: Окр(O; R);
A(–3; 0)∈Окр(O; R); B(0; 9)∈Окр(O; R); O∈OY
Написать уравнение окружности
Т.к. A, B∈Окр, то R=OA=OB; т.к. O∈OY, то O(0; y).

$$OA = \sqrt{3^2 + y^2}.$$

Т.к. OA=OB, то $OB=\sqrt{0+(9-y)^2}$,

$$9+y^2=(9-y)^2,\ 9+y^2=81-18y+y^2,\ 18y=72,\ y=4,$$

то O(0; 4) R=OA= $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5,$ то уравнение имеет вид:

$$x^2+(y-4)^2=25.$$

972.

б) C(2; 5), D(5; 2)

$$\begin{cases} a\cdot 2+b\cdot 5+c=0 \\ a\cdot 5+b\cdot 2+c=0 \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнение второй, получим

$$-3a + 3b = 0 \Rightarrow a = b$$

$$2a + 5a + c = 0 \Rightarrow c = -7a.$$

Подставим коэффициенты $b = a$ и $c = 7a$ в уравнение прямой:

$$ax + ay - 7a = 0 \Rightarrow x + y - 7 = 0.$$

в) M(0; 1), N(–4; –5)

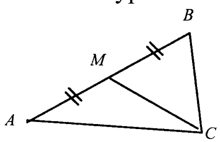
$$\begin{cases} 0\cdot a+1\cdot b+c=0 \\ -4\cdot a-5\cdot b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-c \\ -4a+5c+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-c \\ a=\dfrac{3}{2}c \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}cx - cy + c = 0 \Rightarrow 3x - 2y + 2 = 0$$

973.

Дано: A(4; 6); B(–4; 0); C(–l; –4); CM — медиана ΔABC.

Написать уравнение прямой CM.



$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{4-4}{2}=0 \\ y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{0+6}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow M(0;\ 3)$$

Напишем уравнение прямой по двум точкам M и C.

M(0; 3):

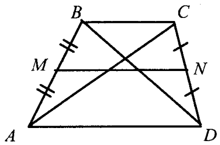
$$0\cdot a+3\cdot b+c=0;\ 3b+c=0;\ b=-\frac{c}{3}$$

C(–1;–4):

$$-a-4b+c=0,\ a=-4b+c;\ a=\frac{7}{3}c$$

$$\frac{7}{3}cx+(-\frac{c}{3})y+c=0 \ \Big|\ \cdot\frac{3}{c};\qquad 7x-y+3=0$$

974.



Дано: ABCD – трапеция; A(–2; –2); B(–3; 1); C(7; 7); D(3; 1), MN — средняя линия

Написть уравнение прямых AC, BD, MN

A(–2; –2): –2a–2b+c=0 $\Rightarrow$ a=$\frac{1}{2}$ c–b.

C(7; 7): 7a + 7b + c = 0 $\Rightarrow$ a = $-\frac{1}{7}$ c – b; $\frac{1}{2}$ c–b=$-\frac{1}{7}$ c–b $\Rightarrow$ a = –b,

ax–ay+0=0 $\Rightarrow$ x–y=0 — уравнение прямой, содержащей AC.

B(–3; 1): –3a + b + c = 0 $\Rightarrow$ a = $\frac{b+c}{3}$.

D(3; 1): 3a+b+c=0 $\Rightarrow$ a=$\frac{-b-c}{3}$;

$$\frac{b+c}{3}=\frac{-b-c}{3} \Rightarrow -b=c \Rightarrow a=\frac{b-b}{3}=0,$$

0·x+by–b=0 $\Rightarrow$ y–1=0 — уравнение прямой, содержащей BD.

$$\begin{cases} x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{-2-3}{2}=-\dfrac{5}{2} \\ y_M=\dfrac{y_A-y_B}{2}=\dfrac{-2+1}{2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x_N=\dfrac{x_C+x_D}{2}=\dfrac{7+3}{2}=5 \\ y_N=\dfrac{y_C-y_D}{2}=\dfrac{7+1}{2}=4 \end{cases} \Rightarrow N(5;\ 4)$$

M$\left(-\frac{5}{2};\frac{-1}{2}\right)$: $-\frac{5}{2}a-\frac{1}{2}b+c=0 \Rightarrow b=2c-5a$

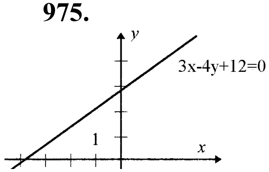
N(5; 4): 5a + 4b + c = 0 $\Rightarrow$ a = $\frac{-4b-c}{5}$;

b = 2c – 5a = 2c – (4b – c); b = –c

a = $\frac{3}{5}c$, $\frac{3}{5}cx-cy+c=0$

3x–5y+5=0 — уравнение прямой, содержащей MN.

975.



Дано: *l*: 3x–4y+12=0

Найти: A(x; y); B(x_1; y_1)

x = 0: 3·0–4y+12=0 $\Rightarrow$ y=3 $\Rightarrow$ A(0; 3)

y = 0: 3x–4·0+12=0 $\Rightarrow$ x=–4 $\Rightarrow$ B(–4; 0)

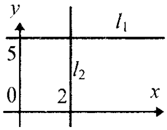
976.

Дано: l_1: 4x+3y–6=0; l_2: 2x+y–4=0; $l_1 \cap l_2$=A

Найти: A(x; y)

$$\begin{cases} 4x+3y-6=0 \\ 2x+y-4=0 \;|(-2) \end{cases} \quad \begin{cases} 4x+3y-6=0 \\ -4x-2y+8=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ 2x-2-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

977.



Дано: M(2; 5); M∈l_1, l_1||OX; M∈l_2, l_2||OY

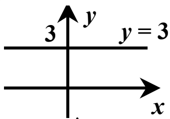
Написать уравнения l_1 и l_2

1) т.к. l_1||OX, то l_1: y=5

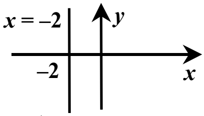
2) т.к. l_2||OY, то l_2: x=2

978.

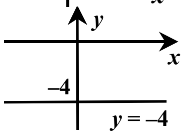
а)



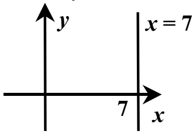
б)



в)



г)



979.

Дано: M∈AB; A(–8; –6) и B(–3; –1) и M(5; y)

Найти: y

Решение:

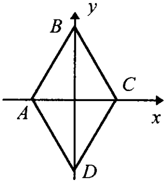
$$\begin{cases} -6=-8k+b \\ -1=-3k+b \end{cases} \quad 5k=5 \quad \begin{cases} k=1 \\ b=2 \end{cases}$$

y=x+2, y=5+2=7; M(5; 7)

980.

Дано: ABCD – ромб; AC∈OX, BD∈OY; AC=4 см, BD=10 см

Написать уравнение AB, BC, CD, AD.



Решение:

A(–2; 0); C(2; 0); B(0; 5); D(0; –5)

1) A(–2; 0) и B(0; 5)

$$\begin{cases} -2a+c=0 \\ 5в+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=\frac{1}{2}c \\ в=-\frac{1}{5}c \end{cases} \quad \frac{1}{2}cx-\frac{1}{5}cy+c=0 \;\Big|: \frac{10}{c} \quad \underline{5x-2y+10=0}$$

2) т.к. CD||AB то CD: y=$\frac{5}{2}x+b$ т.к. y(2)=0, то 0=5+b $\Rightarrow$

$$b=-5 \qquad y=\frac{5}{2}x-5$$

3) B(0; 5) и C(2; 0)

$$\begin{cases}5в+c=0\\2a+c=0\end{cases} \qquad \begin{cases}a=-\frac{1}{2}c\\в=-\frac{1}{5}c\end{cases} \qquad -\frac{1}{2}cx-\frac{1}{5}cy+c=0 \;\Big|:(-\frac{10}{c})$$

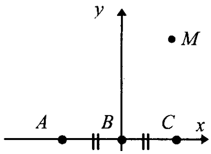
$$\underline{5x+2y-10=0}$$

4) т.к. BC||AD то AD: y=$-\frac{5}{2}x+b$ т.к. y(0)=–5, то

$$b=-5 \qquad y=-\frac{5}{2}x-5$$

Ответ: y=$-\frac{5}{2}x\pm5$ y=$\frac{5}{2}x\pm5$

982.



Дано: B∈AC, AB=BC, AC=2.
Найти множество точек M:
а) $AM^2+BM^2+CM^2=50$;
б) $AM^2+2BM^2+3CM^2=4$

<u>Решение</u>:

а) Введём систему координат так, как показано на рисунке.
A(–1; 0); C(1; 0); M(x; y); B(0; 0).

$$\begin{cases}AM^2=(x+1)^2+y^2\\BM^2=x^2+y^2\\CM^2=(x-1)^2+y^2\end{cases}$$

$$(x+1)^2+y^2+x^2+y^2+(x-1)^2+y^2=50; \qquad x^2+2x+1+3y^2+x^2+x^2-2x+1=50;$$

$$3x^2+3y^2=48;$$

$x^2+y^2=16$ – окружность с центром в т. B и R=4

б) Как и в предыдущей пункте,

$$(x+1)^2+y^2+2(x^2+y^2)+3((x-1)^2+y^2)=4;$$

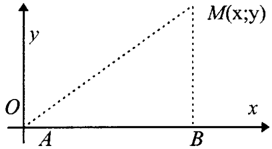
$$x^2+2x+1+y^2+2x^2+2y^2+3x^2-6x+3+3y^2=4;$$

$$6x^2-4x+6y^2=0; \qquad 3x^2-2x+3y^2=0$$

$$3(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}-\frac{1}{9})+3y^2=0, \qquad 3(x-\frac{1}{3})^2-\frac{1}{3}+3y^2=0$$

$(x-\frac{1}{3})^2+y^2=\frac{1}{9}$ – окружность, с центром в точке ($\frac{1}{3}$; 0) и R=$\frac{1}{3}$.

983.



Дано: A, B; k — данное число
Найти множество всех точек M: $AM^2+BM^2=k^2$

Введём систему координат так, как показано на рисунке, A(0; 0); B(a; 0); M(x; y)

$$\begin{cases} AM^2 = x^2 + y^2 \\ BM^2 = (a-x)^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + (a-x)^2 + y^2 = k^2$$

$$2x^2-2ax+2y^2=k^2-a^2,$$

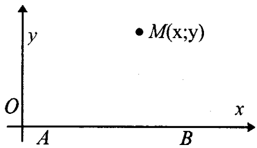
$$2\left(x^2-ax+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\right)+2y^2=k^2-a^2, \qquad \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{2k^2-a^2}{4},$$

это окружность с центром в точке $\left(\frac{a}{2};\ 0\right)$ и $R=\sqrt{\frac{2k^2-a^2}{4}}$, но

$$\frac{2k^2-a^2}{4} \ge 0, \Rightarrow |k| \ge \left|\frac{a}{\sqrt{2}}\right|$$

985.

Дано: A и B
Найти множество точек M таких, $BM^2-AM^2=2AB$
Введем систему координат так, как показано на рисунке.



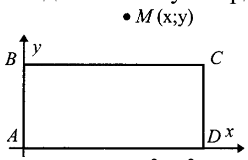
A(0; 0); B(a; 0); M(x; y)

$BM^2=(a-x)^2+y^2$ $\quad AM^2=x^2+y^2$ $\qquad AB^2=a^2$,

значит $(a-x)^2+y^2-(x^2+y^2)=2a^2$; $-2ax=a^2$, $x=-a$ – прямая, $\perp$ прямой AB и проходящая через точку симметричную т. B.

986.

Дано: ABCD – прямоугольник
Найти множество точек M: $(AM^2+DM^2)-(BM^2+CM^2)=2AB^2$
Введем систему координат так, как показано на рисунке.



