ГЛАВА XII.
ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА

1078.

а) верно (по определению выпуклого многоугольника);
б) неверно (т.к. правильным является только тот многоугольник, углы и стороны которого равны).

1079.

а) неверно (т.к. углы должны быть тоже равны);
б) верно (т.к. если все углы треугольника равны, то и стороны равны);
в) верно (т.к. из равенства сторон треугольника вытекает равенство углов);
г) неверно (например ромб).

1080.

Четырехугольник называется правильным, если все его стороны и все углы равны, а это только квадрат.

1081.

$$\alpha = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$$

а) n=3, $\alpha = \frac{3-2}{3} \cdot 180°=60°$

б) n=6, $\alpha = \frac{6-2}{6} \cdot 180°=4\cdot30°=120°$.

в) n=5, $\alpha = \frac{5-2}{5} \cdot 180°=3\cdot36°=108°$

г) n=10, $\alpha = \frac{10-2}{10} \cdot 180°=8\cdot18°=144°$

д) n=18, $\alpha = \frac{18-2}{18} \cdot 180°=16\cdot10° = 160°$

1082.

360°.

1083.

$$\alpha = \frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ \qquad n = \frac{360^\circ}{180^\circ - \alpha}$$

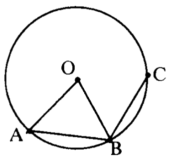
а) α=60°, $\quad$ n=$\dfrac{360}{180-60}$=3

б) α=90°, $\quad$ n=$\dfrac{360^\circ}{90^\circ}$ = 4

в) α=135°, $\quad$ n=$\dfrac{360^\circ}{180^\circ-135^\circ}=\dfrac{360^\circ}{45^\circ}$ = 8

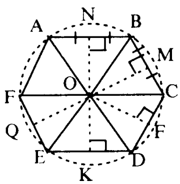
г) α=150°, $\quad$ n=$\dfrac{360^\circ}{180^\circ-150^\circ}=\dfrac{360^\circ}{30^\circ}$ = 12

1084.



а) AB=60°,	360°/60°=6,	n=6
б) AB=30°,	360°/30°=12,	n=12
в) AB=90°,	360°/90°=4,	n=4
г) AB=36°,	360°/36°=10,	n=10
д) AB= 18°,	360°/18°=20,	n=20
е) AB=72°,	360°/72°=5,	n=5.

1085.



Дано: ABCDEF — правильный; NO, MO, KO — серединные перпендикуляры к сторонам.

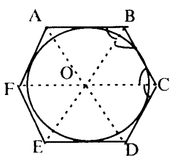
Доказать: NO$\cap$OM; ON, OK — совпадают

Так как ABCDEF — правильный 6-угольник, то каждый угол равен 120°, следовательно

$$\angle NOM=\angle MOF= \ldots = \angle KOQ = 60^\circ.$$

Так как серединные перпендикуляры к сторонам правильного 6-угольника проходят через центр окружности, вписанной в него, то угол между ними: $\angle NOM=60^\circ$, $\angle NOF=120^\circ$, $\angle NOK=180^\circ$, т.е. они пересекаются или лежат на одной прямой. Ч.т.д.

1086.



Дано: ABCDEF – правильный 6-угольник

Доказать: биссектрисы углов пересекаются или совпадают.

Так как $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E=\angle F$ =120°, то

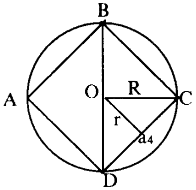
$$\frac{1}{2}\angle A=\frac{1}{2}\angle B=\ldots=\frac{1}{2}\angle F=60^\circ$$

Так как биссектрисы пересекаются в центре вписанной окружности

$\angle COD=60°$ $\angle COE=120°$ $\angle COF=180°$

то биссектрисы или пересекаются или лежат на одной прямой.

1087.



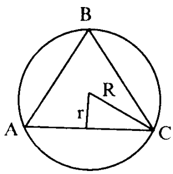
$$a_n=2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

$$r=R\cos\frac{180^\circ}{n}$$

$$S=\frac{1}{2}P_r$$

№	R	r	a_4	P	S
1	$3\sqrt{2}$	3	6	24	36
2	$3\sqrt{2}$	2	4	16	16
3	4	$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$16\sqrt{2}$	32
4	$\frac{7\sqrt{2}}{2}$	3,5	7	28	49
5	$2\sqrt{2}$	2	4	16	16

1088.



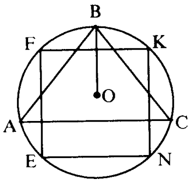
$$a_3=R\sqrt{3},$$

$$R=\frac{a_3}{\sqrt{3}} \qquad r=\frac{1}{2}R$$

$$P=3\cdot a_3; \qquad S=\frac{a_3^2\sqrt{3}}{4}$$

№	R	r	a_3	P	S
1	3	1,5	$3\sqrt{3}$	$9\sqrt{3}$	$\frac{27\sqrt{3}}{4}$
2	$\frac{2}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$	$\frac{1}{3}\sqrt{10\sqrt{3}}$	$2\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$	$6\sqrt{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$	10
3	4	2	$4\sqrt{3}$	$12\sqrt{3}$	$12\sqrt{3}$
4	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	5	15	$\frac{25\sqrt{3}}{4}$
5	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	6	$\sqrt{3}$

1089.



Дано: ΔABC, AB=BC=AC; FKNE — вписанный квадрат; P_{ABC}=18 см.

Найти: FK.

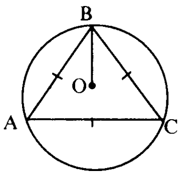
Так как ΔABC — равносторонний, то AB=18:3=6 см

$$R=OB=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}\text{ см}$$

Так как FKNE — вписанный квадрат, то FK= $R\sqrt{2}$.

$$FK=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{6}$$

1090.



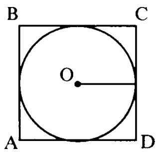
Дано: ABC, AB=BC=AC=3 см

Найти: d

$$a_3=R\sqrt{3}$$

$$R=\frac{Q_3}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3} \qquad d=2R=2\sqrt{3}\text{ см}$$

1091.



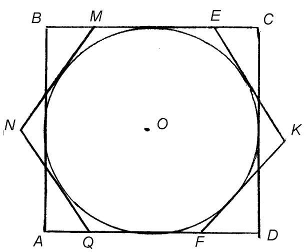
Дано: ABCD – квадрат; описан около Окр (0; r), AB=6 см

Найти: d

Решение:

AB=2r=d=6 см

1092.



Дано: ABCD – квадрат; NMEKFQ – правильный 6-угольник описанный около Окр (0; r); P_{NMEKFQ}=48 см

Найти: P_{ABCD}

$$P_{NMEKFQ}=6\cdot a$$

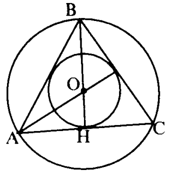
$$48=6\cdot a \qquad a=8\text{ см}$$

т.е. в ΔQOF:

$$\angle OQF=\frac{360^\circ}{6}=60^\circ, \qquad \frac{1}{2}QF=4\text{ см},$$

$$R=\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}, \qquad P_{ABCD}=2\cdot 4\sqrt{3}\cdot 4=32\sqrt{3}.$$

1093.



Дано: ΔABC — правильный, Окр (O; R) — описанная, Окр (O; r) — вписанная.
Доказать: R=2r
Так как ΔABC — правильный, то центры вписанной и описанной окружностей совпадают. O — точка пересечения биссектрис, которые в равностороннем треугольнике являются и медианами; по свойству медиан BO:OH=2:1, а т.к. BO=R, OH=r, то R:r=2:l, R=2r. Ч.т.д.

1094.

а) n=4, R=$3\sqrt{2}$ см

$$a_4=R\sqrt{2}=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=6 \text{ см},\qquad r_4=3\text{см}\qquad P_4=4\cdot a_4=24 \text{ см}$$

$$S_4=\frac{1}{2}P\cdot r=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot 3=36 \text{ см}^2.$$

б) n=3, P=24 см

$$r=\frac{a_3}{2\sqrt{3}}=\frac{8}{2\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ см}$$

$$S_3=\frac{1}{2}P\cdot r=\frac{1}{2}\cdot 24\cdot\frac{4\sqrt{3}}{3}=16\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

в) n=6, r=9 см

$$a_6=R=\frac{2r}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot 6}{\sqrt{3}}=6\sqrt{3} \text{ см}\qquad P_6=6\cdot a_6=36\sqrt{3} \text{ см}$$

$$S_6=\frac{1}{2}\cdot 36\sqrt{3}\cdot 9=162\sqrt{3} \text{ см}^2.$$

г) n=8, r=$5\sqrt{3}$ см

$$a_8=2R\sin\frac{45°}{2}=2\frac{r}{\cos\frac{45°}{2}}\cdot\sin\frac{45°}{2}=2r\cdot \text{tg}\frac{45°}{2}$$

$$r=R\cdot\cos\frac{45°}{2},\qquad R=\frac{r}{\cos\frac{45°}{2}}$$

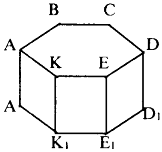
$$\text{tg}\frac{45°}{2}=\text{tg}22{,}5°\approx 0{,}4142\qquad a_8\approx 2\cdot 5\sqrt{3}\cdot 0{,}4142\approx 7{,}1742 \text{ см}$$

$$P_8=8\cdot a_8=8\cdot 7{,}1742\approx 57{,}3932$$

$$S_8\approx\frac{1}{2}57{,}3932\cdot 5\sqrt{3}\approx 248{,}52 \text{ см}^2$$

1095.

Дано: ABCDEK – правильный, 6-угольник, AA_1=l,5 см



Найти: S_{ABCDEK}

Так как AKK_1A_1 – квадрат, то $AK=AA_1$=l,5 см, т.е. a_6=1,5 см

$$r=a_6\cdot\cos30°=a_6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1{,}5\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\text{ см}$$

$$S_{ABCDEK}=\frac{1}{2}P_{ABCDEK}\cdot r=\frac{1}{2}\cdot(6\cdot\frac{3}{2})\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{27\sqrt{3}}{8}\text{ см.}$$

1096.

Дано: правильные треугольник, квадрат, шестиугольник, $a_3=a_4=a_6=a$.

Найти: $S_3:S_4:S_6$

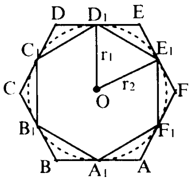
$$P_3=3a,\qquad r=\frac{a\sqrt{3}}{6}\qquad S_3=\frac{1}{2}\cdot3a\cdot\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$S_4=a^2;$$

$$P_6=6a;\qquad S_6=\frac{1}{2}\cdot6a\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}$$

$$S_3:S_4:S_6=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}:a^2:\frac{a^2 3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}:4:6\sqrt{3}$$

1097.



Дано: ABCDEF – описанный правильный 6-угольник; $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – вписанный правильный 6-угольник.

Найти: $S_1:S_2$

$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ – вписанный в окружность, то

$$A_1B_1=B_1C_1=...=F_1A_1=R$$

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}=6S_{\Delta A_1OB_1}=$$

$$=6\left[\frac{1}{2}OA_1\cdot OB_1\cdot\sin\angle60°\right]=3\cdot R\cdot R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3R^2}}{2}$$

OA – биссектриса $\angle A_1OF_1\Rightarrow\angle A_1OA=30°$; $A_1A=x$, получим OA=2x.

По теореме Пифагора:

$$A_1A^2+OA_1^2=OA^2;\qquad x^2+R^2=4x^2;$$

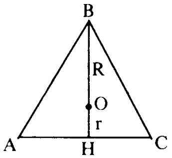
$$3x^2=R^2\Rightarrow x=\frac{R\sqrt{3}}{3};\qquad AB=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$$

$$S_{ABCDEF} = 6S_{\Delta AOB} = 6\cdot\left[\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin\angle 60^\circ\right]=$$

$$=3\cdot\left(\frac{2\sqrt{3}R}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\cdot 3\cdot R^2\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 2}=2\sqrt{3}R^2$$

$$S_{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}:S_{ABCDEF}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{2}:2\sqrt{3}R^2=\frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{3}{4}$$

1098.



Дано: ΔABC – правильный, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности.
Выразить: AB, P, S через r и R
<u>Решение:</u>

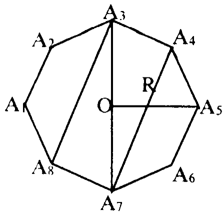
$AB=R\sqrt{3}$ $\quad$ $P_\Delta=3\sqrt{3}R$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}(R\sqrt{3})^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{3R^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

$AB=2\sqrt{3}\,r$ $\quad$ $P_\Delta=6\sqrt{3}\,r$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}(2\sqrt{3}\,r)^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{12r^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\,r^2$$

1099.



Дано: $A_1...A_8$ – правильный восьмиугольник вписан в Окр (O; R)
Доказать: $A_3A_4A_7A_8$ — прямоугольник; $S_{A_3A_4A_7A_8}$
<u>Доказательство:</u>
Так как в 4-угольнике $A_3A_4A_7A_8$: $A_3A_7=A_4A_8$, то $A_3A_4A_7A_8$ — прямоугольник
В ΔA_8OA: $\angle OA_8A_7=\angle OA_7A_8=67°30'$, то $\angle A_7OA_8=45°$

$$A_8A_7^2=A_8O^2+A_7O^2-2A_8O\cdot A_7O\cdot\cos 45^\circ$$

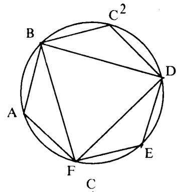
$$A_8A_7^2=R^2+R^2-2R^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2R^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=R^2(2-\sqrt{2})$$

$A_8A_7=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ – длина стороны.

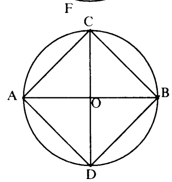
$$S_{A_3A_4A_7A_8}=4\left(\frac{1}{2}R^2\cdot\sin 45^\circ\right)=4\cdot\left(\frac{1}{2}R^2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=R^2\sqrt{2}\ .$$

1100.

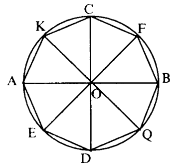
а) Построить Окр(O; R) и разделить ее на 6 равных частей циркулем радиуса R.
ABCDEF – искомый.
б) См. рисунок.
ΔBDF – искомый.



в) построить два взаимно перпендикулярных диаметра AB⊥CD.
ABCD – искомый



г) построить два взаимно перпендикулярных диаметра AB⊥CD, затем биссектрисы прямых углов EF и KQ.
AKCFBQDE – искомый.



1101.

$C=2\pi R$, $\pi=3{,}14$

C	25,12	18,84	82	18π	4,4	6,28	637,42	14,65	$2\sqrt{2}$
R	4	3	13,06	9	0,7	1	101,5	$2\frac{1}{3}$	0,45

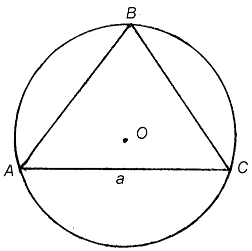
1102.

а) C – увеличится в 3 раза;
б) C – уменьшится в 2 раза;
в) C – увеличится в k раза;
г) C – уменьшится в k раза.

1103.

а) если C – увеличится в k раз, то R – увеличится в k раз;
б) если C – уменьшится в k раз, то R – уменьшится в k раз.

1104.

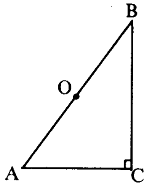


а) Дано: ΔABC – вписан в Окр(O; R);
AB=BC=AC=a
Найти: C

$$AB = R\sqrt{3}, \qquad R=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3},$$

$$C=2\pi R=2\pi\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{2\pi a\sqrt{3}}{3};$$

б) Дано: ΔABC – вписан в Окр(O; R); AC=b, BC=a, $\angle C=90°$;



Найти: C

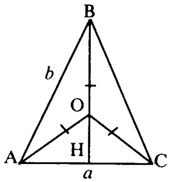
<u>Решение:</u>

O – на середине AB;

$$AB=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

$$C=2\pi R=\pi\sqrt{a^2+b^2};$$

в) Дано: ΔABC – вписан в Окр(O; R); AB=BC=b, AC=a



Найти: C

<u>Решение:</u>

$$BH^2=AB^2-AH^2=b^2-\frac{a^2}{4},$$

$$BH=\frac{1}{2}\sqrt{4(b^2-a^2)}$$

Пусть AO=R, тогда

$$HO=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}-R$$

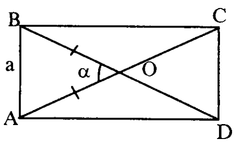
По теореме Пифагора: $AO^2=AH^2+OH^2$

$$R^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}-R\right)^2+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}(4b^2a^2)-R\sqrt{4b^2-a^2}+R^2+\frac{1}{4}a^2$$

$$R\sqrt{4b^2-a^2}=b^2 \qquad R=\frac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2}},$$

$$C=2\pi R=\frac{2\pi b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}$$

г) Дано: ABCD – прямоугольник вписан в Окр(O; R); AB=a, $\angle AOB=\alpha$



Найти: C

<u>Решение:</u>

По теореме косинусов:

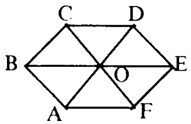
$$AB^2AO^2+BO^2-2\cdot AO\cdot BO\cdot\cos\angle AOB$$

$$a^2=R^2+R^2-2R^2\cos\alpha=2R^2(1-\cos\alpha)$$

$$R^2=\frac{a^2}{2(1-\cos\alpha)} \qquad R=\frac{a}{\sqrt{2(1-\cos\alpha)}}=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

$$C=2\pi R=2\pi\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

д) Дано: ABCDEF – правильный 6-угольник; $S=24\sqrt{3}$ см^2



Найти: C

Решение:

$$S=6\cdot S_{AOB}$$

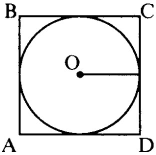
$$S_{AOB}=\frac{1}{2}R^2\sin 60°=\frac{R^2\sqrt{3}}{4} \qquad 24\sqrt{3}=\frac{6R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$6R^2=96, \qquad R=4 \text{ см}$$

$$C=2\pi R=24=8\pi.$$

1105.

а) Дано: ABCD – квадрат описанный около Окр(O; r); AB=a



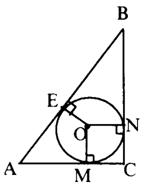
Найти: C

Решение:

$$r=\frac{a}{2}$$

$$C=2\pi r=\pi a$$

б) Дано: ΔABC – описан около Окр(O; r); $\angle C=90°$, AC=BC, AB=c



Найти: C

Решение:

Т.к. CA и CB — касательные, то MC=CN=r

$$AC^2+BC^2=AB^2,$$

$$2AC^2=c^2, \qquad AC=\frac{c\sqrt{2}}{2}$$

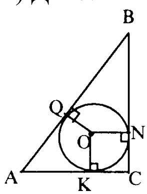
$$AM=BN=\frac{c\sqrt{2}}{2}-r,$$

$$AB=AE+EB$$

$$c=2\left(\frac{c\sqrt{2}}{2}-r\right)=c\sqrt{2}-2r \qquad r=\frac{c(\sqrt{2}-1)}{2},$$

$$C=2\pi r=2\pi\frac{c(\sqrt{2}-1)}{2}=\pi c(\sqrt{2}-1).$$

в) Дано: ΔABC– описанный около Окр(O; r), $\angle C=90°$, AB=c, $\angle A=\alpha$



Найти: C

Решение:

$$BC=c\cdot\sin\alpha, \qquad AC=c\cdot\cos\alpha$$

Так как CB и CA — касательные, то CK=CN=r,

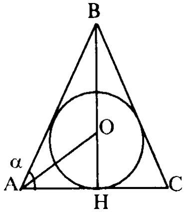
BN=BC–r, AK=$c\cdot\cos\alpha$– r, AB=c, и

$$c\cdot\sin\alpha-r+c+c\cdot\cos\alpha-r=c \qquad c(\sin\alpha+\cos\alpha-1)=2r,$$

$$r = \frac{c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)}{2}$$

$$C=2\pi r=\pi c(\sin\alpha + \cos\alpha - 1).$$

г) Дано: ΔABC – описан около Окр(O; r), AB=BC, $\angle A=\alpha$, $BH \perp AC$, BH=h



Найти: C

Решение:

$AH=\frac{BH}{tg\angle A}=\frac{h}{tg\alpha}$. Пусть HO=r, тогда

$$r=AH\cdot tg\frac{\alpha}{2}=\frac{h\cdot tg\frac{\alpha}{2}}{tg\alpha}$$

$$C=2\pi r=\frac{2\pi\pi ht\frac{\alpha}{2}}{tg\alpha}$$

1106.

$$C=2\pi r \qquad 500\cdot 2\pi r=989$$

$$2r=d=\frac{989}{500\pi}\approx 0{,}63 \text{ м.}$$

1107.

$1 \text{ м}=\frac{1}{40000000}$, экватор=40000 км

$$C=2\pi R=40000$$

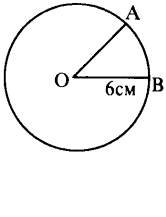
$$2R=\frac{40000}{\pi}\approx 12739$$

1108.

$$R=6370+320=6690 \text{ км}$$

$$C=2\pi R=2\pi\cdot 6690\approx 42013{,}2 \text{ км}$$

1109.



Дано: Окр(O; 6 см); а) $\angle AOB=30°$, б) $\angle AOB=45°$, в) $\angle AOB=60°$, г) $\angle AOB=90°$.

Найти: C

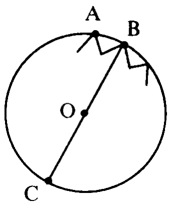
Решение:

$$l=\frac{\pi R}{180}\cdot\alpha,$$

а) $l=\frac{\pi\cdot 6\cdot 30}{180}=\pi$ см; б) $l=\frac{\pi\cdot 6\cdot 45}{180}=\frac{3}{2}\pi$ см;

в) $l=\frac{\pi\cdot 6\cdot 60}{180}=2\pi$ см г) $l=\frac{\pi\cdot 6\cdot 90}{180}=3\pi$ см.

1110.



Дано: AB=47,1 мм; d=450 мм

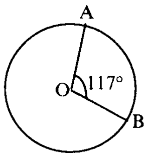
Найти: число зубьев

Решение:

C=2πr C≈3,14·450=1413

1413:47,1=30

1111.



Дано: Окр(O; R), d=58 см, ∠AOB=117°

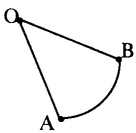
Найти: число зубьев

Решение:

$$R=\frac{1}{2}d=29 \text{ см},$$

$$l=\frac{\pi R}{180°}\cdot\alpha=\frac{\pi\cdot 29\cdot 117°}{180°}\approx 59{,}189 \text{ см}$$

1112.



Дано: ∠AOB=38°, AB=24 см

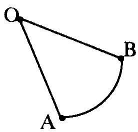
Найти: AO

Решение:

$$l=\frac{\pi R}{180}\cdot\alpha \qquad l=24 \text{ см},$$

$$R=\frac{24\cdot 180}{\pi\cdot 38}\approx 36{,}21$$

1113.



Дано: AB=400 м, AO=5 км

Найти: ∠AOB

Решение:

$$l=\frac{\pi R}{180}\cdot\alpha \qquad 400=\frac{\pi\cdot 5000\cdot\alpha}{180}$$

$$\alpha=\frac{400\cdot 180}{\pi\cdot 5000}\approx 4°35'$$

1114.

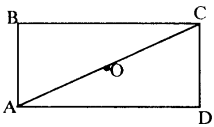
$S = \pi R^2$, $R = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$

S	12,56	78,5	9	0,26	49π	9258,26	9,42	6,25
R	2	5	1,69	$\dfrac{2}{7}$	7	54,3	$\sqrt{3}$	1,41

1115.

а) S – увеличится в k^2 раз. б) S – уменьшится в k^2 раз.

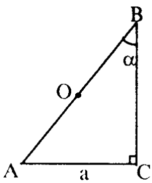
1116.



а) Дано: ABCD – прямоугольник вписан в круг (O; R), AB=a, BC=b.
Найти: Sкруга
Решение:

$$R = \frac{1}{2}AC,\ AC = \sqrt{a^2+b^2},\ \text{т.е. } R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$S = \pi R^2 = \pi\frac{a^2+b^2}{4}$$

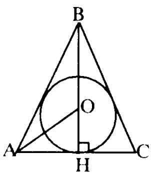


б) Дано: ΔABC – вписан в круг (O; R), $\angle C=90°$, AC=a, $\angle B=\alpha$
Найти: Sкруга
Решение:

$$R = \frac{1}{2}AB,\ AB = \frac{a}{\sin\alpha},\ \text{т.е.}$$

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{4\sin^2\alpha}$$



в) Дано: ΔABC – вписан в круг, AB=BC, AC=a, $BH \perp AC$, BH=h
Найти: Sкруга
Решение:
AO=R, то OH = h–R. По теореме Пифагора:

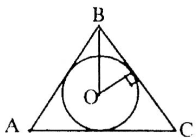
$$AO^2=OH^2+AH^2$$

$$R^2=(h-R)^2+\frac{a^2}{4}=h^2-2hR+R^2+\frac{a^2}{4} \qquad 2hR=h^2+\frac{a^2}{4},$$

$$R=\frac{4h^2+a^2}{8h}$$

$$S=\pi R^2=\frac{\pi(4h^2+a^2)^2}{64h^2}$$

1117.



а) Дано: ΔABC – описан около круга (O; r), AB=BC=AC=a

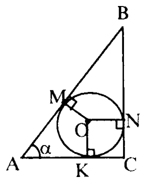
Найти: Sкруга

Решение:

$$AB = r\cdot 2\sqrt{3},$$

$$r=\frac{a}{2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$S=\pi r^2=\frac{\pi a^2}{12}.$$



б) Дано: ΔABC – описан около круга (O; r), ∠C=90°, AC=a, ∠A=α

Найти: Sкруга

Решение:

$$AB=\frac{a}{\cos\alpha}; \qquad BC=a\,\mathrm{tg}\alpha$$

Так как CB и CA – касательные, то NC=KC=r, т.е.

$$BN=BM=a\,\mathrm{tg}\alpha-r \qquad AK=AM=a-r,$$

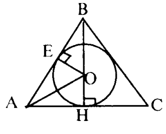
получим AM+MB=AB

$$a\,\mathrm{tg}\alpha-r+a-r=\frac{a}{\cos\alpha},$$

$$2r=a(\mathrm{tg}\alpha+1)-\frac{a}{\cos\alpha}=\frac{a(\sin\alpha+\cos\alpha-1)}{\cos\alpha}, \qquad r=\frac{a(\sin\alpha+\cos\alpha-1)}{2\cos\alpha}$$

$$S=\pi R^2=\frac{\pi a^2(\sin\alpha+\cos\alpha-1)^2}{4\cos^2\alpha}.$$

в) Дано: ΔABC – описан около круга (O; r), AB=BC=a, ∠B=a



Найти: Sкруга

Решение:

В ΔABC: $\angle B=\frac{\alpha}{2}$; ∠H=90°; AB=$a$;

$$AH=a\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad BH=a\cos\frac{\alpha}{2}.$$

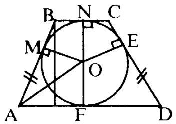
$\Delta ABH \sim \Delta OBE$ (по 2 углам), т.е.

$$\frac{AB}{OB}=\frac{BH}{BE}=\frac{AH}{OE} \qquad \frac{a}{a\cos\frac{\alpha}{2}-r}=\frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{r},$$

$$ar=(a\cos\frac{\alpha}{2}-r)\cdot a\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha-ar\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$ar(1+\sin\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha, \qquad r=\frac{a\sin\alpha}{2(1+\sin\frac{\alpha}{2})}$$

$$S=\pi r^2=\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4(1+\sin\frac{\alpha}{2})^2}$$



г) Дано: ABCD–трапеция, описана около круга (O; r); AB=CD, AD=a, $\angle A=\alpha$

Найти: Sкруга

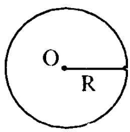
Решение:

Так как AD и AB – касательные, то AM=AF и AO – биссектриса, значит $\angle OAF=\frac{\alpha}{2}$.

ΔAOF: $\angle F=90°$, $\angle A=\frac{\alpha}{2}$, $AF=\frac{a}{2}$, $R=OF=AF\cdot tg\angle A$; $OF=\frac{a}{2}tg\frac{\alpha}{2}$

$$S=\pi R^2=\pi\frac{a^2}{4}tg^2\frac{\alpha}{2}.$$

1118.



Дано: Круг (O; R), d=6,6 мм

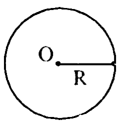
Найти: S

Решение:

$S=\pi R^2$, $R=\frac{1}{2}d$, R=3,3 мм,

$$S=\pi 3{,}3^2=\pi\cdot 10{,}89\approx 3{,}14\cdot 10{,}89=34{,}2 \text{ мм}^2$$

1119.



Дано: Круг (O; R), C=41 м

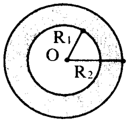
Найти: d и S

Решение:

$C=2\pi r$, т.к. $2r=d$, то $41=\pi\cdot d$, $d=\frac{41}{\pi}\approx 13{,}02$ м

$$S=\pi r^2\approx 3{,}14\cdot 6{,}5^2=133{,}84 \text{ м}^2.$$

1120.

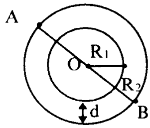


Дано: круг (O; R_1), круг (O; R_2); R_1=1,5 см, R_2=2,5 см
Найти: Sкольца
Решение:

$$S_{кольца}=\pi(R_2^2-R_1^2)=\pi(6,25-2,25)=4\pi\ см^2$$

1121.

Дано: круг (O; R_1), круг (O; R_2); $S_{круга_1}$=314 мм^2, AB=18,5 мм

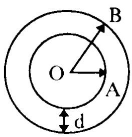


Найти: d
Решение:

$R_2=\frac{1}{2}AB$, R_2=9,25 мм; $S_{кр1}=\pi R_1$, $\frac{314}{\pi}=R_1^2$,

следовательно $R_1\approx\sqrt{100}=10$. 10–9,25=0,75 мм – слой нужно снять.

1122.



Дано: OA=3 мм, d=1 м, 1 м^2–0,8 дм^3
Найти: V
Решение:

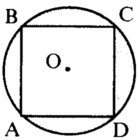
$$S_{кольца}=S_б-S_м$$

$$S_б=\pi OB^2=\pi 4^2=16\pi\ м^2,\qquad S_м=\pi OA^2=\pi 3^2=9\pi\ м^2,$$

$$S_{кольца}=16\pi\ м^2-9\pi\ м^2=7\pi\ м^2$$

$$V=7\pi\cdot 0,8=5,6\pi\ дм^3\approx 17,6\ дм^3.$$

1123.



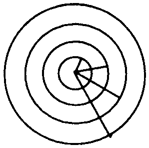
Дано: Окр(O; r); ABCD – квадрат
Найти: $S_{ост}$
Решение:

$$AB=\frac{AC\sqrt{2}}{2}=r\sqrt{2}$$

$$S_{круга}=\pi r^2\qquad S_{квадрата}=2r^2$$

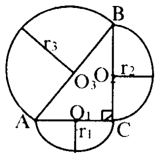
$$S_{ост}=S_{круга}-S_{квадрата}=r^2(\pi-2).$$

1124.



Дано: $r_1<r_2<r_3<r_4$, $r_1=1$, $r_2=2$, $r_3=3$, $r_4=4$
Найти: S_1, $Sкол_1$, $Sкол_2$, $Sкол_3$
Решение:
$S_1=\pi$; $S_2=4\pi$, $S_3=9\pi$; $S_4=16\pi$;
$Sкол_1=S_2-S_1=3\pi$
$Sкол_2=S_3-S_2=5\pi$
$Sкол_3=S_4-S_3=7\pi$

1125.



Дано: ΔABC, $\angle C=90°$; AC — диаметр Окр(O_1; r_1); BC — диаметр Окр(O_2; r_2); AB — диаметр Окр(O_3; r_3)

Доказать: $S_3=S_1+S_2$

<u>Доказательство:</u>

$$S_3=\frac{1}{2}\pi r_3^2;\ S_2=\frac{1}{2}\pi r_2^2;\ S_1=\frac{1}{2}\pi r_1^2$$

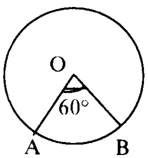
$$S_1+S_2=\frac{1}{2}\pi r_1^2+\frac{1}{2}\pi r_2^2=\frac{1}{2}\pi(r_1^2+r_2^2)=\frac{1}{2}\pi r_3^2,$$

так как по т. Пифагора

$$\left(\frac{1}{2}AC\right)^2+\left(\frac{1}{2}BC\right)^2=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2,\qquad \frac{1}{4}(AC^2+BC^2)=\frac{1}{4}AB^2$$

утверждение доказано.

1126.



Дано: круг (O; 10), $\angle AOB=60°$

Найти: $S_{ост}$

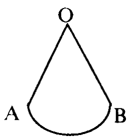
<u>Решение:</u>

$$S_{ост}=S_{круга}-S_{ABC}$$

$$S_{круга}=100\pi,\qquad S_{ABC}=\frac{\pi\cdot 100\cdot 60}{360}=\frac{100\pi}{6},$$

$$S_{ост}=500\ \pi/6\approx 261{,}7\text{ см}^2$$

1127.



Дано: Sсек=S, $\angle AOB=72°$

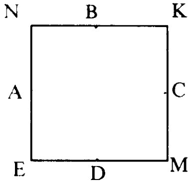
Найти: AO

<u>Решение:</u>

$$S_{сек}=\frac{\pi R^2\cdot\alpha}{360°},\qquad S=\frac{\pi\cdot R^2\cdot 72}{360},$$

$$R=AO=\sqrt{\frac{5S}{\pi}}$$

1128.



Дано: ENKM – квадрат, EN=a

Найти: S_{ABCD}

<u>Решение:</u>

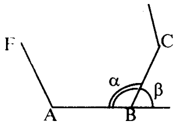
$$S_{ABCD}=S_{ENKM}-4S_{ANB}$$

$S_{сек}=\dfrac{\pi R^2\cdot\alpha}{360°}$, следовательно

$$S_{ANB}=\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot 90}{360}=\frac{\pi a^2}{16}$$

$$S_{ABCD}=a^2-4\frac{\pi a^2}{16}=a^2-\frac{\pi a^2}{4}=\frac{a^2(4-\pi)}{4}$$

1129.



Дано: n-угольник; а) $\beta=18°$, б) $\beta=40°$, в) $\beta=72°$, г) $\beta=60°$

Найти: n

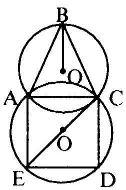
Решение:

а) $\beta=18°$, $n=\frac{360}{18}=20$; б) $\beta=40°$, $n=\frac{360}{40}=9$;

в) $\beta=72°$, $n=\frac{360}{72}=5$; г) $\beta=60°$, $n=\frac{360}{60}=6$.

1130.

Дано: ΔABC, AB=BC=AC вписан в Окр(O; 3 дм); ACDE – квадрат вписан в Окр(O_1; R)



Найти: R

Решение:

Так как ΔABC — правильный, то $AB=R\sqrt{3}$, т.е.

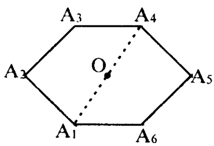
$AB=3\sqrt{3}$ дм, значит сторона квадрата равна $3\sqrt{3}$ дм.

$EO_1=O_1C$, следовательно $R=\frac{1}{2}EC$.

$$EC^2=ED^2+DC^2=27+27=54$$

$EC=3\sqrt{6}$, т.е. $R=\frac{3\sqrt{6}}{2}$

1131.



Дано: $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — правильный; $A_1A_4=2{,}24$ см

Найти: P

Решение:

Так как 6-угольник правильный, то $A_1A_2=R$

$$R=\frac{1}{2}A_1A_4=1{,}12 \text{ см}$$

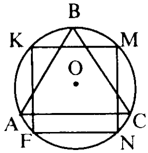
$$P=6\cdot A_1A_2=6\cdot 1{,}12=6{,}72 \text{ см}$$

1132.

Дано: ΔABC – правильный и KMNF – квадрат; а) вписаны в одну Окр; б) описаны около одной Окр

Найти: $S_\Delta:S$

Решение:



а) Пусть KM=x, R — радиус;

$$FN^2+NM^2=FM^2$$

$$2x^2=4R^2$$

$$x^2=2R^2, \qquad x=R\sqrt{2},$$

т.е. $FN=NM=R\sqrt{2}$.

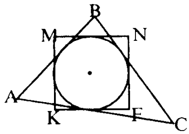
$$S=NM^2=(R\sqrt{2})^2=2R^2$$

$AB=R\sqrt{3}$, т.к. ΔABC – правильный, то

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot AB^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3R^2\,\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

значит

$$\frac{S_\Delta}{S}=\frac{3\sqrt{3}R^2}{4}\cdot\frac{1}{2R^2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$



б) Пусть r – радиус окружности

$MN=2r \Rightarrow$

$$S=4r^2$$

$AB=2\sqrt{3}\,r \Rightarrow$

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\,AB\cdot AC\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\,12r^2\,\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\,r^2$$

$$\frac{S_\Delta}{S}=\frac{3\sqrt{3}r^2}{4r^2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

1133.

Дано: $A_1A_2...A_{12}$ – правильный вписанный в Окр(O; R);

$A_1A_6\cap A_2A_9=B$

Доказать: а) ΔA_1A_2B и ΔA_6A_9B — правильные; б) $A_1A_6=2r$

Доказательство:

а) т.к. правильный 12-угольник вписан в окружность, то каждая дуга $A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_{11}A_{12}=360^\circ:12=30^\circ$, имеем

$$\angle A_2A_1B=\frac{1}{2}\cdot A_2A_4A_6=\frac{1}{2}\cdot 120^\circ=60^\circ$$

$$\angle A_1A_2B=\frac{1}{2}\cdot A_1A_{11}A_9=\frac{1}{2}\cdot 120^\circ=60^\circ$$

$$\angle A_9A_6B=\frac{1}{2}\cdot A_1A_{11}A_9=\frac{1}{2}\cdot 120°=60°$$

$$\angle A_6A_9B=\frac{1}{2}\cdot A_2A_4A_6=\frac{1}{2}\cdot 120°=60°$$

т.к. сумма углов треугольника 180°, то $\angle A_1BA_2=\angle A_6BA_9=60°$, т.е. ΔA_1A_2B и ΔA_6A_9B – правильные.