A(0; 0); D(a; 0); B(0; b); C(a; b); M(x; y)

$AM^2=x^2+y^2$; $\qquad DM^2=(a-x)^2+y^2$;

$BM^2=x^2+(b-y)^2$; $\qquad CM^2=(a-x)^2+(b-y)^2$;

$AB^2=b^2$,

Сложив, получим

$$(x^2+y^2+(a-x)^2+y^2)-(x^2+(b-y)^2+(a-x)^2+(b-y)^2=2b^2$$

$$x^2+y^2+a^2-2ax+x^2+y^2-x^2-b^2+2by-y^2-a^2+2ax-x^2-b^2+2by-y^2=2b^2$$

$$-2b^2+4by=2b^2; \quad 4by=4b^2$$

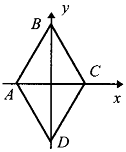
y=b — прямая, проходящая через BC.

987.

Дано: ABCD – ромб; AC=2a, BD=2b

Найти множество всех M, таких, что $AM^2+DM^2=BM^2+CM^2$

Введем систему координат так, как показано на рисунке.



A(–a; 0); C(a; 0); B(a; b); D(0; –b); M(x; y)

$AM^2=(x+a)^2+y^2$; $DM^2=x^2+(b+y)^2$;

$BM^2=x^2+(b–y)^2$; $CM^2=(a–x)^2+y^2$.

Сложив, получим

$$(x+a)^2+y^2+x^2+(b+y)^2=x^2+(b–y)^2+(a–x)^2+y^2;$$

$$x^2+2ax+a^2+y^2–x^2+b^2+2by+y^2=x^2+b^2–2by+y^2+a^2–2ax+x^2+y^2;$$

$$2ax+2by–0; \qquad ax+by=0.$$

$y=-\dfrac{a}{b}x$ – прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей O и ⊥ стороне ромба.

988.

Дано: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны

Найти x, чтобы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ были коллинеарны.

а) $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{q}=\vec{a}+x\vec{b}$, $\dfrac{2}{1}=\dfrac{-1}{x}$; $x=-\dfrac{1}{2}$;

б) $\vec{p}=x\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{q}=\vec{a}-x\vec{b}$, $\dfrac{x}{1}=\dfrac{-1}{x}$; $x^2=-1$ решений нет, т.е. $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарны;

в) $\vec{p}=\vec{a}+x\vec{b}$; $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\dfrac{1}{1}=\dfrac{x}{-2}$; $x=-2$;

г) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{q}=x\vec{a}+\vec{b}$, $\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{1}$; $x=2$.

989.

Найти $\vec{p}\{x,y\}$ и $|\vec{p}|$

а) $\vec{p}=7\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}\{1;-1\}$, $\vec{b}\{5;-2\}$

$$\vec{p}\{7\cdot1-3\cdot5;\ 7\cdot(-1)-3\cdot(-2)\} \Rightarrow \vec{p}\{-8;-1\}$$

$$|\vec{p}|=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}$$

б) $\vec{p}=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{a}\{6;3\}$, $\vec{b}\{5;4\}$

$$\vec{p}\{4\cdot6-2\cdot5;\ 4\cdot3-2\cdot4\} \Rightarrow \vec{p}\{14;4\}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{196+16} - \sqrt{212} = 2\sqrt{53}$$

в) $\vec{p}=5\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{a}\left\{\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right\}$, $\vec{b}\{6;-1\}$

$$\vec{p}\{5\cdot\frac{3}{5}-4\cdot 6;\ 5\cdot\frac{1}{5}-4\cdot(-1)\} \Rightarrow \vec{p}\{-21;5\}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{(-21)^2+5^2} = \sqrt{441+25} = \sqrt{466}$$

г) $\vec{p}=3(-2\vec{a}-4\vec{b})$, $\vec{a}\{1;5\}$, $\vec{b}\{-1;-1\}$

$$\vec{p}\{3\cdot(-2\cdot 1-4\cdot(-1));\ 3\cdot(-2\cdot 5-4\cdot(-1))\} \Rightarrow \vec{p}\{6;-18\}$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{36+324} = \sqrt{360} = 6\sqrt{10}$$

990.

Дано: $\vec{a}\{3;4\}$, $\vec{b}\{6;-8\}$, $\vec{c}\{l;5\}$; $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{b}+\vec{c}$,
$\vec{r}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{s}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

Найти: а) координаты $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{s}$; б) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$

а) $\vec{p}\{3+6;4-8\}=\vec{p}\{9;-4\}$, $\vec{q}\{6+l;-8+5\}=\vec{q}\{7;-3\}$,
$\vec{r}\{6-6+l;8+8+5\}=\vec{r}\{l;21\}$, $\vec{s}\{3-6-1;4+8-5\}=\vec{s}\{-4;7\}$;

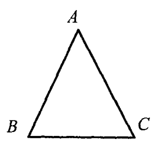
б) $|\vec{a}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$
$|\vec{p}| = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$ $|\vec{q}| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

991.

Дано: $M_1(x_1;0)$; $M_2(x_2;0)$
Доказать: $d=|x_1-x_2|$

$$d=M_1M_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+0} = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = |x_1-x_2|.$$

992.



Дано: A(4; 8); B(12; 1 1); C(7; 0)
Доказать: ΔABC – равнобедренный

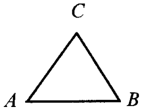
$$AB=\sqrt{(4-12)^2+(8-11)^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73},$$

$$AC=\sqrt{(4-7)^2+8^2} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73},$$

$$BC=\sqrt{(12-7)^2+11^2} = \sqrt{25+121} = \sqrt{146}.$$

Т.к. AB=AC, то ΔABC – равнобедренный; т.к. BC≠AC=AB, то ΔABC — не равносторонний.

993.



Дано: A(–5; 6); B(3; –9); C(–12; –17)

Доказать: ∠A=∠C

$$AB=\sqrt{(3+5)^2+(-9-6)^2}=\sqrt{64+225}=\sqrt{289}=17$$

$$CB=\sqrt{(3+12)^2+(-9-17)^2}=\sqrt{225+64}=\sqrt{289}=17,$$

Т.к. AB=BC, то ∠A=∠C.

994.

а) Дано: D(1; 1), A(5; 4), B(4; –3), C(–2; 5).

Доказать: AD=BD=CD.

$$AD=\sqrt{(1-5)^2+(1-4)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$
$$DB=\sqrt{(1-4)^2+(1+3)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5,$$
$$DC=\sqrt{(1+2)^2+(1-5)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

то AD=BD=CD;

б) Дано: D(l; 0), A(7; –8), B(–5; 8), C(9; 6).

Доказать: AD=DB=DC

$$AD=\sqrt{(7-1)^2+(-8)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10$$
$$DB=\sqrt{(1+5)^2+8^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}=10,$$
$$DC=\sqrt{(9-1)^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$

то AD=DB=DC

995.

Дано: M_1(–2; 4); M_2(6; 8); E(x; 0), $M_1E=EM_2$

Найти: x

$$M_1E=\sqrt{(x+2)^2+4^2} \qquad M_2E=\sqrt{(x-6)^2+8^2},$$

т.к. $M_1E=EM_2$, то

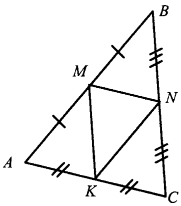
$$(x+2)^2+16=(x-6)^2+64; \qquad (x+2+x-6)(x+2-x+6)=48;$$
$$(2x-4)8=48 \Rightarrow 2x-4=6$$
$$2x=10 \quad x=5,$$

то E(5; 0)

996.

Дано: A(–5; 13); B(3; 5); C(–3; –l); M, N, K — середины сторон AB, BC, AC

Найти: а) координаты точек M, N, K; б) BK; в) MN, MK, NK



а) $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-5+3}{2} = -1 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{13+5}{2} = 9 \end{cases}$ M(–1; 9)

$\begin{cases} x_N = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{3-3}{2} = 0 \\ y_N = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{cases}$ N(0; 2)

$\begin{cases} x_K = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-5-3}{2} = -4 \\ y_K = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{13-1}{2} = 6 \end{cases}$ K(–4; 6)

б) BK= $\sqrt{(3+4)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2}$

в) MN=$\sqrt{1^2 + (2-9)^2} = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}$;

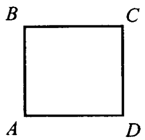
NK=$\sqrt{4^2 + (2-6)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$;

MK=$\sqrt{(-1+4)^2 + (9-6)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

997.

Дано: A(3; 2); B(0; 5); C(–3; 2); D(0; –l)

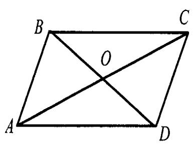
Доказать: ABCD – квадрат



$\left.\begin{array}{l} AB = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \\ BC = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \\ CD = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \\ AD = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \end{array}\right| \Rightarrow$

ABCD — ромб; далее: AC=$\sqrt{36}$ =6, $BD = \sqrt{36} = 6$, т.к. диагонали ромба равны, то ABCD – квадрат.

998.



Дано: A(–2; –3); B(1; 4); C(8; 7); D(5; 0)

Доказать: ABCD – ромб

Найти: S_{ABCD}

$$AB=\sqrt{(1-(-2))^2+(4-(-3))^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$$

$$BC=\sqrt{(8-1)^2+(7-4)^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$$

$$CD=\sqrt{(5-8)^2+(0-7)^2}=\sqrt{9+49}=\sqrt{58}$$

$$AD=\sqrt{(5-(-2))^2+(0-(-3))^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$$

Так как AB=BC=CD=AD, ABCD – ромб.

$$AC=\sqrt{100+100}=10\sqrt{2} \qquad BD=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\,10\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=40$$

999.

Дано: ABCD – параллелограмм; A(–4; 4); B(–5; l); C(x; y); D(–l; 5)
Найти: (x; y).

$$AB=\sqrt{(-5-(-4))^2+(1-4)^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10} \qquad BC=\sqrt{(x+5)^2+(y-1)^2}$$

$$AD=\sqrt{(-1-(-4))^2+(5-4)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10} \qquad CD=\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}$$

т. к. в параллелограмме противоположные стороны равны, то

$$\begin{cases}(x+5)^2+(y-1)^2=10\\(x+1)^2+(y-5)^2=10\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2+10x+25+y^2-2y+1=10\\x^2+2x+1+y^2-10y+25=10\end{cases}$$

$$\begin{cases}8x+8y=0\\(x+1)^2+(y-5)^2=10\end{cases} \qquad \begin{cases}x=-y\\(1-y)^2+(y-5)^2=10\end{cases}$$

$$1-2y+y^2+y^2-10y+25-10=0; \qquad y^2-6y+8=0$$

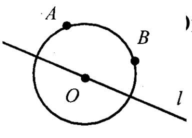
$$y_1=4; \qquad y_2=2$$

если y=4, то x=–4; следовательно C(–4; 4);
если y=2, то x=–2; следовательно C(–2; 2).

1000.

а) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ окружность с центром (1; –2) и R=5;
б) $x^2+(y-7)^2=1$ окружность с центром (0; 7) и R=l;
в) $x^2+y^2+8x-4y+40=0$, $(x+4)^2+(y-2)^2=-20$ — не окружность;
г) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$, $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ окружность с центром (1; –2) и R=5;
д) $x^2+y^2-4x-2y+1=0$, $x^2-4x+4+y^2-2y+1-4=0$, $(x-2)^2+(y-1)^2=4$ окружность с центром (2; 1) и R=2.

1001.



)кр(O; R), B(–l; 2)∈Окр(O; R); O∈l: y=x+2.

Написть уравнение окружности.

Решение:

R=AO=$\sqrt{(3-x)^2+y^2}$; R=BO=$\sqrt{(-1-x)^2+(2-y)^2}$, то

$$(3-x)^2+y^2=(l+x)^2+(2-y)^2; \quad 9-6x+x^2+y^2=l+2x+x^2+4-4y+y^2;$$

$$4y-8x+4=0;$$

с другой стороны, точка O удовлетворяет уравнению: y=x+2, то

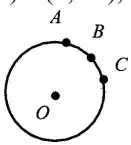
$$\begin{cases}4y-8x+4=0\\ y=x+2\end{cases} \begin{cases}4x+8-8x+4=0\\ y=x+2\end{cases} \begin{cases}4x=12\\ y=x+2\end{cases} \begin{cases}x=3\\ y=5\end{cases}$$

т.е. O(3; 5), следовательно R=AO=$\sqrt{25}=5$, и уравнение окружности имеет вид: $(x-3)^2+(y-5)^2=25$

1002.

Дано: A, B, C∈ Окр (O; R);

а) A(1; –4), B(4; 5), C(3; –2); б) A(3; –7); B(8; –2); C(6; 2).



Найти уравнение окружности.

а) AO=$\sqrt{(1-x)^2+(-4-y)^2}$, BO=$\sqrt{(4-x)^2+(5-y)^2}$,

CO=$\sqrt{(3-x)^2+(-2-y)^2}$.

$AO^2=BO^2$:

$$(1-x)^2+(4+y)^2=(4-x)^2+(5-y)^2;$$

$$(1-x-4+x)(1-x+4-x)=(5-y-4-y)(5-y+4+y); \quad -3(5-2x)=(1-2y)9$$

$$2x-5=3-6y \quad x=4-3y$$

$BO^2=CO^2$:

$$(4-x)^2+(5-y)^2=(3-x)^2+(2+y)^2;$$

$$(4-x-3+x)(4-x+3-x)=(2+y+5-y)(2+y-5+y); \quad 7-2x=7(2y-3)$$

$$-2x-14y+28=0, \quad x=14-7y,$$

$$14-7y=4-3y, \quad 10=4y$$

$y=\frac{5}{2}$, $x=-\frac{7}{2}$; т.е. O($-\frac{7}{2}$; $\frac{5}{2}$)

$$R=AO=\sqrt{\left(1+\frac{7}{2}\right)^2+\left(4+\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{169}{4}}=\sqrt{\frac{250}{4}}=\sqrt{\frac{125}{2}}$$

уравнение окружности: $(x+\frac{7}{2})^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{125}{2}$

б) AO=$\sqrt{(3-x)^2+(7+y)^2}$, BO=$\sqrt{(8-x)^2+(2+y)^2}$,

CO=$\sqrt{(6-x)^2+(2-y)^2}$.

$AO^2=BO^2$:

$$(3-x)^2+(7+y)^2=(8-x)^2+(2+y)^2;$$

$$9-6x+x^2+49+14y+y^2=64-16x+x^2+4+4y+y^2; \qquad 10x+10y-10=0,$$

$$x+y-1=0, \qquad x=1-y$$

$BO^2=CO^2$:

$$(8-x)^2+(2+y)^2=(6-x)^2+(2-y)^2;$$

$$64-16x+x^2+4+4y+y^2=36-12x+x^2+4-4y+y^2; \qquad -4x+8y+28=0,$$

$$x-2y-7=0, \qquad x=7+2y$$

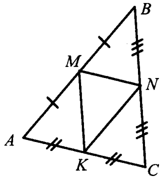
$$1-y=7+2y, \qquad -6=3y$$

$y=-2$, $x=3$, т.е. $O(3;-2)$

$$R=OA=\sqrt{(3-3)^2+(7-2)^2}=\sqrt{25}=5$$

уравнение окружности: $(x-3)^2+(y+2)^2=25$

1003.



Дано: $A(-7;\ 5)$; $B(3;\ -1)$; $C(5;\ 3)$

Написать уравнения прямых: а) AB, BC, AC;

б) средних линий;

в) серединных перпендикуляров.

Решение:

а) AB:

$$\begin{cases}-7a+5b+c=0\\ 3a-b+c=0\end{cases} \quad \begin{cases}-7a+15a+5c+c=0\\ b=3a+c\end{cases} \quad \begin{cases}8a=-6c\\ b=3a+c\end{cases} \quad \begin{cases}a=-\frac{3}{4}c\\ b=-\frac{5}{4}c\end{cases}$$

$$-\frac{3}{4}cx-\frac{5}{4}cy+c=0 \qquad 3x+5y-4=0$$

BC:

$$\begin{cases}3a-b+c=0\\ 5a+3b+c=0\end{cases} \quad \begin{cases}b=3a+c\\ 5a+9a+3c+c=0\end{cases} \quad \begin{cases}b=3a+c\\ a=-\frac{2}{7}c\end{cases} \quad \begin{cases}b=\frac{1}{7}c\\ a=-\frac{2}{7}c\end{cases}$$

$$-\frac{2}{7}cx+\frac{1}{7}cy+c=0 \qquad 2x-y-7=0$$

AC:

$$\begin{cases}-7a+5b+c=0\\ 5a+3b+c=0\end{cases} \quad \begin{cases}21a-15b-3c=0\\ 25a+15b+5c=0\end{cases} \quad \begin{cases}a=-\frac{1}{23}c\\ b=-\frac{6}{23}c\end{cases}$$

$$\frac{-1}{23}cx-\frac{6}{23}cy+c=0 \qquad x+6y-23=0$$

б) $\left\{\begin{array}{l} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-7+3}{2} = -2 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5-1}{2} = 2 \end{array}\right| \rightarrow M(-2;2)$

$\left\{\begin{array}{l} x_N = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{3+5}{2} = 4 \\ y_N = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \end{array}\right| \rightarrow N(4;1)$

$\left\{\begin{array}{l} x_k = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-7+5}{2} = -1 \\ y_k = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{5+3}{2} = 4 \end{array}\right| \rightarrow K(-1;4)$

MN:

$$\begin{cases} -2a+2b+c=0 \\ 4a+b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a=2b+c \\ b=-4a-c \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\dfrac{1}{10}c \\ b=-\dfrac{6}{10}c \end{cases}$$

$$-\frac{1}{10}cx-\frac{6}{10}cy+c=0 \qquad x+6y-10=0$$

NK:

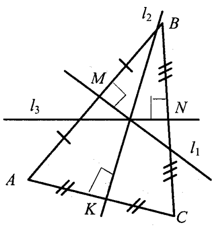
$$\begin{cases} 4a+b+c=0 \\ -a+4b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-4a-c \\ a=4b+c \end{cases} \quad \begin{cases} b=-\dfrac{5}{17}c \\ a=-\dfrac{3}{17}c \end{cases}$$

$$-\frac{3}{17}cx-\frac{5}{17}cy+c=0 \qquad 3x+5y-17=0$$

MK:

$$\begin{cases} -2a+2b+c=0 \\ -a+4b+c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2b=2a-c \\ a=4b+c \end{cases} \quad \begin{cases} b=-\dfrac{1}{6}c \\ a=\dfrac{1}{3}c \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}cx-\frac{1}{6}cy+c=0 \qquad 2x-y+6=0$$



в) $l_1 \perp AB$, AB: $3x+5y-4=0$, l_1: $ax+by+c=0$. Из усл. перпендикулярности прямых находим, что $3a+5b=0$; $3a=-5b$. При $a=5$, $b=-3$, l_1: $5x-3y+c=0$, т.к. $M \in l_1$ т.е. $5(-2)-3\cdot 2+c=0$, $c=16$, то l_1:

$$5x-3y+16=0$$

$l_2 \perp AC$, AC: $x+6y-23=0$, из условия перпендикулярности прямых находим, что l_2:

$6x-y+c=0$, т.к. $K\in l_2$, то $6(-1)-4+c=0$, $c=10$, то l_2:

$$6x-y+10=0$$

$l_3\perp BC$, BC: $2x-y-7=0$, из условия перпендикулярности прямых находим, что l_3: $x+2y+c=0$, т.к. $N\in l_3$, то $4+2+c=0$ $c=-6$, то l_3:

$$x+2y-6=0$$

1004.

Дано: l_1: $3x-l,5y+l=0$; l_2: $2x-y-3=0$.

Доказать: $l_1 \parallel l_2$.

Условие параллельности прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$ и $a_2+b_2y+c_2=0$: $a_1b_2-a_2b_1=0$. Проверим: $3\cdot(-1)-2\cdot(-1,5)=0$, $-3+3=0$, следовательно $l_1\parallel l_2$.

1005.

Дано: а) $A(-2;0)$; $B(3;2\frac{1}{2})$; $C(6;4)$; б) $A(3;10)$; $B(3;12)$; $C(3;-6)$; в) $A(1;2)$; $B(2;5)$; $C(-10;-31)$.

Доказать: $A, B, C \in l$

а) AB:

$$\begin{cases}-2a+c=0\\ 3a+2\frac{1}{2}b+c=0\end{cases} \qquad \begin{cases}a=\frac{1}{2}c\\ b=-c\end{cases} \qquad \frac{1}{2}cx-cy+c=0 \qquad x-2y+2=0.$$

Подставим координаты точки C: $6-2\cdot4+2=0$, $0=0$, то $C\in AB$, т.е. A, B, C – лежат на одной прямой.

б) AB:

$$\begin{cases}3a+10b+c=0\\ 3a+12b+c=0\end{cases} \qquad \begin{cases}a=-\frac{1}{3}c\\ b=0\end{cases} \qquad -\frac{1}{3}xc+c=0 \qquad x-3=0.$$

Подставим координаты точки C: $3-3=0$, $0=0$, то $C\in AB$, т.е. A, B, C – лежат на одной прямой.

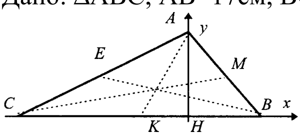
в) AB:

$$\begin{cases}a+2b+c=0\\ 2a+5b+c=0\end{cases} \qquad \begin{cases}b=c\\ a=-3c\end{cases} \qquad -3cx+cy+c=0 \qquad 3x-y-l=0$$

Подставим координаты точки C: $3(-10)-(-31)-1=0$, $-30+31-1=0$, $0=0$, то $C\in AB$, т.е. A, B, C – лежат на одной прямой.

1006.

Дано: ΔABC; AB=17см, BC=28см, AH=15 см,



Найти: медианы.

<u>Решение:</u>

Введем систему координат так, как показано на рисунке. В ΔABH:

$$BH=\sqrt{17^2-15^2}=\sqrt{64}=8, \qquad CH=28-8=20,$$

откуда B(8; 0) C(–20; 0); A(0; 15).

AK – медиана, K(–6; 0):

$$AK=\sqrt{6^2+15^2}=\sqrt{36+225}=\sqrt{261}$$

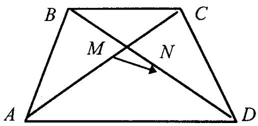
CM – медиана, M(4; 7,5)

$$CM=\sqrt{24^2+7{,}5^2}=\sqrt{576+\frac{225}{4}}=\sqrt{\frac{2529}{4}}=\frac{\sqrt{2529}}{2}$$

BE – медиана, E(–10; 7,5)

$$BE=\sqrt{18^2+7{,}5^2}=\sqrt{324+\frac{225}{4}}=\sqrt{\frac{1521}{4}}=\frac{39}{2}=19{,}5$$

1007.



Дано: ABCD — трапеция; $M\in AC$, AM=MC, $N\in BD$, BN=ND.

Доказать: MN=$\frac{1}{2}$ (AD–BC).

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN} \qquad \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BN}$$

$$2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{BN})$$

т.к. N и M — середины сторон BD и AC, то

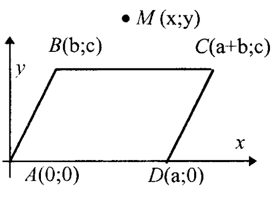
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=0, \quad \overrightarrow{DN}+\overrightarrow{BN}=0$$

т.е. $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$ или $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}),$$

т.к. $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{MN}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AD}$, то $|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}|=AD-BC$, откуда MN=$\frac{1}{2}$ (AD–BC), что и требовалось доказать.

1008.



Дано: ABCD– параллелограмм

Доказать, что для всех точек M величина $(AM^2+CM^2)-(BM^2+DM^2)=const$.