б) $\angle A_1A_6A_7$ – вписанный, $\angle A_1A_6A_7=\frac{1}{2}A_1A_{10}A_7=90°$, т.е.

$A_6A_1\perp A_1A_{12}$ и $OH_2\perp A_1A_{12} \Rightarrow OH_2 \parallel A_1A_6$
Так же и $\angle A_{12}A_1A_6=90°$, $A_1A_6\perp A_6A_7$ и $OH_1\perp A_6A_7 \Rightarrow OH_1 \parallel A_1A_6$
Получаем, что 4-угольник $A_1A_6H_1H_2$ — прямоугольный, т.е. $A_1A_6=H_1H_2=2r$.

1134.

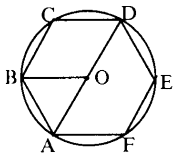
Дано: $A_1A_2...A_{10}$ – правильный; $A_1A_4\cap A_2A_7=B$
Доказать: а) $A_2A_7=2R$; б) $\Delta A_1A_2B\sim\Delta BA_4O$; в) $A_1A_4-A_1A_2=R$
Доказательство:
Так как правильный 10-угольник вписан в окружность, то каждая дуга $A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_9A_{10}=360°:10=36°$.
ΔA_1A_2B и ΔA_4BO:
$\angle A_1A_2B=\angle A_4BO$,

$\angle A_1=\frac{1}{2}A_2A_4=36°$,

$\angle A_2=\frac{1}{2}A_1A_7=72°$, $\angle O=A_2A_4=72° \Rightarrow \angle A_2=\angle O$

$\Delta A_1A_2B\sim\Delta A_4BO$ (по двум углам).
Рассмотрим $\angle A_2OA_7$ — это центральный угол, тогда $\angle A_2OA_7=\angle A_2A_4A_7=180°$, значит A_2A_7 – диаметр, т.е. $A_2A_7=2R$.
ΔA_1A_2B – равнобедренный, т.к. $\angle A_2=\angle B=72°$, значит, $A_1A_2=A_1B$.
ΔBA_4O – равнобедренный, т.к. $\angle B=\angle O=72°$, значит $BA_4=A_4O$.
$A_1A_4-A_1A_2=A_1A_4-A_1B=BA_4=A_4O=R$, суть утверждения задачи.

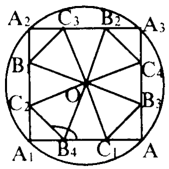
1135.



Дано: ABCDEF – правильный; $S_{окр}=36\pi$ см^2
Найти: AB и S
Решение:
$S_{окр}=\pi R^2$; $36\pi=\pi R^2$, значит $R^2=36 \Rightarrow R=6$; т.к. AB=R, то AB=6 см.

$$S=6\frac{1}{2}AB^2\cdot\sin 60°=3\cdot 36\frac{\sqrt{3}}{2}=54\sqrt{3}\text{ см}^2.$$

1136.



Дано: $A_1A_2A_3A_4$ – квадрат, вписан в Окр (O;R)

Доказать: $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ – правильный

<u>Доказательство:</u>

Докажем, что все стороны равны:

$A_1B_1=A_2C_2=R$, $A_1A_2=A_1C_2+C_2B_1+B_1A_2$, если $C_2B_1=x$, то

$$x+R-x+R-x=2R-x=A_1A_2$$
$$x=2R-A_1A_2$$

Аналогично: $C_3B_2=C_4B_3=C_1B_4=2R-A_1A_2$, т.к. $A_1A_2=R\sqrt{2}$, то $C_2B_1=...=B_4C_1=R(2-\sqrt{2})$.

Докажем, что $C_2B_1=B_1C_3$.

По т. Пифагора из ΔB_1C_3:

$$B_1C_3=\sqrt{2(R-x)^2} \qquad B_1C_3=\sqrt{2}(R-x).$$

Подставим x:

$$B_1C_3=\sqrt{2}(R-2R+R\sqrt{2}) \qquad B_1C_3=2R-R\sqrt{2}$$

Получаем, что все стороны равны.

Докажем, что все углы равны:

$\Delta A_1C_2B_4=\Delta B_1A_2C_3=\Delta B_2A_3C_4=\Delta B_3A_4C_1$ – прямоугольные равнобедренные треугольники, острые углы по 45°. Углы многоугольника являются смежными с внутренними углами треугольников, т.е. $\angle C_2=\angle B_1=\angle C_3=\angle B_2=\angle C_4=\angle B_3=\angle C_1=\angle B_4=135°$

Заключаем, что $B_1C_3B_2C_4B_3C_1B_4C_2$ – правильный

$$S=8\cdot S_{\Delta B_1OC_2}$$

$$S_{\Delta B_1OC_2}=\frac{1}{2}OB_1\cdot OC_2\cdot\sin\angle B_1OC_2$$

$\angle B_1OC_2=45°$ (т.к. все углы по 135°), то в ΔB_1OC_2: $\angle B_1=67{,}5°$, $\angle C_2=67{,}5°$.

OB_1 и OC_2 выразим через R по т. косинусов:

$$B_1C_2^2=OB_1^2+OC_2^2-2\cdot OB_1\cdot OC_2\cdot\cos 45°$$

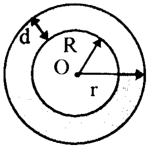
$$R^2(2-\sqrt{2})^2=x^2+x^2-2x^2\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$R^2(2-\sqrt{2})^2=x^2(2-\sqrt{2}) \Rightarrow x=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$S_{\Delta B_1OC_2}=\frac{1}{2}R\sqrt{2-\sqrt{2}}\,R\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\sin45°=\frac{1}{2}R^2(2-\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{(2\sqrt{2}-2)R^2}{4}$$

$$S=8\cdot S_{\Delta B_1OC_2}=8\frac{(\sqrt{2}-1)R^2}{2}=4(\sqrt{2}-1)R^2.$$

1137.



Дано: круг (O; R); R=6370 км; 2C=84152 км

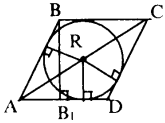
Найтти: d

<u>Решение:</u>

C=2πr, 42076=2πr, r=6700 км

d=r–R=6700–6370=330 км

1138.



Дано: ABCD – ромб описан около Окр(O; R)

Найтти: C

<u>Решение:</u>

а) BD=6 см, AC=8 см.

ΔABO: AO=4 см, AB=5 см, BO=3 см (по т. Пифагора).

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8=24\text{ см}^2;$$

$$S_{ABCD}=BC\cdot 2R$$

$$24=5\cdot 2R$$

$$R=2{,}4\text{ см}$$

$$BB_1=a\cdot\sin\alpha$$

$$C=2\pi R=2\cdot 3{,}14\cdot 2{,}4\approx 15{,}072\text{ см}$$

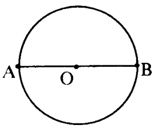
б) AB=a, ∠A=α

ΔABB_1: $\angle B_1=90°$, ∠A=α, AB=a

$$BB_1=a\cdot\sin\alpha \qquad R=\frac{1}{2}BB_1=\frac{a\sin\alpha}{2}$$

$$C=2\pi R=\pi a\cdot\sin\alpha$$

1139.



Дано: круг (O; R), v=4 км/ч, $t_1>t_2$ на $\frac{3}{4}$ ч

Найти: $C_{круга}$

<u>Решение:</u>

Пусть время, если идти по диаметру, равно t, тогда

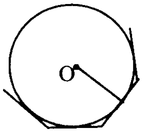
$$R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}4t=2t,$$

отсюда C=4πt, но: $S=4(t+\frac{3}{4})$, т.к. C=S, то $4\pi t=4(t+\frac{3}{4})=4t+3$,

$$t=\frac{3}{4\pi-4}\approx 0{,}35$$

$$C=4\pi\cdot 0{,}35\approx 4{,}396\text{ км}$$

1140.



Дано: правильный n-угольник описан около окружности

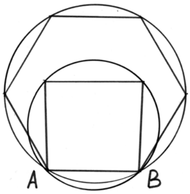
Доказать: $\frac{S}{S_n} = \frac{C}{P_n}$

<u>Доказательство:</u>

$S=\pi R^2$; $S_n=\frac{1}{2}P_n \cdot R \Rightarrow$

$$\frac{S}{S_n} = \frac{\pi R^2}{\frac{1}{2}P_n \cdot R} = \frac{2\pi R}{P_n} = \frac{C}{P_n}$$

1141.



Пусть дана хорда AB=6 см.

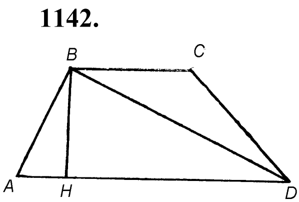
Для квадрата $a_4=\sqrt{2}\,R_1$, где a_4 — сторона квадрата, а R_1 — радиус описанной около него окружности, значит, $R_1 = \frac{a_4}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ см.

Для правильного шестиугольника $a_6=R_2$, где a_6 — сторона шестиугольника, а R_2 — радиус описанной около него окружности, значит, $R_2=a_6=6$ см.

Большая длина дуги AB для окружности, в которую вписан квадрат, $l_1=2\pi R_1-\frac{2\pi R_1}{4}=\frac{3\pi R_1}{2}$; а большая длина дуги AB для окружности, в которую вписан шестиугольник $l_2=2\pi R_2-\frac{2\pi R_2}{6}=\frac{5\pi R_2}{3}$. Искомая сумма длин этих дуг:

$$l_1+l_2=\frac{3\pi R_1}{2}+\frac{5\pi R_2}{3}=\pi\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}+\frac{5\cdot 6}{3}\right)=\frac{\pi}{2}(9\sqrt{2}+20) \text{ см}$$

1142.



Дано: ABCD — трапеция, AB=13 см, AD=14 см, BC=4 см

Найти: C описанной окружности

<u>Решение:</u>

Т.к. вокруг трапеции можно описать окружность, то она является равнобокой.

$$AH = \frac{14-4}{2} = 5 \text{ см}$$

$$\sin A = \frac{5}{13} \qquad \cos A = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \frac{12}{13}$$

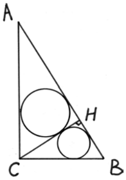
Из тр-ка ABD:

$$BD = \sqrt{196 + 169 - 2 \cdot 13 \cdot 14 \cos A} = \sqrt{365 - 336} = 5$$

$$\frac{BD}{\sin A} = 2R \qquad R = \frac{5 \cdot 13}{2 \cdot 5} = 6{,}5$$

$$C = 2\pi R = 13\pi \text{ см}$$

1143.



Рассмотрим ΔABC с прямым углом ACB, пусть CH — высота, опущенная на гипотенузу. Из того, что $\Delta AHC \sim \Delta CHB$, следует $\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{S_{\Delta AHC}}{S_{\Delta CHB}} = k^2$, где k — коэффициент подобия эти треугольников.

$$S_{\Delta AHC} = \frac{1}{2} P_{\Delta AHC} \cdot r_1,$$

где r_1 — радиус вписанной в ΔAHC окружности.

$$S_{\Delta CHB} = \frac{1}{2} P_{\Delta CHB} \cdot r_2,$$

где r_2 — радиус вписанной в ΔCHB окружности.

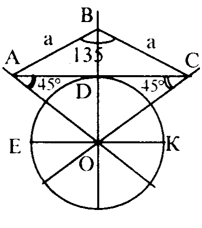
Получим, что $k^2 = \dfrac{\frac{1}{2} P_{\Delta AHC} \cdot r_1}{\frac{1}{2} P_{\Delta CHB} \cdot r_2} = k \cdot \dfrac{r_1}{r_2}$, следовательно $\dfrac{r_1}{r_2} = k$.

Длина окружности, вписанной в ΔAHC равна $2\pi r_1$, а в ΔCHB равна $2\pi r_2$, значит, отношение длин этих окружностей

$$\frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{r_1}{r_2} = k.$$

Что и требовалось доказать.

1144.



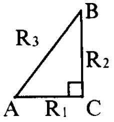
Так как 8-угольник правильный, то $\angle = 135°$. Построим ΔABC по двум сторонам и углу между ними, т.к. $\angle = 135°$; по свойству углов треугольника $\angle A = \angle C = 45°$.

Строим ΔACO: по AC и прилежащим углам по 45°. Точка O – центр окружности радиусом OD; дальше построение симметрично точке O.

1145.

Дано: круг (O_1; R_1), круг (O_2; R_2); $S_3=S_1+S_2$

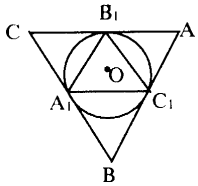
Построить: круг (O_3; R_3)



<u>Построение:</u>

Так как $S_3=S_1+S_2$, то $R_3^2=R_1^2+R_2^2$. Построим прямоугольный треугольник с катетами R_1 и R_2, его гипотенуза и будет R_3. Построим круг с радиусом R_3.

1146.

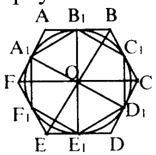


а) Дано: окр(O; R)

Построить: ΔABC: OA=OB=OC=R

<u>Построение:</u>

Впишем в окружность правильный ΔABC, затем через каждую вершину проведем прямые параллельные противоположной стороне. Фигура, образованная пересечением 3-ех сторон – искомый треугольник.



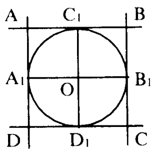
б) Дано: окр(O; R)

Построить: описанный 6-угольник

<u>Построение:</u>

Построить вписанный 6-угольник со сторной ровной R. Через точки A_1, B_1,..., F_1 провести прямые перпендикулярные OA_1, OB_1, ..., OF_1, эти прямые пересекутся в точках A, B, C, D, E, F; ABCDEF – искомый 6-угольник.

1147.

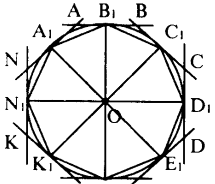


а) Дано: окр(O; R)

Построить: описанный квадрат

<u>Построение:</u>

Построить два взаимно перпендикулярных диаметра $A_1B_1 \perp C_1D_1$. Через C_1 и D_1 построить прямые, параллельные A_1B_1, а через A_1 и B_1 – параллельные C_1D_1, эти прямые пересекаются в точках A, B, C, D; ABCD – искомый квадрат.



б) Дано: окр(O; R)

Построить: описанный 8-угольник

<u>Построение:</u>

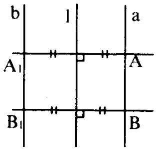
Через т. O построить $N_1D_1 \perp B_1F_1$; $C_1K_1 \perp A_1E_1$ и K_1C_1, A_1E_1 – биссектрисы прямых углов.

$\angle B_1OD_1=\angle D_1OF_1=\angle F_1ON_1=\angle N_1OB_1$.

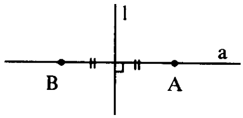
Через каждую точку A_1, B_1,..., N_1 построить прямые, перпендикулярные OA_1, OB_1,..., ON_1. Эти прямые пересекутся в точках A, B, C, D, E, F, К, N. ABCDEFKN – искомый.

ГЛАВА XIII. ДВИЖЕНИЯ

1148.



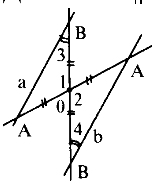
а) При осевой симметрии сохраняется расстояние между точками.
$AA_1 \perp l$ и $BB_1 \perp l$, отсюда b||a.
Так как a||l и a||b, то b||l



б) Если $a \perp l$, то симметричная ей $a \perp l$; Осевая симметрия – отображение плоскости на себя.

1149.

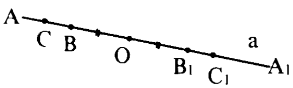
а) Дано: *a* при центральной симметрии отобразилась в прямую *b*
Доказать: *a*||*b*



Доказательство:

$A \to A_1$, $AO=OA_1$ $B \to B_1$, $BO=OB_1$

ΔAOB и ΔA_1OB_1: $AO=OA_1$, $BO=OB_1$, $\angle 1=\angle 2$; отсюда, $\Delta AOB=\Delta A_1OB_1$ (по признаку), значит $\angle 3=\angle 4$ т.к. они накрест лежащие при AB и A_1B_1 и секущей BB_1, следовательно *a*||*b* (по признаку).

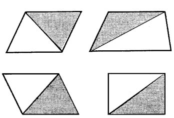


б) Если прямая проходит через центр симметрии, то каждая точка луча OA отображается на луч OA_1 дополняющий OA до прямой a $BO=OB_1$; $CO=OC_1$.

1150.

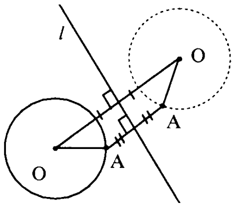
Так как осевая и центральная симметрия есть движение, то a||b отображаются на прямые $a_1 \| b_1$.

1152.



Все пункты доказываются одинаково.
Все 4 фигуры состоят из 2 треугольников. Так как при движении отрезок отображается на равный отрезок, то треугольник — на равный треугольник.

1153.

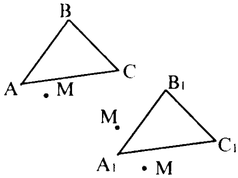


При движении сохраняются расстояния, т.е. $OA=O_1A_1$
Каждая точка окружности отображается в точку на окружности, симметричной данной.

1154.

См. учебник.

1155.



Дано: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$
Доказать: f – единственное движение
<u>Доказательство:</u>
Пусть f – не единственное, есть еще и g, получим существует M, такая, что:

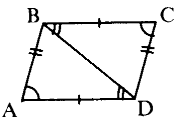
$$M \xrightarrow{f} M_1 \qquad M \xrightarrow{g} M_2$$

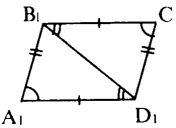
т.к. при движении расстояния сохраняются, то

$$AM=A_1M_1; \qquad AM=A_1M_2,$$

значит $A_1M_1=A_1M_2$, т.е. A_1 – равноудаленная от M_1 и M_2, точки B_1 и C_1 – равноудалены от M_1 и M_3, т.е. по свойству A_1, B_1, C_1 – лежат на серединном перпендикуляре к отрезку MM_1 – противоречие.
A_1, B_1, C_1 – вершины $\Delta A_1B_1C_1$, т.е. не лежат на одной прямой, следовательно, f – единственное движение.

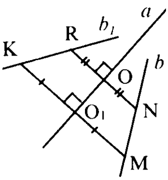
1157.





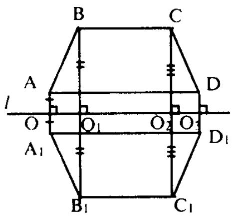
Дано: ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ – параллелограммы; $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$, $\angle A=\angle A_1$
Доказать: $ABCD=A_1B_1C_1D_1$
<u>Доказательство:</u>
$BC=AD$, $\angle A=\angle C$, $\angle CBD=\angle ADB$ (накрест лежащие), т.е. $\Delta ABD=\Delta BDC$ (по признаку).
Аналогично $\Delta A_1B_1D_1=\Delta B_1C_1D_1$.
$\Delta ABD=\Delta A_1B_1D_1$, т.к. $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$, $\angle A=\angle A_1$ (по признаку).
Получаем, что $\Delta ABD=\Delta BDC=\Delta A_1B_1D_1=\Delta B_1D_1C_1$.
$ABCD=\Delta ABD+\Delta DBC$, $A_1B_1C_1D_1=\Delta A_1B_1D_1+AD_1B_1C_1$, значит $ABCD=A_1B_1C_1D_1$.