Введем систему координат так, как показано на рисунке. A(0; 0), B(b; c), C(a+b; c), D(a; 0).

$$AM^2=x^2+y^2 \qquad CM^2=(a+b-x)^2+(c-y)^2$$

$$BM^2=(b-x)^2+(c-y)^2 \qquad DM^2=(a-x)^2+y^2$$

$$(AM^2+CM^2)-(BM^2+DM^2)=$$

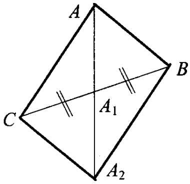
$$=x^2+y^2+(a+b-x)^2+(c-y)^2-(b-x)^2-(c-y)^2-(a-x)^2-y^2=$$

$$=x^2+(a+b-x)^2-(b-x)^2-(a-x)^2=$$

$$=x^2+a^2+b^2+x^2+2ab-2ax-2bx-b^2+2bx-x^2-a^2+2ax-x^2=2ab$$

не зависит от координат точки M.

1009.



а) Дано: ΔABC; AA_1 — медиана.

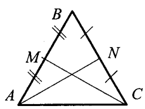
Доказать: $AA_1=\frac{1}{2}\sqrt{2AC^2+2AB^2-CB^2}$.

Доп. построение: продлим AA_1: $AA_1=A_1A_2$, получим $CABA_2$ – параллелограмм. По свойству параллелограмма

$$AA_2^2+CB^2=AC^2+AB^2+BA_2^2+CA_2^2; \qquad AA_2^2=2AC^2+2AB^2-CB^2$$

$$AA_2=\sqrt{2AC^2+2AB^2-CB^2}\ , \qquad AA_1=\frac{1}{2}\sqrt{2AC^2+2AB^2-CB^2}\ ,$$

что и требовалось доказать.



б) Дано: ΔABC; AN=CM.

Доказать: AB=BC.

$$CM=\frac{\sqrt{2BC^2+2AC^2-AB^2}}{2}\ ;\ AN=\frac{\sqrt{2AB^2+2AC^2-BC^2}}{2}\ ,$$

т.к. AN=MC, то

$$\frac{1}{2}\sqrt{2BC^2+2AC^2-AB^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2AB^2+2AC^2-BC^2}\ ;$$

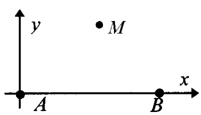
$$2BC^2+2AC^2-AB^2=2AB^2+2AC^2-BC^2; \qquad 2BC^2+BC^2=2AB^2+AB^2;$$

$$3BC^2=3AB^2; \qquad BC=AB$$

что и требовалось доказать.

1010.

Дано: A и B



Найти множество всех точек M:

а) $2AM^2-BM^2=2AB^2$; б) $AM^2+2BM^2=6AB^2$

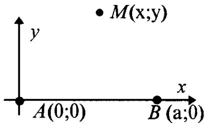
а) Введем систему координат так, как показано на рисунке, A(0; 0); B(a; 0); M(x; y)

$$AM^2=x^2+y^2, \qquad BM^2=(a-x)^2+y^2 \quad AB^2=a^2,$$

$$2(x^2+y^2)-((a-x)^2+y^2)=2a^2, \qquad 2x^2+2y^2-(a-x)^2-y^2=2a^2$$

$$x^2+y^2+2ax=3a^2; \quad (x^2+2ax+a^2)-a^2+y^2=3a^2; \quad (x+a)^2+y^2=4a^2$$

окружность с центром (–a; 0) и R=2a.



б) Введем систему координат так, как показано на рисунке, A(0; 0); B(a; 0); M(x; y)

$AM^2=x^2+y^2$, $BM^2=(a-x)^2+y^2$, $AB^2=a^2$,

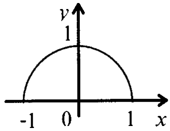
$x^2+y^2+2(a-x)^2+2y^2=6a^2$; $3x^2-4ax+3y^2=4a^2$,

$$3\left(x-\frac{2}{3}a\right)^2+3y^2=\frac{16}{3}a^2; \qquad \left(x-\frac{2}{3}a\right)^2+y^2=\frac{16}{9}a^2$$

окружность с центром ($\frac{2}{3}$ a; 0) и R=$\frac{4}{3}$ a.

ГЛАВА XI. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

1011.



Может иметь значения: 0,3; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$ — т.к. абсцисса всех точек на единичной полуокружности принимает значения от –1 до 1.

Может иметь значения: 0,6; $\frac{1}{7}$ — т.к. ордината всех точек на единичной полуокружности принимает значения от 0 до 1.

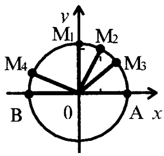
1012.

$M_1(0; 1)$: $0^2 + 1^2 = 0+1 = 1$, т.е. $M_1 \in$ Окр

$M_2\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$, $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, $1 = 1$, т.е. $M_2 \in$ Окр

$M_3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, $1 = 1$, т.е. $M_3 \in$ Окр

$M_4\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$, $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, $1 = 1$, т.е. $M_4 \in$ Окр



$A(1; 0)$: $1^2+0=1$, $1 = 1$, т.е. $A \in$ Окр (0; 1).

$B(-1; 0)$: $(-1)^2+0 = 1$, $1 = 1$, т.е. $B \in$ Окр (0; 1).

$\sin \angle AOM_1 = 1$ $\qquad$ $\cos \angle AOM_1 = 0$

$\sin \angle AOM_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos \angle AOM_2 = \frac{1}{2}$

$\sin \angle AOM_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos \angle AOM_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin \angle AOM_4 = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos \angle AOM_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin \angle AOB = 0$ $\qquad$ $\cos \angle AOB = -1$

1013.

Дано: а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; в) $\cos\alpha = -1$

Найти: $\sin\alpha$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha.$$

а) $\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{4}$, $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9}$, $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$;

в) $\sin^2\alpha = 1 - 1 = 0$, $\sin\alpha = 0$.

1014.

Дано: а) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; в) $\sin\alpha = 0$.

Найти: $\cos\alpha$

Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

а) $\cos^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}$, $\cos\alpha = \pm\frac{1}{2}$;

б) $\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{16}$, $\cos^2\alpha = \frac{15}{16}$, $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$;

в) $\cos^2\alpha = 1$, $\cos\alpha = \pm 1$.

1015.

Дано: а) $\cos\alpha = 1$; б) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(0° < \alpha < 90°)$ г) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ $(90° < \alpha < 180°)$.

Найти: $\mathrm{tg}\alpha$

Решение:

а) $\sin\alpha = 0$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0}{1} = 0$;

б) $\sin^2\alpha = 1 - \frac{3}{4}$, $\sin\alpha = \pm\frac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$;

в) Так как $0° < \alpha < 90°$, то $\cos\alpha > 0$, т.е. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$;

г) Так как $90° < \alpha < 180°$, то $\cos\alpha < 0$, $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{3}{4}$.

1016.

а) $\sin 120° = \sin(180°–60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos 120° = \cos(180°–60°) = –\cos 60° = -\frac{1}{2}$,

$tg 120° = –tg 60° = -\sqrt{3}$;

б) $\sin 135° = \sin(180°–45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos 135° = \cos(180°–45°) = –\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$tg 135° = -1$;

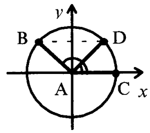
в) $\sin 150° = \sin(180°–30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$,

$\cos 150° = \cos(180°–30°) = –\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

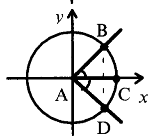
$tg 150° = \frac{\sin 150°}{\cos 150°} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1017.

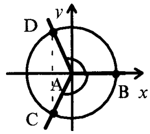
а) $\sin\angle A = \frac{2}{3}$, $\sin\angle CAD = \frac{2}{3}$, $\sin\angle CAB = \frac{2}{3}$;



б) $\cos\angle A = \frac{3}{4}$, $\cos\angle DAC = \frac{3}{4}$, $\cos\angle CAB = \frac{3}{4}$

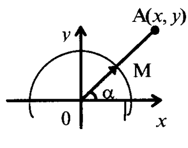


в) $\cos\angle A = -\frac{2}{5}$, $\cos\angle BAC = -\frac{2}{5}$, $\cos\angle BAD = -\frac{2}{5}$



1018.

а) $\begin{cases} x = 3 \cdot \cos 45° \\ y = 3 \cdot \sin 45° \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$



б) OA=1,5, $\alpha = 90°$; $\begin{cases} x = 1{,}5 \cdot \cos 90° \\ y = 1{,}5 \cdot \sin 90° \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1{,}5 \end{cases}$

в) OA=5, $\alpha = 150°$; $\begin{cases} x = 5 \cdot \cos 150° \\ y = 5 \cdot \sin 150° \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{5\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

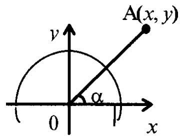
г) OA=1, $\alpha = 180°$ $\begin{cases} x = 1 \cdot \cos 180° \\ y = 1 \cdot \sin 180° \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$

д) OA=2, $\alpha = 30°$ $\begin{cases} x = 2 \cdot \cos 30° \\ y = 2 \cdot \sin 30° \end{cases}$ $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$

1019.

а) $\begin{cases} 2 = OA \cdot \cos\alpha \\ 2 = OA \cdot \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{(2-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} 2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cos\alpha \\ 2 = 2 \cdot \sqrt{2} \sin\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\Big| \alpha = 45°$



б) $\begin{cases} 0 = OA \cdot \cos\alpha \\ 3 = OA \cdot \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{0 + (0-3)^2} = 3$

$\begin{cases} 0 = 3 \cdot \cos\alpha \\ 3 = 3 \cdot \sin\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha = 1 \end{cases}$ $\Big| \alpha = 90°$

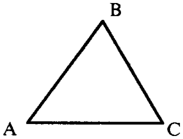
в) $\begin{cases} -\sqrt{3} = OA \cdot \cos\alpha \\ 1 = OA \cdot \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{\left(0-(-\sqrt{3})\right)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$\begin{cases} -\sqrt{3} = 2 \cdot \cos\alpha \\ 1 = 2 \cdot \sin\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\Big| \alpha = 150°$

г) $\begin{cases} -2\sqrt{2} = OA \cdot \cos\alpha \\ 2\sqrt{2} = OA \cdot \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{\left(0-(-2\sqrt{2})\right)^2 + (0-2\sqrt{2})^2} = 4$

$\begin{cases} -2\sqrt{2} = 4 \cdot \cos\alpha \\ 2\sqrt{2} = 4 \cdot \sin\alpha \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\Big| \alpha = 135°$

1020.



а) $AB=6\sqrt{8}$ см, $AC=4$ см, $\angle A=60°$,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin\angle A=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{8}\cdot 4\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=12\sqrt{6}\ \text{см}^2;$$

б) $BC=3$ см, $AB=18\sqrt{2}$ см, $\angle B=45°$,

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot \sin\angle B=\frac{1}{2}\cdot 18\sqrt{2}\cdot 3\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}=27\ \text{см}^2;$$

в) $AC=14$ см, $BC=7$ см, $\angle C=48°$,

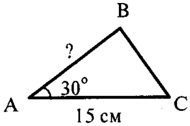
$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot \sin\angle C\approx\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 7\cdot 0{,}74=36{,}4\ \text{см}^2.$$

1021.

$S_{ABCD}=S_{ABD}+S_{BCD}$, так как $\Delta ABD=\Delta BCD$ (по двум сторонам и углу между ними), т.е. $S_{ABD}=S_{BCD}$, откуда

$$S_{ABCD}=2\cdot S_{ABD}=2\left(\frac{1}{2}\cdot ab\sin\alpha\right)=ab\sin\alpha.$$

1022.



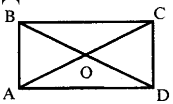
Дано: $S_{\Delta ABC}=60$ см^2, $AC=15$ см, $\angle A=30°$.
Найти: AB

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot \sin\angle A$$

$$60=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot 15\cdot \sin 30° \qquad 120=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot 15 \quad AB=16\ \text{см}.$$

1023.

Дано: ABCD — прямоугольник, $AC=10$ см, $\angle AOB=30°$.



Найти: S_{ABCD}

$$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta COD}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot BO\cdot \sin\angle AOB$$

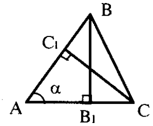
$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin 30°=\frac{25}{4} \qquad S_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot \sin 150°=\frac{25}{4}$$

$$S_{ABCD}=4\cdot S_{\Delta AOB}=4\cdot\frac{25}{4}=25\ \text{см}^2.$$

1024.

Дано: ΔABC; а) $\angle A=\alpha$, $BB_1\perp AC_1$, $BB_1=h_b$, $CC_1\perp AB$, $CC_1=h_c$;
б) $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$, $BB_1\perp AC$, $BB_1=h$.

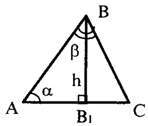
Найти: $S_{\Delta ABC}$



а) Рассмотрим ΔABB_1: $AB = \dfrac{h_b}{\sin \alpha}$.

Рассмотрим ΔAC_1C: $AC = \dfrac{h_b}{\sin \alpha}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h_b}{\sin \alpha} \cdot \frac{h_c}{\sin \alpha} \cdot \sin\alpha = \frac{h_b\, h_c}{2 \cdot \sin \alpha}$$

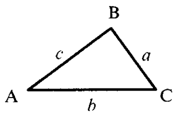


б) Рассмотрим ΔABB_1: $AB = \dfrac{h}{\sin \alpha}$.

Рассмотрим ΔB_1BC: $\dfrac{h}{\sin (180^\circ - \alpha - \beta)} = \dfrac{h}{\sin (\alpha + \beta)}$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{h}{\sin (\alpha + \beta)} \cdot \sin \beta = \frac{h^2 \cdot \sin \beta}{2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin (\alpha + \beta)}$$

1025.



а) Найти: $\angle C$, a, b, если $\angle A=60^\circ$, $\angle B=40^\circ$, c=14.

$$\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=180^\circ-100^\circ=80^\circ$$

По теореме синусов: $\dfrac{AB}{\sin \angle C} = \dfrac{BC}{\sin \angle A} = \dfrac{AC}{\sin \angle B}$

$$\frac{14}{\sin 80^\circ} = \frac{a}{\sin 60^\circ}, \qquad a \approx \frac{14}{0{,}984} \cdot 0{,}86 \approx 12{,}236$$

$$\frac{14}{\sin 80^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ}, \qquad b \approx \frac{14}{0{,}984} \cdot 0{,}642 \approx 9{,}134$$

б) Найти: $\angle B$, a, c, если $\angle A=30^\circ$, $\angle C=75^\circ$, b=4,5.

$$\angle B=180^\circ-(\angle A+\angle C)=180^\circ-105^\circ=75^\circ$$

$\angle B=\angle C \Rightarrow$ треугольник равнобедренный и b=c, по теореме синусов:

$\dfrac{AB}{\sin \angle C} = \dfrac{BC}{\sin \angle A} = \dfrac{AC}{\sin \angle B}$.

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{4{,}5}{\sin 75^\circ} \qquad a \approx \frac{4{,}5}{0{,}9659} \cdot 0{,}5 \approx 2{,}33$$

в) Найти: $\angle B$, $\angle C$, c, если $\angle A=80^\circ$, a=16, b=10.

По теореме синусов: $\dfrac{AB}{\sin \angle C} = \dfrac{BC}{\sin \angle A} = \dfrac{AC}{\sin \angle B}$

$$\frac{16}{\sin 80^\circ} = \frac{10}{\sin \angle B} \qquad \sin \angle B \approx \frac{10 \cdot 0{,}9848}{16} = 0{,}6155 \qquad \angle B \approx 37^\circ 59'$$

$$\angle C \approx 180° – (80° + 37°59') \approx 62°1'$$

$$\frac{16}{\sin 80^\circ} = \frac{c}{\sin 62^\circ 1'} \qquad c \approx \frac{16 \cdot 0{,}8830}{0{,}9848} \approx 14{,}346$$

г) Найти: $\angle A$, b, c, если $\angle B=45°$, $\angle C=70°$, a=24,6.

$$\angle A = 180° – (\angle B + \angle C) = 180° – (45° + 70°) = 65°$$

По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$

$$\frac{24{,}6}{\sin 65^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}, \qquad b \approx \frac{24{,}6}{0{,}9063} \cdot 0{,}7071 \approx 19{,}193,$$

$$\frac{24{,}6}{\sin 65^\circ} = \frac{c}{\sin 70^\circ}, \qquad c \approx \frac{24{,}6}{0{,}9063} \cdot 0{,}9397 \approx 25{,}507$$

д) Найти: $\angle B$, $\angle C$, c, если $\angle A=60°$, a=10, b=7.

По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{7}{\sin \angle B}; \qquad \sin B \approx \frac{7 \cdot 0{,}8660}{10} = 0{,}6062; \quad \angle B \approx 37°\ 19';$$

$$\angle C \approx 180° – (60° + 37°19'); \qquad \angle C \approx 82°41';$$

$$\frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 42^\circ 41'}; \qquad c \approx \frac{10 \cdot 0{,}6780}{0{,}8660} \approx 7{,}829.$$

е) Найти: $\angle A$, $\angle B$, c, если $\angle C=54°$, a=6,3, b=6,3.

Применим теорему косинусов: $a^2=b^2+c^2–2bc\cdot\cos\angle A$

$c^2=2\cdot 39{,}69–2\cdot 39{,}69\cdot\cos 54°$; $c^2\approx 79{,}38–79{,}38\cdot 0{,}5878\approx 32{,}72$; $c\approx 5{,}72$,

так как a=b=6,3; то треугольник равнобедренный,

$$\angle A = \angle B = (180° – 54°):2 = 63°.$$

ж) Найти: $\angle B$, $\angle C$, a, если $\angle A=87°$, b=32, c=45.

По теореме косинусов:

$$a^2 \approx 32^2+45^2–2\cdot 32\cdot 45\cdot 0{,}0523 \approx 1024+2025–150{,}624 \approx 2898{,}38 \qquad a \approx 53{,}84$$

По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}$

$$\frac{53{,}84}{\sin 87^\circ} \approx \frac{32}{\sin \angle B} \qquad \frac{53{,}84}{0{,}9986} \approx \frac{32}{\sin \angle B}$$

$$\sin\angle B \approx 0{,}5935 \qquad \angle B = 36°24'$$

$$\angle C \approx 180° – (87° + 36°24') \approx 56°36'$$

з) Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, если a=14, b=18, c=20.

По теореме косинусов: $20^2=18^2+14^2–2\cdot 18\cdot 14\cdot\cos\angle C$

$$\cos\angle C \approx 0{,}2381 \qquad \angle C \approx 76°13'$$

$18^2=14^2+20^2-2\cdot14\cdot20\cdot\cos\angle B$ $\cos\angle B\approx0{,}4857$ $\angle B\approx60°57'$

$\angle A\approx180°-(76°13'+60°57')\approx42°50'$

и) Найти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, если a=6, b=7,3, c=4,8.

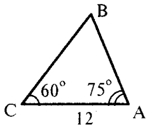
По теореме косинусов: $7{,}3^2=6^2+4{,}8^2-2\cdot6\cdot4{,}8\cdot\cos\angle B$

$\cos\angle B\approx0{,}0998$ $\angle B\approx84°16'$

$4{,}8^2=6^2+7{,}3^2-2\cdot6\cdot7{,}3\cdot\cos\angle C$ $\cos\angle C\approx0{,}7563$ $\angle C\approx40°52'$

$\angle A\approx180°-(84°16'+40°52')\approx54°52'$

1026.



Дано: ΔABC, AC= 12см, $\angle A = 75°$, $\angle C = 75°$.

Найти: AB, $S_{\Delta ABC}$.

$\angle B= 180°-(60°+75°) = 45°$

По теореме синусов:

$$\frac{12}{\sin 45°}=\frac{AB}{\sin 60°} \qquad AB\approx\frac{12\cdot0{,}866}{0{,}8071}\approx12{,}9$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot12\cdot12{,}9\cdot0{,}9659\approx74{,}8\text{ см}^2$$

1027.

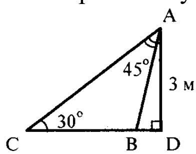
Дано: ΔABC, $\angle A=45°$, $\angle C=30°$, AD=3м, $AD\perp BC$.

Найти: AB, BC, AC.

Рассмотрим ΔADC: т.к. $\angle D=90°$, $\angle C=30°$, то $AC=2\cdot AD=6$ м

Рассмотрим ΔACB: $\angle B=180°-(30°+45°)=105°$.

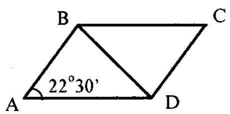
По теореме синусов:



$$\frac{AB}{\sin 30°}=\frac{6}{\sin 105°} \qquad AB\approx\frac{6\cdot0{,}5}{0{,}9659}\approx3{,}1\text{ м}$$

$$\frac{BC}{\sin 45°}=\frac{6}{\sin 105°} \qquad BC\approx\frac{6\cdot0{,}7071}{0{,}9659}\approx4{,}4\text{ м}$$

1028.



Дано: ABCD – параллелограмм, $AD=7\frac{1}{3}$ м;

BD=4,4 м; $\angle A=22°30'$

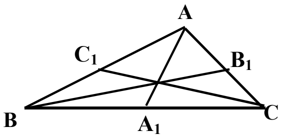
Найти: $\angle BDC$, $\angle DBC$.

Рассмотрим ΔABD: по теореме синусов:

$$\frac{4{,}4}{\sin 22°30'}=\frac{7\frac{1}{3}}{\sin\angle ABD} \qquad \angle\sin ABD\approx\frac{7\frac{1}{3}\cdot0{,}3827}{4{,}4} \qquad \angle B\approx39°38'$$

$$\angle ADB\approx180°-(22°30'+39°38')=117°52'$$

1029.



Дано: ΔABC, $BC=a$, $\angle B=\alpha$, $\angle C=\beta$.
Найти биссектрисы.

Рассмотрим ΔBCB_1: $\angle B_1=180°-\beta-\dfrac{\alpha}{2}$.

По теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin\angle B_1}=\frac{BB_1}{\sin\angle C}\qquad \frac{a}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{BB_1}{\sin\beta}\qquad BB_1=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Рассмотрим ΔBCC_1: $\angle C_1=180°-\alpha-\dfrac{\beta}{2}$

$$\frac{BC}{\sin\angle C_1}=\frac{CC_1}{\sin\angle B}\qquad \frac{a}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}=\frac{CC_1}{\sin\alpha}\qquad CC_1=\frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)}$$

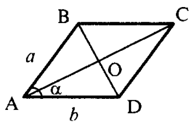
$\angle BAA_1=90-\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Рассмотрим ΔABA_1: $\angle BA_1A=90+\dfrac{\beta-\alpha}{2}$

$$\frac{AA_1}{\sin\angle B}=\frac{AB}{\sin\angle A_1}\qquad AB=\frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$AA_1=\frac{a\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\left(90°+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}=\frac{a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}$$

1030.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $AB=a$; $AD=b$; $\angle A=\alpha$.



Найти: BD, AC, $\angle AOB$

По теореме косинусов:

$$BD^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha\qquad BD=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha}$$

$$AC^2=a^2+b^2+2ab\cos\alpha\qquad AC=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cdot\cos\alpha}$$

Рассмотрим ΔABO:

$$BO=\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}{2}\qquad AO=\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{2}$$

$$a^2=\frac{a^2+b^2-2ab\cos\alpha+a^2+b^2+2ab\cos\alpha}{4}-$$

$$-\frac{2\sqrt{(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)\cdot(a^2+b^2+2ab\cos\alpha)}}{4}\cos\angle AOB,$$

$$\cos\angle AOB=\frac{a^2-b^2}{2}:\frac{\sqrt{(a^2+b^2-2ab\cos\alpha)\cdot(a^2+b^2+2ab\cos\alpha)}}{2}=$$

$$=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)^2-4a^2b^2\cos^2\alpha}}$$

1031.

а) a=5; b=c=4.