1158.



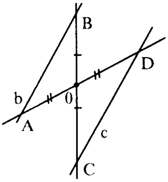
Дано: a, b – прямые
Построить: b_1 с учетом осевой траектории от b к a
<u>Построение:</u>
Построим перпендикуляры от b к a: NR, MK.
$RN \cap a = O$, $MK \cap a = O_1$, $ON = OR$, $KO_1 = MO_1$.
Через K и R построим b_1.

1159.



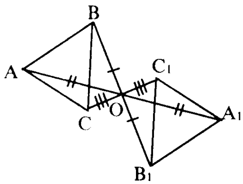
Дано: ABCD – 4-х угольник, *l* – прямая
Построить: $A_1B_1C_1D_1$ симметричный относительно *l*
<u>Построение:</u>
Через точки A, B, C, D опустить перпендикуляры к *l*. На этих перпендикулярах отложить отрезки $AO = OA_1$; $BO_1 = O_1B_1$; $CO_2 = O_2C_1$; $DO_3 = O_3D_1$; $A_1B_1C_1D_1$ – искомый.

1160.



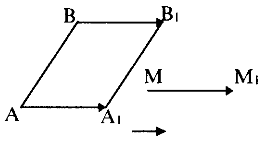
Дано: O и b
Построить: симметричную прямую c
<u>Построение:</u>
Построить лучи AO и BO, отложить на них AO=OD, BO=OC; через C и D провести прямую c; c – искомая.

1161.



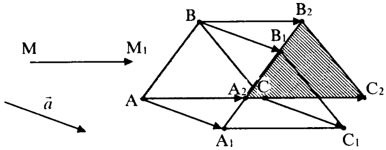
Дано: ΔABC, O
Построить: $\Delta A_1B_1C_1$ симметричный ΔABC
<u>Построение:</u>
Построить лучи: AO, BO, CO.
Отложить $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, $CO = OC_1$;
$\Delta A_1B_1C_1$ – искомый.

1162.



От B отложить вектор, равный $\overrightarrow{MM_1}$ и от A сделать то же самое.
B_1A_1 – искомый.

1163.



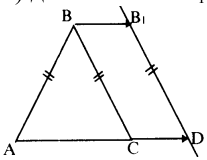
Построение выполнено аналогично предыдущему номеру.

1164.

Дано: ΔABC, $AB=BC$, $D\in AC$, $A–C–D$

а) построить: B_1D: $BC\to B_1D$ при переносе на CD

б) доказать: ABB_1D — равнобедренная трапеция



<u>Построение:</u>

Построить прямую l, проходящую через т. D и $\|BC$; от D вверх отложить отрезок, равный CB ($B_1D=CB$); B_1D – искомый.

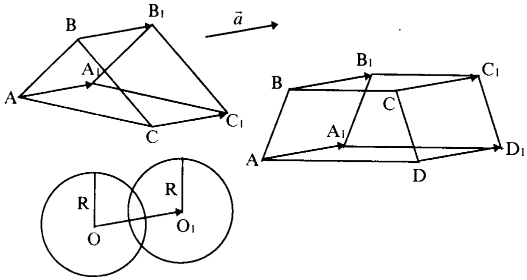
<u>Доказательство:</u>

Так как $BB_1=CD$, то $BB_1 \| CD$

$DB_1=BC$ (из (а)), и $AB=BC$, т.е. $AB=B_1D$

ABCD – трапеция равнобедренная.

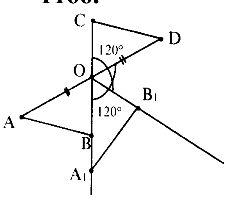
1165.



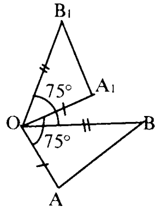
Построение

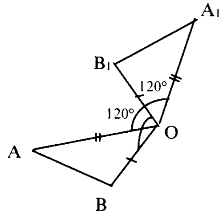
В каждом случае от вершин фигур откладываем вектора, равные вектору $\vec{a}$, получаем фигуру, равную данной.

1166.



При центральной симметрии $A\to D$, $B\to C$, а затем при повороте на 120° $C\to B_1$, $D\to A_1$

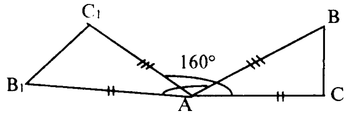
а) 

б) 

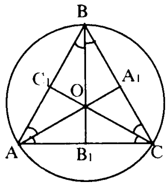
при повороте на 75°: $A \to A_1$, $B \to B_1$

при повороте на 120°: $A \to A_1$, $B \to B_1$

1167.

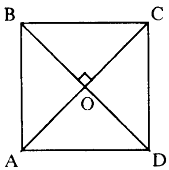


1168.



При повороте на 120° $A \to C$, $C \to B$, $B \to A$; имеем: $AA_1 \to CC_1$, $CC_1 \to BB_1$, $BB_1 \to AA_1$, $\Delta ABC \to \Delta CBA$, а биссектрисы перешли в биссектрисы.

1169.



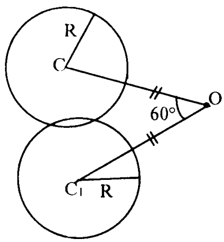
Дано: $AC \cap BD = O$

Доказать: $ABCD \underset{O}{\overset{90^\circ}{\to}} ABCD$

<u>Доказательство:</u>

Так как $AC \perp BD$, то $AC \to BD$, т.к. $AO = OC$, $BO = OD$, то $A \to D$, $D \to C$, $C \to B$, $B \to A$, т.е. $ABCD \to ABCD$.

1170.



а) Если C и O не совпадают, то $OC \to OC_1$. Наша окружность с центром в точке C переходит в окружность с центром в т. C_1.

б) Если C и O совпадают, то окружность отобразится сама на себя.

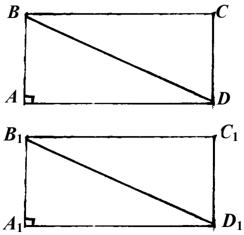
№ 1172.

Возьмем некоторую точку C на отрезке AB. Докажем, что она перейдет сама в себя. Допустим, она переходит в некоторую точку C_1, не лежащую на AB. Тогда получается, что при движении отрезок AB отобразился на треугольник ABC_1, что невозможно, т.к. по теореме отрезок переходит в отрезок. Т.о. $AB \to AB$.

№ 1173.

Возьмем некоторую точку D на плоскости. Допустим D не переходит в D_1, тогда $\Delta ABD \neq \Delta ABD_1$, а по следствию при движении треугольник отображается на равный ему треугольник.

№ 1174.



Дано: а) $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$;

б) $AB=A_1B_1$, $BD=B_1D_1$.

Доказать: $ABCD=A_1B_1C_1D_1$.

<u>Доказательство:</u>

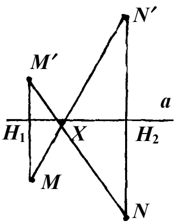
а) Так как ABCD и $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольники, то $AB=CD=A_1B_1=C_1D_1$ и $AD=BC=$ $=A_1D_1=B_1C_1$.

$\Delta ABD=\Delta A_1B_1D_1$ (по 2-м катетам), $\Delta BCD=\Delta B_1C_1D_1$ (по 2-м катетам). Получаем, что $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

б) Исходя из пункта (а): $\Delta ABD=\Delta A_1B_1D_1$ (по катету и гипотенузе), $\Delta BCD=\Delta B_1C_1D_1$ (по катету и гипотенузе).

Получаем, что $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

№ 1175.

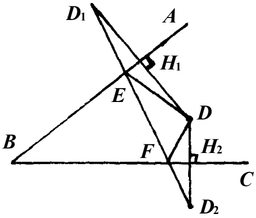


Доказать, что существует единственная точка X на прямой a, такая, что MX + XN принимает минимальное значение.

<u>Доказательство:</u>

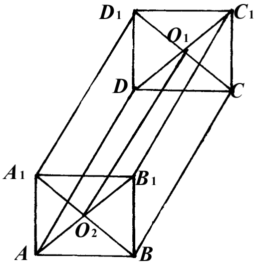
Построим точки M′ и N′, симметричные точкам M и N соответственно относительно прямой a. Прямые M′N и N′M пересекутся в искомой точке X. $\Delta MH_1X \sim \Delta NH_2X$ (по построению) с коэффициентом $k = \dfrac{MH_1}{NH_2}$, т.е. $MX = k \cdot XN$ и точка X будет такая, что MX+XN примет наименьшее значение в искомой точке X.

№ 1176.



Построить ΔEDF с минимальным периметром.
Построим точку D_1, симметричную точке D относительно AB и точку D_2, симметричную точке D относительно AC. Прямая D_1D_2 пересечет AB в точке E, а прямую AC в точке F. ΔEFD — искомый.

№ 1178.



Так как ABB_1A_1 и DCC_1D_1 квадраты, то $AB \| A_1B_1 \| DC \| D_1C_1$; $AB_1 \| DC_1$ и $AO_2 = DO_1$. Докажем, что ADO_1O_2 — параллелограмм. Так как $AO_2=DO_1$, $AO_2 \| DO_1$, то $AD \| O_1O_2$, а т.к. $\angle DAO_2=\angle DO_1O_2$ (две параллельные прямые и секущая), то $AD=O_1O_2$.

№ 1179.

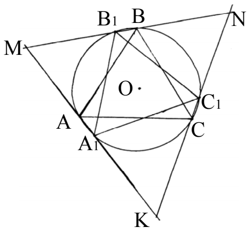
См. рис. 333 (стр. 305 учебника).

Перенесем ΔSAB на вектор $\overrightarrow{BC}$. CC_1 и DD_1 будут его высотами, которые пересекутся в точке K. Тогда третья высота, опущенная на сторону CD, обязана проходить также через точку K и принадлежать прямой SK. Получаем, что $SK \perp CD$, а, значит, и AB.

1180.

1) Случай, когда прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O очевиден, т.к. в этом случае точки A и A_1, B и B_1, C и C_1 должны быть диаметрально противоположны.

2) ΔMNK может лежать внутри и вне круга.



Рассмотрим случай, когда он лежит вне круга (случай, когда он лежит внутри круга аналогичен).

Докажем, что ΔMNK – правильный.

$$\begin{cases} \overset{\smile}{B_1C} = \overset{\smile}{B_1C} \\ \overset{\smile}{BC} = \overset{\smile}{B_1C_1} = 120^\circ \end{cases}$$

вычтем, получим: $\overset{\smile}{CC_1} = \overset{\smile}{BB_1}$, аналогично, $\overset{\smile}{CC_1} = \overset{\smile}{BB_1} = \overset{\smile}{AA_1}$.

$$\begin{cases} \overset{\cup}{AA_1} = \overset{\cup}{AA_1} = 120^\circ \\ \overset{\cup}{B_1A_1} = \overset{\cup}{AC} \end{cases}$$

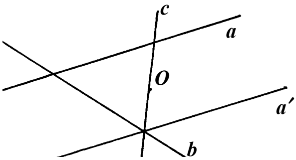
вычтем, получим $\overset{\cup}{B_1A} = \overset{\cup}{A_1C}$, аналогично, $\overset{\cup}{B_1A} = \overset{\cup}{A_1C} = \overset{\cup}{BC_1}$.

Пусть $\overset{\cup}{B_1B} = \alpha$, тогда

$$\angle NMK = \frac{\overset{\cup}{A_1CB} - \overset{\cup}{AB_1}}{2} = \frac{1}{2}(120^\circ + 120^\circ - \alpha - 120^\circ + \alpha) = \frac{1}{2}\cdot 120^\circ = 60^\circ,$$

аналогично, $\angle NMK = \angle MNK = \angle MKN = 60^\circ$.
Таким образом, ΔMNK – правильный.

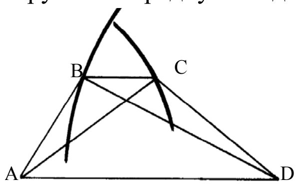
№ 1181.



Построим прямую a′, симметричную a относительно точки O.
Наша искомая прямая будет проходить через точку O и через точку пересечения прямой a′ и b.

1182.

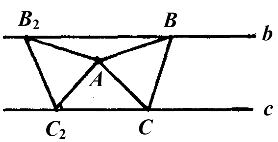
Построим сначала большее основание, затем проведем две окружности радиусами диагоналей. Затем от верхней точки



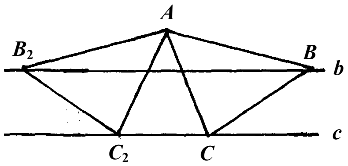
пересечения окружностей параллельным переносом (параллельно AD) начнем опускать отрезок BC пока точка B не совпадет с окружностью с центром в точке D и C с окружностью с центром в точке A.

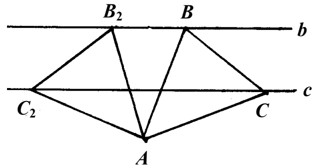
ABCD – искомая трапеция.

№ 1183.



Где бы точка A не лежала, существует два решения задачи.


A
B_2
B
b
C_2
C
c


B_2
B
b
C_2
C
c
A

ГЛАВА XII.
НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ СТЕРЕОМЕТРИИ

№ 1184.

а) прямоугольный параллелепипед имеет 6 граней, 12 ребер, 8 вершин.
б) тетраэдр имеет: 4 грани, 6 ребер, 4 вершины.
в) октаэдр имеет: 8 граней, 12 ребер, 6 вершин.

№ 1185.

Пусть имеется n-угольная призма. Так как призма получается параллельным переносом n-угольника и соединением соответствующих вершин, то число вершин равно 2n (2n делится на 2). А число ребер равно n+n+n=3n (3n делится на 3).

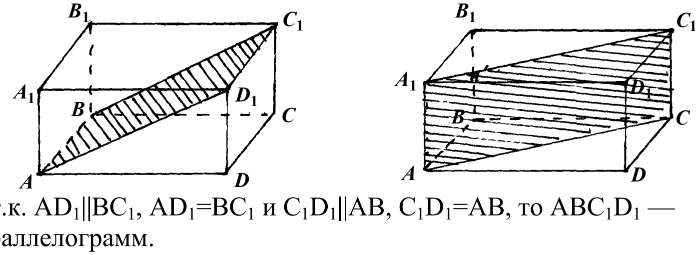
№ 1186.

Доказать, что площадь боковой поверхности прямой призмы равна $P_{осн}\cdot h$ (боковое ребро прямой призмы равно ее высоте).
Если развернуть боковую поверхность, то получится прямоугольник со сторонами $a_1+a_2+...+a_n=P_{основания}$ ($a_1,..., a_n$ — стороны основания) и h — высота призмы, т.о. $S=P_{осн}\cdot h$.

№ 1187.

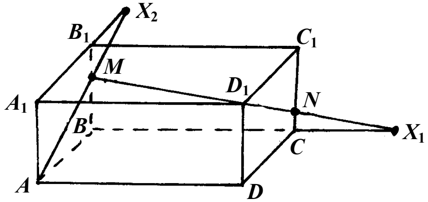
а) нет; б) нет; в) нет; г) да; д) нет

№ 1189.



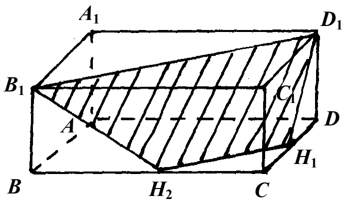
а) т.к. $AD_1 \| BC_1$, $AD_1=BC_1$ и $C_1D_1 \| AB$, $C_1D_1=AB$, то ABC_1D_1 — параллелограмм.
б) т.к. $AC= A_1C_1$, $AC \| A_1C_1$ и $AA_1=CC_1$ и $AA_1 \| CC_1$, то AA_1C_1A — параллелограмм.

№ 1190.



№ 1191.

Докажем, что $B_1D_1H_1H_2$ — трапеция.



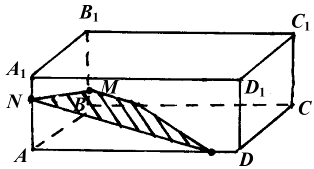
Так как $B_1D_1H_1H_2$ — плоскость, то

$H_2C=CH_1=\frac{1}{2}$ CD.

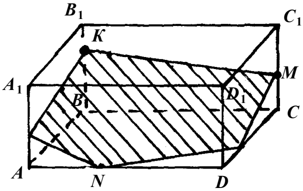
Так как $B_1D \| BD$, а $\Delta CH_2H_1 \sim \Delta CBD$ (по 2 сторонам и углу между ними), то $BD \| H_1H_2 \| B_1D_1$, т.е. $H_1H_2B_1D_1$ — трапеция.

№ 1192.

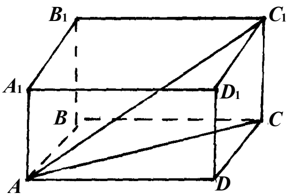
а)



б)



№ 1193.



а) AB=BC=1; $CC_1=2$;

$$AC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2};$$

$$AC_1=\sqrt{2+4}=\sqrt{6}.$$

б) AB=8; BC=9; $CC_1=12$;

$$AC=\sqrt{64+81}=\sqrt{145};$$

$$AC_1=\sqrt{145+144}=\sqrt{289}=17.$$

в) $AB=\sqrt{39}$; BC=7; $CC_1=9$;

$$AC=\sqrt{39+49}=\sqrt{88};$$

$$AC_1=\sqrt{88+81}=\sqrt{169}=13.$$

№ 1194.

$AB=BC=CC_1=a$

$$AC=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$$

$$AC_1=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}\ .$$

№ 1195.

Т.к. объем тела, состоящего из двух других тел, равен сумме объемов этих тел минус их пересечение, то

а) $V=V_1+V_2$

б) $V=V_1+V_2-\frac{1}{3}V_1=\frac{2}{3}V_1+V_2$.

№ 1196.

$AB=8$; $BC=12$; $AA_1=18$.

$$V=AB\cdot BC\cdot AA_1=8\cdot 12\cdot 18=1728\ см^3$$

$$a_{куба}=\sqrt[3]{V}=\sqrt[3]{1728}=12\ см.$$

№ 1197.

$AC_1=13$; $BD=12$; $BC_1=11$.

Т.к. $BD=AC$, то по теореме Пифагора

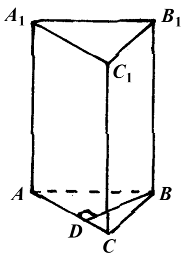
$$CC_1=\sqrt{AC_1^2-AC^2}=\sqrt{13^2-12^2}=\sqrt{25}=5\ \ см$$

$$BC=\sqrt{BC_1^2-CC_1^2}=\sqrt{11^2-5^2}=\sqrt{6\cdot 16}=4\sqrt{6}\ \ см$$

$$AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{12^2-16\cdot 6}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\ \ см$$

$$V=4\sqrt{3}\cdot S\cdot 4\sqrt{6}=240\sqrt{2}\ \ см^3$$

№ 1199.



Дано: $\angle BAC=120°$, $AB=5$ см, $AC=3$ см, $S_{грани}=35$ см^2.