По теореме косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$

$$25=16+16-2\cdot16\cdot\cos\angle A \qquad -7=-32\cdot\cos\angle A$$

$$\cos\angle A\approx0{,}2188 \qquad \angle A\approx12°38'$$

Так как против большей стороны лежит больший угол, то ΔABC – остроугольный.

б) a = 17; b = 8; c = 15.

По теореме косинусов: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A$

$$289 = 64+225-240\cdot\cos\angle A \qquad 0=240\cdot\cos\angle A \qquad \angle A=90°$$

ΔABC – прямоугольный.

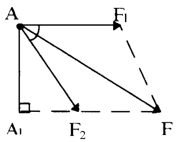
в) a=9; b=5; c=6.

По теореме косинусов: $a^2= b^2+c^2-2bc\cos\alpha$

$$81=35+36-60\cos\alpha \qquad 10=-60\cos\alpha \qquad \cos\alpha\approx-0{,}16666<0,$$

следовательно $\angle\alpha$ – тупой. ΔABC – тупоугольный.

1032.



Дано: $\vec{F}_1=\vec{F}_2$; $\angle F_1AF_2= 72°$; $|\vec{F}|= 120$ кг

Найти: $|\vec{F}_1|$; $|\vec{F}_2|$

В ΔAA_1F_2: $\angle A_1=90°$, $\angle F_2=72° \Rightarrow AA_1=AF_2\cdot\sin72°$.

В ΔAA_1F: $\angle A_1=90°$, $\angle F=36° \Rightarrow AA_1=AF\cdot\sin36°$.

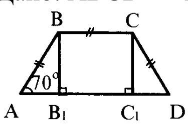
$$AF_2\cdot\sin72° = AF\cdot\sin36° \qquad 2AF_2\cdot\sin36°\cdot\cos36°=120\cdot\sin36°$$

$$AF_2\approx\frac{60}{0{,}809}\approx74{,}17$$

Ответ: $|\vec{F}_1|=|\vec{F}_2|\approx74{,}2$ кг

1034.

Дано: ABCD — трапеция, AB = BC = CD; AD=10 см; $\angle A=70°$.



Найти: P_{ABCD}

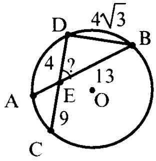
Пусть AB = x, тогда $AB_1=C_1D=\frac{10-x}{2}$, получим в ΔABB_1: $AB_1=AB\cdot\cos70°$,

$$5-\frac{x}{2}\approx x\cdot 0{,}342,\quad 5\approx x\cdot 0{,}842,\qquad x\approx 5{,}94$$

$$AB = BC = CD \approx 6 \text{ см}$$

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD \approx 6+6+6+10 = 28 \text{ см}$$

1035.



Дано: AB, CD — хорды, $AB\cap CD=E$; AB=13 см; CE=9 см; ED=4 см; BD=$4\sqrt{3}$ см.

Найти: $\angle BED$.

По свойству пересекающихся хорд: $AE\cdot EB=CE\cdot ED$, пусть AE=x, тогда

$$x\cdot(13-x)=9\cdot 4 \quad 13x-x^2-36=0 \quad x^2-13x+36=0$$

$$x_1=4;\qquad x_2=9$$

при AE = 4, EB = 9 см; при AE = 9, EB = 4 см.

Если AE = 4 см, то ΔDEB – равнобедренный.

По теореме косинусов: $DB^2 = ED^2+EB^2-2\,ED\cdot EB\cdot\cos\angle E$

$$48=16+16-32\cdot\cos\angle E \qquad \cos\angle E=-0{,}5<0,$$

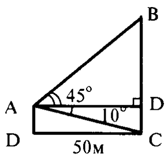
$$\angle E=120°,\qquad \angle DEA=60°$$

Если EB = 9 см, то по теореме косинусов

$$(4\sqrt{3})^2=4^2+9^2-2\cdot4\cdot9\cos\angle E \quad 48=16+81-72\cos\angle E \quad -49=-72\cdot\cos\angle E$$

$$\cos\angle E\approx 0{,}6806 \qquad \angle E\approx 47°07'$$

1036.



Дано: $\angle BAD=45°$, $\angle CAD=10°$, DC=50м.

Найти: BC.

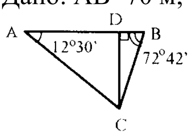
В ΔABD: $\angle A=45°$, $\angle D=90°$, т.е. AD=DB=50 м.

В ΔADC: $\operatorname{tg}\angle A=\frac{DC}{AD}$, т.е. $DC = AD\cdot\operatorname{tg}\angle A$

$$DC\approx 50\cdot 0{,}1763\approx 8{,}82 \qquad BC\approx 50+8{,}82=58{,}82$$

1037.

Дано: AB=70 м; $\angle CAB=12°30'$; $\angle ABC=72°42'$; $CD\perp AB$.



Найти: CD.

В ΔADC: $CD = AD\cdot\operatorname{tg}12°30'$

В ΔBDC: $CD = BD\cdot\operatorname{tg}72°42'$

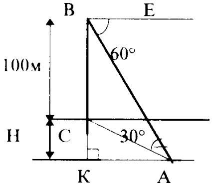
Пусть AD = x м, тогда BD = 70 – x м

$$x\operatorname{tg}12°30'=(70-x)\cdot\operatorname{tg}72°42' \qquad x\cdot 0{,}2217\approx(70-x)\cdot 3{,}21$$

$$3{,}4327x\approx 224{,}77 \qquad x\approx 65{,}48$$

$$AD\approx 65{,}48 \text{ м} \qquad CD\approx 65{,}48\cdot 0{,}2217\approx 14{,}52 \text{ м.}$$

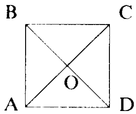
1038.



Дано: ∠ABE=60°; ∠CAB=30°; BC=100 м.
Найти: H.
Решение:
Т.к. ∠CBE=90°, ∠EBA=60°, то ∠CBA=30°, т.е. ΔABC — равнобедренный и ∠C=120°, BC=AC=100 м.
∠BCA и ∠KCA – смежные, и ∠KCA=60°, ∠KAC=30°

$$CK=\frac{1}{2}AC, \qquad CK=50 \text{ м}.$$

1039.



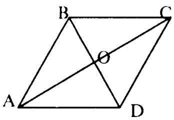
Дано: ABCD – квадрат, AC∩BD=O.
Найти углы.

а) $\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AC}\right)=45°$; б) $\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{DA}\right)=90°$;

в) $\left(\overrightarrow{OA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OB}\right)=90°$; г) $\left(\overrightarrow{AO}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OB}\right)=90°$; д) $\left(\overrightarrow{OA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OC}\right)=180°$;

е) $\left(\overrightarrow{AC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{BD}\right)=90°$; ж) $\left(\overrightarrow{AD}\,\hat{,}\,\overrightarrow{DB}\right)=135°$; з) $\left(\overrightarrow{AO}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OC}\right)=0°$.

1040.



Дано: ABCD – ромб, AC∩BD=O, BD=AB.
Найти углы.
Решение:
Так как ΔABD – равносторонний:

а) $\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AD}\right)=60°$; б) $\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{DA}\right)=120°$; в) $\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{AD}\right)=120°$;

г) $\left(\overrightarrow{OC}\,\hat{,}\,\overrightarrow{OD}\right)=90°$; д) $\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{DC}\right)=0°$; е) $\left(\overrightarrow{AB}\,\hat{,}\,\overrightarrow{CD}\right)=180°$.

1041.

$\left|\vec{a}\right|=2$; $\left|\vec{b}\right|=3$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$$

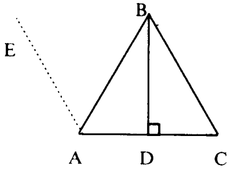
а) $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)=45°$, $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos45°=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$;

б) $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$=90°, $\qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot3\cdot\cos90°=0;$

в) $\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$=135°, $\qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot3\cdot\text{cosl}35°=6\cdot\dfrac{-\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}\,.$

1042.

Дано: ΔABC – равносторонний; $AB=a$; $BD\perp AC$



Найти скалярное произведение.

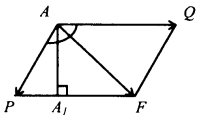
а) $\vec{A}\,B\cdot\vec{A}\,C = a\cdot a\cdot\cos60° = \dfrac{a^2}{2}$;

б) $\vec{A}\,C\cdot\vec{C}B = a\cdot a\cdot\cos120° = -\dfrac{a^2}{2}$;

в) $\vec{A}\,C\cdot\vec{B}D = \left|\vec{A}C\right|\cdot\left|\vec{B}D\right|\cdot\cos90°,\ \vec{A}\,C\cdot\vec{B}D = 0;$

г) $\vec{A}\,C\cdot\vec{A}C = \left|\vec{A}C\right|\cdot\left|\vec{A}C\right|\cdot\cos0°,\ \vec{A}\,C\cdot\vec{A}C = a^2.$

1043.



Дано: $|\vec{P}| = 8$, $|\vec{Q}| = 15$, $\angle A = 120°$.

Найти $|\vec{F}|$.

ΔPAA_1: $\angle A_1=90°$; $\angle A=30°$; $PA_1=\dfrac{1}{2}\,AP=\dfrac{1}{2}\cdot8=4.$

$$\left.\begin{aligned} AA_1 &= \sqrt{AP^2 - PA_1^2} \\ AA_1 &= \sqrt{AF^2 - A_1F^2} \end{aligned}\right\},$$

следовательно $\sqrt{AP^2 - PA_1^2} = \sqrt{AF^2 - A_1F^2}$

$$8^2 - 4^2 = A\vec{F}^2 - 11^2$$
$$AF^2 = 8^2 + 11^2 - 4^2 = 169$$
$$AF = 13, \qquad \left|\vec{F}\right| = 13.$$

1044.

а) $\vec{a}\left\{\dfrac{1}{4};-1\right\}$, $\vec{b}\,\{2;\,3\}$, $\qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = \dfrac{1}{4}\cdot2 + (-1)\cdot3 = \dfrac{1}{2} - 3 = -2{,}5;$

б) $\vec{a}\{-5;\,6\}$, $\vec{b}\{6;\,5\}$, $\qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = -5\cdot6+6\cdot5=-30+30=0;$

в) $\vec{a}\{1{,}5;\,2\}$, $\vec{b}\{4;\,-0{,}5\}$, $\qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = 1{,}5\cdot4+2(-0{,}5)=6-\text{l}=5.$

1045.

Дано: $\vec{a}\,\{x;y\}, \vec{b}\,\{y;x\}$.

Доказать: $\vec{a}\perp\vec{b}$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x\cdot(-y) + y\cdot x = -xy + xy = 0,$$

т.к. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$.

1046.

Дано: $\vec{i}$, $\vec{j}$ – координатные векторы.

Доказать, что $\vec{i}+\vec{j}\perp\vec{i}-\vec{j}$.

$$\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\left(\vec{i}-\vec{j}\right)=\vec{i^2}-\vec{i}\vec{j}+\vec{i}\vec{j}-\vec{j^2}=\vec{i^2}-\vec{j^2}=1-1=0,$$

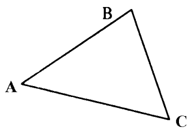
т.к. скалярное произведение равно нулю, то $\vec{i}+\vec{j}\perp\vec{i}-\vec{j}$ ч.т.д.

1047.

а) $\vec{a}\,\{4;5\}$, $\vec{b}\,\{x;-6\}$,	$4x+5(-6)=0$,	$x=7,5$
б) $\vec{a}\,\{x;-1\}$, $\vec{b}\,\{3;2\}$,	$x\cdot3+(-1)\cdot2=0$,	$x=\dfrac{2}{3}$
в) $\vec{a}\,\{0;-3\}$, $\vec{b}\,\{5;x\}$,	$0\cdot5+(-3)\cdot x=0$,	$x=0$

1048.

Дано: A(2; 8); B(–l; 5); C(3; l).



Найти: cos∠A; cos∠B; cos∠C.

$$AB=\sqrt{(2+1)^2+(8-5)^2}=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$$

$$BC=\sqrt{(3+1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{(3-2)^2+(1-8)^2}=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$$

По теореме косинусов: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos\angle A$

$$32=50+18-60\cos\angle A \qquad \cos\angle A=\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$$

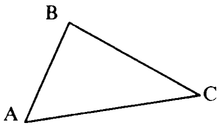
$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA\cdot BC\cdot\cos\angle B$

$$50=32+18-48\cos\angle B \qquad \cos\angle B=\frac{0}{48}=0$$

$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA\cdot CB\cdot\cos\angle C$

$$18 = 50 + 32\cdot80\cos\angle C \qquad \cos\angle C=\frac{64}{80}=\frac{4}{5}$$

1049.



Дано: $A(-1;\sqrt{3})$; $B(1;\ -\sqrt{3})$; $C(\frac{1}{2};\ \sqrt{3})$.

Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$.

$$AB=\sqrt{(1+1)^2+\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4$$

$$BC=\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+12}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$$

$$AC=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}=1{,}5$$

По теореме косинусов: $AB^2 = CB^2 + CA^2 - 2CB\cdot CA\cdot\cos\angle C$

$$16=\frac{49}{4}+\frac{9}{4}-2\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}\cos\angle C \qquad \frac{6}{4}=-\frac{42}{4}\cos\angle C$$

$$\cos\angle C=-\frac{1}{7}\approx-0{,}1429<0\ ,$$

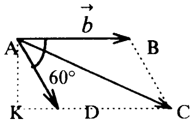
т.е. $\angle C$ – тупой, $\angle C \approx 180°-81°47'=98°13'$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos\angle A$

$$\frac{49}{4}=16+\frac{9}{4}-2\cdot4\cdot\frac{3}{2}\cos\angle A \qquad \cos\angle A=\frac{1}{2}, \qquad \angle A = 60°$$

$$\angle B = 180°-(\angle A + \angle C) \approx 180°-(60°+ 98°13') = 21°47'$$

1050.



Дано: $|\vec{a}| = 5$; $|\vec{b}| =8$ $\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=60°$.

Найти: $|\vec{a}+\vec{b}|$; $|\vec{a}-\vec{b}|$.

а) Рассм. ΔADK и ΔACK — они прямоугольные, т.к. $\angle KAD=30°$, то $KD=\frac{1}{2}AD=2{,}5$, а значит, $KC=KD+DC=2{,}5+8=10{,}5$, так как $DC=|\vec{b}|$.

$$\begin{cases} AK=\sqrt{AD^2-KD^2} \\ AK=\sqrt{AC^2-CK^2} \end{cases} \Rightarrow AD^2-KD^2=AC^2-KC^2$$

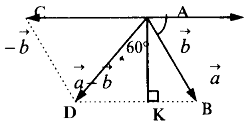
$$25 - 6{,}25 = AC^2 - 110{,}25$$

$$AC^2 =110{,}25 + 25 - 6{,}25$$

$$AC^2 = 129, \qquad AC=\sqrt{129}\ ,$$

т.е. $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{129}$

б) т.к. $\angle$ BAK=30°, то $KB = \frac{1}{2}$ AB=2,5, откуда DK=5,5.

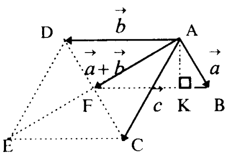


$$\begin{cases} AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} \\ AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} \end{cases}, \Rightarrow AB^2–BK^2=AD^2–DK^2$$

$$AD^2 = AB^2 – BK^2 + DK^2$$

$$AD^2 = 25 – 6{,}25 + 30{,}25 = 49 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = 7$$

1051.



Дано: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = (\widehat{\vec{b}, \vec{c}})$ =60° $|\vec{a}|$=1; $|\vec{b}| = |\vec{c}| = 2$.

Найти: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

ΔABK и ΔAFK — прямоугольные, т.к.

$\angle$BAK=30°, то BK=$\frac{1}{2}$ AB, BK=$\frac{1}{2}$, FK= $1\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} AK = \sqrt{AB^2 - KB^2} \\ AK = \sqrt{AF^2 - FK^2} \end{array}\right| \Rightarrow AB^2 - KB^2 = AF^2 - FK^2$$

$$1 - \frac{1}{4} = AF^2 - \frac{9}{4} \qquad AF^2=3 \qquad AF = \sqrt{3}, \qquad |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$$

т.к. $\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{AE}$, $|\vec{AE}|$ – биссектриса, то $\angle(\vec{c};\ (\vec{a} + \vec{b}))$=30°.

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos 30° = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

1052.

Дано: $|\vec{a}| = 5$; $|\vec{b}| = 2$; $|\vec{c}| = 4$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$

Найти: $\vec{p} \cdot \vec{g}$, где $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$; $\vec{g} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

$$\vec{p} \cdot \vec{g} = (\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) =$$

$$= \overrightarrow{a^2} - \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c} - \vec{a}\,\vec{b} + \overrightarrow{b^2} - \vec{b}\,\vec{c} - \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c} - \overrightarrow{c^2} = 25+4–16=13.$$

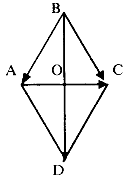
1053.

Дано: $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$, $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, где $\vec{p} \perp \vec{q}$, $|\vec{p}|$ =1; $|\vec{q}|$ =1.

Найти $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3\vec{p} - 2\vec{q}) \cdot (\vec{p} + 4\vec{q}) = 3\overrightarrow{p^2} + 12\vec{p}\,\vec{q} - 2\vec{p}\vec{q} - 8\overrightarrow{q^2} = 3–8=–5.$

1056.



Дано: ABCD – ромб.

Доказать: AC⊥BD

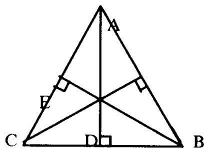
$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})(\overrightarrow{BC}-\text{BA})=\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{BA}^2$$

т.к. $|\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{BA}|=a$, то $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2-a^2=0$, и $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$ ч.т.д.

1057.

Дано: ΔABC; AB=AC=b, ∠A=30°, AD⊥BC, BE⊥AC.



Найти: AD, BE, AE, EC, BC.

В ΔABE: ∠E=90°, ∠A=30°, то BE=$\frac{1}{2}$, AB=$\frac{b}{2}$

$$AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{4}}=\frac{b\sqrt{3}}{2}$$

$$CE=AC-AE=b-\frac{b\sqrt{3}}{2}=\frac{b(2-\sqrt{3})}{2}$$

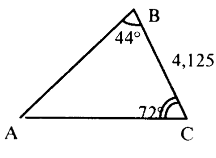
В ΔEBC: CB=$\sqrt{BE^2+CE^2}$

$$CB=\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{b^2(2-\sqrt{3})^2}{4}}=\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{7b^2}{4}-b^2\sqrt{3}}=\sqrt{b^2(2-\sqrt{3})}=b\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

В ΔADC: AD=$\sqrt{AC^2-CD^2}$

$$AD=\sqrt{b^2-\frac{b^2(2-\sqrt{3})}{4}}=\sqrt{\frac{2b^2+b^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{b\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{b\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

1058.



а) BC=4,125 м; ∠B=44°, ∠C=72°.

∠A=180°–72°–44°=64°.

По теореме синусов:

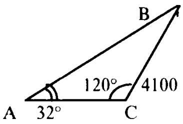
$$\frac{AB}{\sin 72^\circ}=\frac{4{,}125}{\sin 64^\circ}, \qquad AB\approx\frac{4{,}125\cdot 0{,}9511}{0{,}8988}\approx 4{,}365 \text{ м};$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle B$$

$$S_{ABC}\approx\frac{1}{2}\cdot 4{,}125\cdot 4{,}365\cdot\sin 44^\circ\approx\frac{1}{2}\cdot 4{,}125\cdot 4{,}365\cdot 0{,}6947\approx 6{,}254 \text{ м}^2$$

б) BC=4100 м; ∠A=32°, ∠C=120°.

∠B=180°–32°–120°=28°.



По теореме синусов:

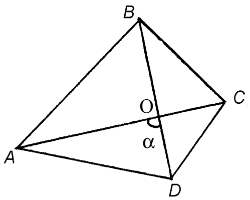
$$\frac{AB}{\sin 120^\circ}=\frac{BC}{\sin 32^\circ},\qquad AB\approx\frac{410\cdot 0{,}866}{0{,}5299}\approx 6701\text{ м};$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle B,$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4100\cdot 6701\cdot\sin 28^\circ=\frac{1}{2}\cdot 4100\cdot 6701\cdot 0{,}4695\approx 6449072\text{ м}^2$$

1059.

Дано: ABCD – выпуклый четырехугольник.



Доказать, что $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD\cdot\sin\alpha$.

$$S_{ABCD}=S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{AOD}$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\,BO\cdot AO\sin(180^\circ-\alpha)+\frac{1}{2}\,BO\cdot OC\sin\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot CO\cdot OD\cdot\sin(180^\circ-\alpha)+\frac{1}{2}\,DO\cdot AO\cdot\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\,(AO\sin\alpha+OC\sin\alpha)(BO+DO)=\frac{1}{2}\,BD\sin\alpha\cdot(AO+OC)=\frac{1}{2}\,BD\cdot AC\sin\alpha$$

1060.

а) Дано: AB=8 см, ∠A=30°, ∠B=45°.

Найти: ∠C, BC, AC.

$$\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=180^\circ-75^\circ=105^\circ$$

По теореме синусов:

$$\frac{8}{\sin 105^\circ}=\frac{BC}{\sin 30^\circ},\qquad BC\approx\frac{8\cdot\frac{1}{2}}{0{,}9659}\approx 4{,}14\text{ м};$$

$$\frac{8}{\sin 105^\circ}=\frac{AC}{\sin 45^\circ},\qquad AC\approx\frac{8\cdot 0{,}7071}{0{,}9659}\approx 5{,}86\text{ м}$$

б) Дано: AB=5 см, ∠B=45°, ∠C=60°

Найти: ∠A, BC, AC.

$$\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)=180^\circ-105^\circ=75^\circ$$

По теореме синусов:

$$\frac{5}{\sin 60^\circ}=\frac{BC}{\sin 75^\circ},\qquad BC\approx\frac{5\cdot 0{,}9659}{0{,}8660}\approx 5{,}58\text{ м}$$

$$\frac{5}{\sin 60^\circ}=\frac{AC}{\sin 45^\circ},\qquad AC\approx\frac{5\cdot 0{,}9659}{0{,}8660}\approx 4{,}08\text{ см}$$

в) Дано: AB=3 см, BC=3,3 см, ∠A=48°30'
Найти: AC, ∠B, ∠C.
По теореме синусов:

$$\frac{3{,}3}{\sin 48^\circ 30'} = \frac{3}{\sin \angle C}, \qquad \sin\angle C \approx \frac{3 \cdot 0{,}749}{3{,}3} \approx 0{,}6809, \qquad \angle C \approx 42^\circ 55';$$

$$\angle B \approx 180^\circ - (48^\circ 30' + 42^\circ 55') = 88^\circ 35'$$

По теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin \angle A} = \frac{AC}{\sin \angle B}, \quad \frac{3{,}3}{\sin 48^\circ 30'} = \frac{AC}{\sin 88^\circ 35'}, \quad AC \approx \frac{3{,}3 \cdot 0{,}9997}{0{,}749} \approx 4{,}40 \text{ см}$$

г) Дано: AC=10,4 см, BC=5,2 см, ∠B=62°48'
Найти: AB, ∠A, ∠C.
По теореме синусов:

$$\frac{10{,}4}{\sin 62^\circ 48'} = \frac{5{,}2}{\sin \angle A}, \qquad \sin\angle A \approx \frac{5{,}2 \cdot 0{,}8894}{10{,}4} \approx 0{,}4447, \qquad \angle A \approx 26^\circ 24';$$

$$\angle C \approx 180^\circ - (62^\circ 48' + 26^\circ 24') = 90^\circ 48';$$

$$\frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{AB}{\sin \angle C}, \quad \frac{10{,}4}{\sin 62^\circ 48'} = \frac{AB}{\sin 90^\circ 48'}, \quad AB \approx \frac{10{,}4 \cdot 0{,}9999}{0{,}8894} \approx 11{,}69 \text{ см}$$

1061.