Найти: V

<u>Решение:</u>

По теореме косинусов:

$$BC^2=25+9-2\cdot 5\cdot 3\cdot\cos 120°=34+15=49\ см^2$$

$$BC=7\ см.$$

$$BC\cdot BB_1=35;\qquad BB_1=35:7=5\ см.$$

$$V=S_{осн}\cdot H=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC\cdot BB_1=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\sin 120°\cdot 5=\frac{75\sqrt{3}}{4}\ \ см^3.$$

№ 1200.

Т.к. все ребра равны a, то в основании призмы лежит правильный n-угольник.

а) $V=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot a\cdot \sin 60°=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$;

б) $V=a\cdot a\cdot a=a^3$;

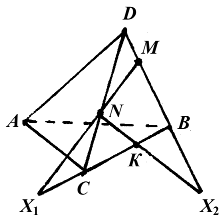
в) $V=a\left(\frac{1}{2}\cdot 6a\cdot a\cdot \cos 30°\right)=\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$;

г) $V=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 8a\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cos 22{,}5°\right)=\frac{4a^3\cos 22°30'}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{2a^3}{\operatorname{tg} 22°30'}$.

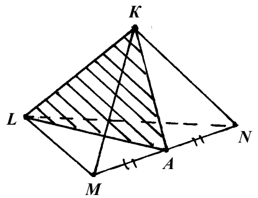
№ 1201.

Нет.

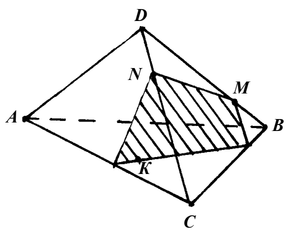
№ 1202.



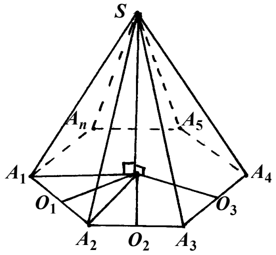
№1203.



№ 1204.



№ 1205.



Так как пирамида правильная, то в основании лежит правильный n-угольник, т.е.

$$HO_1=HO_2=HO_3=...=HO_n=r.$$

Значит,

$$SO_1=SO_2=...SO_n=\sqrt{SH^2+r^2}\ .$$

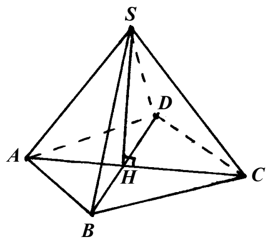
№ 1206.

Из задачи № 1205 все апофемы правильной пирамиды равны друг другу, площадь каждой боковой грани равна $\frac{ha}{2}$, где h — апофема, а a — сторона основания пирамиды, значит,

$$S_{\text{бок}}=\frac{1}{2}h(a_1+a_2+...+a_n)=\frac{1}{2}P_{\text{осн}}\cdot h.$$

№ 1207.

Дано: SH=7, AB=5, DB=8.



Найти: боковые ребра

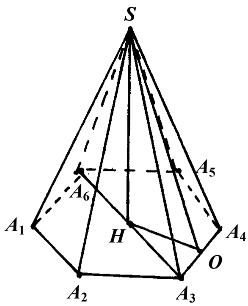
По теореме Пифагора:

$$AH=\sqrt{AB^2-\left(\frac{DB}{2}\right)^2}=\sqrt{25-16}=3\ \text{см};$$

$$SA=SC=\sqrt{AH^2+SH^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}\ \text{см};$$

$$SB=SD=\sqrt{DH^2+SH^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}\ \text{см}.$$

№ 1208.



Дано: $A_1A_2=a$, $S_{SA_3A_6}=S_{SA_1A_2}$.

Найти: $S_{\text{бок.пов.}}$

$$A_3A_6=2R=2a; \qquad HO=r=a\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$SO=\sqrt{SH^2+HO^2}$, т.к. $S_{SA_3A_6}=S_{SA_1A_2}$, то

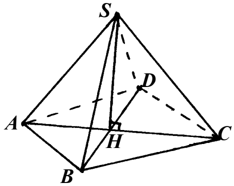
$$\frac{a}{2}\sqrt{SH^2+\frac{3a^2}{4}}=a\cdot SH\ ;$$

$$4SH^2+3a^2=16SH;$$

$$SH=\frac{a}{2}; \qquad SO=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{3}{4}a^2}=a;$$

$$S_{бок.пов.}=6\cdot\frac{a}{2}\cdot a=3a^2.$$

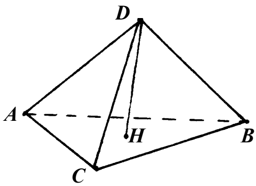
№ 1211.



а) h=2 м, a=3 м.

Так как $V=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$, а в основании лежит квадрат, то

$$V=\frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot 2=6 \text{ м}^3;$$



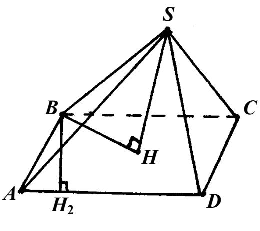
б) h=2,2 м, AB=20 см, BC=13,5 см, $\angle ABC=30°$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 13{,}5\cdot\sin 30°=67{,}5 \text{ см}^2;$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot 67{,}5\cdot 220=4950 \text{ см}^3.$$

№ 1212.

Дано: AB=m, $\angle BSD=\alpha$.



Найти: V.

$$BD=\sqrt{m^2+m^2}=m\sqrt{2}.$$

Так как SB=SD=SC=SA, то $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{BH}{SH}$.

$$SH=\frac{m\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}; \qquad V=\frac{1}{3}m^2\cdot\frac{m\sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{m^3\sqrt{2}}{6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

№ 1214.

а) $r=2\sqrt{2}$ см, h=3 см.

$$V=S_{осн}\cdot h=\pi\cdot 8\cdot 3=24\pi \text{ см}^3.$$

б) $V=120$ см^3, h=3,6 см.

$$V=Sh=\pi r^2\cdot h; \qquad r=\sqrt{\frac{V}{\pi h}}=\sqrt{\frac{120}{3{,}6\pi}}=\frac{10}{\sqrt{3\pi}} \text{ см}.$$

в) r=h, $V=8\pi$ см^3.

$$V=\pi r^2h=\pi h^3; \qquad h^3=8; \qquad h=2 \text{ см.}$$

№ 1215.

$$V_{\text{цилиндра}} = \pi r^2 h$$

а) $V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2}h\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; $\frac{a}{\sin 60°} = 2r$; $a = \sqrt{3}r$

$$\frac{V_п}{V_ц} = \frac{h\cdot r^2 3\sqrt{3}}{4\pi r^2 h} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi};$$

б) $V_п = h\cdot a^2$; $r = \frac{a\sqrt{2}}{2}$;

$$\frac{V_п}{V_ц} = \frac{2\cdot h\cdot a^2}{\pi a^2 h} = \frac{2}{\pi};$$

в) $V_п = \frac{1}{2}\cdot 6r\cdot r\cdot\cos 30°\cdot h = \frac{3\sqrt{3}r^2h}{2}$;

$$\frac{V_п}{V_ц} = \frac{3\sqrt{3}r^2h}{2\pi r^2 h} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi};$$

г) $a=2r\sin\frac{180°}{8}=2r\sin\frac{45°}{2}$;

$V_п=\frac{1}{2}\,8\cdot a\cdot r\cdot\cos\frac{180°}{8}\cdot h=8r^2\cdot h\cdot\cos\frac{45°}{2}\sin\frac{45°}{2}=2\sqrt{2}\,r^2h$;

$$\frac{V_п}{V_ц} = \frac{2\sqrt{2}r^2h}{\pi r^2 h} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi};$$

д) $V_п = \frac{1}{2}\cdot n\cdot 2r\cdot\sin\frac{180°}{n}\cdot r\cos\frac{180°}{n}h = \frac{1}{2}nr^2h\cdot\sin\frac{360°}{n}$;

$$\frac{V_п}{V_ц} = \frac{n\cdot r^2h\cdot\sin\frac{360°}{n}}{2\pi r^2 h} = \frac{n\cdot\sin\frac{360°}{n}}{2\pi}.$$

№ 1216.

Дано: $D = 1$ м, $h = L$.
Найти: $S_{\text{бок.пов.}}$

$$L=2\pi r=\pi D=\pi=h \qquad S_{\text{бок.пов.}}=L\cdot h=\pi^2 \text{ м}^2.$$

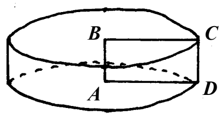
№ 1217.

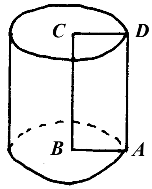
Задача сводится к нахождению площади боковой поверхности цилиндра высотой 4 м и диаметром 20 см.

$$L = 2\pi r = \pi D = 0{,}2\pi \text{ м}.$$

$$S_{\text{бок.пов.}} = L \cdot h = 0{,}2\pi \cdot 4 = 0{,}8\pi \text{ м}^2; \qquad 0{,}8\pi \cdot 1{,}025 = 0{,}82\pi \text{ м}^2.$$

№ 1218.





Пусть AB = a, BC = b

а) $S_{1\text{бок.пов.}} = 2\pi r \cdot h_1 = 2\pi ab$; $\qquad S_{2\text{бок.пов.}} = 2\pi r h_2 = 2\pi ba$;

б) $S_1 = 2\pi ab + 2\pi r^2 = 2\pi ab + 2\pi b^2$; $\qquad S_2 = 2\pi ab + 2\pi a^2$;

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi(ab + b^2)}{2\pi(ab + a^2)} = \frac{b}{a}.$$

№ 1220.

а) h = 3 см, r = 1,5 см,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}25 \cdot 3 = 2{,}25\pi \text{ см}^3;$$

б) r = 4 см, $V = 48\pi$ см^3,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h; \qquad h = \frac{3V}{\pi r^2} = \frac{3 \cdot 48\pi}{\pi \cdot 16} = 9 \text{ см};$$

в) h = m, V = p,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{3p}{\pi m}}.$$

№ 1221.

Дано: $S_{\text{осн}} = Q$, $S_{\text{бок.пов.}} = P$.

Найти: V

<u>Решение:</u>

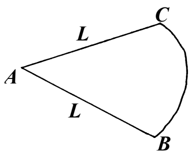
$$S_{\text{бок.пов.}} = \pi r L = P; \qquad S_{\text{осн}} = \pi r^2 = Q;$$

$$L = \frac{P\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{a}}; \qquad r = \sqrt{\frac{Q}{\pi}};$$

$$h = \sqrt{L^2 - r^2} = \sqrt{\frac{P^2}{\pi Q} - \frac{Q}{\pi}} = \frac{\sqrt{P^2 - Q^2}}{\sqrt{\pi a}};$$

$$V = \frac{1}{3} Q \cdot \frac{\sqrt{P^2 - Q^2}}{\sqrt{\pi Q}}.$$

№ 1222.



Дано: $\angle BAC = 60°$, $S = 45\pi$ дм^2.

Найти: V

<u>Решение:</u>

$$S_{ABC} = \pi L^2 \cdot \frac{1}{6} = \pi r L; \qquad L = 6r;$$

$$S_{осн} = S - S_{ABC} = 45\pi - \frac{\pi L^2}{6};$$

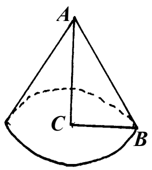
$$\pi r^2 = 45\pi - \frac{\pi L^2}{6} = 45\pi - 6r^2\pi; \qquad r^2 = \frac{45}{7}.$$

По теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{L^2 - r^2} = \sqrt{35 \cdot \frac{45}{7}} = 15 \text{ дм};$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{45}{7} \cdot 15 = \frac{225\pi}{7} \text{ дм}^3.$$

№ 1223.



Дано: AC = 6 см, CB = 8 см.

Найти: $S_{бок.пов.}$; S

<u>Решение:</u>

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ см}$$

$$S_{бок.пов.} = \pi r h = 8 \cdot 10 \cdot \pi = 80\pi \text{ см}^2$$

$$S = S_{бок.пов.} + S_{осн} = 80\pi + \pi \cdot 64 = 144\pi \text{ см}^2$$

№ 1226.

а) R= 4 см.

$$S = 4\pi R^2 = 64\pi \text{ см}^2; \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256}{3}\pi \text{ см}^3$$

б) V = 113,04 см^3.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \approx 3 \text{ см}; \qquad S = 4\pi R^2 \approx 36\pi \text{ см}^2$$

в) S = 64π см^2.

$$S = 4\pi R^2$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}} = 4 \text{ см}; \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{256}{3}\pi \text{ см}^3$$

№ 1227.

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^3 = \frac{32}{3}\pi D_2^3; \qquad V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_2}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi D_2^3;$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{32\cdot\pi D_2^3\cdot 6}{3\cdot\pi D_2^3} = 64.$$

№ 1228.

Дано: $h_1 = 12$ см, $D_1 = 5$ см; $D_2 = 5$ см.

Найти: $V_1 – V_2$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot 12 = 25\pi \text{ см}^3$$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125\pi}{6} \approx 21 \text{ см}^3$$

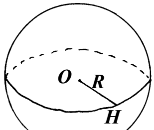
$V_1 – V_2 > 0$, т.е. не переполнит.

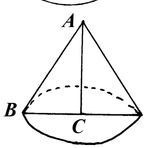
№ 1229.

Задача сводится к нахождению площади поверхности мяча радиусом 10 см.

$$S = 4\pi R^2 = 400\pi \text{ см}^2; \qquad 1{,}08\cdot 400\pi = 432\pi \text{ см}^2$$

№ 1230.





Дано: $AB = 2OH = 2R$, $BC = \frac{1}{2}AC$.

Доказать: $S_1 = S_2$.

$$S_1 = 4\pi R^2$$

По теореме Пифагора:

$$AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} \qquad 4BC^2 = BC^2 + 4R^2$$

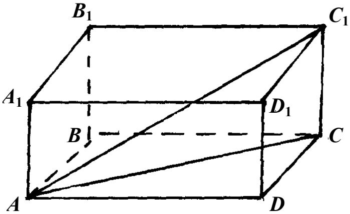
$$BC = \frac{2R}{\sqrt{3}}; \qquad AC = \frac{4R}{\sqrt{3}}$$

$$S_2 = \pi\cdot BC\cdot AC + \pi BC^2 = \pi\cdot\frac{2R}{\sqrt{3}}\cdot\frac{4R}{\sqrt{3}} + \pi\cdot\frac{4R^2}{3} = \frac{8R^2\pi}{3} + \frac{4R^2\pi}{3} = 4\pi R^2$$

№ 1231.

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}=8\,; \qquad \frac{R_1}{R_2}=2\,; \qquad \frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2=4\,.$$

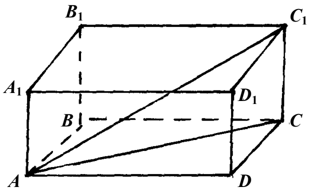
№ 1232.



По свойству параллелограма: $AB=CD$, $AA_1=CC_1$. Из неравенства треугольника:

$$AC<AB+AD;$$
$$AC_1<AC+AA_1;$$
$$AC_1<AB+AD+AA_1.$$

№ 1233.



По теореме косинусов:

$$AC^2=AD^2+CD^2-2AC\cdot DC\cdot\cos\angle D;$$
$$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle A;$$

т.к. $\cos\angle A=-\cos\angle D$, получим

$$AC^2+BD^2=AD^2+CD^2+AB^2+AD^2.$$

Анологично получим, что

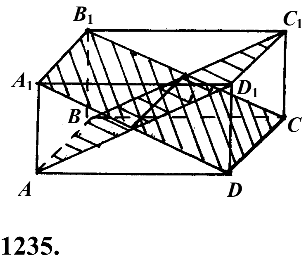
$$A_1C_1{}^2+B_1D_1{}^2=A_1D_1{}^2+C_1D_1{}^2+A_1B_1{}^2+A_1D_1{}^2;$$
$$AC_1{}^2+CA_1{}^2=AC^2+CC_1{}^2+AA_1{}^2+A_1C_1{}^2;$$
$$DB_1{}^2+BD_1{}^2=BD^2+BB_1{}^2+DD_1{}^2+B_1D_1{}^2.$$

Складывая, получим

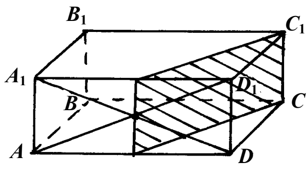
$$AC_1{}^2+CA_1{}^2+DB_1{}^2+BD_1{}^2=$$
$$=AC^2+CC_1{}^2+AA_1{}^2+A_1C_1{}^2+BD^2+BB_1{}^2+DD_1{}^2+B_1D_1{}^2=AD^2+CD^2+$$
$$+AB^2+AD^2+CC_1{}^2+AA_1{}^2+BB_1{}^2+DD_1{}^2+A_1D_1{}^2+C_1D_1{}^2+A_1B_1{}^2+A_1D_1{}^2.$$

№ 1234.

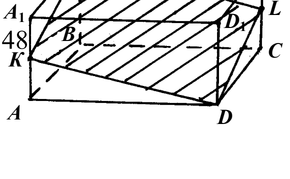
а)



б)



№ 1235.



$KD = B_1L$ и $KD \| B_1L$, т.к.

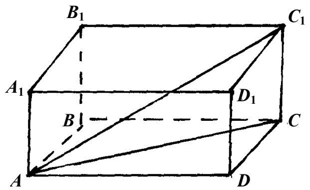
$$KD=\sqrt{AD^2+AK^2}=\sqrt{B_1C_1^2+C_1L^2}=B_1L$$

(по теореме Пифагора), аналогично, $DL \parallel KB_1$ и $DL = KB$, т.к.

$$DL = \sqrt{BC^2 + CL^2} = \sqrt{A_1B_1^2 + A_1K^2} = KB_1,$$

т.е. KB_1LD — параллелограмм.

№ 1236.



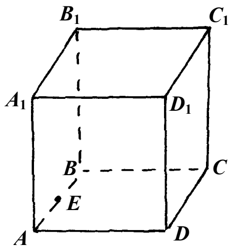
Дано: $S_{ABCD}+S_{AA_1B_1B}+S_{ADD_1A_1}=404$ дм^2,
$AA_1=3k$, $AD=7k$, $AB=8k$.
Найти: AC_1
Решение:

$$AD\cdot AA_1+AA_1\cdot AB+AD\cdot AB=404;$$
$$7k\cdot 3k+3k\cdot 8k+7k\cdot 8k=404;$$
$$101k=404, \qquad k=4.$$

$AA_1 = 12$ дм; $AD = 28$ дм; $AB = 32$ дм.

$$AC_1 = \sqrt{A_1A^2 + AD^2 + AB^2} = \sqrt{144+784+1024} = \sqrt{1952} = 4\sqrt{122} \text{ дм.}$$

№ 1237.



Дано: куб; а) $AC=12$ см; б) $AC_1=3\sqrt{2}$ см;
в) $DE=1$, $BE=AE$.
Найти: V
Решение:

а) $AD = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ см

$$V = 216\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3 = 432\sqrt{2} \text{ см}^3.$$

б) $AC_1=\sqrt{3AA_1^2}$; $AA_1=\dfrac{AC_1}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}$ см;

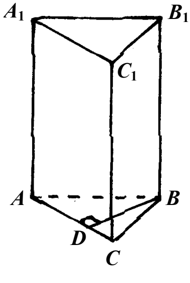
$$V=6\sqrt{6} \text{ см}^3.$$

в) По теореме Пифагора:

$$DE = \sqrt{AD^2 + \frac{1}{4}AB^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}AB \qquad AB = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ см;}$$

$$V=\frac{8\sqrt{5}}{25} \text{ см}^3.$$

№ 1238.



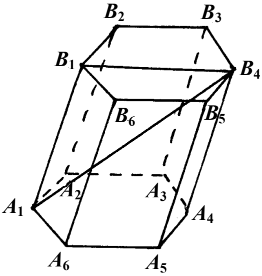
$AB = BC=m$, $\angle ABC = \varphi$, $BB_1 = BD$.

Так как $AB=BC$, то $\angle DBC=\dfrac{\varphi}{2}$, $\cos\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{BD}{BC}$,

$$BB_1=DB=m\cdot\cos\frac{\varphi}{2};$$

$$V=\frac{1}{2}\cdot m\cdot m\cdot\sin\varphi\cdot m\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}m^3\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}.$$

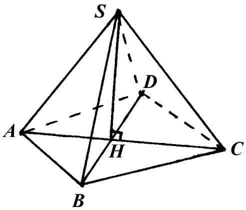
№ 1239.



Дано: $A_1B_4=8$, $\angle B_4A_1B_1=30°$.
Найти: V
<u>Решение:</u>

$$B_1B_4 = 8\cdot\sin30° = 4;$$
$$A_1B_1 = \sqrt{64-16} = 4\sqrt{3};$$
$$B_1B_2=\frac{1}{2}\cdot B_1B_4=2;$$
$$V=\frac{1}{2}\cdot6\cdot2\cdot2\cdot\sin60°\cdot4\sqrt{3}=\frac{12\cdot4\cdot3}{2}=72\ \text{см}.$$

№ 1241.



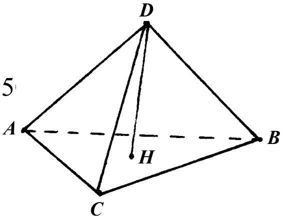
AD = 5 м, AB = 4 м, BD = 3 м, SH = 2 м.
$S_{\Delta ASB}=S_{\Delta CSD}$; $S_{\Delta BSC}=S_{\Delta ASD}$.

$$SB=\sqrt{SH^2+BH^2}=\sqrt{4+2{,}25}=2{,}5\ \text{см}.$$

В ΔABD: $AD^2=AB^2+BD^2$, следовательно, он прямоугольный с прямым углом ABD.
Из ΔABH по теореме Пифагора:

$$AH=\sqrt{AB^2+BH^2}=\sqrt{16+2{,}25}=\sqrt{18{,}25};$$
$$AS=\sqrt{AH^2+SH^2}=\sqrt{18{,}25+4}=\sqrt{22{,}25};$$
$$S_{\Delta ASB}=\frac{1}{4}\sqrt{(AS+SB+BA)(AS+SB-BA)(AS+BA-SB)(SB+BA-AS)};$$
$$S_{\Delta BSC}=\frac{1}{4}\sqrt{(BS+SC+BC)(BS+SC-BC)(BS-SC+BC)(SC+BC-BS)};$$
$$S_{ABCD}=2\cdot S_{\Delta ABD}=2\cdot\frac{1}{2}AB\cdot BD$$
$$S=S_{ABCD}+2S_{\Delta ASB}+2S_{\Delta BSC}=2\sqrt{34}+22\ \text{м}^2.$$

№ 1242.



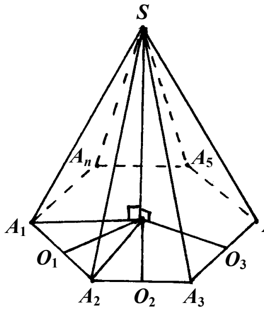
Дано: DH = 12 см, AB = 13 см.
Найти: V.

Решение:

$$V=\frac{1}{3}S_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB\cdot CB\cdot\sin\angle ABC\right)\cdot DH=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 13\cdot\sin 60°\right)\cdot 12=169\sqrt{3}\ см^3.$$

№ 1243.



$A_1A_2=a$, $\angle A_1SA_2=\alpha$.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2SO_1},$$

$$SO_1=\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\qquad HA_1=\frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}},$$

$$HO_1=\frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}\cdot\cos\frac{180°}{n}=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n},$$

по теореме Пифагора:

$$SH=\sqrt{SO_1^2-HO_1^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{a^2}{4}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{180°}{n}};$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}n\cdot a\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{180°}{n}}=$$

$$=\frac{a^3\cdot n}{24}\cdot\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{180°}{n}}.$$

№ 1244.

Задача сводится к нахождению объема цилиндра r=2 мм = 0,2 см.

$V=\pi r^2h=0{,}04\pi h$ см^3 $\quad m=2{,}6\cdot V=0{,}104\pi h=6800$ г

$h\approx 20823$ см ≈ 208 м.

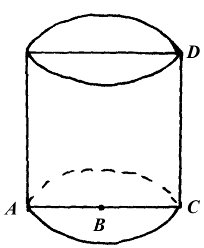
№ 1245.

Задача сводится к нахождению объема цилиндра радиуса 17 мм и высотой 25 м и цилиндра радиуса 13 мм и высотой 25 м.

$V_1=\pi\cdot 1{,}7^2\cdot 2500=7225\pi$ см^3; $\quad V_2=\pi\cdot 1{,}3^2\cdot 2500=4225\pi$ см^3;

$V=V_1-V_2=3000\pi$ см^3; $\quad m=\rho\cdot V=11{,}4\cdot 3000\pi\approx 107$ кг.

№ 1246.



Дано: BC = x см, DC = x + 12 см, S = 288π см^2.

Найти: BC; DC.

Решение:

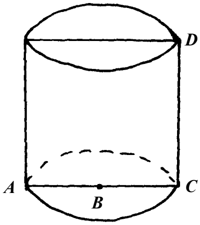
$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi\cdot x(x+12)+2\pi x^2 = 288\pi.$$

$x^2+12x+x^2=144$ x2+6x–72=0

$\frac{D}{4} = 9+ 72 = 81.$ $x_{1,2} = -3 \pm 9,$

но т.к. x>0, то x=6 см, тогда x+12=6+12=18 см.

№ 1247.

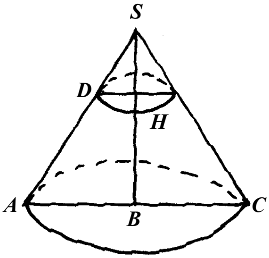


Сторона квадрата равна $\frac{d}{\sqrt{2}}$, т.е. $2\pi r = \frac{d}{\sqrt{2}}$;

$r = \frac{d}{2\pi\sqrt{2}}$;

$$S = \pi r^2 = \pi\cdot \frac{d^2}{4\pi^2 \cdot 2} = \frac{d^2}{8\pi}.$$

№ 1248.



$V_1 = 24$ см^2, SB = 5 см, SH = 2 см.

$V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot 2 = 24.$ $r = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$

ΔASB~ΔDSH (по катету и углу).

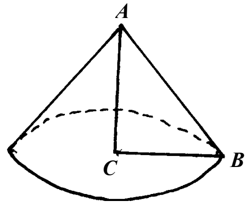
$\frac{DH}{AB} = \frac{SH}{SB}$; $AB = \frac{5}{2}\cdot\frac{6}{\sqrt{\pi}} = \frac{15}{\sqrt{\pi}}$;

$$V=\frac{1}{3}\pi AB^2\cdot SB = 375 \text{ см}^3.$$

№ 1249.

AC = 12 см, V = 324π см^3.

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=324\pi$; $CB=r=\sqrt{\frac{324\cdot 3}{AC}} = \sqrt{\frac{972}{12}}$ 9 см.



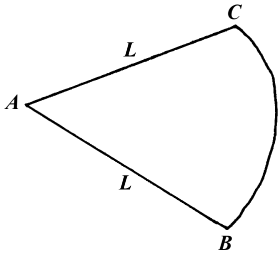
Из прямоугольного ΔABC по теореме Пифагора:

$AB=\sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{144+81} =15$ см.

Тогда искомая дуга равна

$$360°\cdot\frac{CB}{AB} = 360°\cdot\frac{9}{15} = 216°.$$

№ 1250.



$\angle CAB = 120°$, $AB = L = 9$ см.

$$S_{бок} = \frac{120°}{360°}\pi L^2 = 27\pi \text{ см}^2;$$

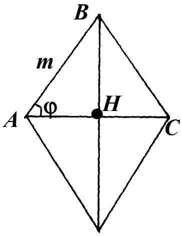
$$\pi rL = 27\pi; \qquad r = 3 \text{ см};$$

по теореме Пифагора:

$$h = \sqrt{L^2 - r^2} = \sqrt{81-9} = 6\sqrt{2} \text{ см};$$

$$S_{осн} = \pi r^2 = 9\pi \text{ см}^2.$$

№ 1251.



Дано: $AB = BC = m$, $\angle BAC = \varphi$.

Найти: V

<u>Решение:</u>

$$BH = m\sin\varphi;$$

$$S_{бок.пов.} = \pi \cdot BH \cdot AB = \pi m^2 \sin\varphi;$$

$$S = 2S_{бок.пов.} = 2\pi m^2 \sin\varphi.$$

№ 1252.

Дано: $D_1 = D_2$, $V_1 = V_2$.

Найти: h.

<u>Решение:</u>

$$V_1 = V_2; \qquad \frac{4}{3}\pi R^3 = \pi R^2 h; \qquad h = \frac{4}{3}R.$$

№ 1253.

Задача сводится к нахождению объема шариков.

$$V_1 = 4\cdot\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D_1}{2}\right)^3 = \frac{16}{3}\pi\cdot\frac{1}{8} = \frac{2}{3}\pi \text{ см}^3; \qquad V_2 = \pi\left(\frac{2,5}{2}\right)^2\cdot h = \frac{25}{16}\pi h \text{ см}^3$$

$$V_1 = V_2; \qquad \frac{2}{3}\pi = \frac{25}{16}\pi h; \qquad h = \frac{32}{75} \text{ см}.$$

№ 1254.

Задача сводится к нахождению площади поверхности шара.

$$S = 4\pi R^2 = 4\cdot(6375)^2\pi; \qquad \frac{1}{4}S = (6375)^2\pi \text{ км}^2 \approx 1,28\cdot 10^8 \text{ км}^2.$$

№ 1255.

Дано: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m^2}{h^2}$.

Найти: $\frac{V_1}{V_2}$

<u>Решение:</u>

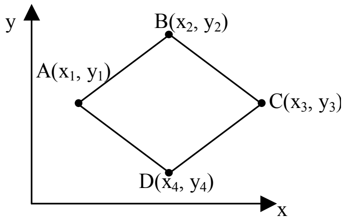
$$\frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \frac{m^2}{h^2}; \qquad \frac{R_1}{R_2} = \frac{m}{n}; \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi R_1^3}{\frac{1}{3}\pi R_2^3} = \left(\frac{m}{n}\right)^3.$$

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

№ 1256.

По признаку параллелограмма (если диагонали четырехугольника точкой пересечения делятся пополам, то это – параллелограмм).

Таким образом, точка пересечения диагоналей: $\left(\frac{x_1+x_3}{2};\frac{y_1+y_3}{2}\right)$, а с



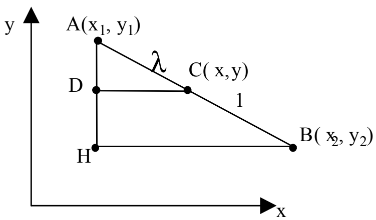
другой стороны $\left(\frac{x_2+x_4}{2};\frac{y_2+y_4}{2}\right)$

приравняем координаты.

$$\begin{cases}\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_2+x_4}{2}\\ \frac{y_1+y_3}{2}=\frac{y_2+y_4}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}x_1+x_3=x_2+x_4\\ y_1+y_3=y_2+y_4\end{cases}$$

№ 1257.

Рассмотрим ΔADC и ΔAHB. Они подобны (по гипотенузе и углу). Таким образом,



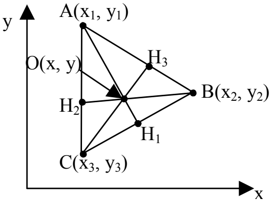
$$\frac{DC}{HB}=\frac{AC}{AB} \qquad \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

$$x=\frac{\lambda x_2-\lambda x_1}{1+\lambda}+x_1 \qquad x=\frac{\lambda x_2+x_1}{1+\lambda}$$

$$\frac{AD}{AH}=\frac{AC}{AB} \qquad \frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

$$y=\frac{\lambda y_2-\lambda y_1}{1+\lambda}+y_1=\frac{\lambda y_2+y_1}{1+\lambda}$$

№ 1258.

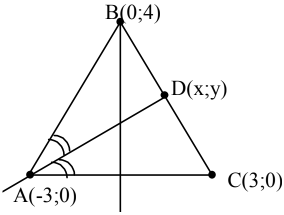


$$H_1\left(\frac{x_2+x_3}{2};\frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

Так как медианы делятся точкой пересечения в отношении 2:1 начиная от вершины, то использовав задачу 1257 получим, что λ=2

$$x=\frac{x_1+2\cdot\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \qquad y=\frac{y_1+2\cdot\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

№ 1259.



AD – биссектриса; A(–3; 0); C(3; 0); B(0; 4)

$$AB=BC=\sqrt{3^2+4^2}=5 \qquad AC=6$$

Пусть BD=z, тогда DC=5–z. Так как по свойству биссектрисы $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$, то

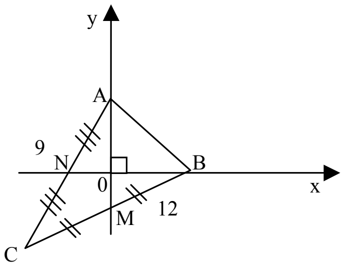
$$\frac{z}{5}=\frac{5-z}{6} \qquad 6z=25-5z$$

$$z=\frac{25}{11}=2\frac{3}{11} \qquad 5-z=2\frac{8}{11}$$

Воспользовавшись задачей 1257, получим:

$$\lambda=\frac{25}{11}:\frac{30}{11}=\frac{5}{6}; \quad x=\frac{0+\frac{5}{6}\cdot 3}{\frac{5}{6}+1}=\frac{15}{11}; \quad y=\frac{4}{1+\frac{5}{6}}=\frac{24}{11}; \quad D\left(\frac{15}{11};\ \frac{24}{11}\right).$$

№ 1260.



Введем систему координат, как показано на рисунке:
Пусть NO=x, а OM=y, тогда по свойству медианы AO=2y, BO=2x.
По теореме Пифагора:

$$\begin{cases} y^2+4x^2=36 \\ x^2+4y^2=\frac{81}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^2+16y^2=81 \\ 4x^2+y^2=36 \end{cases}$$

$15y^2=45$; $y=\pm\sqrt{3}$, но $y>0$. Таким образом, $y=\sqrt{3}$, $x=\frac{\sqrt{33}}{2}$. Таким образом, координаты точки $B(2\sqrt{3};\ 0)$; $A(0;\ \sqrt{33})$.

$$AB=\sqrt{12+33}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}.$$

№ 1261.

Решим сначала задачу для двух точек:

$$m_1(x-x_1)=m_2(x-x_2) \qquad m_1x-m_1x_1=m_2x-m_2x_2$$

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

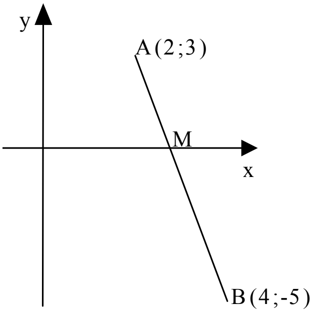
Теперь найдем центр тяжести между точкой x и x_3:

$$x'=\frac{\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}(m_1+m_2)+x_3m_3}{m_1+m_2+m_3}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3}$$

Аналогично: $y'=\frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}$; получим точки

$$\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3};\quad \frac{m_1y_1+m_2y_2+m_3y_3}{m_1+m_2+m_3}\right)$$

№ 1262.



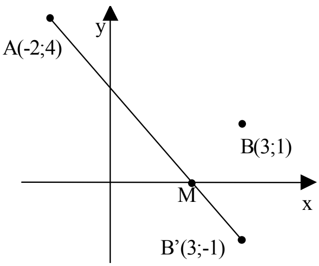
а) Искомая точка лежит на пересечении прямой AB с осью X. Если бы точка M не лежала на этой прямой, то получился бы Δ ABM. А из неравенства треугольника AB <AM+BM.

Таким образом, найдем уравнение прямой AB:

$$\begin{cases}-5=4k+b\\3=2k+b\end{cases}\qquad\begin{cases}k=-4\\b=11\end{cases}$$

y=–4x+11

Так как y=0, то –4x+11=0; $x=\frac{11}{4}$. Таким образом, $M\left(\frac{11}{4};0\right)$.



б) Используем задачу 1175.

Построим образ точки B относительно оси X: B’(3; –1).

Теперь, исходя из предыдущего пункта, найдем уравнение прямой AB’:

$$\begin{cases}4=-2k+b\\-1=3k+b\end{cases}\qquad\begin{cases}5k=-5\\b=4+2k\end{cases}\qquad\begin{cases}k=1\\b=2\end{cases}$$

y=–x+2.

$$\begin{cases}y=0\\y=-x+2\end{cases}\qquad\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$$

Таким образом, M(2; 0).

№ 1263.

а) Ax+By+c=0; A≠0; B≠0. Доказать, что это уравнение прямой.

Так как B≠0, то можно разделить все уравнение на B.

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Пусть $-\frac{A}{B}=k$, $-\frac{C}{B}=b$, y=kx+b – линейная функция, график – прямая.

б) Доказать, что x^2–xy–2=0 не уравнение окружности.

Так как x≠0, то разделим обе части уравнения на x, $y=x-\frac{2}{x}$, а это не уравнение окружности.

№ 1264.

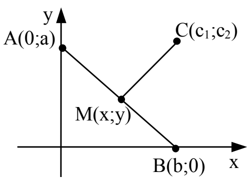
$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=4\\ x^2+y^2=1\end{cases}\qquad \begin{cases}1-2x-4y+1+4=4\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+2y=1\\ x^2+y^2=1\end{cases}\qquad \begin{cases}x=1-2y\\ 1+4y^2-4y+y^2=1\end{cases}\qquad y(5y-4)=0$$

$$\begin{cases}y=0\\ x=1\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}y=0{,}8\\ x=-0{,}6\end{cases}$$

Длина хорды равна: $\sqrt{(1+0{,}6)^2+0{,}8^2}=\sqrt{2{,}56+0{,}64}=\sqrt{3{,}2}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

№ 1265.



Пусть эта константа равна k.

$$\alpha AM^2+\beta CM^2+\gamma BM^2=$$
$$=\alpha x^2+\alpha(a-y)^2+\beta(c_1-x)^2+\beta(c_2-y)^2+\gamma(x-b)^2+\gamma y^2=$$
$$=x^2(\alpha+\beta+\gamma)-2x(c_1\beta+\gamma b)+y^2(\gamma+\alpha+\beta)-$$
$$2y(\alpha a+\beta c_2)=k$$

а) $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\left(x-\frac{c_1\beta+\gamma b}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2+\left(y-\frac{\alpha a+\beta c_2}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2-\frac{(c_1\beta+\gamma b)^2+(2a+\beta c_2)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}\right)=k$$

Таким образом, это может быть и окружность, и точка, и пустое множество.