а) Дано: AB=5 см, AC=7,5 см, ∠A=135°
Найти: BC, ∠B, ∠C
По теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$$

$$BC^2 = 25 + 56{,}25 - 75 \cdot \cos 135^\circ \approx 81{,}25 + 75 \cdot 0{,}7071 \approx 134{,}2825 \quad BC \approx 11{,}59 \text{ см}$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$$

$$56{,}25 = 25 + 134{,}28 - 115{,}9 \cdot \cos\angle B$$

$$\cos\angle B \approx \frac{103{,}03}{115{,}9} = 0{,}88895 \qquad \angle B \approx 27^\circ 15'$$

$$\angle C = 180^\circ - \angle A + \angle B) \approx 180^\circ \cdot (135^\circ + 27^\circ 15') = 17^\circ 45'$$

б) Дано: AB= $2\sqrt{2}$ дм; BC=3 дм; ∠B=45°
Найти: AC, ∠A, ∠C
По теореме косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle B = 8 + 9 - 2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5 \qquad AC = \sqrt{5} \text{ дм}$$

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\angle C \quad 8 = 5 + 9 - 2\sqrt{5} \cdot 3 \cdot \cos\angle C$$

$$\cos\angle C = \frac{6}{6\sqrt{5}} \approx 0{,}4472 \qquad \angle C \approx 63^\circ 26'$$

$$\angle A=180°-(\angle B+\angle C)\approx180°-(45°+63°26')=71°34'$$

в) Дано: AC=0,6 м, BC=$\frac{\sqrt{3}}{4}$ дм, ∠C=150°

Найти: AB, ∠A, ∠B

По теореме косинусов:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2\cdot AC\cdot BC\cdot\cos 150°=36+\frac{3}{16}+2\cdot6\frac{\sqrt{3}}{4}\cos 30°$$

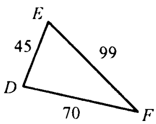
$$AB^2=\frac{651}{16}=40,6875 \qquad AB\approx6,4\ дм$$

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle B \quad 36=40,6875+\frac{3}{16}-2\cdot6,4\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\angle B$$

$$4,875=5,5426\cdot\cos\angle B \qquad \cos\angle B\approx0,8796 \quad \angle B\approx28°24'$$

$$\angle A=180°-(\angle B+\angle C)\approx180°-(28°24'+150°)=1°36'$$

1062.



Дано: ΔDEF, DE=4,5 дм, EF=9,9 дм, DF=70 см

Найти: ∠D, ∠E, ∠F

По теореме косинусов:

$$EF^2 = DE^2+DF^2-2\cdot DE\cdot DF\cdot\cos\angle D$$

$$99^2 =45^2+70^2-2\cdot45\cdot70\cdot\cos\angle D \qquad 9801 = 2025 +4900-6300-\cos\angle D$$

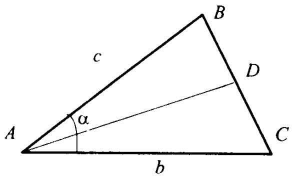
$$2876=-6300\cdot\cos\angle D \qquad \cos\angle D\approx-0,4565, \qquad \angle D=117°10'$$

По теореме синусов:

$$\frac{99}{\sin 117°10'}=\frac{45}{\sin\angle F} \qquad \sin\angle F\approx\frac{45\cdot0,8897}{99}\approx0,4044 \qquad \angle F\approx23°51'$$

$$\angle E=180°-(\angle D+\angle F)\approx180°-(117°10'+23°51')=38°59'$$

1063.



Дано: ΔABC, AD — биссектриса, ∠A=a, AB=c, AC=b

Найти AD.

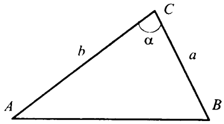
$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$$

$$\frac{1}{2}ab\sin\alpha=\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}b\cdot AD\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$ab\sin\alpha =\cdot AD\cdot(c\cdot\sin\frac{\alpha}{2}+b\cdot\sin\frac{\alpha}{2})$$

$$AD=\frac{ab\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}(c+b)}=\frac{2ab\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}(c+b)}=\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{c+b}$$

1064.



Дано: AC=b, BC=a, $\angle ACB=\alpha$

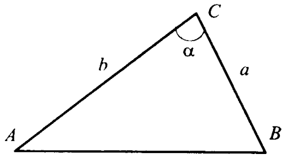
Найти: AB.

По теореме косинусов:

$$AB^2 = BC^2+AC^2-2\cdot BC\cdot AC\cdot\cos\angle C$$

$$AB^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha \qquad AB=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\alpha}$$

1065.



Дано: A(3; 0), B(1; 5), C(2; l)

Доказать: ΔABC – тупоугольный

$$AB=\sqrt{(3-1)^2+(0-5)^2}=\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$$

$$BC=\sqrt{(1-2)^2+(5-1)^2}=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$$

$$AC=\sqrt{(3-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

По теореме косинусов: $AB^2=BC^2+AC^2-2\cdot BC\cdot AC\cdot\cos\angle C$

$29=17+2-2\sqrt{34}\cdot\cos\angle C \qquad 10=-2\sqrt{34}\cdot\cos\angle C \qquad \cos\angle C=-\dfrac{5\sqrt{34}}{34}<0,$

т.е. $\angle C$ – тупой $\Rightarrow$ ΔABC – тупоугольный, ч.т.д.

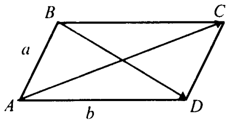
1066.

Дано: $3\vec{i}-4\vec{j}$

Найти: $|\vec{a}|$

Так как $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$, то $\vec{a}\{3;-4\}$ $|\vec{a}|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

1067.



Дано: $|\vec{p}|=2\sqrt{2}$; $|\vec{q}|=3$, $(\vec{p},\vec{q})=45°$, $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$;

$\vec{b}=\vec{p}-3\vec{q}$, ΔABC – тупоугольный

Найти: AC, BD

$$\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}=5\vec{p}+2\vec{q}+\vec{p}-3\vec{q}=6\vec{p}-\vec{q}$$

$$|AC|=\sqrt{(6p)^2+q^2-12pq\cos45°}=\sqrt{288+9-12\cdot2\sqrt{2}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{225}=15$$

$$\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}=\vec{p}-3\vec{q}-5-2\vec{q}=-4\vec{p}-5\vec{q}$$

$$|BD|=\sqrt{16p^2+20q^2-40pq\cos45°}=\sqrt{593}\approx23{,}4$$

1068.

Дано: $|\vec{a}|=2$; $|\vec{b}|=5$; $(\vec{a}\hat{;}\vec{b})=120°$; $\vec{p}=x\vec{a}+17\vec{b}$; $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$; $\vec{p}\perp\vec{q}$

Найти: x

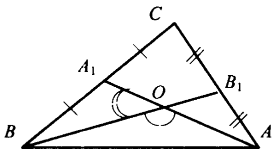
$$\vec{p}\cdot\vec{q}=(x\vec{a}+17\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})=3x\vec{a}^2-x\vec{a}\vec{b}+51\vec{a}\vec{b}-17\vec{b}^2=$$

$$=12x-10x\cdot\cos 120°+51\cdot 10\cdot\cos 120°-17\cdot 25=12x+5x-255-425=17x-680$$

т.к. $\vec{p}\perp\vec{q}$, то $\vec{p}\cdot\vec{q}=0$; $17x-680=0$, $17x=680$, $x=40$

1069.

Дано: ΔABC; $\angle C=90°$, $AC=BC$; AA_1, BB_1, – медианы



Найти: $\angle AOB$, $\angle BOA_1$

Пусть $BC=CA=2a$, из ΔBCB_1:

$$BB_1=\sqrt{BC^2+CB_1^2}=\sqrt{4a^2+a^2}=a\sqrt{5},$$

откуда $AA_1=a\sqrt{5}$

$$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CB_1}-\overrightarrow{CB} \qquad \overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=(\overrightarrow{CB_1}-\overrightarrow{CB})\cdot(\overrightarrow{CA_1}-\overrightarrow{CA})=$$

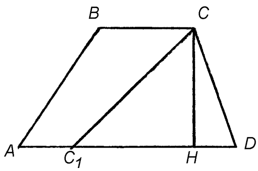
$$=\underbrace{\overrightarrow{CB_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}}_{=0}-\overrightarrow{CB_1}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA_1}+\underbrace{\overrightarrow{CB_1}\cdot\overrightarrow{CA_1}}_{=0}=-2a^2-2a^2=-4a^2$$

$$\cos\angle AOB=\frac{|\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}|}{\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}}=\frac{4a^2}{a\sqrt{5}\cdot a\sqrt{5}}=\frac{4}{5}=0{,}8$$

$\angle AOB\approx 36°51'$; $\qquad \angle BOA_1\approx 180°-36°51'\approx 143°09'$

1070.

Дано: ABCD — трапеция; AD=16 см, BC=8 см, CD= $4\sqrt{7}$ см, $\angle ADC=60°$. $S_{ABCC_1}=S_{CC_1D}$.



Найти: S_{ABCD}, CC_1.

$$\sin 60°=\frac{BH}{4\sqrt{7}} \qquad BH=4\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{7}=2\sqrt{21}$$

$$S=\frac{16+8}{2}\cdot 2\sqrt{21}=24\sqrt{21} \qquad \frac{S}{2}=12\sqrt{21}$$

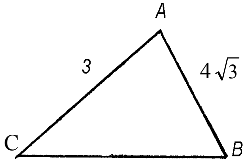
т. C_1 лежит на стороне AD, т.к.

$$S_{ACO}=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 4\sqrt{7}\sin 60°=32\frac{\sqrt{21}}{2}=16\sqrt{21}>12\sqrt{21}$$

т.е. $AC_1=16-12=4$. Из треугольника CC_1D:

$$CC_1=\sqrt{12\sqrt{2}+(4\sqrt{7})^2-2\cdot 12\cdot 4\sqrt{7}\cdot\cos 60°}=4\sqrt{16-3\sqrt{7}}$$

1071.



Дано: $S_{ABC} = 3\sqrt{3}$ $\angle A$ – острый; AB= $4\sqrt{3}$, AC=3.

Найти: *R* описанной окружности.

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sin\angle A = 3\sqrt{3} \ ;$$

$$\sin\angle A = \frac{1}{2}, \qquad \angle A = 30° .$$

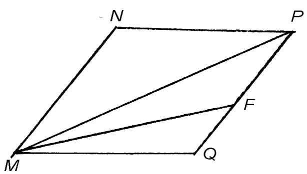
По теореме косинусов:

$$CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos\angle A$$

$$CB = \sqrt{9 + 48 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 4\cos 30^\circ} = \sqrt{57 - 36} = \sqrt{21}$$

$$\frac{CD}{\sin A} = 2R , \qquad \frac{\sqrt{21}}{1/2} = 2R , \qquad R = \sqrt{21}$$

1072.



$\angle M=4\alpha \Rightarrow$ по св-ву ромба

$\angle FMQ=\angle FMP=\alpha$

$\angle Q=180°-4\alpha \qquad \angle QMP=2\alpha$

Из ΔMFQ:

$$\frac{FQ}{\sin FMQ} = \frac{MF}{\sin Q}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{MF}{\sin 4\alpha}, \qquad MF = \frac{a\sin 4\alpha}{\sin\alpha}$$

Из ΔMPF:

$$\frac{MF}{\sin\angle QMP} = \frac{FP}{\sin\angle PMF}$$

$$FP = \frac{a\sin 4\alpha}{\sin\alpha}\sin\alpha\frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{a\sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} = 2a\cos 2\alpha$$

$$PQ = a(2\cos 2\alpha + 1)$$

$$S = PQ^2 \sin 4\alpha = a^2\left(4\cos^2 2\alpha + 1 + 4\cos 2\alpha\right)\sin 4\alpha$$