б) $\alpha+\beta+\gamma=0$

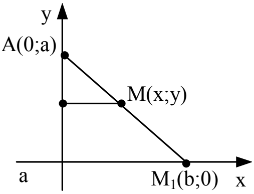
$$-2x(c_1\beta+\gamma b)-2y(\alpha a+\beta c_2)=k$$

Это может быть прямая; плоскость или пустое множество.

№ 1266.

$$AM \cdot AM_1 = k.$$

Введем систему координат, как показано на рисунке



$$\sqrt{\left(x^2+(y-a)^2\right)\left(b^2+a^2\right)}=k\,;$$

$$(x^2+(y-a)^2)(b^2+a^2)=k^2$$

$$x^2+(y-a)^2=\frac{k^2}{b^2+a^2}$$

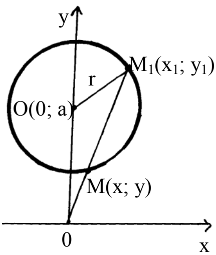
Таким образом, из уравнения видно, что это окружность без точки.

№ 1267.

$OM=kOM_1$.

$$\frac{1}{k}=1+\frac{MM_1}{OM} \qquad \frac{MM_1}{OM}=\frac{1-k}{k}=p \qquad 1+p=\frac{1}{k}$$

Введем систему координат так, как показано на рисунке.



Координаты точки M_1 удовлетворяют уравнению: $x_1^2+(y_1-a)^2=r^2$. Воспользуемся задачей № 1257 ($\lambda=p$)

$$x=\frac{x_1}{1+p} \qquad y=\frac{y_1}{1+p}$$

$$x^2(1+p)^2+(y(1+p)-a)^2=r^2; \qquad x^2+(y-ak)^2=k^2r^2$$

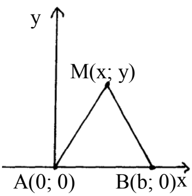
Из уравнения видно, что это окружность с центром $(0; ak)$ и радиусом kr.

№ 1268.

а) Введем систему координат, как показано на рисунке.

$AM=\sqrt{x^2+y^2}$; $BM=\sqrt{(x-b)^2+y^2}$. Так как $AM=k\cdot BM$, то

$$x^2+y^2=k^2(x-b)^2+y^2k^2; \qquad x^2(1-k^2)+2xbk^2+y^2(1-k^2)=k^2b^2$$



$$(1\text{-}k^2)\left(\left(x+\frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2-\frac{b^2k^4}{(1-k^2)^2}+y^2\right)=k^2b^2\,;$$

$$\left(x+\frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2+y^2=\frac{k^2b^2}{(1-k^2)}+\frac{b^2k^4}{(1-k)^2}\,;$$

$$\left(x+\frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2+y^2=\frac{k^2b^2}{(1-k^2)^2}(1-k^2+k^2)=\frac{k^2b^2}{(1-k^2)^2}\,.$$

Таким образом, это окружность с центром $\left(-\dfrac{bk^2}{1-k^2};\,0\right)$ и $r=\dfrac{kb}{1-k^2}$.

б) Построим окружность, проходящую через точки A и B и с центром в точке (x_1; y_1) и радиусом r.

$$\begin{cases} x_1^2+y_1^2=r^2 \\ (x_1-b)^2+y^2=r^2 \end{cases} \qquad (x_1-b)^2-x_1^2=0 \qquad \begin{cases} x_1=\dfrac{b}{2} \\ y_1=\pm\sqrt{r^2-\dfrac{b^2}{4}} \end{cases}$$

Таким образом, уравнение окружности:

$$\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+\left(y\mp\sqrt{r^2-\frac{b^2}{4}}\right)^2=r^2$$

Если радиусы в точке пересечения окружностей пересекаются под прямым углом, то по теореме Пифагора:

$$\frac{k^2b^2}{(1-k^2)^2}+r^2=\left(\frac{b}{2}+\frac{bk^2}{1-k^2}\right)^2+r^2-\frac{b^2}{4};$$

$$\frac{k^2b^2}{(1-k^2)^2}=\frac{b^2k^4}{(1-k^2)^2}+2\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{bk^2}{1-k^2}; \qquad \frac{k^2b^2-b^2k^4-b^2k^2(1-k^2)}{(1-k^2)^2}=0.$$

0=0 получили тождество. Таким образом, утверждение задачи доказано.

№ 1269.

См. рис. 369 учебника стр. 341.

Так как NA=$\frac{1}{2}$ MN=$\frac{1}{2}$ NP, то A — середина отрезка NP.

QB=$\frac{1}{3}$ MN=$\frac{1}{3}$ PQ. Пусть сторона квадрата — a, тогда,

$\mathrm{tg}\angle NMA=\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\angle BMQ=\dfrac{a}{3a}=\dfrac{1}{3}$.

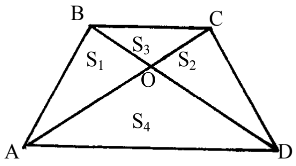
$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{1}{2}-\mathrm{arctg}\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{3}\right)}=$$

$$=\frac{1-\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right)\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{3}\right)}{\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{2}\right)+\mathrm{tg}\left(\mathrm{arctg}\frac{1}{3}\right)}=\frac{1-\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5}=1.$$

Таким образом, $\angle AMB=\frac{\pi}{4}$.

№ 1270.

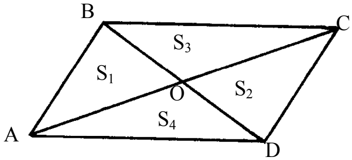
Пусть AO=x; BO=y; OC=x_2; OD=y_2.



$$S_1=\frac{1}{2}\,xy\sin\alpha; \qquad S_2=\frac{1}{2}\,x_2y_2\sin\alpha;$$

$$S_3=\frac{1}{2}\,x_2y\sin\alpha; \qquad S_4=\frac{1}{2}\,xy_2\sin\alpha;$$

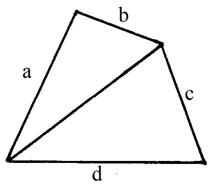
$$xy\cdot x_2y_2=xy\cdot x_2y_2.$$



Таким образом, $S_1\cdot S_2=S_3\cdot S_4$, а т.к. только для двух четырехугольников (трапеция и параллелограмм) выполняется то, что $S_1=S_2$, то $S_1^2=S_3S_4$, $S_1=\sqrt{S_3S_4}$, утверждение доказано.

№ 1271.

Разобьем четырехугольник на 2 треугольника. Так как $\sin\alpha\le 1$, то

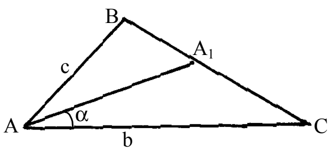


$$S=\frac{1}{2}\,(cd\cdot\sin\widehat{cd}+ab\cdot\sin\widehat{ab})\le\frac{1}{2}\,(cd+ab).$$

Докажем, что $cd+ab\le ac+bd$: $(c-b)d\le(b-c)a$, тогда $-d\le a$, верное неравенство, следовательно,

$$S\le\frac{1}{2}\,(cd+ab)\le\frac{1}{2}\,(ac+bd).$$

№ 1272.



Дано: $\angle A_1AC=\alpha$; AC=b; AB=c.

Доказать: $AA_1=\frac{2bc\cos\alpha}{b+c}$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\,cb\sin(2\alpha).$$

Пусть $AA_1=x$

$$S_{ABC}=S_{ABA_1}+S_{ACA_1}=\frac{1}{2}\,(bx\cdot\sin\alpha+cx\cdot\sin\alpha)=\frac{1}{2}\,cb\cdot\sin2\alpha;$$

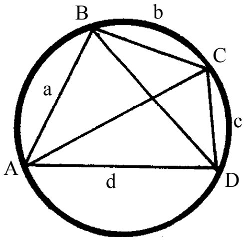
$$(b+c)x\cdot\sin\alpha=2cb\cdot\cos\alpha\sin\alpha; \qquad x=\frac{2abc\cos\alpha}{b+c}.$$

№ 1273.

Т.к. $\hat{ab}+\hat{dc}=\hat{bc}+\hat{ad}=180^\circ$, то пусть $\hat{ab}$ =x; $\hat{da}$ =y.

По теореме косинусов:

$$AC^2=a^2+b^2-2ab\cos x=c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-x);$$



$$(2cd+2ab)\cos x=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{1};$$

$$\cos x=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2cd+2ab}.$$

$$AC=\sqrt{a^2+b^2-2ab\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(cd+ab)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2cd+b^2cd+a^3b+b^3a-a^3b-b^3a+c^2ab+d^2ab}{cd+ab}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a^2cd+b^2cd+c^2ab+d^2ab}{cd+ab}}.$$

Аналогично:

$$a^2+d^2-2ab\cos y=c^2+b^2+2cb\cos y; \qquad \cos y=\frac{a^2+d^2-c^2-b^2}{2cb+2ab};$$

$$BD=\sqrt{a^2+d^2-2ab\frac{a^2+d^2-c^2-b^2}{2(cb+ad)}}=\sqrt{\frac{a^2bc+d^2bc+b^2ad+c^2ad}{ad+bc}}.$$

№ 1274.

См. рис. к № 1273. Из предыдущей задачи:

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}ab\sin x+\frac{1}{2}cd\sin x;$$

$$\cos x=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2cd+2ab}; \qquad 1-\sin^2 x=\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(cd+ab)^2}$$

Так как $x\in(0;\pi)$, то $\sin x>0$,

$$\sin x=\frac{\sqrt{4(cd+ab)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}}{2cd+2ab}=$$

$$=\frac{\sqrt{(2cd+2ab+a^2+b^2-c^2-d^2)(2cd+2ab-a^2-b^2+c^2+d^2)}}{2cd+2ab}=$$

$$=\frac{\sqrt{((a+b)^2-(c-d)^2)((c+d)^2-(a-b)^2)}}{2cd+2ab}=$$

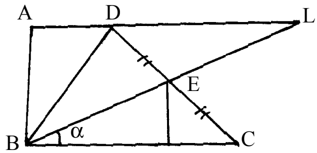
$$=\frac{\sqrt{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(c+d+b-a)}}{2cd+2ab}=$$

$$=\frac{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{2(cd+ab)}=\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{cd+ab}$$

Таким образом,

$$S_{ABCD}=\frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{cd+ab}(ab+cd)=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

№ 1276.



Продлим сторону BE в 2 раза и AD на BC (как показано на рисунке).
Пусть BC=x.

$$\cos\alpha=\frac{3+x}{2BE};\qquad BE=\frac{3+x}{2\cos\alpha}.$$

Из ΔDEL по теореме косинусов:

$$DE^2=DL^2+EL^2-2\cdot DL\cdot EL\cdot\cos\alpha;$$

$$9=x^2+\frac{(3+x)^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{2x(x+3)}{2\cos\alpha}\cdot\cos\alpha;\qquad 9=\frac{x^2+6x+9}{4\cos^2\alpha}-3x;$$

$$x^2+9+6x-12\cos^2\alpha-36\cos^2\alpha=0$$

$$x^2+x(6-12\cos^2\alpha)+(9-36\cos^2\alpha)=0$$

$$D=36+144\cos^4\alpha-144\cos^2\alpha-36+144\cos^2\alpha=(12\cos^2\alpha)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{12\cos 2\alpha-6\pm 12\cos 2\alpha}{2}\Rightarrow x=12\cos^2\alpha-3,\text{ тогда } BE=6\cos\alpha.$$

$$S_{ABCD}=S_{\Delta ABL}=\frac{1}{2}AL\cdot BL\cdot\sin\angle ALB=$$

$$=\frac{(3+12\cos^2\alpha-3)(2\cdot 6\cos\alpha)\sin\alpha}{2}=72\sin\alpha\cdot\cos^3\alpha.$$

№ 1279.

См. рис. 370 учебника стр. 341.

а) $\angle AOB=\frac{360^\circ}{1^\circ}=360^\circ$. Так как ΔABO – равнобедренный, то

$$\angle ABC=\angle BAO=\frac{180^\circ-36^\circ}{2}=72^\circ\qquad \angle BAC=\angle CAO=36^\circ$$

$$\angle BCA=180^\circ-36^\circ-72^\circ=72^\circ$$

Таким образом, $\Delta ABC\sim\Delta ABO$ (по трем углам).

б) AB=AC=OC следует из того, что все три треугольника равнобедренные. Пусть AB=x, тогда BC=R–x; $\cos 72^\circ = \frac{R-x}{2x}$ (из ΔABC). А из ΔABO:

$$\cos 72^\circ = \frac{x}{2R} = \frac{R-x}{2x}$$
$$x^2+xR-R^2=0;$$

$D=5R^2$; $x_{1,2}=\frac{-R\pm R\sqrt{5}}{2}$, но x>0. Таким образом, $x=\frac{R\sqrt{5}-R}{2}$.

№ 1280.

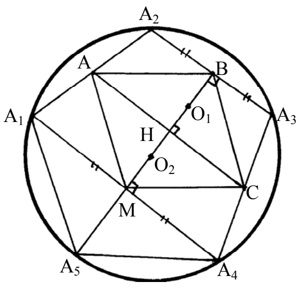
См. рис. 371 учебника стр. 341.

Посчитаем длину AK:

$$AK=\sqrt{R^2+\left(\frac{R}{2}\right)^2}-\frac{R}{2}=\frac{R\sqrt{5}-R}{2}$$

Исходя из предыдущей задачи (№ 1279) выходит, что это длина стороны правильного 10-угольника вписанного в окружность радиуса R.

№ 1281.



Проведем биссектрису угла A_5, т.к. она является и медианой и высотой, то она пройдет через точку O (центр исходной окружности) и совпадет с биссектрисой угла ABC (т.к. $A_1A_4 \| AC \| A_2A_3$, а биссектриса $\angle ABC$ является и медианой и высотой). Таким образом, $OO_1 \perp AC$. Осталось доказать, что $O_1H=HO$.

$$\angle A_5=108^\circ;\ \angle A_5A_1A_4=\frac{180^\circ-108^\circ}{2}=36^\circ;$$

$\angle A_2A_1A_4=72^\circ$; $\angle AA_2B=108^\circ$; $\angle A_2AB=\angle A_2BA=\angle CBA_3=36^\circ$. Таким образом, $\angle ABC=108^\circ$ и $\angle BAC=36^\circ$.

В $\Delta A_1A_2A_4$ AM – средняя линия и равна $\frac{1}{2}A_2A_4=\frac{1}{2}A_1A_4=A_1M$, т.е. ΔA_1MA – равнобедренный, таким образом, $\angle A_1AM=72^\circ$,

$$\angle CAM=180^\circ-72^\circ-36^\circ-36^\circ=36^\circ,$$

следовательно, $\Delta ABC=\Delta AMC$, а точка O является центром вписанной окружности для ΔAMC, т.к. лежит на пересечении биссектрис, таким образом, $O_1H=HO$. Утверждение доказано.

№ 1282.

См. задачу № 1280.

АК – сторона 10-угольника.

Нужно взять циркуль измерить отрезок АК и «пройтись», отмечая точки, по окружности, затем соединить их.

№ 1283.

См. задачу № 1282.

Сначала построить 10-угольник, затем соединить

A_1 с A_3 A_3 с A_5 A_5 с A_7 A_7 с A_9 A_9 с A_1

Полученная фигура – искомая.

№ 1284.

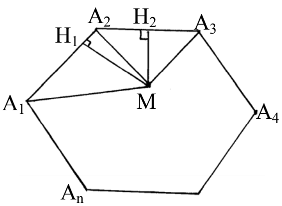
См. задачу № 1283.

Сначала построить 5-угольник, затем соединить.

A_3 с A_5 A_3 с A_1 A_4 с A_1 A_4 с A_2 A_5 с A_2

Полученная фигура – искомая.

№ 1285.



$$S_{A_1\ldots A_n} = \frac{1}{2}P \cdot r =$$

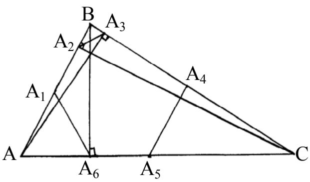
$$= \frac{1}{2}(A_1A_2 \cdot MH_1 + \ldots + A_nA_1 \cdot MH_n);$$

$$Pr = A_1A_2 \cdot MH_1 + \ldots + A_nA_1 \cdot MH_n =$$

$$= A_1A_2(MH_1 + \ldots + MH_n);$$

$$n \cdot r = MH_1 + \ldots + MH_n.$$

1286.



Исходя из задачи № 895: точки A_1, …, A_6 лежат на одной окружности, и, таким образом, докажем, что отрезки A_1A_2, …, A_6A_1 равны.

Пусть $\angle C = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 4\alpha$.

Т.к. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, то $\alpha = 180°/7$.

Пусть АВ=х, тогда:

$A_4A_5 = \frac{x}{2}$ (средняя линия треугольника).

$A_1A_6 = \frac{x}{2}$ (медиана в прямоугольном треугольнике, проведенная к гипотенузе, равна ее половине).

A_3A_2:

По теореме синусов:

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{BC}{\sin 2\alpha}; \quad BC=2x\cos\alpha;$$

$$\frac{AC}{\sin 4\alpha} = \frac{x}{\sin\alpha}; \quad AC=\frac{x\sin 4\alpha}{\sin\alpha} = x(3-4\sin^2\alpha) = 4x\cos 2\alpha x c\alpha\alpha,$$

т.к. $\cos B=\cos 4\alpha=\frac{BA_3}{AB} = \frac{BA_2}{BC}$, то $\Delta A_2BA_3 \sim \Delta ABC$ с коэффициентом подобия $\cos B$, таким образом,

$$\frac{A_2A_3}{AC} = |\cos 4\alpha| = -\cos 4\alpha; \quad A_2A_3=-4x\cos 4\alpha\cos 2\alpha\cos\alpha=\frac{x\sin\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{x}{2}.$$

A_6A_5:

$$A_6C=BC\cos\alpha=2x\cos^2\alpha;$$

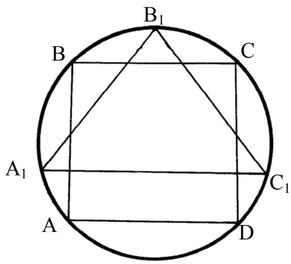
$$A_5A_6=2x\cos 2\alpha-\frac{x}{2}(3-4\sin 2\alpha)=2x\cos 2\alpha-\frac{x}{2}(4\cos 2\alpha-1)=\frac{x}{2}.$$

A_3A_4:

Т.к. $\angle CAB=\angle A_2A_3B$ (из доказанного выше), то $\angle A_2A_3A_4=$ $=180°-2\alpha=5\cdot 180°/7$, а это как раз и есть угол правильного семиугольника, таким образом, $A_3A_4=\frac{x}{2}$.

$A_1A_2 \neq \frac{x}{2}$, т.к. $\angle ABC \neq \frac{x}{2}$, таким образом, точка A_1 искомая седьмая вершина.

№ 1287.



Пусть R – радиус окружности. Тогда $AB=R\sqrt{2}$; $A_1B_1=\sqrt{3}R$. Длина полуокружности равна L=3,14R.

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} \cup 3{,}14R; \qquad 5+2\sqrt{6} \cup 9{,}9;$$

$$\sqrt{6} \cup 2{,}46; \qquad 6=6.$$

Итого:

$$R(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \approx \pi R+0{,}1R$$

№ 1288.

См. рис. 372 учебника стр. 342.

$$AO=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}R; \quad AB=\frac{\sqrt{3}+2}{2}R;$$

$$AC=\sqrt{36R^2+\frac{7+4\sqrt{3}}{4}R^2}=\frac{1}{2}R\sqrt{151+4\sqrt{3}}\ ;$$

$\frac{1}{2}R\sqrt{151+4\sqrt{3}}\bigcup(2\pi+0{,}001)R$; $151+4\sqrt{3}\cup158{,}005$; $\sqrt{3}\cup1{,}75$; 3=3.

Таким образом, $\frac{1}{2}R\sqrt{151+4\sqrt{3}}=(2\pi+0{,}001)R$.

№ 1289.

См. рис. 373 учебника стр. 342 (это не треугольники, а полуокружности).

$$S=S_{AEB}+S_{CFD}-2\cdot S_{AKC}=\frac{1}{2}\pi(OE)^2+\frac{1}{2}\pi(OF)^2-\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\pi\left(OE^2+OF^2-\frac{1}{2}(OE-OF)^2\right)=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}OE^2+\frac{1}{2}OF^2+OE\cdot OF\right)=$$

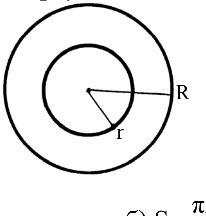
$$=\frac{1}{4}\pi(OE+OF)^2=\pi\left(\frac{OF+OE}{2}\right)^2,$$

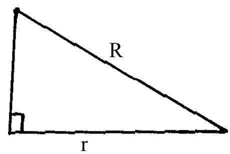
что и требовалось доказать.

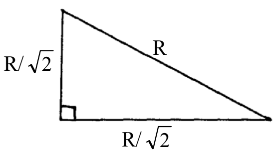
№ 1290.

а) $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)$.

Радиус нашего круга будет равен $\sqrt{R^2-r^2}$, а это есть катет прямоугольного треугольника с гипотенузой R и катетом r.

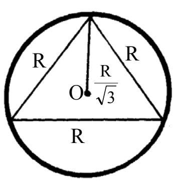




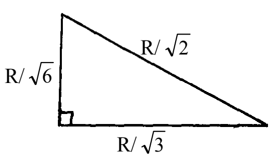


б) $S=\frac{\pi R^2}{2}=\pi\left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2$.

Радиус нашего круга будет равен R/ $\sqrt{2}$, а это есть катет прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой R.



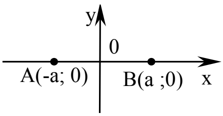
в) $S=\frac{\pi R^2\cdot 60}{360}=\pi\left(\frac{R}{\sqrt{6}}\right)^2$.



Радиус нашего круга будет равен $\frac{R}{\sqrt{6}}$, а это катет прямоугольного треугольника, гипотенуза которого $\frac{R}{\sqrt{2}}$, а второй катет $\frac{R}{\sqrt{3}}$, а $\frac{R}{\sqrt{3}}$ — это радиус описанной окружности вокруг равностороннего треугольника со стороной R.

№ 1291.

Введем систему координат, как показано на рисунке.



При центральной симметрии:

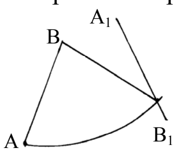
$B \to O - OB = 0 - a = -a = A$; $A \to O + OA = 0 + a = B$.

При осевой симметрии относительно середины AB аналогично.

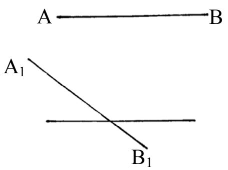
$B \to O - OB = 0 - a = -a = A$; $A \to O + OA = 0 + a = a = B$.

№ 1292.

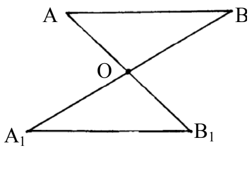
Приведем контрпримеры того, что кроме симметрии относительно прямой и поворота вокруг точки, никаких других отображений нет, которые бы переводили отрезок в равный ему отрезок.



1) поворот на угол φ: если эти отрезки не пересекаются, то это невозможно.

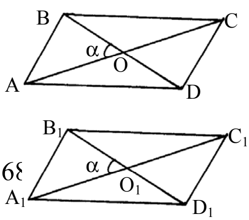


2) параллельный перенос: если они не параллельны, то это невозможно.



3) симметрия относительно точки: два параллельных отрезка.

№ 1293.

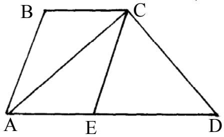


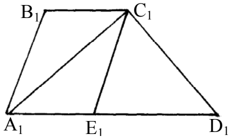
Так как $AC = A_1C_1$ и $BD = B_1O_1$, то $AO = OC = A_1O_1 = O_1C_1$; $BO = OD = B_1O_1 = O_1D_1$; $\alpha = \angle AOB = \angle COD = \angle A_1O_1B_1 = \angle C_1O_1D_1$ (как вертикальные);

$\angle BOC=180°-\alpha=\angle AOD=\angle B_1O_1C_1=\angle A_1O_1D_1$.
Таким образом, мы получим 4 равных треугольника, а значит $ABCD=A_1B_1C_1D_1$.

№ 1294.

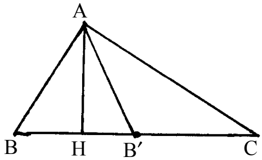
Отложим от точек A и A_1 отрезок $AE=BC$ ($A_1E_1=B_1C_1$) и соединим с вершиной C (C_1).
$\Delta ECD=\Delta E_1C_1D_1$ (по трем сторонам, т.к. $CE=AB=A_1B_1=C_1E_1$).

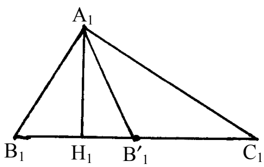




Так как в равных треугольниках соответствующие элементы равны, $\angle CED=\angle C_1E_1D_1$ и $\angle AEC=\angle A_1E_1C_1$ (смежные с $\angle CED=\angle C_1E_1D_1$).
Таким образом,
$\Delta ACE=\Delta A_1C_1E_1$ (по двум сторонам и углу между ними);
$\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$ (по трем сторонам)
Трапеции составлены нами из трех равных треугольников, значит, они равны.

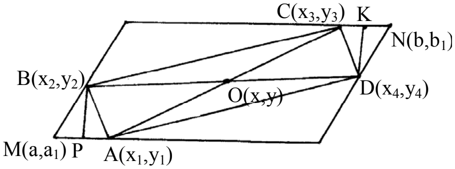
№ 1295.





$BA=B_1A_1$; $AC=A_1C_1$; $\angle B-\angle C=\angle B_1-\angle C_1$.
Отобразим точку B относительно высоты AH (B_1 относительно A_1H_1); $AB'=AB=$ $=A_1B_1=A_1B_1'$; $\angle B=\angle AB'B=\angle B'AC+\angle C$ (т.к. внешний угол треугольника равен сумме двух других). Аналогично $\angle B_1=\angle A_1B_1'B_1=$ $=\angle B_1'A_1C_1+\angle C_1$.
Таким образом, $\angle B'AC=\angle B_1'A_1C_1$.
Таким образом, $\Delta AB'C=\Delta A_1B_1'C_1$ (по двум сторонам и углу между ними).
Таким образом, $\angle AB'C=\angle A_1B_1'C_1$ и $\angle AB'B=\angle A_1B_1'B_1$.
Следовательно, $\Delta BAB'=\Delta B_1A_1B_1'$ (т.к.
$\Delta ABH=\Delta ABH'=\Delta A_1H_1B_1'=\Delta A_1B_1H_1$ по гипотенузе и острому углу).
Таким образом, исходные треугольники состоят из двух равных треугольников, а значит они равны.

№ 1296.

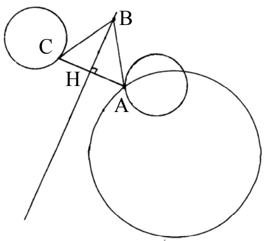


Построим параллелограммы, как показано на рисунке. Координаты точки пересечения диагоналей:

$$x=\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{x_1-MP+x_3+MP}{2}=\frac{a+b}{2};\qquad y=\frac{y_1+y_3}{2}=\frac{a_1+b_1}{2},$$

Таким образом, точка пересечения диагоналей вписанного параллелограмма совпадает с точкой пересечения диагоналей исходного.

№ 1297.



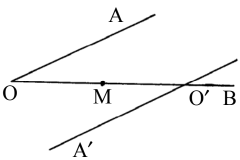
Чтобы высота лежала на прямой, необходимо, чтобы основание треугольника было перпендикулярно данной прямой. Таким образом, если прямая будет не между окружностей, то решений не будет. Отразим одну окружность относительно прямой. Если окружность не имеет общих точек, то решений не будет.

Допустим, они пересеклись в некоторой точке A.

Опустим из нее перпендикуляр h на прямую. Затем их этой же точки опустим наклонную к нашей прямой длиной 2h. Получим точку B удлинив AH в два раза. Получим C.

Δ ABC – искомый.

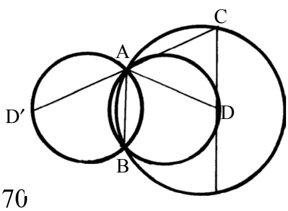
№ 1298.



Построим прямую O′A′ симметричную прямой OA относительно точки M. Она пересечет прямую OB в точке O′ такой, что O′M=OM.

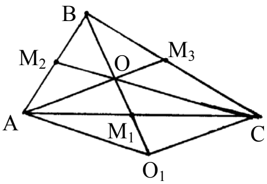
O′M — искомый отрезок.

№ 1299.



Построим окружность симметричную относительно прямой AB, затем проводим линии, параллельные прямой AB до тех пор, пока не найдем такую прямую, что AC=AD (BC=BD) (D и C – точки пересечения прямой с окружностями). Затем точку D отображаем относительно прямой AB в точку D′ на исходной окружности. Отрезок D′C – искомый.

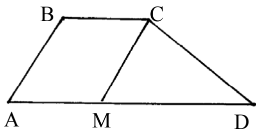
№ 1300.



Построим ΔAOO_1 по трем сторонам ($AO=\frac{2}{3}AM_3$; $AO_1=\frac{2}{3}CM_2$; $OO_1=\frac{2}{3}M_1B$). Затем проведем медиану AM_1 ($OM_1=M_1O_1=$ $=\frac{1}{3}BM_1$) и продлим ее до точки C ($CM_1=M_1A$), затем продлим сторону OM_1 до точки B ($BO=2OM_1$), затем соединим вершины A, B и C. ΔABC — искомый.

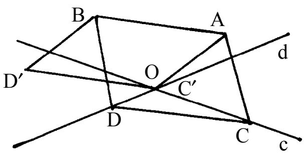
№ 1301.

Построим ΔMCD по трем сторонам ($MC=AB$), затем продлим MD



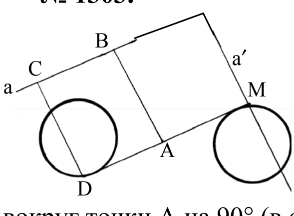
на вектор $\overrightarrow{CB}$. Получим точку A. Затем, построив окружность с радиусом AB из точки A и с радиусом BC из точки C, отметим точку B (точка их пересечения находится в верхней полуплоскости от прямой AC). ABCD — искомая трапеция.

№ 1302.



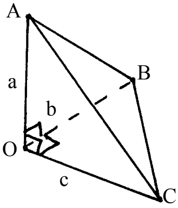
Перенесем точку C′ (точку пересечения прямых c и d) на вектор $\overrightarrow{AB}$. $C' \to D'$. Затем путем параллельного переноса отрезка D′C′ вдоль прямой c находим точку D. ABCD – искомый параллелограмм.

№ 1303.



Отобразим прямую $a \to a'$ путем поворота вокруг точки A на 90°. Затем путем симметрии отобразим окружность относительно точки A. Найдем точку пересечения M новой окружности с прямой a′. Затем путем поворота точки M вокруг точки A на 90° (в обратную сторону) мы получим точку B на прямой a. После точку M путем центральной симметрии отобразим на исходную окружность. Получим точку B. Затем отложим отточки B вектор $\vec{AD}$, таким образом, B→C. ABCD — искомый квадрат.

№ 1304.



Пусть OA=a; OC=c; OB=b. Площадь трех верхних граней равна: $\frac{1}{2}(cb+ba+ac)$, а сумма квадратов этих площадей: $\frac{1}{4}(c^2b^2+b^2a^2+a^2c^2)$.

$AC^2=a^2+c^2$; $AB^2=a^2+b^2$; $CB^2=c^2+b^2$.

По теореме косинусов:

$$a^2+c^2=a^2+b^2+c^2+b^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+b^2)}\cos ABC;$$

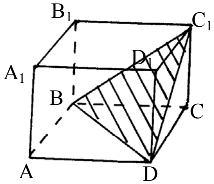
$$\cos ABC=\frac{b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+b^2)}}.$$

$$S=\frac{1}{4}AB^2\cdot BC^2\cdot \sin^2 ABC=\frac{1}{4}(a^2+b^2)(c^2+b^2)\left(1-\frac{b^4}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}\right)=$$

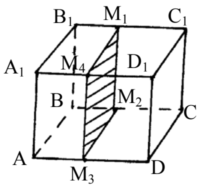
$$=((a^2+b^2)(c^2+b^2)-b^4)\frac{1}{4}=(a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2+b^4-b^4)\frac{1}{4}=\frac{1}{4}(a^2c^2+a^2b^2+b^2c^2),$$

что и требовалось доказать.

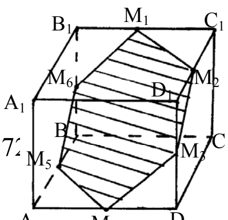
№ 1305.



1) Пусть сторона куба равна a, тогда $DC_1=a\sqrt{2}$ =BD=BC (по теореме Пифагора). Таким образом, BC_1D — правильный треугольник.



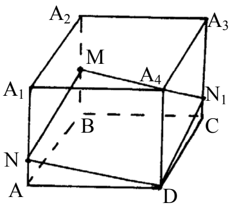
2) $M_1M_2 \| M_3M_4 \| AA_1$;
$M_1M_2=M_3M_4=AA_1$;
$M_1M_4 \| M_2M_3 \| AB$;
$M_1M_4=M_2M_3=AB$.
Таким образом, сечение $M_1M_2M_3M_4$ – квадрат.



3) Проводим сечение плоскостью $M_1M_2M_5$, где $B_1M_1=M_1C_1=C_1M_2=AM_5$.

Таким образом, $M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4=M_4M_5=$
$=M_5M_6$ и это получается правильный шестиугольник.

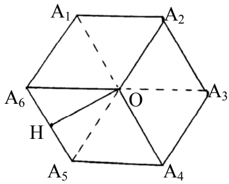
№ 1306.



Пусть паук сидит в точке M (на ребре BB_1), а муха в точке D.
Если развернуть боковую поверхность куба, то кратчайшее расстояние от точки M до точки D будет, очевидно, прямая, которая пересекает ребро AA_1 в точке N, такой, что $AN=\frac{1}{2}BM$.

Таким образом, паук должен идти по прямой до точки N (или N_1), а затем по прямой до точки D.

№ 1307.



Спроецируем куб на плоскость так, чтобы диагональ его была перпендикулярна этой плоскости: $A_3A_6=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}$. Таким образом, сторона шестиугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $OH=\sqrt{\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{16}a^2}=\frac{3}{4}a$. Таким образом, радиус вписанной окружности равен $\frac{3}{4}a$, т.е. в нее можно вписать квадрат стороной $\frac{3\sqrt{2}}{4}a$, что явно больше a. Что и требовалось доказать.

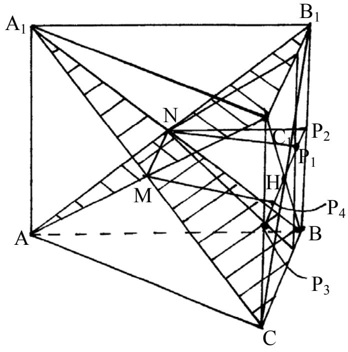
№ 1308.

Пусть AC=a, A_1A=h.

$V_1=V_{MNCC_1DB_1B}$, $\quad V_2=V_{A_1B_1C_1MN}=V_{ABCMN}$, $\quad V_3=V_{AA_1MN}$

Так как все грани составляющие эти фигуры равны между собой:

$V=\frac{1}{2}a\cdot a\sin 60^\circ\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h$; $\quad V_1+V_2=\frac{1}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot ah=\frac{\sqrt{3}}{6}a^2h=\frac{2}{3}V$;



$$V_2+V_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}h\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2h.$$

Таким образом, $V_1-V_3=\frac{1}{3}V$.

Разобьем V_1 на 3 фигуры плоскостями, перпендикулярными основанию и проходящими через точку P_1 (середина HP_2) и P_4 (середина P_3H). Получится две четырех угольных пирамиды (одинакового объема) и треугольная призма.

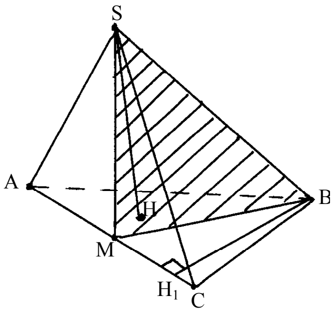
$NP_2=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}a$; $MN=\frac{1}{2}a$ (средние линии); $NP_1=NP_2\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

$$V_{пирамиды}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{4}\cdot h\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}a=\frac{\sqrt{3}}{48}a^2h=\frac{1}{12}V;$$

$$V_{призмы}=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}NP_1\cdot AA_1=\frac{a}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}ah=\frac{\sqrt{3}}{16}a^2h=\frac{1}{4}V;$$

$$V_1=2\frac{1}{12}V+\frac{1}{4}V=\frac{5}{12}V;\ V_3=-\frac{1}{3}V+\frac{5}{12}V=\frac{1}{12}V;\ V_2=\frac{1}{3}V-\frac{1}{12}V=\frac{1}{4}V.$$

№ 1309.

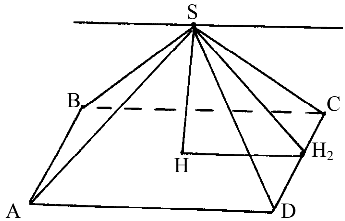


$$V_1=\frac{1}{3}\cdot AM\cdot BH_1\cdot\frac{1}{2}\cdot SH=$$
$$=\frac{1}{6}AM\cdot BH_1\cdot SH_2=$$
$$=\frac{1}{6}MC\cdot BH_1\cdot SH=V_2$$

где V_1 – объем ABMS
V_2 – объем MBCS, таким образом, $V_1=V_2$, что и требовалось доказать.

№ 1310.

Объем будет равен объему цилиндра высотой а и радиусом SH без двух конусов высотой а/2 и радиусом SH.



$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{2SH_2};\qquad SH_2=\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

$HH_2=\dfrac{a}{2}$. Таким образом,

$$SH=\sqrt{\frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1};$$

$$V_ц=\pi\cdot r^2\cdot h=\pi\frac{a^2}{4}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)\cdot a=\frac{\pi a^3}{4}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right);$$

$$2V_к=\frac{2}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{2}{3}\pi\frac{a^2}{4}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)\frac{a}{2}=\frac{\pi a^3}{12}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right);$$

$$V_ц-2V_к=\frac{\pi a^3}{6}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right).$$